1. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x+1| \leq 3$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{-4\}$; b) $\varnothing$; c) $\{2\}$; d) $[-4,2]$; e) $[-3,3]$; f) $[-4,0]$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Distingem cazurile (i) $x+1 \geq 0$ $(x \geq -1)$, când inecuaţia devine $x+1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 2$, cu soluţiile $S_1 = [-1,\infty) \cap (-\infty, 2] = [-1,2]$, şi (ii) $x+1 < 0$ $(x < -1)$, când inecuaţia devine $-(x+1) \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -4$, cu soluţiile $S_2 = (-\infty,-1) \cap [-4,\infty) = [-4,-1)$, deci inecuaţia dată are soluţiile $S_1 \cup S_2 = [-1,2] \cup [-4,-1) = [-4,2]$. ***Metoda 2.*** Folosim echivalenţă $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \geq 0$. Inecuaţia se rescrie $-3 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x+1 \\ x+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4,2]$. ***Metoda 3.*** Folosim echivalenţa $|x| \leq b \Leftrightarrow x^2 \leq b^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall b \geq 0$. Inecuaţia se rescrie $(x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 3^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$. Semnul trinomului de grad doi produce soluţia $x \in [-4,2]$.

2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{0,1,2\}$; b) $\{0,2\}$; c) $\{-1,0,1\}$; d) $\{1,2,3\}$; e) $\{-2,0,1\}$; f) $\{1,2,4\}$.

   Soluţie. Dând factor comun x, ecuaţia se rescrie $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$. Dar $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}\} = \{1,2\}$, deci soluţiile ecuaţiei sunt $\{0,1,2\}$.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie continuă. **(5 pct.)**

   a) $m = 2$; b) $m = \frac{1}{3}$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = -2$; e) $m = 4$; f) $m = -5$.

   Soluţie. Continuitatea funcţiei f în $x = 1$ revine la satisfacerea condiţiilor $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 1}(x^2 + m) = 1 + m = \lim\limits_{x \searrow 1}(2x+1) \Leftrightarrow m + 1 = m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

4. Dacă $E = \log_2 20 - \log_4 25$, atunci: **(5 pct.)**

   a) $E = 2$; b) $E = 4$; c) $E = 0$; d) $E = -2$; e) $E = 3$; f) $E = -3$.

   Soluţie. Folosind proprietăţile logaritmilor, în particular regula de schimbare de bază, obţinem: $E = \log_2 20 - \log_4 25 = \log_2(2^2 \cdot 5) - \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^2} = \log_2 2^2 + \log_2 5 - \frac{2\log_2 5}{2} = 2 + \log_2 5 - \log_2 5 = 2$, deci $E = 2$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2x+1} + 2x = 5$. **(5 pct.)**

   a) $x = 11$; b) $x \in \left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$; c) $x = 4$; d) $x = \frac{3}{2}$; e) $x = \frac{1}{6}$; f) $x = 15$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Ecuaţia se rescrie $\sqrt{2x+1} = 5 - 2x$ (*). Condiţia de existenţă a radicalului este $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Membrul stâng fiind nenegativ, rezultă că şi cel drept are aceeaşi proprietate, deci $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. Prin urmare avem condiţia $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Ridicând la pătrat ecuaţia (*) şi apoi împărţind-o la 2, obţinem

   $$2x + 1 = (5-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4}\right\} = \left\{\frac{11 \pm 5}{4}\right\},$$

   deci $x \in \{\frac{3}{2}, 4\}$. Dar $4 \notin [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, deci nu convine ca soluţie, spre deosebire de $\frac{3}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Răspuns corect $x = \frac{3}{2}$. ***Metoda 2.*** Condiţia de existenţă a radicalului este (ca mai sus) $x \geq -\frac{1}{2}$. Rezolvarea ecuaţiei prin ridicare la pătrat conduce la $x \in \{\frac{3}{2}, 4\}$. Dar ecuaţia *din enunţ* este satisfăcută doar de $x = \frac{3}{2}$, unica soluţie a ecuaţiei.

