OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a VI-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Resturile împărțirilor unui număr natural *n* la 3, 4 și 5 sunt 1, 2 respectiv 3. Aflați resturile posibile ale împărțirii numărului *n* la 120.

Soluție:

$n:3 = c_1, rest\ 1 \Rightarrow n = 3c_1 + 1$

$n:4 = c_2, rest\ 2 \Rightarrow n = 4c_1 + 2$
$n:5 = c_1, rest\ 3 \Rightarrow n = 5c_1 + 3$ 1p
$n + 2 \in M_{3,4,5}$ 1p
$n + 2 \in M_{60} \Rightarrow n = 60p - 2$ 1p
p=*par* $\Rightarrow n = 120k - 2 = 120k - 120 + 118 \Rightarrow restul = 118$ 2p
p=*impar* $\Rightarrow n = 120k + 58 \Rightarrow restul = 58$ 2p

SUBIECTUL II

Un număr natural este numit *elevat* dacă suma cifrelor sale este pătrat perfect.

a) Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor de două cifre acesta să fie *elevat?*

b) Aflați restul împărțirii lui *n* la 4, unde *n* este cel mai mic număr *elevat* de 2020 cifre, având cifra unităților egală cu 7.

Soluție:

a) 10,11,...,99 ⇒ 90 numere 1p
$a + b \leq 18$,pătrate perfecte: 1;4;9;16 ....1p

Numere elevate de 2 cifre: 10,13,18,22,27,31,36,40,45,54,63,72,79,81,88,90,97
⇒ 17 numere 1p
$p = \frac{17}{90}$ 1p

b) $n = 100 \ldots 017$ 2p
n:4 dă restul 1 .... 1p

SUBIECTUL III

Fie mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} | a\ are\ exact\ trei\ divizori,\ a < 2020\}$
$B = \{b \in \mathbb{N} | b = x^4 + 2, x \in \mathbb{N}\}$ și C= $\{c \in \mathbb{N} | c\ este\ pătrat\ perfect\}$

a) Aflați cardinalul mulțimii A ;

b) Arătați că *B* și *C* sunt mulțimi disjuncte.

Soluție:

a) Exact 3 divizori rezultă pătrat perfect al unui număr prim 1p
Numerele prime al căror pătrat este mai mic decât 2020:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43 rezultă 14 numere 1p
cardA=14 .... 1p

b) $U(x^4) \in \{0; 1; 5; 6\}$.. 1p
$\Rightarrow U(x^4 + 2) \in \{2; 3; 7; 8\}$..1p
$\Rightarrow b\ nu\ e\ pătrat\ perfect$ 1p
$\Rightarrow B \cap C = \phi$ 1p

SUBIECTUL IV

Fie punctul $B \in int(\sphericalangle AOC)$. Dacă $[OD, [OE, [OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle AOC,$ respectiv $\sphericalangle BOC$, arătați că:

a) $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle EOD)$

b) $2m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle AOB)$

c) Unghiurile $\sphericalangle POE$ și $\sphericalangle COD$ au aceeași bisectoare.

Soluție:

a) $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle DOB) = a$ și $m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle POC) = b \Rightarrow$
$m(\sphericalangle AOC) = 2a + 2b, m(\sphericalangle BOC) = 2b, m(\sphericalangle AOB) = 2a$
$m(\sphericalangle AOE) = a + b \Rightarrow$ 1p

$m(\sphericalangle EOD) = m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle AOD) = a + b - a = b \Rightarrow$ 1p
$m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle EOD)$ 1p

b) $m(\sphericalangle AOE)$= $m(\sphericalangle EOC) = a + b$
$m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle EOC) - m(\sphericalangle POC) = a + b - b = a \Rightarrow$......................1p
$2m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle AOB)$..1p

c) (OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle POE \Rightarrow m(\sphericalangle POM) = m(\sphericalangle MOE) = \frac{a}{2}$
$m(\sphericalangle COM) = m(\sphericalangle COP)$+ $m(\sphericalangle POM) = b + m(\sphericalangle POM) = b + \frac{a}{2}$ 1p
$m(\sphericalangle MOD) = m(\sphericalangle POD) - m(\sphericalangle POM) = a + b - m(\sphericalangle POM) = a + b - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + b$ $\Rightarrow$(OM este și bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$ 1p