Varianta 33

Subiectul I

a) 1. b) $\frac{11}{\sqrt{14}}$. c) x-4y=5. d) sin4<0 si sin3>0. e) $\frac{5}{6}$. f) a=b=1, c=-4.

Subiectul II

1. a) $\hat{0}$. b) $\frac{1}{5}$. c) $\log_2 9=2\log_2 3 > 2$ şi $\log_3 4=2\log_3 2 < 2$. d) 5 e) 2.

2. a) 1+sinx. b) $\frac{1}{2}-\sin 1$. c) $f'(x)\geq 0$, $\forall$ [0, ∞). d) 1+sin1. e) $\frac{\ln^2 2}{2}$.

Subiectul III

a) C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dacă adumăm linia 1 la linia 2 şi la linia 3, obținem elemente din mulțimea {-2, 0, 2}, deci numai numere pare. Scoatem factor pe 2 de pe linia 2 şi de pe linia 3 şi determinantul obținut se divide cu 4.

c) Cum det(A) este o sumă de 6 termeni din mulțimea {-1, +1}, rezultă că -6≤ det(A) ≤6.

d) rezultă din b) şi c).

e) Dacă $B^{-1} \in$ M, atunci $B \cdot B^{-1} = I_3$, imposibil deoarece matricea $B \cdot B^{-1}$ va avea numai elemente impare.

f) Pentru A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avem rangA=1, pentru A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avem rangA=2, pentru

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avem rangA=3.

g) Matricea A^2 are numai elemente impare şi utilizând metoda inducției matematice se arată ca pentru orice n număr nenul matricea A^n are numai elemente impare. În particular, matricea A^{2007} are numai elemente impare.

Subiectul IV

a) Numerele 1, a, …,a^n sunt în progresie geometrică cu rația a≠1.

b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a+...+a^n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

c) Avem 1+$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...+\frac{1}{p^n}=\frac{1-\frac{1}{p^{n+1}}}{1-\frac{1}{p}}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}, \forall n\in \mathbf{N}^*$.

d) Fie f: (-1,+∞) $\rightarrow$ **R**, f(t)=ln(1+t)-t. Cum f'(t)=-$\frac{t}{1+t}$, f este crscatoare pe (-1,0) si descrescatoare pe (0, ∞). f(0)=0 este valoarea maxima, deci f(t)≤0, pentru orice t>-1.

Deducem că f($\frac{1}{x}$)<0, $\forall$ x>0 $\Leftrightarrow$ ln(1+$\frac{1}{x}$)-$\frac{1}{x}$ $< 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

e) Cum ln(x+1)-lnx<$\frac{1}{x}\forall x > 0$ avem: ln2-ln1<1, ln3-ln2<$\frac{1}{2}$,…,ln(n+1)-ln n <$\frac{1}{n}$ rezulta $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} > \ln(n+1), \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Cum $\lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$ din e) $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

g) Fie ε >0 şi $s \in$ **N** astfel încât $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{s} > \varepsilon$. Alegem $k = [\log_2 s!]$ şi $P = \{p_1, p_2,..., p_k\}$ mulțimea numerelor prime care se găsesc în dezvoltarea lui s!.

Atunci $a_k = \frac{p_1}{p_1-1}\cdot...\cdot\frac{p_k}{p_k-1} > \left(1+\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_1^k}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{p_t}+...\frac{1}{p_t^k}\right) > 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{s} > \varepsilon$

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.