Universitatea din Bucureşti **15.07.2017**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Fie mulţimea $A = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ şi fie $z = 1 + \sqrt[3]{2}$. Să se arate că:

(a) $z^3 - 3z^2 + 3z = 3$.

(b) Toate rădăcinile reale ale ecuaţiei $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ se găsesc în mulţimea A.

(c) Mulţimea A este parte stabilă în raport cu adunarea numerelor reale şi $(A, +)$ este grup abelian.

(d) $z^2 \notin A$.

II. Analiză. Fie funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f_2.

(b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f_3.

(c) Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(d) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f_2(x)}\, dx$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, a)$ şi $D(0, b)$, unde $a, b > 0$ şi pătratul $ADEF$, cu punctele E şi F situate în cadranul I (ambele coordonate strict pozitive).

(a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{OE}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OD}$.

(b) Arătaţi că punctele B, C, E sunt coliniare.

(c) Arătaţi că ariile triunghiurilor FCO şi EBO sunt egale.

IV. Informatică.

Considerăm triunghiul infinit de mai jos, format din numere naturale:

```
                    1
                 2     3
              4     5     6
           7     8     9     10
       11    12    13    14    15
    16    17    18    19    20    21
    ..........................................
```

Spunem că perechea de numere (x, y) este adiacenţă dacă x şi y sunt vecini pe aceeaşi linie sau pe diagonală, pe linii consecutive. Spre exemplu, (8,9), (12,8) şi (8,13) sunt adiacenţe, dar (8,14) sau (18,8) nu sunt adiacenţe.

Numim drum de la x la y de lungime $p - 1$, cu $p \geq 1$, o secvenţă de numere $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$, cu $x = x_1$ şi $y = x_p$ şi cu proprietatea că toate perechile (x_i, x_{i+1}), cu i de la 1 la $p - 1$, sunt adiacenţe.

Scrieţi un program, într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++), care primeşte ca date de intrare 2 numere naturale nenule x şi y şi afişează un drum de la x la y de lungime minimă. Spre exemplu, 1 2 5 8 13 este un drum de lungime minimă de la 1 la 13.

Notă: Se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **15.07.2017**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2017

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Verificarea egalităţii .... 2 p

(b) Ecuaţia are două rădăcini reale: $1, \sqrt[3]{2}$ .... 2 p

(c) A parte stabilă .... 1 p

$(A,+)$ - grup abelian .... 2 p

(d) $z^2 \notin A \Leftrightarrow \sqrt[3]{4} \notin A$ .... 0,5 p

Demonstraţia $\sqrt[3]{4} \notin A$ .... 1,5 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) $y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ asimptotă oblică spre $+\infty$ .... 1 p

$y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ asimptotă oblică spre $-\infty$ .... 1 p

(b) Calculul lui f_3' .... 1 p

$x = 1/2$ punct de extrem local .... 1 p

(c) $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in (-\infty, 1/2] \\ x & x \in (1/2, \infty) \end{cases}$ .... 2 p

f este continuă .... 1 p

(d) $I = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$ .... 2 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Determinarea coordonatelor punctului $E : (b, a+b)$

(analitic sau folosind congruenţe de triunghiuri) .... 2 p

Scrierea vectorului $\overrightarrow{OE} = \frac{b}{a}\overrightarrow{OA} + \frac{a+b}{b}\overrightarrow{OD}$ (dacă au fost determinate mai întâi coordonatele lui E) 2p

Dacă se obţine scrierea vectorului $\overrightarrow{OE}$ direct prin metode vectoriale se acordă 4 puncte

(b) Scrierea condiţiei de coliniaritate (analitic, vectorial, etc) .... 1 p

Demonstrarea coliniarităţii (finalizarea) .... 1 p

(c) Determinarea coordonatelor punctului $F : (a+b, a)$ .... 2 p

Calculul ariilor celor două triunghiuri şi demonstrarea egalităţii .... 1 p

(*) Pentru o soluţie care tratează corect doar cazul particular $a = b$ se acordă 7 puncte. Pentru o soluţie care tratează corect şi complet cazul general fără a aminti de cazul particular se va acorda punctajul maxim. Orice altă soluţie completă (transformări geometrice, numere complexe, etc.) va fi notată cu punctaj maxim.

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

Tratarea celor trei cazuri $x < y, x = y, x > y$ .... 1 p

Determinarea nivelului pe care se află un număr .... 1 p

Determinarea corectă a tuturor vecinilor (adiacenţelor) unui număr .... 1 p

Afişarea unui drum corect pentru orice x şi y .... 1 p

Afişarea unui drum corect minim pentru orice x şi y .... 3 p

Corectitudinea limbajului .... 1 p

Explicaţii .... 1 p