1. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{3x+1} = x+1$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{-1,3\}$; b) $\{1,3\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\varnothing$; e) $\{\sqrt{2},2\}$; f) $\{-1,1\}$.

   Soluţie. Existenţa radicalului şi pozitivitatea membrului stâng, care atrage după sine pozitivitatea membrului drept, conduc la condiţiile $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem

   $$3x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\} \subset \left(-\frac{1}{3}, \infty\right),$$

   deci mulţimea soluţiilor este $\{0,1\}$.

   *Altfel.*Se testează succesiv valorile date de fiecare din cele 6 variante. Există o singura mulţime nevidă ale cărei elemente satisfac ambele ecuaţia dată, $\{0,1\}$.

2. Fie $S = 2C_{2014}^1 - C_{2014}^{2013}$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $S = 2013$; b) $S = 2012$; c) $S = 2010$; d) $S = 1012$; e) $S = 2020$; f) $S = 2014$.

   Soluţie. Se observă că $C_{2014}^{2013} = C_{2014}^1 = \frac{2014!}{2013! \cdot 1!} = 2014$, deci $S = C_{2014}^1 = 2014$.

3. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$. Abscisa punctului de extrem al funcţiei f este: **(5 pct.)**

   a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{1}{e^2}$; c) $x = e$; d) $x = e^2$; e) $x = \frac{1}{e}$; f) $x = 1$.

   Soluţie. Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci extremele acesteia sunt printre punctele de anulare a derivatei. Dar $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}$, iar $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tabelul de variatie al funcţiei f este

x	0		1		∞
$f'(x)$	$\vert$	$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

   deci punctul $(1,-1)$ este singurul punct de extrem al funcţiei f (punct de maxim), iar abscisa acestuia este $x = 1$.

4. Fie progresia aritmetică $1, 4, 7, 10, \ldots$. Să se calculeze al 2014-lea termen al progresiei. **(5 pct.)**

   a) 5012; b) 6040; c) 6041; d) 1258; e) 6039; f) 5420.

   Soluţie. Avem $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10$, deci raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 3$. Atunci pentru $n = 2014$, obţinem $a_{2014} = a_1 + (n-1)r = 1 + (2014-1) \cdot 3 = 6040$.

5. Suma soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) $1+\sqrt{2}$; c) 0; d) 2014; e) 5; f) -2.

   Soluţie. Calculăm determinantul, $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - (-1) \cdot x^2$, deci ecuaţia se rescrie $x^2 - 16 = 0$ şi are soluţiile ± 4; suma acestora este $-4 + 4 = 0$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to |R$, $f(x) = 4x + 3$. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > 1\}$. **(5 pct.)**

   a) $A = \mathbb{R}$; b) $A = \varnothing$; c) $A = [-1,\infty)$; d) $A = \{-2\}$; e) $A = (-\frac{1}{2}, \infty)$; f) $A = (-\infty, 0)$.

   Soluţie. Relaţia din definiţia mulţimii A se rescrie $f(x) > 1 \Leftrightarrow 4x + 3 > 1 \Leftrightarrow 4x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, deci $.A = (-\frac{1}{2}, \infty)$

7. Modulul numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}$; f) 1.

   Soluţie. Amplificând fracţia cu conjugata numitorului, obţinem

   $$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \left|\frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2}\right| = \left|\frac{-2i}{2}\right| = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

   Altfel. Folosim relaţia $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, şi obţinem $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$

8. Să se calculeze produsul P al soluţiilor ecuaţiei $3x^2 - 2x - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) $P = 2$; b) $P = 3$; c) $P = 1$; d) $P = \frac{1}{2}$; e) $P = -\frac{1}{3}$; f) $P = -1$.

Soluţie. Folosind a doua (ultima) relaţie Viéte $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ pentru rădăcinile $x_{1,2}$ ale polinomului de gradul doi $ax^2 + bx + c$ pentru cazul nostru $(a = 3, b = -2, c = -1)$, rezultă $x_1x_2 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

Altfel. Rădăcinile ecuaţiei sunt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} = \frac{1 \pm 2}{3},$$

deci $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, iar produsul acestora este $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$.

