Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 9-a, SOLUŢII ŞI BAREME

Varianta 2

Problema 1. Determinaţi funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x+y)}$ este un număr natural nenul, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Luând $x = y = 0$ rezultă $\dfrac{2f(0)}{1+f(0)} \in \mathbb{N}^*$, deci $f(0) \neq 0$. Dar $f(0)$ şi $1 + f(0)$ sunt relative prime, deci $1 + f(0)$ divide pe 2, adică $f(0) = 1$ **1p**

Să arătăm că $\dfrac{f(x)+f(1)}{1+f(x+1)} = 1$ pentru orice $x \geq 1$ (*) **1p**

Într-adevăr, în caz contrar am avea $\dfrac{f(x)+f(1)}{1+f(x+1)} \geq 2$ pentru un anumit $x \in \mathbb{N}^*$ şi atunci $f(x) + f(1) \geq 2 + 2f(x + 1) \geq 2 + 2(f(x) + 1)$, de unde $f(x) \leq f(1) - 4$, în contradicţie cu monotonia lui f **2p**

Din (*) rezultă $f(x + 1) = f(x) + f(1) - 1$ pentru orice $x \geq 1$, de unde obţinem $f(n) = nf(1) - n + 1, \forall n, \in \mathbb{N}^*$, relaţie care este valabilă şi pentru $n = 0$ **2p**

Obţinem astfel funcţiile de forma $f(n) = an+1$, unde $a = f(1)-1 \in \mathbb{N}^*$, care verifică proprietăţile din enunţ **1p**

Problema 2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $m(\angle A) = 90°$ şi punctele D şi E pe cateta (AB) astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$. Arătaţi că dacă $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CM}$ atunci $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AM}$.

Soluţie. Relaţia $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CM}$ arată că M este mijlocul segmentului $[DE]$. Cum $M \in (AB)$, trebuie să demonstrăm că $AB = 4AM$ **1p**

Alegând convenabil unitatea de măsură, fie $AD = 2, DE = 3$ şi $AC = 2x$. Cu teorema bisectoarei în triunghiul ACE, obţinem $CE = 3x$. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile ACE, apoi ACD, găsim $x = \sqrt{5}$ şi $CD = 2\sqrt{6}$....................... **2p**

Folosind teorema bisectoarei în triunghiul CDB şi teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, avem că $\frac{3}{BE} = \frac{2\sqrt{6}}{BC}$, respectiv $BC^2 = (5+BE)^2+(2\sqrt{5})^2$. Înlocuind $BC = \frac{2\sqrt{6}}{3}BE$ în cea de-a doua relaţie, obţinem că $BE = 9$.. **3p**

Deducem că $AB = 14, AM = AD + \frac{1}{2}DE = \frac{7}{2}$, prin urmare $AB = 4AM$ **1p**

Problema 3. Fie AD, BE, CF înălţimile triunghiului ABC şi K, L, M ortocentrele triunghiurilor AEF, BFD, respectiv CDE. Notăm cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor DEF, respectiv KLM. Să se arate că $HG_1 = G_1G_2$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

Soluţie. Cum $FK \perp AC$ (FK este înălţime în triunghiul AEF) şi $BE \perp AC$ (BE este înălţime în triunghiul ABC), $FK \parallel HE$ (1)

Analog, $EK \perp AB$ (EK este înălţime în triunghiul AEF) şi $CF \perp AB$ (CF este înălţime în triunghiul ABC), deci $EK \parallel HF$ (2)................................... **3p**

Din (1) şi (2) $FHEK$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{r_F} + \overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_K}$ (3)

Analog, se demonstrează că $FHDL$ şi $DHEM$ sunt paralelograme, deci $\overrightarrow{r_F} + \overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_L}$ (4) şi $\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_M}$ (5) **1p**

Din (3), (4) şi (5) rezultă că $2(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}) = 3\overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_M}$ **1p**

Cum $\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} = 3\overrightarrow{r_{G_1}}$ şi $\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_M} = 3\overrightarrow{r_{G_2}}$, reiese $2\,\overrightarrow{r_{G_1}} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_{G_2}}$ **1p**

Astfel, G_1 este mijlocul segmentului HG_2, de unde $HG_1 = G_1G_2$ **1p**

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}$ considerăm funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x - a)f(x)$. Arătaţi că dacă există o infinitate de valori $a \in \mathbb{Z}$ pentru care funcţiile f_a sunt crescătoare, atunci funcţia f este monotonă.

Soluţie. Dacă funcţia f_a este crescătoare atunci, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, avem $f_a(x_1) \le f_a(x_2)$, adică $a(f(x_2) - f(x_1)) \le x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)$ (*) **2p**

Să presupunem că funcţia f nu este monotonă. Atunci f nu este crescătoare, deci există $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ cu $p_1 < p_2$ şi $f(p_1) > f(p_2)$ şi f nu este descrescătoare, deci există $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ cu $q_1 < q_2$ şi $f(q_1) < f(q_2)$ **2p**

Astfel, dacă f_a este crescătoare, rezultă din (*) că

$$\frac{p_2 f(p_2) - p_1 f(p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} \le a \le \frac{q_2 f(q_2) - q_1 f(q_1)}{f(q_2) - f(q_1)}. \qquad (**)$$

Cum relaţia (**) nu poate fi îndeplinită decât de un număr finit de valori întregi ale lui a, presupunerea că f nu este monotonă contrazice ipoteza **3p**