Funcții derivabile

Fie $f: D \to R$ o functie si $x_0 \in D \cap D'$; atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$

2) $\forall (x_n)_n \subset D \setminus \{x_0\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$

Daca $f'(x_0) \in R$ spunem ca *functia f este derivabila in* x_0 *si* $f'(x_0)$ este derivata sa in x_0.

Daca functia $f: I \to R$ este derivabila in $x_0 \in I$, atunci f este continua in x_0.

Derivate laterale

O functie $f: D \to R$ *are derivate la stanga in* x_0 ,punct de acumulare al multimii $(-\infty, x_0)$ daca exista $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_s'(x_0) \in \overline{R}$.

O functie $f: D \to R$ *are derivate la dreapta in* x_0, punct de acumulare al multimii $(-\infty, x_0)$ daca exista $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0) \in \overline{R}$.

Fie $I \subset R$ un interval , o functie $f: I \to R$ si $x_0 \in I$ un punct interior al lui I. Atunci f are derivata in x_0 daca si numai daca are derivate laterale egale in x_0. In acest caz ,

$f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Operatii cu functii derivabile

Fie functiile $f, g: D \to R$ derivabile in $x_0 \in D \cap D'$.

- Functia $f + g$ este derivabila in x_0 si $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- Functia $c \times f$ este derivabila in x_0 si $(c \times f)'(x_0) = c \times f'(x_0)$.
- Functia $f \times g: D \to R$ este derivabila in x_0 si
  $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$.
- Daca $g(x_0) \neq 0$,functia $\dfrac{f}{g}$ este derivabila in x_0 si
  $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
- Se considera functiile $f: D \to R, g: E \to R, x_0 \in D \cap D', y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Daca f este derivabila in x_0 si g este derivabila in y_0 atunci functia $g \circ f: D \to R$ este derivabila in x_0 si $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

Consecinte. Daca f si g sunt derivabile pe D si $c \in R$, atunci:

- $f + g$ este derivabila pe D si $(f+g)' = f' + g'$:

- $c \times f$ este derivabila pe D si $(c \times f)' = c \times f'$;
- $f \times g$ este derivabila pe D si $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$;
- Daca $g(x) \neq 0, \forall x \in D, \frac{f}{g}$ este derivabila pe D si $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
- Daca $f : D \to E$ si $g : E \to R$ sunt derivabile ,atunci functia compusa $g \circ f : D \to R$ este derivabila si $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x), \forall x \in D.$