9. Să se calculeze termenul care nu-l conţine pe x din dezvoltarea $(x + \frac{1}{x})^{10}$. **(5 pct.)**

a) C_{10}^3; b) C_{10}^2; c) $2C_{10}^8$; d) 3; e) C_{10}^1; f) C_{10}^5.

Soluţie. Termenul de ordin $k + 1$ al binomului $(a + b)^n$ este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k = \overline{0, n}$. La noi, $n = 10, a = x, b = \frac{1}{x}$, deci $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{10}^k x^{10-2k}$, şi deci T_{k+1} nu conţine x doar dacă puterea lui x este zero. Rezultă $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$, pentru care obţinem $T_6 = C_{10}^5$.

10. Soluţia ecuaţiei $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 1$ este: **(5 pct.)**

a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = \sqrt{2}$; d) $x = 1$; e) $x = 3$; f) $x = 0$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă ale celor doi logaritmi sunt $\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, deci $x \in (0, \infty)$. Ecuaţia se rescrie $\log_2 \frac{x^2+1}{x} = \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0, \infty)$, deci soluţia căutată este $x = 1$.

11. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{x^2+x+2} = 9$ este: **(5 pct.)**

a) $\{-1, 0\}$; b) $\{-2, 2\}$; c) $\{0, 4\}$; d) $\varnothing$; e) $\{1, 3\}$; f) $\{-1, 1\}$.

Soluţie. Eecuaţia se rescrie

$$3^{x^2+x+2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2+x+2} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}.$$

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $f'(1) = 3e$; b) $f'(1) = 2$; c) $f'(1) = 2 + e$; d) $f'(1) = 0$; e) $f'(1) = e$; f) $f'(1) = e^2$.

Soluţie. Derivata funcţiei f este $f'(x) = 2x + e^x$, deci $f'(1) = 2 + e$.

13. Fie matricea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci A^2 este: **(5 pct.)**

a) $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 31 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 10 \\ 18 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Soluţie. Avem $A^2 = A \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{smallmatrix}\right)$.

14. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 (x^3 + 2x)\mathrm{d}x$. **(5 pct.)**

a) $I = \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{3}{2}$; c) $I = \frac{5}{2}$; d) $I = \frac{7}{2}$; e) $I = \frac{1}{4}$; f) $I = \frac{5}{4}$.

Soluţie. Obţinem $I = \int_0^1 (x^3 + 2x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

15. Fie polinomul $P = 2X^3 + 4X^2 - 5X + a$. Să se determine a astfel încât polinomul P să fie divizibil cu $X - 1$. **(5 pct.)**

a) $a = -3$; b) $a = 3$; c) $a = 0$; d) $a = -1$; e) $a = -2$; f) $a = 2$.

Soluţie. Conform teoremei Bezout, $(x - x_0)|P \Leftrightarrow P(x_0) = 0$, deci în cazul nostru pentru $x_0 = 1$ obţinem $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

16. Fie f un polinom de gradul 2014 cu rădăcinile $-1, -2, -3, \ldots, -2014$. Pentru $x \in (-2, \infty)$, se consideră ecuaţia: $\int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t = \ln(x+2016) - x^2$. Dacă n este numărul soluţiilor negative şi m este numărul soluţiilor pozitive ale ecuaţiei date, atunci: **(5 pct.)**

a) $n = 0, m = 2$; b) $n + m = 3$; c) $n = 1, m = 1$; d) $2n + m = 4$; e) $n = 0, m = 1$; f) $n = 1, m = 0$.

Soluţie. Polinomul f are gradul egal cu numărul de rădăcini distincte, deci ca o consecinţă a teoremei Bezout, f are forma $f(x) = a(x+1)(x+2)(x+3) \cdot \ldots \cdot (x+2014)$, unde $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Folosind formula de derivare a produsului de funcţii, rezultă că derivata sa este

$$f'(x) = a \sum_{k=1}^{2014} (x+1)(x+2)(x+3) \cdot \ldots \cdot \widehat{(x+k)} \cdot \ldots \cdot (x+2014),$$

unde factorul cu circumflex este omis din podus. Atunci $\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{t+k}$, deci

$$\begin{aligned} \int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{2014} \int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t+k} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2014} \ln(t+k)\Big|_{x+1}^{x+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2014} (\ln(x+k+2) - \ln(x+k+1)) = \ln(x+2016) - \ln(x+2). \end{aligned}$$

