

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2020

BAREM Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7p)

Fie numerele $a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$ și

$$b = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{(5-3\sqrt{2})^{2019}} \cdot \frac{(10-6\sqrt{2})^{2020}}{2^{2018}}. \text{ Arătați că numerele } a \text{ și } b \text{ sunt raționale.}$$

Soluție:

$$a = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} - \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \dots \dots \dots 1p$$

$$a = -1 + \frac{1}{\sqrt{2025}} = -1 + \frac{1}{45} = -\frac{44}{45} \in \mathbb{Q} \dots \dots \dots 3p$$

$$b = \frac{360}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{(5-3\sqrt{2})^{2019}} \cdot \frac{2^{2020}(5-3\sqrt{2})^{2020}}{2^{2018}} \dots \dots \dots 1p$$

$$b = 60\sqrt{2} + 5 \cdot 2^2 \cdot (5-3\sqrt{2}) = 100 \in \mathbb{Q} \dots \dots \dots 2p$$

SUBIECTUL II (7p)

a) Arătați că există cel puțin o pereche de numere naturale (x, y) astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{3} - 673\right)\left(\frac{y}{3} - 673\right)} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019} \Rightarrow x = \frac{2019y}{y-2019} \in \mathbb{N} \dots \dots \dots 2p$$

Obținerea unei soluții particulare $\dots \dots \dots 1p$

Observații:

$$1. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 / \cdot \frac{1}{2019} \Rightarrow \frac{1}{4038} + \frac{1}{4038} = \frac{1}{2019} \text{ sau } \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 / \cdot \frac{1}{2019} \Rightarrow \frac{1}{8076} + \frac{1}{2692} = \frac{1}{2019}$$

2. Ecuația are 9 soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

(2020; 2019-2020), (2022; 2019-674), (2028; 673-676), (2692; 8076), (4038, 4038),
(8076; 2692), (673-676, 2028), (2019-674, 2022), (2019-2020, 2020).

$$b) \frac{x}{3} - 673 = \frac{2019y}{y-2019} \cdot \frac{1}{3} - 673 = \frac{673 \cdot 2019}{y-2019} \dots \dots \dots 2p$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{3} - 673\right)\left(\frac{y}{3} - 673\right)} = \sqrt{\frac{673 \cdot 2019}{y-2019} \cdot \frac{y-2019}{3}} = \sqrt{673^2} = 673 \in \mathbb{N} \dots \dots \dots 2p$$

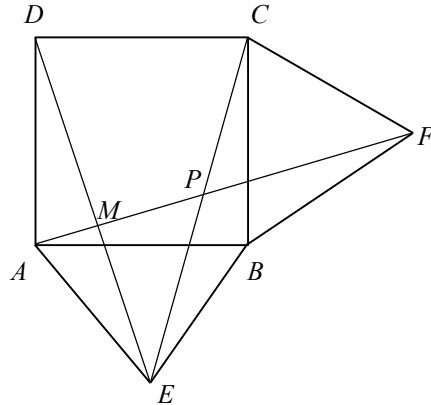
SUBIECTUL III (7p)

În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF .

a) Demonstrați că dreptele AF și DE sunt perpendiculare.

b) Dacă $AF \cap CE = \{P\}$, arătați că B , P și D sunt puncte coliniare.

Soluție:



a) Fie $AF \cap DE = \{M\}$.

Triunghiurile ADE și BAF sunt isoscele având unghiurile de la bază de 15° 2p

$\angle DAM = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \Rightarrow \angle AMD = 180^\circ - 15^\circ - 75^\circ = 90^\circ \Rightarrow AF \perp DE$ 2p

b) Triunghiul BCE este isoscel având la bază unghiuri de 15° 1p

$\angle PAC = \angle PCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle PAC$ isoscel cu baza $AC \Rightarrow P$ se află pe mediatoarea segmentului AC 1p

B, P, D sunt coliniare deoarece se află pe mediatoarea segmentului AC 1p

SUBIECTUL IV (7p)

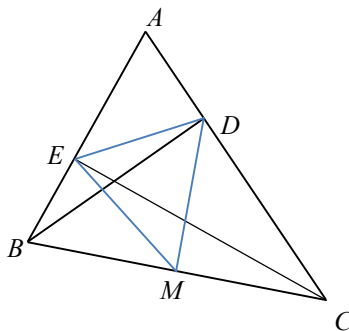
În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $m(\angle A) = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC$, $D \in (AC)$,

$CE \perp AB$, $E \in (AB)$ și M mijlocul laturii BC .

Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Gazeta matematică

Soluție:



DM și EM sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei în triunghiurile dreptunghice EBC și DBC 1p

$DM = EM = BM = CM$ deci triunghiul DME este isoscel 1p

Triunghiul MEB este isoscel cu baza BE și $\angle EMB = 180^\circ - 2 \cdot \angle ABC$ 1p

Triunghiul MDC este isoscel cu baza DC și $\angle DMC = 180^\circ - 2 \cdot \angle ACB$ 1p

$\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$ 1p

$\angle DME = 180^\circ - \angle EMB - \angle DMC = 60^\circ$ 1p

Triunghiul DME este isoscel cu un unghi de $60^\circ \Rightarrow DME$ triunghi echilateral 1p