Ministerul Educației Naționale — SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA — INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019
CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor Traian Preda

a) Arătați că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021}$ este număr irațional
b) Aflați cel mai mare număr întreg negativ *x* cu proprietatea că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021 + x} \in \boldsymbol{Q}$
c) Aflați cel mai mic număr natural *n* cu proprietatea că $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021 + n} \in \boldsymbol{Q}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $2020 \cdot 2021+2020+2021=2021^2+2020$	1p
$2021^2 < 2021^2+2020 < 2022^2 \Rightarrow 2021^2+2020$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow$ $\sqrt{2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$	2p
b) $x = -2020$	2p
c) $2021^2+2020+n=2022^2 \Rightarrow n=2023$	2p

Obs.: La subpunctul a) se poate folosi și faptul că $2020 \cdot 2021 + 2020 + 2021$ este $M_3 + 2$

Enunţ subiect 2, autor Vasile Scurtu, Bistrița, G.M. nr. 12/2019

Fie *AB* un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Prin punctul *P*, mijlocul lui [*OA*], construim perpendiculara pe *AB* care intersectează cercul în *C* și *D*. Tangenta în *C* la cerc intersectează dreapta *AB* în *M*. Arătați că *A* este mijlocul segmentului [*OM*].

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
MC tangentă la cerc în $C \Rightarrow MC \perp OC \Rightarrow \sphericalangle MCO = 90^o$	1p
CP înălțime și mediană în $\Delta ACO \Rightarrow \Delta ACO$ isoscel de bază $[AO] \Rightarrow AC = OC$	1p
$AO = OC$ (raze) și $AC = OC \Rightarrow \Delta ACO$ echilateral $\Rightarrow AC = AO$ și	2p
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AOC = 60^o \Rightarrow \sphericalangle AMC = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o \\ \sphericalangle ACO = 60^o \Rightarrow \sphericalangle ACM = 90^o - 60^o = 30^o\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC$ isoscel $\Rightarrow$	2p
$\left.\begin{array}{l}AM = AC \\ AC = AO\end{array}\right\} \Rightarrow AM = AO \Rightarrow A$ este mijlocul segmentului $[OM]$	1p

Enunţ subiect 3, autor Bogdan Georgescu

a) Există numere naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = 2020$?
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 2020$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(\overline{ab} - \overline{cd})(\overline{ab} + \overline{cd}) = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$	1p
Cum $\overline{ab} - \overline{cd}$ și $\overline{ab} + \overline{cd}$ au aceeași paritate $\Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd} = 2$ și $\overline{ab} + \overline{cd} = 1010$ sau $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$ și $\overline{ab} + \overline{cd} = 202$	1p
care nu au soluții numere naturale de două cifre $\Rightarrow$ numerele nu există	1p
b) Un pătrat perfect este M_4 sau $M_4 + 1, 2020 = M_4 \Rightarrow$ și $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ sunt pare $\Rightarrow$	1p
$\overline{ab} = 2k, \overline{cd} = 2p \Rightarrow k^2 + p^2 = 505$, simetrică $\Rightarrow$ fie $5 \leq p < 16 \leq k \leq 22$	1p
cu soluțiile $21^2 + 8^2 = 505$ și $19^2 + 12^2 = 505 \Rightarrow$ $\overline{abcd} \in \{4216, 1642, 3824, 2438\}$	2p

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, BD și CE înălțimile sale, unde $D \in (AC)$ și $E \in (AB)$.
Bisectoarea $\sphericalangle ABD$ intersectează dreptele CE și AC în punctele M, respectiv P,
iar bisectoarea $\sphericalangle ACE$ intersectează dreptele BD și AB în punctele N, respectiv Q.
Demonstrați că:

a) $MNPQ$ este romb
b) $MNPQ$ este pătrat dacă și numai dacă $AB=AC$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\sphericalangle PBC = 90^o - \sphericalangle C + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2}$, iar $\sphericalangle QCB = 90^o - \sphericalangle B + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2} \Rightarrow$	1p
$\sphericalangle PBC + \sphericalangle QCB = 180^o - \sphericalangle B - \sphericalangle C + 90^o - \sphericalangle A = 90^o$ Dacă notăm $BP \cap CQ = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle BOC = 90^o \Rightarrow$	1p
BO înălțime și bisectoare în $\Delta BQN \Rightarrow QO = ON$ și, analog, $MO = OP \Rightarrow$	1p
$MNPQ$ paralelogram. Dar $MP \perp QN \Rightarrow MNPQ$ romb	1p
b) M ortocentrul $\Delta BQC \Rightarrow QM \perp BC$ și, analog, $PN \perp BC$	1p
$MNPQ$ pătrat $\Leftrightarrow \sphericalangle MQN = 45^o \Leftrightarrow \sphericalangle BCQ = 45^o \Leftrightarrow 90^o - \sphericalangle B + \frac{90^o - \sphericalangle A}{2} = 45^o$	1p
$\Leftrightarrow 180^o = 2 \cdot \sphericalangle B + \sphericalangle A \Leftrightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle B + \sphericalangle A \Leftrightarrow \sphericalangle C = \sphericalangle B \Leftrightarrow AB = AC$	1p