Varianta 030

Subiectul I

a) $\left|\frac{3+5i}{7-i}\right|=\frac{\sqrt{17}}{5}$.

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) Ecuația tangentei este $3x+4y-13=0$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} x_L & y_L & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix}=0$, punctele L, M, N sunt coliniare.

e) $V_{ABCD}=\frac{13}{3}$.

f) $a=0$ și $b=-32$.

Subiectul II.

1.

a) 12.

b) Probabilitatea căutată este $p=\frac{1}{5}$.

c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$

d) $x\in\{-1,1\}$.

e) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.

a) $f'(x)=(1+2x^2)\cdot e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e-1}{2}$.

c) $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3e$.

e) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{\ln 2}{3}$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Se folosește definiția funcției injective.

c) Deoarece G este o mulțime finită şi funcția $f : G \to G$ este injectivă, rezultă că ea este şi bijectivă.
d) Pentru $\hat{a} \in G$, deoarece f este bijectivă, avem
$\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)= f\left(\hat{1}\right)\cdot f\left(\hat{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\hat{p}-\hat{1}\right)=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)\cdot\hat{a}^{p-1} \quad\Leftrightarrow\quad \hat{a}^{p-1}=\hat{1}$.

e) Pentru $\hat{x}\in G$ avem $g\left(\hat{x}\right)=\hat{x}^{p-1}-\hat{1}\overset{\text{d)}}{=}\hat{1}-\hat{1}=\hat{0}$ iar
$h\left(\hat{x}\right)=\left(\hat{x}-\hat{1}\right)\left(\hat{x}-\hat{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\hat{x}-\left(\hat{p}-\hat{1}\right)\right)=\hat{0}$, deoarece unul dintre factori este $\hat{0}$.
f) Considerăm polinomul $u = g-h\in \mathbf{Z}_p\left[X\right]$. Obținem că u are cel puțin $p-1$ rădăcini şi apoi că u este polinomul nul.
Atunci, $g\left(X\right)=h\left(X\right)$, deci şi $g\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{0}\right)$, adică $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)+\hat{1}=\hat{0}$.
g) Aducând la acelaşi numitor în relația din enunț şi calculând în $\mathbf{Z}_p$, obținem:

$$\hat{b}\cdot\left(\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)+\hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)+\ldots+\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{2}\right)\right)=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)\cdot\hat{a} \qquad (1)$$

Dar $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\left(\hat{k}-\hat{1}\right)\cdot\left(\hat{k}+\hat{1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\hat{p}-\hat{1}\right)\overset{\text{f)}}{=}-\hat{1}\cdot\hat{k}^{-1}$, $\forall\, \hat{\mathrm{k}}\in \mathbf{Z}_{\mathrm{p}}^{*}$.

Egalitatea (1) devine
$$\hat{b}\cdot\left(\hat{1}^{-1}+\hat{2}^{-1}+\ldots+\left(\hat{p}-\hat{1}\right)^{-1}\right)=\hat{a} \qquad (2)$$

Avem $G=\left\{\hat{1}^{-1},\hat{2}^{-1},\ldots,\left(\hat{p}-\hat{1}\right)^{-1}\right\}$, deci (2) $\Leftrightarrow$ $\hat{b}\cdot\left(\hat{1}+\hat{2}+\ldots+\left(\hat{p}-\hat{1}\right)\right)=\hat{a}$.
Deoarece p este un număr prim impar, rezultă uşor că $\hat{1}+\hat{2}+\ldots+\left(\hat{p}-\hat{1}\right)=\hat{0}$, deci p îl divide pe a.

Subiectul IV.

a) $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ şi $I_1=1$.
b) Se arată prin calcul direct.
c) Se foloseşte primul principiu de inducție şi relația de la punctul **b)**.
d) Se foloseşte primul principiu de inducție şi relația de la punctul **b)** .
e) Se arată uşor că şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător şi că $I_n>0$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

Atunci, din **b)** obținem $I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\cdot I_{n-1}>\dfrac{n}{n+1}\cdot I_n \;\Rightarrow\; 1<\dfrac{I_n}{I_{n+1}}<\dfrac{n+1}{n}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$

f) Din **c)** şi **d)** rezultă $I_{2n}=\dfrac{w_n}{\sqrt{2n+1}}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ şi $I_{2n+1}=\dfrac{1}{w_n\cdot\sqrt{2n+1}}$, de unde

obținem $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=w_n^2\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

g) Trecând la limită în dubla inegalitate de la **e)**, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{I_{n+1}}=1$, şi din **f)**

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.