1. Aflaţi $\cos^2 x$, ştiind că $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Din formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, rezultă $\cos^2 x = 1 - sin^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

2. Fie vectorii: $\bar{u} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{w} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{u} + a\bar{v} = \bar{w}$. **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) -2; d) 3; e) 2; f) -1.

   Soluţie. Condiţia $\bar{u} + a\bar{v} = \bar{w}$ se rescrie

$$(3\bar{i} - 4\bar{j}) + a(\bar{i} + \bar{j}) = 5\bar{i} - 2\bar{j} \Leftrightarrow (3 + a)\bar{i} + (-4 + a)\bar{j} = 5\bar{i} - 2\bar{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a = 5 \\ -4 + a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

3. Calculaţi aria unui triunghi dreptunghic isoscel de ipotenuză egală cu $\sqrt{2}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Soluţie. Cateta triunghiului este $\ell = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, deci aria este $\mathcal{A} = \frac{\ell^2}{2} = \frac{1}{2}$.

4. Se dau vectorii: $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ şi $\bar{v} = 3\bar{i} + m\bar{j}$. Calculaţi valoarea parametrului real m pentru care $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt perpendiculari. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) -2; d) 1; e) -3; f) 0.

   Soluţie. $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

5. Să se calculeze $E = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\sin 30^\circ}$. **(5 pct.)**

   a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) -1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Deoarece $\cos 90^\circ = 0$, rezultă anularea numărătorului fracţiei, deci $E = 0$.

6. Calculaţi a^4, unde $a = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) i; c) $1 - 4i$; d) $1 + 4i$; e) -1; f) $4 - i$.

   Soluţie. Obţinem $a^2 = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = (\frac{2i}{2})^2 = i^2 = -1$. Deci $a^4 = (a^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

7. Valoarea lui $\sin 120^\circ$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Soluţie. $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Soluţiile ecuaţiei $\sin x + \cos^2 x = 1$ din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sunt: **(5 pct.)**

   a) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$; c) $\left\{0, \frac{\pi}{4}\right\}$; d) $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$; e) $\left\{0, \frac{\pi}{6}\right\}$; f) $\left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$.

   Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ecuaţia se rescrie

$$\sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x(1 - \sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x \in \{0, 1\}.$$

   Deoarece $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obţinem $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. În concluzie, $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

9. Dacă $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$, atunci $\| \bar{u} + 3\bar{v} \|$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{5} - 1$; b) $2 + \sqrt{5}$; c) $1 + \sqrt{5}$; d) $2\sqrt{5}$; e) 2; f) $\sqrt{5}$.

   Soluţie. $\bar{u} + 3\bar{v} = (\bar{i} + \bar{j}) + 3(\bar{i} - \bar{j}) = 4\bar{i} - 2\bar{j}$, deci $||\bar{u} + 3\bar{v}|| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

10. Aflaţi $\operatorname{tg} x$ ştiind că $\sin x - 4\cos x = 0$. **(5 pct.)**

a) -2; b) -1; c) -4; d) 2; e) 1; f) 4.

Soluţie. Avem $\cos x \neq 0$, deci relaţia dată se rescrie $\sin x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 4$.

11. Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = i + i^3 + i^5$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) -1; d) 0; e) -2; f) 2.

Soluţie. Folosind egalitatea $i^2 = -1$, rezultă $z = i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$ şi deci $\operatorname{Re}(z) = 0$.

12. Dacă $z = 1 + i$, atunci valoarea expresiei $E = z \cdot \bar{z}$ este: **(5 pct.)**

a) 1; b) $-i$; c) 0; d) -1; e) i; f) 2.

Soluţie. Avem $E = z\bar{z} = (1+i)(1-i) = 1 + 1 = 2$.

13. Dreapta care trece prin punctele $A(1,3)$, $B(2,4)$ are ecuaţia: **(5 pct.)**

a) $x - y - 1 = 0$; b) $x - y = 0$; c) $x - y + 2 = 0$;
d) $x + y = 0$; e) $x - y - 2 = 0$; f) $x - y + 1 = 0$.

Soluţie. Aplicăm formula ecuaţiei dreptei care trece prin două puncte; ecuaţia dreptei AB este

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Altfel. Aplicăm formula ecuaţiei dreptei care trece prin două puncte sub formă de determinant şi dezvoltând determinantul după lina întâi, rezultă:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Altfel. Ecuaţia dreptei este de forma $ax + by + c = 0$. Condiţia ca A şi B să aparţină acestei drepte conduce la sistemul $\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases}$. Notând $c = t$, obţinem $a = \frac{t}{2}, b = -\frac{t}{2}$. Fixând $t = 2$, rezultă $a = 1, b = -1$, deci ecuaţia dreptei AB este $x - y + 2 = 0$.

14. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$. Aflaţi $\cos A$. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) 1; f) 0.

Soluţie. Avem $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{9 + 25 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$.

15. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1,1)$ la dreapta de ecuaţie $x + y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluţie. Distanţa este $\dfrac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

16. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m, 2)$ aparţine dreptei de ecuaţie $x - y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) 2; b) -2; c) 1; d) -3; e) 3; f) -1.

Soluţie. Înlocuind coordonatele punctului în ecuaţia dreptei, obţinem $m - 2 - 1 = 0$, de unde $m = 3$.

17. Ecuaţiile tangentelor duse din punctul $A(\sqrt{2}, 0)$ la cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ sunt: **(5 pct.)**

a) $y - x + \sqrt{2} = 0,\ y = 0$; b) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ y = 0$; c) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ x = 0$;
d) $y - x + \sqrt{2} = 0,\ x = 0$; e) $x = 0,\ y = 0$; f) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ y - x + \sqrt{2} = 0$.

Soluţie. Ecuaţia cercului se rescrie $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$, deci cercul are centrul $C(0,0)$ şi raza $R = 1$. Ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $A(\sqrt{2}, 0)$ sunt de forma $d:\ y = m(x - \sqrt{2}) \Leftrightarrow mx - y - m\sqrt{2} = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dreapta d este tangentă la cerc dacă distanţa de la C la dreaptă este R. Această condiţie se rescrie

$$\frac{m \cdot 0 - 0 - m\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow -m\sqrt{2} = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m \in \{\pm 1\}.$$

Rezultă că ecuaţiile celor două tangente sunt: $y + x - \sqrt{2} = 0$, $y + x + \sqrt{2} = 0$.

18. Determinaţi aria triunghiului de vârfuri $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$. **(5 pct.)**

a) 4; b) 1; c) $\frac{3}{2}$; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{4}$.

Soluţie. Aria triunghiului ABC este dată de formula $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1$. *Altfel.* Calculăm lungimile laturilor triunghiului,

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \\ AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \\ BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2, \end{cases}$$

deci $AB = AC$ şi triunghiul este isoscel. Dar $AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic isoscel. Catetele triunghiului au aceeaşi lungime, $\ell = \sqrt{2}$, deci aria triunghiului este $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{\ell^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.