După simplificări, ecuaţia din enunţ se rescrie

$$\ln(x+2016) - \ln(x+2) = \ln(x+2016) - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \ln(x+2) = 0,$$

deci ecuaţia din enunţ se rescrie $g(x) = 0$, unde $g(x) = x^2 - \ln(x+2)$, $x \in (-2, \infty)$. Atunci $g'(x) = 2x - \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2+4x-1}{x+2}$, iar $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}\}$. Se observă că $\frac{-2-\sqrt{6}}{2} < -2$ iar $x_* = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \in (0; \frac{1}{2})$. Tabelul de variaţie al funcţiei g este

x	-2		0		x_*		∞
$f'(x)$	$\vert$	$-$	-0.5	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	y_*	$\nearrow$	$+\infty$

şi semnalează inegalitatea $y_* < -1 < 0$. Funcţia g fiind continuă, schimbările de semn ale acesteia arată că ecuaţia $g(x) = 0$ admite o soluţie negativă $x_- < 0$ şi una pozitivă $x_+ > x_* > 0$, şi deci $m = n = 1$.

17. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă

$$M = \{x_0 \in (0, \infty) \mid \text{dreapta tangentă la graficul lui } f \text{ în punctul de abscisă } x_0 \text{ trece prin } A(2,1)\}$$

şi $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$, atunci: **(5 pct.)**

a) $S \in (3, 4)$; b) $S \in (\frac{3}{2}, 2)$; c) $S \in [1, \frac{3}{2})$; d) $S \in (4, 5)$; e) $S \in (2, 3)$; f) $S \in (5, 6)$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \ln x + 1$, iar dreapta d din definiţia mulţimii M are ecuaţia

$$d: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x(\ln x_0 + 1) - x_0,$$

iar condiţia $A(2,1) \in d$ se rescrie $x_0 - 2\ln x_0 - 1 = 0$. Aflarea soluţiilor x_0 ale acestei ecuaţii revine la rezolvarea ecuaţiei $g(x) = 0$, $x \in (0, \infty)$, unde $g(x) = x - 2\ln x - 1$. Obţinem $g'(x) = \frac{x-2}{x}$, iar tabelul de variaţie al funcţiei g este

x	0		$x_1 = 1$		2	3	x_2	4		∞
$g'(x)$	$\vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ln \frac{e}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

unde $g(1) = 0$, $g(2) = \ln \frac{e}{4} < 0$, $g(3) = \ln \frac{e^2}{9} < 0$, $g(4) = \ln \frac{e^3}{16} > 0$. Dar g este conţinuă, iar schimbările de semn indică două puncte de anulare $x_1 = 1$, $x_2 \in (3, 4)$, care formează mulţimea $M = \{x_1, x_2\}$. Atunci $S = \sum_{x_0 \in M} x_0 = x_1 + x_2 = 1 + x_2 \in (4, 5)$.

18. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3+1$ este: **(5 pct.)**

a) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{5}}{2}\}$; b) $\{1, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\}$; c) $\{1, \frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}\}$; d) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$; e) $\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{3}}{2}\}$; f) $\{1, \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}\}$.

Soluţie. Notăm $u = \sqrt[3]{2x-1}$. Această egalitate împreună cu ecuaţia din enunţ conduce la sistemul echivalent

$$\begin{cases} u^3 = 2x-1 \\ 2u = x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-1 = 2(x-1) \\ x^3-1 = 2(u-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-1 = 2(x-1) \\ u^3-x^3 = 2(x-u). \end{cases}$$

A doua ecuaţie a sistemului din dreapta - obţinută prin scăderea ecuaţiilor sistemului anterior - se rescrie

$$(u-x)\cdot(u^2+ux+x^2+2) = 0.$$

Se observă că a doua paranteză nu se poate anula, deoarece se poate rescrie prin restrângerea pătratelor sub forma $\left(u+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2+2>0$. Atunci, din anularea primei paranteze a produsului rezultă egaliatea $u = x$, care prin înlocuire în prima ecuaţie a sistemului conduce la

$$x^3-1 = 2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$$