Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 7-a

Problema 1. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \dfrac{a}{\overline{ba}} + \dfrac{b}{\overline{ab}} \;\middle|\; a, b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}$.
a) Arătaţi că mulţimea M nu conţine niciun număr natural.
b) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare element din mulţimea M.

Soluţie. a) $0 < \dfrac{a}{\overline{ba}} + \dfrac{b}{\overline{ab}} = \dfrac{a}{10b+a} + \dfrac{b}{10a+b} < \dfrac{a}{b+a} + \dfrac{b}{a+b} = 1$, deci M nu conţine niciun număr natural **2p**

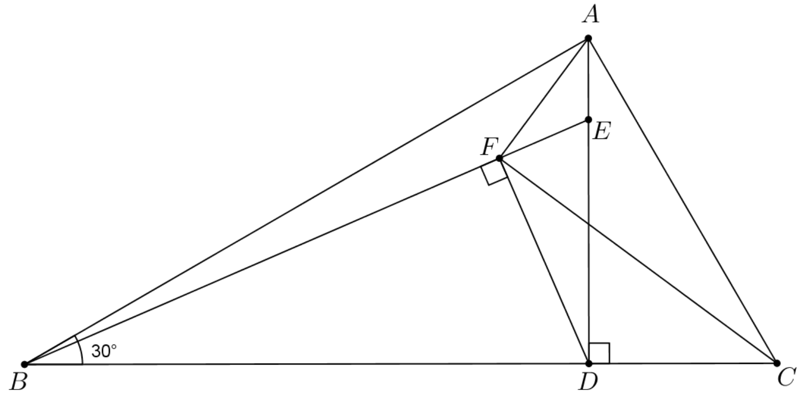
b) $\dfrac{a}{\overline{ba}} + \dfrac{b}{\overline{ab}} = \dfrac{10\left(a^2+b^2\right)+2ab}{10\left(a^2+b^2\right)+101ab} = 1 - \dfrac{99ab}{10\left(a^2+b^2\right)+101ab} = 1 - \dfrac{99}{101 + 10\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)}$ **2p**

Întrucât unul dintre numerele $\dfrac{a}{b}$ şi $\dfrac{b}{a}$ este mai mare sau egal cu 1, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b$. Notând $p = \dfrac{a}{b}$, problema revine la a determina valorile extreme ale sumei $p + \dfrac{1}{p}$, unde $p \geq 1$.

Deoarece $p + \dfrac{1}{p} \geq 2$, cu egalitate pentru $p = 1$ (adică $a = b$), rezultă că $\min M = 1 - \dfrac{99}{101 + 10 \cdot 2} = \dfrac{2}{11}$ **1p**

Considerând $p > q \geq 1$, avem $\left(p + \dfrac{1}{p}\right) - \left(q + \dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{(p-q)(pq-1)}{pq} > 0$, deci $p + \dfrac{1}{p} > q + \dfrac{1}{q}$. Ca urmare, maximul sumei $p + \dfrac{1}{p}$ se atinge dacă p este maxim, ceea ce se obţine când $a = 9$, $b = 1$, pentru care $\max M = 1 - \dfrac{99}{101 + 10\left(9 + \dfrac{1}{9}\right)} = \dfrac{838}{1729}$ **2p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, iar D este piciorul înălţimii din A. Fie punctul $E \in (AD)$ astfel încât $DE = 3AE$ şi F piciorul perpendicularei din D pe dreapta BE.
a) Arătaţi că $AF \perp FC$.
b) Determinaţi măsura unghiului AFB.



Soluţie. a) Avem $AC = \frac{1}{2}BC$ şi $CD = \frac{1}{2}AC$, deci $CD = \frac{1}{4}BC$ **1p**

Din $\Delta BDE \sim \Delta DFE$ rezultă $\frac{BD}{DF} = \frac{DE}{FE} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{EF}{FD}$. Cum $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{DE}$, rezultă $\frac{DE}{BD} = \frac{AE}{DC}$, deci $\frac{AE}{CD} = \frac{EF}{DF}$ **2p**

Dar $m\left(\widehat{AEF}\right) = 180^\circ - m\left(\widehat{DEF}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ - m\left(\widehat{ADF}\right)\right) = 90^\circ + m\left(\widehat{ADF}\right) = m\left(\widehat{FDC}\right)$ **1p**

Rezultă că $\Delta AEF \sim \Delta CDF$ (cazul LUL), de unde $\widehat{AFE} \equiv \widehat{CFD}$. Atunci

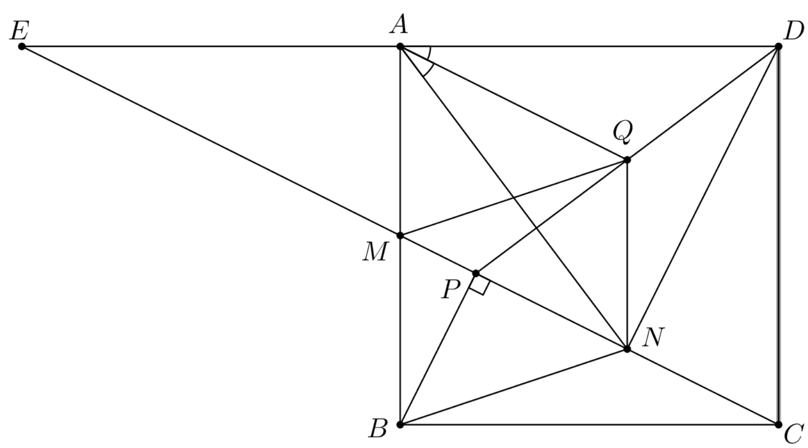
$$m\left(\widehat{AFC}\right) = m\left(\widehat{AFE}\right) + m\left(\widehat{EFC}\right) = m\left(\widehat{CFD}\right) + m\left(\widehat{EFC}\right) = m\left(\widehat{EFD}\right) = 90^\circ,$$

deci $AF \perp FC$ **1p**

b) Deoarece $m\left(\widehat{AFC}\right) = 90^\circ = m\left(\widehat{ADC}\right)$, patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil, deci $m\left(\widehat{DFC}\right) = m\left(\widehat{DAC}\right) = 30^\circ$ **1p**

