1. Fie vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, unde $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$ şi $\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\pi}{3}$. Atunci produsul scalar $(2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (2\bar{v} - \bar{u})$ este: **(5 pct.)**

   a) 9; b) 7; c) 8; d) 11; e) 10; f) 6.

   Soluţie. Folosind biliniaritatea şi comutativitatea produsului scalar, precum şi egalităţile

$$\begin{cases} \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2 = 1^2 = 1, \qquad \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}|^2 = 2^2 = 4, \\ \bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos \widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$$

   obţinem

$$\begin{aligned} (2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (2\bar{v} - \bar{u}) &= -2\bar{u} \cdot \bar{u} + (4 - 1)\bar{u} \cdot \bar{v} + 2\bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9 \text{ (a)} . \end{aligned}$$

2. Dacă $\sin(\frac{\pi}{6} - \hat{B}) = 0$, atunci $\sin(2\hat{B} - \frac{\pi}{4})$ este egal cu: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$; e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   Soluţie. Rezolvăm ecuaţia din enunţ, şi obţinem:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \hat{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \hat{B} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \hat{B} \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow 2\hat{B} \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\},$$

   deci $\sin(2\hat{B}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\cos(2\hat{B}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

   Pe de altă parte, folosind formula $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$, expresia căutată se simplifică:

$$\begin{aligned} \sin\left(2\hat{B} - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin(2\hat{B}) \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos(2\hat{B}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(2\hat{B}) - \cos(2\hat{B})) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \text{ (f)} \end{aligned}$$

3. În triunghiul ABC se dau $\hat{A} = 30°$, $AB = 3$ şi $AC = 4$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) 12; c) 3; d) 6; e) 9; f) 1.

   Soluţie. Prin calcul direct, obţinem aria cerută: $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 3$. (c)

4. Valoarea expresiei $\sin \frac{\pi}{2} + \mathrm{tg} \frac{\pi}{4}$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) -1; e) 2; f) 0.

   Soluţie. Înlocuind cei doi termeni, obţinem: $\sin \frac{\pi}{2} + \mathrm{tg} \frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$. (e)

5. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1, m)$ aparţine dreptei de ecuaţie $2x + y = 1$. **(5 pct.)**

   a) -1; b) 2; c) 3; d) 1; e) 0; f) -2.

   Soluţie. Punctul se află pe dreaptă d.n.d. coordonatele sale satisfac ecuaţia dreptei. Înlocuind $x = 1$ şi $y = m$ în ecuaţia dată, rezultă $2 + m = 1$, deci $m = -1$. (a)

6. Se dau vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{v} = 6\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{w} = 5\bar{i} - \bar{j}$. Să se calculeze vectorul $\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$. **(5 pct.)**

   a) $2\bar{i} + 6\bar{j}$; b) $\bar{i} + \bar{j}$; c) $2\bar{i} + 3\bar{j}$; d) $2\bar{i} - 3\bar{j}$; e) $\bar{i} - \bar{j}$; f) $\bar{i} + 6\bar{j}$.

   Soluţie. Grupând coeficienţii vectorilor $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, obţinem:

$$\bar{u} - \bar{v} + \bar{w} = (2\bar{i} + 3\bar{j}) - (6\bar{i} - 4\bar{j}) + (5\bar{i} - \bar{j}) = (2 - 6 + 5)\bar{i} + (3 + 4 - 1)\bar{j} = \bar{i} + 6\bar{j}. \text{ (f)}$$

7. În triunghiul ABC are loc relaţia: $\cos^2\hat{A} - \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = 1$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $\hat{B} = 30°$; b) $\hat{B} = 135°$; c) $\hat{B} = 45°$; d) $\hat{B} = 60°$; e) $\hat{B} = 90°$; f) $\hat{B} = 120°$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosind formula $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, obţinem

$$\cos^2\hat{A} - \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\hat{B} - \sin^2\hat{A} = \sin^2\hat{C}.$$

Aplicând apoi teorema extinsă a sinusului ($a = 2R\sin\hat{A}$ şi relaţiile similare), după simplificare cu $4R^2$ ecuaţia devine

$$b^2 - a^2 = c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2,$$

deci triunghiul ABC este dreptunghic cu unghiul drept $\hat{B}$, deci $\hat{B} = 90°$.
Metoda 2. Folosind formulele $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ şi $\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2}$, ecuaţia se rescrie:

$$\cos^2\hat{A} - \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos 2\hat{A} - \cos 2\hat{B}}{2} = \sin^2\hat{C}.$$

Folosind apoi relaţia $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, obţinem

$$-\sin(\hat{A}+\hat{B})\sin(\hat{A}-\hat{B}) = \sin^2\hat{C}.$$

Dar $\sin(\hat{A}+\hat{B}) = \sin(\pi - \hat{C}) = \sin\hat{C}$, deci ecuaţia devine

$$-\sin\hat{C}\sin(\hat{A}-\hat{B}) = \sin^2\hat{C} \Leftrightarrow \sin\hat{C}(\sin\hat{C} + \sin(\hat{A}-\hat{B})) = 0.$$

Folosind condiţia $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \pi$ şi relaţia $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, rezultă

$$\sin\hat{C}\cdot 2\cdot\sin\tfrac{\hat{C}+\hat{A}-\hat{B}}{2}\cdot\cos\tfrac{\hat{C}+\hat{B}-\hat{A}}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin\hat{C}\cdot\sin\tfrac{\pi-2\hat{B}}{2}\cdot\cos\tfrac{\pi-2\hat{A}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\hat{C}\cdot\cos\hat{B}\cdot\sin\hat{A} = 0.$$

Dar $\sin\hat{C} = 0$ şi $\sin\hat{A} = 0$ nu au soluţii (deoarece $\hat{A}, \hat{C} \in (0,\pi)$ implică $\sin\hat{C} > 0$ şi $\sin\hat{A} > 0$), deci rămâne doar cazul $\cos\hat{B} = 0$, care conduce la soluţia $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$. ⓔ

8. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB, unde $A(-3,4)$ şi $B(7,-2)$. **(5 pct.)**

a) $(7,-2)$; b) $(-3,4)$; c) $(-2,-1)$; d) $(1,2)$; e) $(2,1)$; f) $(0,0)$.