6. Să se rezolve ecuaţia $5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{5}$. **(5 pct.)**

   a) $x = -1$; b) $x = 1$; c) $x = -3$; d) $x = 0$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $5^{\frac{x+1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}$. Aplicăm ambilor membri ai ecuaţiei funcţia logaritmică de bază 5 (inversa funcţiei exponenţiale de bază 5) şi obţinem $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

7. Într-o progresie geometrică de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 3$ şi $a_4 = 12$. Să se calculeze a_3. **(5 pct.)**

a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 8; d) 9; e) 4; f) 6.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Notăm termenii progresisi geometrice cu $a_1, a_2, \ldots$; termenii fiind pozitivi, rezultă că şi raţia progresiei, $r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $(k \geq 1)$ este de asemenea strict pozitivă. Folosind formula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ rezultă $\frac{a_4}{a_2} = r^2$, deci $r^2 = \frac{12}{3} = 4$, deci $r \in \{\pm 2\}$. Dar $r > 0$, deci $r = 2$. Atunci $a_3 = a_2 \cdot r = 3 \cdot 2 = 6$. ***Metoda 2.*** Folosind pozitivitatea termenilor progresiei şi relaţia $a_3^2 = a_2 a_4$, rezultă $a_3 = \sqrt{a_2 a_4} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$.

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{2x}$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**

a) -1; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $-\frac{3}{2}$; e) 3; f) -2.

Soluţie. $f'(x) = 1 + 2e^{2x}$, deci $f'(0) = 1 + 2e^{2\cdot 0} = 3$.

9. Să se calculeze $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$. **(5 pct.)**

a) $E = 3$; b) $E = 8$; c) $E = 11$; d) $E = 14$; e) $E = 10$; f) $E = 16$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosim formula $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ $(m, n \geq 0,\ m \geq n)$ şi obţinem $C_3^0 = \frac{3!}{3!0!} = 1$, $C_3^1 = \frac{3!}{2!1!} = 3$, $C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3$, $C_3^3 = \frac{3!}{0!3!} = 1$, deci $E = 1+3+3+1 = 8$. ***Metoda 2.*** Folosim binomul lui Newton, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + c_3^2 a b^2 + c_3^3 b^3$ pentru $a = b = 1$. Obţinem $(1+1)^3 = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = E$, deci $8 = E$. Răspuns corect: $E = 8$. ***Metoda 3.*** Folosim formulele $C_m^k = C_m^{m-k}$ pentru $m = 3$ şi $k \in \{0, 1\}$, deci $C_3^0 = C_3^3$ şi $C_3^1 = C_3^2$. De asemenea, folosim $C_m^0 = 1$, $C_m^1 = m$, deci $C_3^0 = 1$ şi respectiv $C_3^1 = 3$. Atunci $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2(C_3^0 + C_3^1) = 2(1+3) = 8$.

10. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$. **(5 pct.)**

a) 1; b) 2; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Amplificăm fracţia cu conjugata numitorului: $z = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$. Folosind formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, rezultă $|z| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. ***Metoda 2.*** Folosim formula $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, rezultă $|z| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

11. Fie sistemul $\begin{cases} x - 2y = m \\ 2x + y = n \end{cases}$. Să se determine numerele reale m şi n astfel încât $x = 2$, $y = 1$ să fie soluţie a sistemului. **(5 pct.)**

a) $m = 2$, $n = 1$; b) $m = 0$, $n = 5$; c) $m = 1$, $n = 4$; d) $m = -1$, $n = 3$; e) $m = 3$, $n = 1$; f) $m = 4$, $n = 3$.