Atunci $m\left(\widehat{AFB}\right) = 360^\circ - m\left(\widehat{BFD}\right) - m\left(\widehat{DFC}\right) - m\left(\widehat{CFA}\right) = 150^\circ$ **1p**

Problema 3. În pătratul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii $[AB]$, cu P proiecţia punctului B pe dreapta CM şi cu N mijlocul segmentului $[CP]$. Bisectoarea unghiului DAN intersectează dreapta DP în punctul Q. Arătaţi că patrulaterul $BMQN$ este paralelogram.



Soluţie. $\Delta BMC \sim \Delta PBC \Rightarrow \frac{BM}{PB} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow CP = 2BP \Rightarrow [BP] \equiv [PN] \equiv [NC]$ ... **1p**

$\Delta NCD \equiv \Delta PBC$ (LUL) $\Rightarrow \widehat{DNC} \equiv \widehat{BPC} \Rightarrow DN \perp CP$, deci $[DN]$ este înălţime şi mediană în triunghiul DPC. Ca urmare, triunghiul DPC este isoscel, cu $[DP] \equiv [DC]$ **1p**

Notând cu E intersecţia dreptelor CM şi AD, rezultă că A este mijlocul lui $[DE]$, deci $[NA]$ este mediană în triunghiul dreptunghic NDE. Obţinem $[NA] \equiv [AD]$, deci triunghiul ADN este isoscel. Cum AQ este bisectoare, ea este şi înălţime, deci $AQ \perp DN$. Dar $DN \perp CM$, deci $AQ \parallel MN$ (1) **2p**

Deoarece triunghiurile ANE şi DPC sunt isoscele, rezultă

$$m\left(\widehat{ANP}\right)+m\left(\widehat{DPN}\right)=m\left(\widehat{DEC}\right)+m\left(\widehat{DCE}\right)=90^\circ,$$

de unde obţinem $DP \perp AN$. Cum $AQ \perp DN$, rezultă că Q este ortocentrul trunghiului ADN, deci $NQ \perp AD$. **2p**

Ca urmare, $NQ \parallel AM$, iar din (1) rezultă că $AMNQ$ este paralelogram. Segmentele $[AM]$ şi $[NQ]$ sunt paralele şi congruente, deci $[BM]$ şi $[NQ]$ sunt paralele şi congruente, adică $BMQN$ este paralelogram **1p**

Problema 4. Determinaţi numerele prime scrise cu $n \geq 3$ cifre care au proprietatea că, pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$, prin eliminarea oricăror k cifre ale sale se obţine un număr prim.

Soluţie. Vom arăta că soluţiile problemei sunt 113, 131, 137, 173, 179, 197, 311, 317, 431, 617 şi 719. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ un număr ca în enunţ. Au loc următoarele afirmaţii:

A1: N conţine cel mult o cifră multiplu de 3, deoarece dacă ar conţine cel puţin două, eliminând celelalte cifre, s-ar obţine un număr compus (multiplu de 3). La fel, N nu poate avea trei cifre care dau resturi identice la împărţirea cu 3, deoarece numărul format prin eliminarea celorlalte cifre ar fi multiplu de 3 .... **1p**

A2: N are exact trei cifre. Într-adevăr, presupunând că N are 4 cifre sau mai multe, atunci trei dintre cifrele sale dau resturile 1 sau 2 la împărţirea cu 3, şi, ţinând cont de (A1), două dintre cifre dau resturi diferite (1 şi 2) la împărţirea cu 3, iar numărul format cu aceste cifre este divizibil cu 3, contradicţie **1p**

A3: N are cel mult o cifră pară, iar aceasta poate fi doar a_n, deoarece, în caz contrar, eliminând toate cifrele aflate la dreapta cifrei pare, se obţine un număr compus (par) **1p**

A4: N nu poate conţine cifra 5. Evident, N nu ar putea avea decât cel mult o cifră egală cu 5, iar aceasta ar putea fi doar a_n, iar din (A3) rezultă că N nu are cifre pare. Cum N conţine cel mult o cifră dintre 3 şi 9, N are cel puţin una dintre cifrele 1 şi 7. Prin eliminări convenabile, se poate obţine un număr format cu cifrele 5 şi 1 sau cu 5 şi 7, care nu este prim **1p**

Dacă N este format cu trei cifre impare, atunci N are trei cifre din mulţimea $\{1, 3, 7, 9\}$, dintre care una este 3 sau 9, iar celelalte două sunt din mulţimea $\{1, 7\}$. Verificând combinaţiile şi condiţiile enunţului, obţinem soluţiile: 113, 131, 137, 173, 179, 197, 311, 317, 719 .... **2p**

Dacă N are prima cifră pară, atunci, ţinând cont de (A1) şi (A4), aceasta nu poate fi egală cu 2 sau cu 8, deoarece N ar trebui să mai aibă cel puţin o cifră egală cu 1 sau cu 7, iar prin eliminări convenabile, se obţine un multiplu de 3. Dacă prima cifră este 6, celelalte două cifre sunt din mulţimea $\{1, 7\}$, iar dacă prima cifră este 4, una dintre celelalte două cifre este 1 sau 7, iar cealaltă este 3 sau 9. Se obţin soluţiile 617 şi 431 .... **1p**