Varianta 074

Subiectul I:

a) Calcul direct. b) $\cos^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{\pi}{13}=1$ .c) $a=3$. d) Cu teorema lui Pitagora obtinem AM=4, unde M este mijlocul lui BC .e) $x+y+z=4$. f) x+y=20

Subiectul II:

1) a) $x\in[2,3]\cap Z=\{2,3\}$. b) S=$\hat{8}$. c) $\log_2 16+\log_3\sqrt{81}=6\in\mathbf{N}$.

d) Numarul numerelor $\overline{abc}$ este 27. e) $\hat{x}\in Z_8:\hat{x}^4=1$ => probabilitatea este: $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

2. a) $\lim\limits_{x->\infty}f(x)=\lim\limits_{x->\infty}\frac{x}{e^x}=0$. b) f'(x)=$\frac{1-x}{e^x}$.

c) $e^x-ex\geq 0$ deoarece functia f:**R**->**R**, f(x)=e^x-ex are minimul egal cu 0 in punctual 1

d) f''(x)=$\frac{x-2}{e^x}$ ce are solutia unica 2 si isi schimba semnul in vecinatatea lui x_0 =>2 singurul punct de inflexiune pentru f.e) $\int_0^1 f(x)dx=1-\frac{2}{e}$.

Subiectul III:

a) det X=-1, det Z=-1, X,Z$\in M_2(\mathbf{R}),-1\in\{-1,1\}$ => $x,z\in G$

Y,$I_2\in M_2(C),\det Y=1,\det I_2=1$ => $Y,I_2\in H$

b) A,B∈ H=>det(AB)=det(A)det(B)= 1 =>AB∈ H

c) $A\in G\Rightarrow\det A\neq 0$ => $\exists A^{-1}\in M_2(R):A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\pm A^*\in M_2(\mathbf{R})$ şi

$A\cdot A^{-1}=\det I_2$ => $\det A^{-1}\in\{-1,1\}$ => $A^{-1}\in G$.

d) Se verifică prin calcul direct ca $Z^2=I_2$

e) Fie $U=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}, x,y,z,u\in C$ astfel încât $U^2=I_2$ => $(\det U)^2=\det I_2=1, U\in H\Rightarrow$

$\det U=xu-yz=1, din U^2=I_2$ => $x+u\neq 0, y=z=0$, obținem solutiile $\pm I_2\in H$

f) Fie $U=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\in G:U^2=I_2$ => $\det(U)=-1$, cazul det U=1 am tratat la punctul c).

Cazul det U= -1 . Din relatiile obtinute din ipotza ajungem la relatiile yz=1, x=0 ⇔ u=0 => $U=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{z}\\ z & 0\end{pmatrix}, z\in\mathbf{R}^*$ sau la solutiile x=-u, y=$\frac{1-u^2}{z}$, $z\in\mathbf{R}^*$ => $U=\begin{pmatrix}-u & \frac{1-u^2}{z}\\ z & u\end{pmatrix}$, deci la o infinitate de solutii.

g) Reducere la absurd. Presupunem ca

$\exists f:G->H$ bijectiva : $f(AB)=f(A)f(B), pt(\forall)A,B\in G$

Fie $U\in G, U^2=I_2$ => $f(U^2)=(f(U))^2, f(U^2)=f(I_2)=I_2$ => $(f(U))^2=I_2$ =>

$\Rightarrow f(U)=\pm I_2$. pe de altă parte =>ec. $v^2=I_2$, are o infinitate de solutii in G.

Să notăm cu $U_{a_k} = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ \frac{1}{a_k} & 0 \end{pmatrix}, a_k \in \mathbf{R}^*, k \in \mathbf{N}$ solutiile ecuatiei => f(U_{a_k}) = I_2 ce contrazice injectivitatea lui f.

Subiectul IV:

a) *f(0)=*$n \cdot a^{n+1}$ *si* $\lim_{x->\infty} f(x) = \lim_{x->\infty} x^n \cdot e = \infty$

b) *f'(x)=(n+1)e* $x^n - (n+2)a^n$

c) Din faptul că *f''(x)=n(n+1)e* x^{n-1} are soluția t_n unică şi $f'' \geq 0, (\forall) x \geq 0 =>$ f' strict crescătoare pe $[0, \infty]$, deci rezolvând ecuatia *f'(x)*≥ 0 obținem unica soluție

$t_n = a\sqrt[n]{\frac{n+2}{(n+1)e}}, a \geq 0, n \in \mathbf{N}^*$

d) Calculăm f(t_n)=$t_n [\frac{(n+2)a^n}{(n+1)} - (n+2)a^n] + na^{n+1} = na^n(a - t_n \frac{n+1}{n+2})$

f(t_n)$\geq 0 <=> t_n \leq a\frac{n-1}{n-2} <=> e \geq (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$, adevărat.

e)Din

$f(x) \geq 0, (\forall) x \geq 0, \forall a \geq 0,$ pentru $.a = g_n^{\frac{1}{n+1}} => ex^{n+1} - (n+2)g_n^{\frac{n}{n+1}} x + ng_n \geq 0, (\forall) x \geq 0.$

Pentru

$x = a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} => ea_{n+1} - (n+2)g_n^{\frac{n}{n+1}} a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} + ng_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbf{N}^* <=> ea_{n=1} - (n+2)g_{n+2} + ng_n \geq 0$

f) Se demonstrează prin inducție relația notată cu P(n). Din definiția lui g_n rezultă că p(1) adevărata.

Presupunem P(k) adevărată si demonstram că P(k+1) este adevărată., unde

P(k+1):$g_1 + g_2 + ... + g_k + (k+2)g_{k+1} \leq e(a_1 + a_2 + ... + a_{k+1})$

Avem relația P(k): $g_1 + g_2 + ... + g_{k-1} + (k+1)g_k \leq e(a_1 + a_2 + ... + a_k)$. Adunând la ambii membrii $e \cdot a_{k+1}$ se obține:

e$(\sum_{i=1}^{k+1} a_i) \geq ea_{k+1} + g_1 + g_2 + ... + g_{k-1} + (k+1)g_k \geq (k+2)g_{k+1} + g_1 + .. + g_{k-1} + g_k$ pe baza inegalității de la e). Deci inegalitatea are loc pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$

$= g_1 + .. + g_k + (k+2)g_{kn}$

g) Din f) $\Rightarrow e(x_1 + x_2 + ... + x_n) > g_1 + g_2 + ... + g_n => c \leq e.$

Inlocuim $x_1 = 1, \ x_2 = \frac{1}{2}, ..., x_n = \frac{1}{n}$ în inegalitatea urmatoare :

$\sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdot ... \cdot x_k)^{\frac{i}{k}} \leq c\sum_{k=1}^{n} x_k => (1 + \frac{1}{\sqrt{2!}} + .. + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}) / (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \leq c \Rightarrow c \geq e,$ (facand $n \to \infty$ in relatia anteriora). Deci $c = e$

.