Analiză matematică cls. a XII a

Metode de integrare

Formula de integrare prin părți. Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval și $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivatele continue. Atunci funcțiile $f' \cdot g$ și $f \cdot g'$ admit primitive și $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$.

Teorema de schimbare de variabi … e, $\varphi : I \to J$ și $f : J \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1) f admite primitiva F pe J; 2) φ este derivabilă pe I.

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite pe I primitiva $F \circ \varphi$.

Putem scrie $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left(\int f(t)\,dt\right) \circ \varphi$.

Practic, pentru a simplifica scrierea, procedăm astfel:

1) facem substituția $t = \varphi(x)$
2) diferențiem formal, adică scriem $dt = \varphi'(x)dx$
3) calculăm primitiva F a funcției f rezultată prin schimbarea de variabilă
4) înlocuim argumentul t cu $\varphi(x)$.

Primitive uzuale (imediate)

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathscr{C} \quad n \in \mathbb{N};$

2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathscr{C} \quad a \neq -1;$

3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathscr{C}$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathscr{C}$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + \mathscr{C}$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + \mathscr{C}$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}x + \mathscr{C}$

8. $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C}$

9. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| + \mathscr{C}$

10. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + \mathscr{C}$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + \mathscr{C}$

12. $\int e^x\,dx = e^x + \mathscr{C}$

Integrarea funcțiilor raționale

O *funcție rațională f*, definită pe un interval *I*, este de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \forall x \in I$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ și $Q(x) \neq 0$ pe *I*.

O funcție rațională se numește *funcție rațională simplă* dacă are una din formele:

1) $f(x) = P(x),\ P \in \mathbb{R}[X]$

2) $f(x)=\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $A, a\in \mathbb{R}$, $n\in \mathbb{N}^*$

3) $f(x)=\dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, $A, B, a, b\in \mathbb{R}$, $\Delta=a^2-4b<0$, $n\in \mathbb{N}^*$

Orice funcție rațională se poate descompune, în mod unic, în sumă de funcții raționale simple.

Integrale definite

Fie $F : I\to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $f: I\to \mathbb{R}$, unde $I=[a; b]$. Se numește *integrală definită (*sau *integrală Riemann)* a funcției f de la a la b numărul real notat și definit prin relația:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \text{ (\textit{formula Leibniz-Newton})}.$$

Formula se mai scrie: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$, unde s-a notat $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$ (citim „$F(x)$ luat de la a la b“).

Proprietăți ale integralelor definite

Fie funcțiile continue $f:[a; b]\to\mathbb{R}$, $g:[a; b]\to\mathbb{R}$.

♦ *Proprietatea de liniaritate a integralei:*

$\forall\ \lambda, \mu\in\mathbb{R}$, $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$.

♦ *Proprietatea de aditivitate a integralei:* $\forall\ c\in[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

♦ *Proprietatea de medie a integralei:* $\exists\ c\in(a, b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$.

♦ *Proprietatea de pozitivitate a integralei:* dacă $f\geqslant 0$ pe $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$.

♦ *Proprietatea de monotonie a integralei:* dacă $f\leqslant g$ pe $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$.

Interpretarea geometrică a integralei definite

Fie numerele reale $a<b$ și funcția continuă pozitivă $f: [a;b]\to\mathbb{R}$. Mulțimea $\Gamma_f=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ se numește *subgrafic* al funcției f.

Dacă funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci șirul

$$\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge la } \int_a^b f(x)dx.$$

Aria subgraficului unei funcții continue pozitive

Pentru o funcție continuă și pozitivă $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ avem aria$(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx$.

Integrarea funcțiilor continue pe porțiuni

Funcția $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ se numește *continuă pe porțiuni* dacă are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate și acestea sunt puncte de discontinuitate de speța întâi.

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continuă pe porțiuni și fie $c_1, c_2, ..., c_p$ punctele de discontinuitate ($c_1 \leqslant c_2 \leqslant ... \leqslant c_p$). Integrala (Riemann) funcției f este $\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{p+1}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)\,dx$, unde $c_0 = a$ și $c_{p+1} = b$, iar $f_i:[c_{i-1};c_i]\to\mathbb{R}, i\in\{1, ..., p\}$ este funcția obținută prin prelungirea prin continuitate a lui f la intervalul $[c_{i-1}; c_i]$.