Soluţie. Înlocuind valorile $x = 2$ şi $y = 1$ în sistem, rezultă $\begin{cases} 2 - 2 \cdot 1 = m \\ 2 \cdot 2 + 1 = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 5. \end{cases}$

12. Să se rezolve inecuaţia $3x - 1 \geq 2x$. **(5 pct.)**

a) $x \geq 1$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \geq 5$; d) $x \in [-1, 0]$; e) $x \leq \frac{1}{5}$; f) $x \leq \frac{1}{3}$.

Soluţie. $3x - 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 x^{2015} \ln x \, dx$. **(5 pct.)**

a) $-\infty$; b) $-\frac{1}{2016^2}$; c) $-\frac{1}{2015}$; d) $-\frac{1}{2014}$; e) $-\frac{1}{2015^2}$; f) 0.

Soluţie. Notăm $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 x^{2015} \ln x \, dx$. Calculăm I_ε integrând prin părţi:

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right)' \ln x \, dx = \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right) \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2016}}{2016} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{x^{2016}}{2016}\right) \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2016} \int_\varepsilon^1 x^{2015} \, dx$$

deci

$$I_\varepsilon = \left(\frac{x^{2016}}{2016} \ln x - \frac{1}{2016^2} x^{2016}\right)\Big|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2016}\varepsilon^{2016} \ln \varepsilon - \frac{1}{2016^2}(1 - \varepsilon^{2016}).$$

Atunci, folosind proprietatea $\lim\limits_{a \searrow 0} a^n \ln a = 0$ (demonstrabilă cu regula lui l'Hospital), obţinem

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[-\frac{1}{2016}\varepsilon^{2016} \ln \varepsilon - \frac{1}{2016^2}(1 - \varepsilon^{2016})\right] = 0 - \frac{1}{2016^2} + 0 = -\frac{1}{2016^2}.$$

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă. **(5 pct.)**

a) $m \neq -\frac{1}{3}$; b) $m \neq 0$; c) $m \neq \frac{1}{2}$; d) $m \neq 1$; e) $m \neq -\frac{1}{4}$; f) $m \neq \frac{1}{4}$.

Soluţie. Matricea A este inversabilă doar dacă deterinantul matricei este nenul. Cu ajutorul regulii Sarrus (de exemplu, sau dezvoltând după ultima linie), calculăm $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m$. Atunci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

15. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{e}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

Soluţie. Prin derivare, obţinem: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$. Atunci (ţinănd cont că $x > 0$), $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Examinând semnul polinoamelor care formează fracţia $f'(x)$, se observă că:

* $f'(x) < 0$ (deci f este descrescătoare) pentru $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

* $f'(x) > 0$ (deci f este crescătoare) pentru $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.

Prin urmare $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ este punct de minim pentru f.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + x)dx$. **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{4}{5}$.

Soluţie. Folosind formula Leibnitz-Newton şi $\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, $\forall a > -1$, rezultă $\int_0^1 (x^3 + x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (0 + 0) = \frac{3}{4}$.

17. Câte soluţii reale are ecuaţia $|||x - 1| - 1| - 1| = 1$? **(5 pct.)**

a) o infinitate; b) cinci; c) patru; d) şase; e) trei; f) două.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosim $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ şi $|a| = b \Leftrightarrow a \in \{\pm b\}$. Obţinem succesiv: $|||x-1|-1|-1| = 1 \Leftrightarrow ||x-1|-1|-1 \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow ||x-1|-1| \in \{0, 2\} \Leftrightarrow |x-1|-1 \in \{0, \pm 2\} \Leftrightarrow |x-1| \in \{1, -1, 3\} \cap [0, \infty) = \{1, 3\} \Leftrightarrow x - 1 \in= \{\pm 1, \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4. ***Metoda 2.*** Folosim $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ şi $|a| = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, $\forall a \in \mathbb{R}, b \geq 0$. Obţinem succesiv: $|||x-1|-1|-1| = 1 \Leftrightarrow (\underbrace{||x-1|-1|}_{y} - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y-2) = 0 \Leftrightarrow ||x-1|-1| \cdot (||x-1|-1|-2)) = 0 \Leftrightarrow \{|x-1|-1 = 0$ sau $||x-1|-1| = 2\} \Leftrightarrow$ $\{|x-1| = 1$ sau $(\underbrace{|x-1|}_{z} - 1)^2 = 4\} \Leftrightarrow \{(x-1)^2 = 1$ sau $z^2 - z - 3 = 0\} \Leftrightarrow \{x^2 - 2x = 0$ sau $(z+1)(z-3) = 0\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $|x-1| = -1$ sau $|x-1| = 3\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x \in \emptyset$ sau $(x-1)^2 = 9\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x^2 - 2x - 8 = 0\} \Leftrightarrow \{x \in \{0, 2\}$ sau $x \in \{-2, 4\}\} \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4. ***Metoda 3.*** Explicităm succesiv modulele, pe subcazuri şi folosim $|-a| = |a|$:

