Varianta 41

Subiectul I

a) -2^{10}. b) 2. c) 24. d) $\frac{1}{2}$. e) 2 puncte. f) a=1, b=0.

Subiectul II

1. a) 7. b) $T_8 = C_{12}^7 a^5$. c) $n = 29$. d) $\frac{1}{3}$. e) 1.

2. a) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. b) $f'(e^2) = \frac{-1}{e^2}$.

c) $x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, (\forall) x > e \Rightarrow f$ strict descrescatoare pe $(e, +\infty)$. d) $\int f(x)dx = \frac{\ln^2 x}{2}$+C. e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Subiectul III

a) Calcul direct. b) Calcul direct.

c) $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$, $f(x) = 0 \Rightarrow x^5 = 1, x \neq 1$.

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}; x_k \neq 1 \Rightarrow k \neq 0.$$

d) Din relatia $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ obtinem :

$$\cos\frac{8\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + i\left(\sin\frac{8\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\cos\frac{8\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = -1.$$

e) Din d) rezultă $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

f) $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) = (-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4) = f(-1) = 1$.

g) Inlocuind in relatia data pe X cu x_1, x_2, x_3, x_4 obtinem

$$f_1(1) + x_i f_2(1) + x_i^2 f_3(1) + x_i^3 f_4(1) = 0, 1 \le i \le 4,$$

care este un sistem liniar si omogen in necunoscutele

$$f_1(1),\quad f_2(1),\quad f_3(1),\quad f_4(1)$$

cu determinatul Vandermonde V(x_1, x_2, x_3, x_4) $\neq 0$ .Rezulta ca el admite numai solutia banala, $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 0$.

Subiectul IV

a) $(k-1)k < k^2 < k(k+1) \Leftrightarrow k^2 - k < k^2 < k^2 + k$, evidenta.

b) Folosim $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ si aplicand-o la fiecare fractie a sumei obtinem

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow (a_n)$ sir strict crescator.

$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow (a_n)$ marginit .

d) Din numerele 1,2,…, 2^p ,…, n singurul care se divide cu 2^p este 2^p . Amplificand în x_n cu 2^{2p} toate fracțiile au numărătorii pari în afara de fracția $\frac{2^{2p}\cdot c_{2^p}}{2^{2p}} = c_{2^p}$ care are numaratorul ± 1 , impar. Rămân la numărători numere impare şi numitorul comun B, impar.

e) Din punctul d) $\Rightarrow 2^{2p}\cdot x_n = \frac{A}{B}$ daca $x_n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{A}{B} \in \mathbf{Z}$ contradictie $\Rightarrow x_n \notin \mathbf{Z}$.

f) $x_n = \frac{c_1}{1^2} + \frac{c_2}{2^2} + ... + \frac{c_n}{n^2}; c_k \in [-1,1]$, y_n este suma termenilor pozitivi iar z_n este suma termenilor negativi $\Rightarrow x_n = y_n - z_n$.

g) $(y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ sunt siruri strict crescatoare si marginite superior de sirul $(a_n)_{n\geq 1}$, care este marginit, conform punctului c) $\Rightarrow (y_n), (z_n)$ sunt convergente $\Rightarrow$ sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.