Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a VI-a

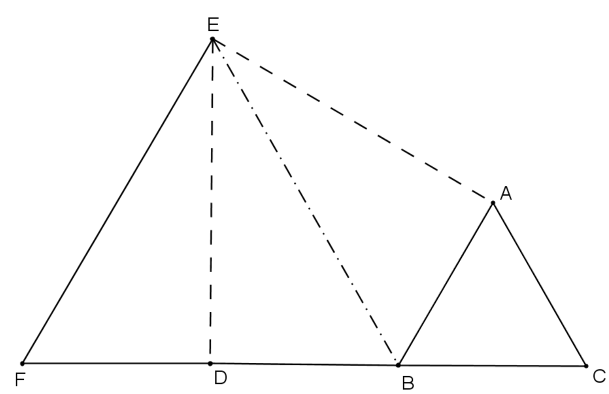
Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctul D pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$, astfel încât $[DB] \equiv [BC]$. Considerăm punctul E în semiplanul determinat de dreapta AD ce nu conţine punctul B, astfel încât distanţa de la E la AB este egală cu EA , distanţa de la E la DC este egală cu ED şi $EA = ED$, iar punctul F astfel ca $D \in (BF)$ şi $[FD] \equiv [BC]$.

a) Demonstraţi că $\Delta FDE \equiv \Delta BAE$.

b) Arătaţi că $[EB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AED}$.

Gazeta Matematică

Soluţie:



a) $[FD] \equiv [AB]$ (ambele sunt congruente cu $[BC]$)
$[DE] \equiv [AE]$ (din ipoteză)
$\widehat{FDE} \equiv \widehat{BAE}$ (fiecare are 90^0) .... **3 p**
Din cele trei relaţii rezultă $\triangle FDE \equiv \triangle BAE$ .... **1 p**
b) $\triangle BAE \equiv \triangle BDE$ conform cazului L.L.L.
Din această congruenţă obţinem $\widehat{AEB} \equiv \widehat{DEB}$ .... **2 p**
De aici concluzia $[EB$ este bisectoarea $\widehat{AED}$ .... **1 p**

Problema 2. Determinaţi câte numere de opt cifre conţin în scrierea lor secvenţa "2013". (un exemplu de astfel de număr este $310\underline{2013}5$)

Soluţie: Numerele pot avea una din formele: (1) $\overline{2013abcd}$, (2) $\overline{a2013bcd}$, (3) $\overline{ab2013cd}$, (4) $\overline{abc2013d}$, (5) $\overline{abcd2013}$ **1p**
Pentru (1) avem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ numere **1p**

Pentru fiecare din cazurile (2), (3), (4) şi (5) avem $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ numere **3p**

Numărul 20132013 apare de două ori; la (1) şi la (5)

Numărul de numere este 45999 .... **2 p**

Problema 3. a) Arătaţi că 30007 este număr compus.

b) Arătaţi că şirul: $37,\ 307,\ 3007, ..., 3\underbrace{00...0}_{de\ n\ ori}7, ...$ conţine o infinitate de termeni care sunt numere compuse.

Soluţie: a) Constatăm că $30007 = 37 \cdot 811$, aşadar 30007 este număr compus. .... **3 p**

b) Arătăm că pentru $n = 3k$ numărul $3\underbrace{00...0}_{de\ 3k\ ori}7$ este compus. Scriem

$3\underbrace{00...0}_{de\ 3k\ ori}7 = 3 \cdot 10^{3k+1} + 7 = 30 \cdot 10^{3k} + 7$ .... **2 p**

$30 \cdot 10^{3k} + 7 = 30 \cdot 1000^k + 7 = 30 \cdot (999 + 1)^k + 7 = 30 \cdot (\mathcal{M}37 + 1) + 7 = \mathcal{M}37 + 37 = \mathcal{M}37$... **2 p**

*Notă: Verificarea unor cazuri particulare (*30000007, 30000000007*) şi afirmaţia că pentru $n = 3k$ obţinem numere compuse se acordă 1 punct.*

Problema 4. Se consideră numărul natural $n,\ n \geq 10$ şi mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 3n\}$. Spunem că mulţimea nevidă $X,\ X \subset A$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă oricare ar fi $x \in X$ şi $y \in X,\ x > y$, numărul $x + y$ nu se divide cu numărul $x - y$.

a) Daţi un exemplu de mulţime X cu proprietate $\mathcal{P}$ care conţine numerele 4 şi 14 şi care are cel puţin trei elemente.

b) Demonstraţi că există cel puţin o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care are exact n elemente.

c) Arătaţi că nu există o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care să aibă n elemente şi să conţină numerele 4 şi 14.

Soluţie: a) Un posibil exemplu este $X = \{4, 14, 9\}$

Verificarea exemplului .... **1 p**

b) Mulţimea X nu poate conţine numere consecutive şi, deasemenea nu poate conţine numere de aceeaşi paritate consecutive **2p**

Prin urmare, diferenţa minimă dintre două numere din X este cel puţin egală cu 3. Dacă diferenţa minimă este 3, mulţimea X are număr maxim de elemente egal cu n. De exemplu $X_1 = \{1, 4, 7, ..., 3n - 2\}$ şi $X_2 = \{2, 5, 8, ..., 3n - 1\}$ verifică cerinţele problemei. (*este suficient un exemplu*) **2 p**

c) Fie Y cu proprietatea $\mathcal{P}$ astfel încât $4 \in Y, 14 \in Y$. Cum $x, y \in Y, x < y$, implică $y - x \geq 3$, rezultă că în Y sunt cel mult$n - 5$ elemente mai mari ca 14 şi cel mult un element mai mic ca 4. Fie $a, b \in Y$ cu $4 < a < b < 14$. Atunci $a \geq 7, b \leq 11$. Dacă $a = 7$ atunci $14 - 7$ ar divide $14 + 4$, fals. Prin urmare între 4 şi 14 există cel mult un element al lui Y. În concluzie Y ar avea cel mult $1 + 2 + 1 + n - 5 = n - 1$ elemente, fals. .... **2 p**