1. $x \geq 1 \Rightarrow ||x - 1 - 1| - 1| = 1 \Leftrightarrow ||x - 2| - 1| = 1$; subcazuri:

1.1. $x \geq 2 \Rightarrow |x - 2 - 1| = 1 \Leftrightarrow |x - 3| = 1$; subcazuri:

1.1.1. $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{4}$ (satisface condiţiile subcazului);

1.1.2. $x < 3 \Rightarrow 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{2}$ (satisface condiţiile subcazului);

1.2. $x < 2 \Rightarrow |2 - x - 1| = 1 \Leftrightarrow |1 - x| = 1 \Leftrightarrow |x - 1| = 1$; dar $x \geq 1$, deci $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, nu convine (contradicţie cu $x < 2$);

2. $x < 1 \Rightarrow ||1 - x - 1| - 1| = 1 \Leftrightarrow || - x| - 1| = 1 \Leftrightarrow ||x| - 1| = 1$; subcazuri:

2.1. $x \geq 0 \Rightarrow |x - 1| = 1$; dar $x < 1$, deci $1 - x = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (satisface condiţiile subcazului);

2.2. $x < 0 \Rightarrow |-x - 1| = 1 \Leftrightarrow |x + 1| = 1$; subcazuri:

2.2.1. $x \geq -1 \Rightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (aceeeaşi soluţie ca la subcazul 2.1.);

2.2.2. $x < -1 \Rightarrow -x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \mathbf{-2}$ (satisface condiţiile subcazului).

În concluzie, reunind soluţiile, obţinem $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Răspuns corect: 4.

18. Fie polinomul $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$, unde $n \geq 3$ este număr natural, iar $m \in \mathbb{C}$. Să se determine m astfel încât f să fie divizibil cu $X^2 + X + 1$. **(5 pct.)**

a) $m = -2$; b) $m = 2i$; c) $m = 18$; d) $m = 2$; e) $m = 4$; f) $m = -2i$.

Soluţie. Rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$ sunt $\{\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \bar{\omega} = \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\} \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, rădăcinile complexe ne-reale ale ecuaţiei $X^3 - 1 = 0$. Asadar avem $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Divizibilitatea din concluzia problemei este echivalentă cu $f(\omega) = f(\bar{\omega}) = 0$. Folosind proprietăţile rădăcinilor ω şi $\bar{\omega} = \omega^2$, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega(\omega+1)^{2n+1} + (m-1)\omega^n = \omega(-\omega^2)^{2n+1} + (m-1)\omega^n = -\omega(\omega)^{4n+2} + (m-1)\omega^n \\ &= -\omega^{4n+3} + (m-1)\omega^n = -\omega^n + (m-1)\omega^n = \omega^n(-1+m-1) = \omega^n(m-2), \\ f(\bar{\omega}) &= \omega^{2n}(\bar{m}-2). \end{aligned}$$

Însă $\omega^k \in \{1, \omega, \omega^2\} \not\ni 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$, deci $\begin{cases} f(\omega) = 0 \\ f(\bar{\omega}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = 0 \\ \bar{m}-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$