# Varianta 97

**Subiectul I.**

**a)** $|\vec{v}|=5$.

**b)** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

**c)** Tangenta prin $P$ la cerc are ecuația: $2x+3y-13=0$.

**d)** Punctele $L, M, N$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \dfrac{x_M-x_L}{x_N-x_L}=\dfrac{y_M-y_L}{y_N-y_L}=\dfrac{z_M-z_L}{z_N-z_L}$, adevărat.

**e)** Aria triunghiului $ABC$ este $S=3$.

**f)** $a=4$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

**b)** Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{1}{3}$.

**c)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}=O_2$.

**d)** $x\in\left\{-\dfrac{5}{4},1\right\}$.

**e)** Inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ este $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A$.

**2.**

**a)** $f'(x)=1-\cos x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

**b)** $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx=1-\sin 1$.

**c)** $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deoarece derivata sa se anulează doar în puncte izolate.

**d)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1-\cos 1$.

**e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{5x^2+6}\,dx=\frac{1}{10}\cdot\ln\frac{11}{6}$.

**Subiectul III.**

**a)** $g = f_5 \in G$ şi $h = f_7 \in G$.

**b)** $h(0) - g(0) = 0$.

**c)** Observăm că $g$ şi $h$ au rădăcina comună $x = -1$.
De asemenea, $h$ nu mai are alte rădăcini reale, aşadar singura rădăcină reală comună este $x = -1$.

**d)** Restul împărțirii lui $h$ la $g$ este $r = X + 1$.

**e)** $g_n = f_{2n+1} \in G$.
Prin desfaceri succesive ale parantezelor sau prin inducție obținem $h_n = f_{2^{n+1}-1} \in G$.

**f)** Observăm că pentru $k, n \in \mathbf{N}$, avem $f_k = f_n \Leftrightarrow k = n$ (necesitatea se deduce egalând gradele, iar suficiența este evidentă)
$h_n = g_n \Leftrightarrow f_{2^{n+1}-1} = f_{2n+1} \Leftrightarrow 2^n = n + 1$.
Ecuația anterioară are soluțiile $n = 0$ şi $n = 1$, iar pentru $n \geq 2$ se demonstrează prin inducție că $2^n > n + 1$. Aşadar $n \in \{0, 1\}$.

**g)** Pentru $n \geq 2$, avem $2^n > n + 1$, de unde deducem că $2^{n+1} - 2n - 3 \in \mathbf{N}$, deci
$h_n - g_n = X^{2n+2} \cdot \left(1 + X + ... + X^{2^{n+1}-2n-3}\right) = X^{2n+2} \cdot f_{2^{n+1}-2n-3}$, de unde rezultă concluzia..

**Subiectul IV.**

**a)** $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$, $\forall x \in (0, \infty)$.

**b)** $f'(x) = \alpha\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} - 1\right)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Avem $1 - \alpha \in (0,1)$.

$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} > 1 \Leftrightarrow f'(x) > 0$,

iar $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

**c)** Din **b)** deducem că $x = 1$ este punctul de maxim global al funcției *f*.
Aşadar, $\forall x \in (0, \infty)$, $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \forall x \in (0, \infty)$, $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$.

**d)** Pentru $\alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$, punând $x = \frac{a}{b}$ în relația de la **c)** obținem

$a^\alpha b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$.

**e)** Punând $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, $a = s^p$ şi $b = t^q$ în relația de la punctul d), obținem:

$\left(s^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \Leftrightarrow st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$.

**f)** Punând $s=\dfrac{a_1}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, $t=\dfrac{b_1}{\left(b_1^p+b_2^p+\ldots+b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, în **e)**, obținem:

$$\frac{a_1}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{b_1}{\left(b_1^p+b_2^p+\ldots+b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\le\frac{a_1^p}{p\cdot\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)}+\frac{b_1^q}{q\cdot\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)}$$

şi analog,

$$\frac{a_2}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{b_2}{\left(b_1^p+b_2^p+\ldots+b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\le\frac{a_2^p}{p\cdot\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)}+\frac{b_2^q}{q\cdot\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)}$$

………………………………………………………………

$$\frac{a_n}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{b_n}{\left(b_1^p+b_2^p+\ldots+b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}\le\frac{a_n^p}{p\cdot\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)}+\frac{b_n^q}{q\cdot\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)}$$

Adunînd membru cu membru inegalitățile obținute şi ținând cont de faptul că $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, se obține concluzia.

**g)** Înlocuind în **e)** $s=\dfrac{h(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ şi $t=\dfrac{g(x)}{\left(\int_0^1 g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$ obținem:

$$\frac{h(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{g(x)}{\left(\int_0^1 g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\cdot\frac{h^p(x)}{\int_0^1 h^p(x)\,dx}+\frac{1}{q}\cdot\frac{g^q(x)}{\int_0^1 g^q(x)\,dx},$$

şi integrând această inegalitate pe intervalul $[0,1]$ rezultă concluzia.