

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapa locală****08.02.2020****Clasa a VI-a**

1. a) Arătați că numărul $n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2020} + \frac{2}{2021}$ este număr natural.

b) Aflați cifrele nenule a și b pentru care $\frac{\overline{0,a(b)}}{\overline{0,b(a)}} = \frac{a+1}{b+1}$.

2. a) Fie $A = \{n \in \mathbb{N} | 2^{36} < n < 3^{24}\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} | 2^{48} < n < 3^{32}\}$. Care dintre mulțimile A și B are cardinalul mai mare? (Numărul de elemente al unei mulțimi X reprezintă cardinalul mulțimii X .)

b) Considerăm mulțimile X și Y . Care este cea mai mică sumă a elementelor mulțimii X , dacă sunt satisfăcute următoarele condiții?

i) $X \cap Y = \emptyset$;

ii) $X \cup Y = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$;

iii) dacă $a + 1 \in X$, atunci $a \in Y$;

iv) $\text{card } X \geq 3$ ($\text{card } X$ reprezintă numărul elementelor mulțimii X).

3. Fie A, B, C, D, E și F șase puncte coliniare (în această ordine) și un punct $O, O \notin AB$. Arătați că:

a) dacă $2AC = AB + AD$ și $2CF = AF + EF$, atunci $AB \equiv DE$;

b) dacă $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, iar $[OC$ și $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE$, atunci $5 \cdot (\sphericalangle COD) = \sphericalangle AOF$.

4. În interiorul unghiului COD se duc semidreptele $(OA$ și $(OB$ astfel încât $(OA \subset \text{Int}(\sphericalangle COB)$ și $OB \subset \text{Int}(\sphericalangle AOD)$. Dacă unghiurile AOB și COD sunt complementare, $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor COA respectiv BOD , se cere :

a) Arătați că măsura unghiului MON este aceeași, pentru orice unghiuri AOB și COD ce îndeplinesc condițiile ipotezei.

b) Dacă $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle BOA$ și $\sphericalangle DON$ sunt invers proporționale cu numerele 0,25; 0,2 și respectiv 0,1(6), aflați măsura unghiului AOB .

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 2 ore.

Soluții și bareme de corectare orientative

Clasa a VI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) $n = \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{2019 \cdot 2020}{2}} + \frac{1}{1010} = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2020 \cdot 2021} + \frac{2}{2021} =$
 $= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021} \right) = 1 \in \mathbb{N}.$ (3p)

b) Condiția din enunț revine la $\overline{a, (b)} \cdot (b+1) = \overline{b, (a)} \cdot (a+1)$, adică la
 $\left(a + \frac{b}{9}\right) \cdot (b+1) = \left(b + \frac{a}{9}\right) \cdot (a+1)$, deci $(9a+b) \cdot (b+1) = (9b+a) \cdot (a+1)$,
sau la $\frac{9a+b}{9b+a} = \frac{a+1}{b+1}$. (2p)

Folosind proporțiile derivate, deducem că:
 $\frac{(9a+b)-(9b+a)}{9b+a} = \frac{(a+1)-(b+1)}{b+1}$, adică $\frac{8(a-b)}{9b+a} = \frac{a-b}{b+1}$ (*). Se vede că orice pereche de cifre identice
($a = b$) satisface relația. (1p)

Dacă $a \neq b$, relația (*) se mai scrie $\frac{8}{9b+a} = \frac{1}{b+1}$, adică
 $8b+8 = 9b+a$, deci $a+b=8$. Obținem, pe lângă perechile deja găsite, soluțiile:
 $a=1, b=7$; $a=2, b=6$; $a=3, b=5$; $a=5, b=3$; $a=6, b=2$ și $a=7, b=1$. (1p)

2. a) A are $3^{24} - 2^{36} - 1$ elemente, iar B are $3^{32} - 2^{48} - 1$ elemente. (1p)

Arătăm că B are cardinalul mai mare, adică $3^{32} - 2^{48} > 3^{24} - 2^{36}$. Această inegalitate se
scrie echivalent

$3^{32} - 3^{24} > 2^{48} - 2^{36}$, sau $3^{24}(3^8 - 1) > 2^{36}(2^{12} - 1)$. (2p)

Această inegalitate rezultă din înmulțirea inegalităților

$3^{24} = 9^{12} > 8^{12} = 2^{36}$ și

$3^8 - 1 = 9^4 - 1 > 8^4 - 1 > 2^{12} - 1 > 0$. (1p)

b) $8 \notin X \Rightarrow 8 \in Y$. Pentru ca suma elementelor lui X să fie cel mai mic număr trebuie să
avem că $9 \in X$. (1p)

Cum X are cel puțin 3 elemente, rezultă celelalte 2 numere din X sunt 11 și 13. Deci,
 $X = \{9, 11, 13\}$ și $Y = \{8, 10, 12, 14\}$. (2p)

3. a) Avem $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(AB + BC) = AB + (AB + BC + CD) \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC = CD$. (2p)

Dar $2CF = AF + EF \Leftrightarrow 2(CD + DE + EF) = AB + BC + CD + DE + EF + EF$
 $\Rightarrow DE = AB \Rightarrow AB \equiv DE$. (2p)

b) Din $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$. (1p)

Din $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF \Rightarrow \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle EOF$. (1p)

Deoarece $[OC]$ și $[OD]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE \Rightarrow$
 $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOF \Rightarrow 5 \cdot (\sphericalangle COD) = \sphericalangle AOF$. (1p)

4. a) Notăm $\sphericalangle COM = \sphericalangle MOA = a$, $\sphericalangle AOB = z$ și $\sphericalangle BON = \sphericalangle DON = b$.

Din ipoteză avem $\sphericalangle COD + \sphericalangle AOB = (2a + z + 2b) + z = 90^\circ$, (2p)

de unde obținem $a + b + z = \sphericalangle MON = 45^\circ = \text{constantă}$. (2p)

b) $2a, z$ și b sunt invers proporționale cu $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ și $\frac{1}{6}$, $a + z + b = 45^\circ$, deci

$\frac{2a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$. Se obține $\sphericalangle AOB = \frac{225^\circ}{13}$ (3p)