Soluţie. Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2,1)$. ⓔ

9. Ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\cos^2 x$. **(5 pct.)**

a) 1; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 0.

Soluţie. Aplicăm formula trigonometrică fundamentală $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; obţinem $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. ⓔ

10. Un pătrat are aria numeric egală cu 9. Atunci lungimea diagonalei pătratului este: **(5 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) 3; c) 4; d) $2\sqrt{2}$; e) 2; f) $3\sqrt{2}$.

Soluţie. Latura este $\sqrt{9} = 3$, iar diagonala este latura înmulţită cu $\sqrt{2}$, deci lunginea diagonalei este $3\sqrt{2}$. ⓕ

11. Aflaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(1,2)$. **(5 pct.)**

a) $(1,1)$; b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; c) $(3,2)$; d) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$; e) $(2,3)$; f) $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Punctul căutat se află la intersecţia mediatoarelor triunghiului ABC. Aflăm ecuaţiile mediatoarelor laturilor BC şi AB.

(i) Panta laturii BC este $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-1}{1-2} = -1$, iar mijlocul M al laturii BC are coordonatele $(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Mediatoarea laturii BC are panta $m' = -\frac{1}{m} = 1$, deci ecuaţia acesteia este:

$$y - y_M = m'(x - x_M) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = 1\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = x.$$

(ii) Analog, panta laturii AB este $n = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$, iar mijlocul N al laturii AB are coordonatele $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}) = (1, \frac{1}{2})$. Mediatoarea laturii AB are panta $n' = -\frac{1}{n} = -2$, deci ecuaţia acesteia este:

$$y - y_N = n'(x - x_N) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = (-2)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} - x.$$

Atunci intrersecţia celor două mediatoare se obţine rezolvând sistemul liniar dat de cele două ecuaţii ale acestora,

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{5}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/6 \\ y = 5/6. \end{cases}$$

Metoda 2. Se verifică uşor că $AB = AC = 5$, deci triunghiul ABC este isoscel, iar mediatoarea bazei BC trece prin A fiind şi înălţime. Deci o mediatoare trece prin mijlocul M al bazei BC, de coordonate $(x_M, y_M) = (\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Ecuaţia acestei mediatoare este deci $y - y_A = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y = x$. Punctul căutat are coordonatele egale, deci de forma $P(a,a)$ şi fiind pe mediatoarea AB este egal depărtat de capetele acestui segment. Egalând distanţele de la P la A şi respectiv la B, obţinem

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$
$$\Leftrightarrow (a-0)^2 + (a-0)^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2 \Leftrightarrow -6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{5}{6},$$

deci punctul căutat are coordonatele $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.

Metoda 3. Căutăm punctul $P(a,b)$ aflat la intersecţia mediatoarelor triunghiului ABC, deci egal depărtat de vârfurile acestui triunghi. Relaţiile $PA = PB$ şi $PA = PC$ conduc la sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \\ \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-0)^2 + (b-0)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 \\ (a-0)^2 + (b-0)^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ 2a + 4b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5/6 \\ b = 5/6 \end{cases} \Rightarrow P(\tfrac{5}{6}, \tfrac{5}{6}). \quad \text{ⓕ}$$

12. Aflaţi valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} + m\,\bar{j}$ sunt perpendiculari. **(5 pct.)**

    a) 1; b) 2; c) -2; d) -1; e) 0; f) 3.

    Soluţie. Perpendicularitatea celor doi vectori revine la anularea produsului lor scalar, deci, folosind biliniaritatea produsului scalar şi relaţiile $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = 1$, $\bar{i}\cdot\bar{j} = 0$, rezultă

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \Leftrightarrow (2\bar{i} + \bar{j})\cdot(\bar{i} + m\,\bar{j}) = 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2. \quad \text{ⓒ}$$

13. Aria cercului de diametru 2 este: **(5 pct.)**

    a) 3π; b) 6π; c) π; d) 2π; e) 4π; f) 8π.

    Soluţie. Raza cercului este jumătate din diametru, deci are lungimea $r = 2/2 = 1$. Atunci aria cercului este $\pi r^2 = \pi$. ⓒ

14. Soluţia ecuaţiei $2\cos x = 1$, unde $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, este: **(5 pct.)**

    a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{2\pi}{3}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{\pi}{2}$.

    Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\cos x = \frac{1}{2}$, deci unghiul fiind în cadranul I, avem $x = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$. ⓑ

15. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M(1,2)$ şi $N(2,5)$ este: **(5 pct.)**

    a) $y = 3$; b) $2x + y = 2$; c) $x = 0$; d) $x + y = 1$; e) $-x + 2y = 1$; f) $3x - y = 1$.

    Soluţie. Ecuaţia dreptei este $\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow 3x - y = 1$. ⓕ