Formula de integrare prin părți. Presupunem că funcțiile f, $g: I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f', $g': I \to \mathbb{R}$ continue. Fie două numere a, $b \in I$. Atunci: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$.

Formula de schimbare de variabilă. Presupunem că funcția $\varphi: J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă și funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie două numere $\alpha, \beta \in J$. Atunci: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

Aria unei suprafețe mărginită de grafice de funcții

Fie T o suprafață plană mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1° Suprafața T are arie.

2° Există un șir $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de suprafețe poligonale incluse în T și un șir $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ de suprafețe poligonale care includ pe T, astfel încât $\lim_{n\to\infty} S(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(Q_n)$. Valoarea comună a acestor limite este aria suprafeței T (unde $S(P)$ este aria poligonului P).

Fie funcțiile $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ continue. Presupunem că $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. *Suprafața plană delimitată de graficele funcțiilor* f și g pe $[a, b]$ este $\Gamma = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \text{ și } g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\}$. *Aria suprafeței* Γ este $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

Volumul unui corp de rotație

Fie C un corp geometric mărginit. Presupunem că există un șir de corpuri $(C_n)_{n\geqslant 1}$ care au volum și sunt incluse în C, precum și un șir de corpuri (mărginite) $(D_n)_{n\geqslant 1}$ care au volum și includ pe C, astfel încât $\lim_{n\to\infty} V(C_n) = \lim_{n\to\infty} V(D_n)$, unde $V(P)$ este volumul poliedrului P. Atunci, corpul C are volum și volumul său $V(C)$ este valoarea comună a celor două limite.

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Mulțimea $\mathscr{C} = \left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2} \leqslant |f(x)|\right\}$ se numește *corpul de rotație* determinat de funcția f prin rotirea în jurul axei Ox. *Volumul corpului de rotație* $\mathscr{C}$ este $\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Aria unei suprafețe de rotație

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție derivabilă cu derivata continuă.

Mulțimea $\mathscr{S} = \left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2} = f(x),\ x\in[a, b]\right\}$ se numește *suprafața de rotație* determinată de funcția f (sau suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox). *Aria suprafeței de rotație* $\mathscr{S}$ este $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Lungimea graficului

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție oarecare, spunem că *graficul* lui f *are lungime* dacă există și este finită limita $l(f)=\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} l(f,\Delta)$ unde Δ este o diviziune a intervalului $[a;b]$, iar $l(f;\Delta)$ este lungimea liniei poligonale determinată de Δ pe graficul lui f. Această limită se numește *lungimea graficului funcției* f.

Lungimea graficului unei funcții $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivată continuă este $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Centrul de greutate

Dacă avem în plan un sistem finit de puncte materiale $M_i(x_i, y_i)$ în care sunt concentrate masele m_i, $i=\overline{1,n}$, atunci *centrul de greutate* al acestui sistem de puncte materiale este punctul $G(x_G, y_G)$, unde: $x_G=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$, $y_G=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$ iar în centrul de greutate G este concentrată masa $m=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$. Considerăm cazul unei plăci plane omogene (adică de grosime neglijabilă și formată dintr-un material cu densitate constantă).

Fie $\mathscr{E}$ o astfel de placă plană omogenă, mărginită de graficele funcțiilor continue $f, g:[a;b]\to\mathbb{R}$ unde $g(x)>f(x)$, $\forall\, x\in[a;b]$. Centrul de greutate al lui $\mathscr{E}$ este punctul G de coordonate $x_G=\dfrac{\int_a^b x(g(x)-f(x))dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$, $y_G=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$.

Ecuații diferențiale

Înțelegem prin *ecuație diferențială* o ecuație având drept necunoscută o funcție y și în care apare cel puțin una din derivatele acestei funcții. De obicei funcția necunoscută o notăm cu y, iar argumentul acesteia cu x. Dacă derivata de ordin maxim care apare în ecuație este $y^{(n)}$, spunem că *ecuația diferențială are ordinul n*. O ecuație diferențială de ordinul n se poate scrie sub forma: $\varphi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$, unde φ este o funcție de $n+2$ variabile, iar funcțiile $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ sunt funcții de o singură variabilă x definite pe un interval $I\subseteq\mathbb{R}$.

Uneori, mai ales în mecanică și în fizică, argumentul se notează cu t (timp)iar funcția necunoscută cu x, derivatele fiind marcate prin puncte adică $\dot{x}$, $\ddot{x}$ etc.

Fiind dată o ecuație diferențială, numim *soluție particulară* a acesteia oricare dintre funcțiile y care o verifică și numim *soluție generală* a ecuației mulțimea tuturor soluțiilor particulare.

Prin *rezolvarea unei ecuații diferențiale* înțelegem determinarea soluției generale a acesteia.

Uneori, relativ la o ecuație diferențială de ordinul n se cere determinarea unei soluții particulare ce verifică anumite „condiții inițiale“, adică funcția necunoscută și primele sale $n - 1$ derivate iau valori date într-un punct dat; o astfel de cerință se numește *problemă Cauchy*.

Fie I, J două intervale de numere reale.

Vom numi *ecuație diferențială cu variabile separabile* o ecuație care se poate scrie sub forma: $f(y) \cdot y' = g(x)$, unde $g : I \to \mathbb{R}$ și $f : J \to \mathbb{R}$ sunt două funcții continue.

Rezolvarea acestei ecuații se face integrând (trecând la primitive) în ambii membri. Obținem: $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$, $x \in I$ adică o egalitate de tipul $F(y) = G(x) + C, \forall x \in I$, unde F este o primitivă pentru f, G este o primitivă pentru g, iar $C \in \mathbb{R}$.

Ecuații diferențiale liniare de ordinul 1

O *ecuație diferențială de ordinul* 1 se numește „liniară“ dacă este de forma $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$, $x \in I$ unde a, b, c sunt funcții continue definite pe I și $a(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Un caz particular important este acela când $c(x) = 0$, $\forall x \in I$, când ecuația devine: $a(x)y' + b(x)y = 0$, $x \in I$.

Ecuația $a(x)y' + b(x)y = 0$ se numește *ecuația liniară omogenă* asociată ecuației $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$.Această ecuație este o ecuație cu variabile separabile.

Soluția generală a ecuației liniare neomogene se obține dacă adăugăm la soluția generală a ecuației omogene o soluție particulară (fixată) a ecuației neomogene. Scriind simbolic, avem: $y_{\text{neomogenă}} = y_{\text{omogenă}} + y_{\text{particulară}}$.

Ecuații diferențiale liniare de ordinul 2 cu coeficienți constanți

O *ecuație diferențială de ordinul* 2 se numește *liniară cu coeficienți constanți* dacă este de forma: $ay'' + by' + cy + d = 0$, $x \in \mathbb{R}$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Când $d = 0$ ecuația devine: $ay'' + by' + cy = 0$, $x \in \mathbb{R}$ și se numește *ecuație liniară omogenă de ordin 2 cu coeficienți constanți*.

Ca și în cazul ecuațiilor liniare de ordinul 1, se arată că o soluție generală a ecuației neomogene se obține din soluția generală a ecuației omogene, la care adăugăm o soluție particulară (fixată) a ecuației neomogene.

Unei ecuații omogene îi asociem ecuația algebrică de gradul 2 cu necunoscuta r: $ar^2 + br + c = 0$ numită *ecuația caracteristică asociată*.

I) Dacă ecuația caracteristică are rădăcinile reale distincte $r_1 \neq r_2$ (cazul $\Delta > 0$), atunci soluția generală a ecuației date este: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

II) Dacă ecuația caracteristică are rădăcina reală dublă r (cazul $\Delta = 0$), atunci soluția generală a ecuației date este: $y = C_1 e^{rx} + xC_2 e^{rx}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

III) Dacă ecuația caracteristică are rădăcinile complexe conjugate (nereale) $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) (cazul $\Delta < 0$), atunci soluția generală a ecuației date este:
$y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.