Varianta 40

Subiectul I.

a) $\begin{cases} x = \dfrac{12}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

b) 1.

c) Distanța de la punctul E la dreapta dată este egală cu 3.

d) $|z| = 1$.

e) $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 4 \end{cases}$.

Subiectul II.

1.

a) $1^2 + 2^2 + ... + 10^2 = 385$.

b) $n = 10$.

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

d) 3 submulțimi cu două elemente.

e) Evident.

2.

a) $f(1) = \mathrm{e}$.

b) $f'(x) = e^x(x+1), \quad \forall x \in \mathbf{R}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2e$

d) Aria căutată este $A = 1$.

e) Există un punct de inflexiune al graficului funcției *f*.

Subiectul III.

a) $\det(A) = -1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) $\det(A^n) = (\det(A))^n = (-1)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*$.

e) Se demonstrază prin inducție.

f) Din punctul **e)** obținem $\det\left(A^n\right)=\det\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix} \overset{\text{d)}}{\Leftrightarrow} f_{n-1}\cdot f_{n+1}-f_n^{\,2}=\left(-1\right)^n$,

$\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

Din ipoteză avem că $\forall\, k\in \mathbf{N}^*$, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$

Înlocuind pe rând k cu fiecare din numerele $1, 2, ..., n+1$ în relația de recurență din enunț și adunând egalitățile obținute, deducem: $f_1+f_2+...+f_n=f_{n+2}-1$, $n\in \mathbf{N}^*$.

g) Pentru $n=1$ obținem $\det(A)=-1<0$.

Pentru $n\in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, avem:

$\det\left(A+A^2+...+A^n\right)\overset{\text{e)}}{=}\begin{vmatrix} f_2+f_3+...+f_{n+1} & f_1+f_2+...+f_n \\ f_1+f_2+...+f_n & f_0+f_1+...+f_{n-1}\end{vmatrix}$ și folosind punctul **f)**

obținem $\det\left(A+A^2+...+A^n\right)\left(-1\right)^{n+2}-2f_{n-1}-f_n+1<0$.

Subiectul IV.

a) $f(0)=0$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

b) $\{x\}\geq\{x\}^2 \Leftrightarrow \{x\}\cdot\left(\{x\}-1\right)\leq 0$, adevărat, deoarece $\{x\}\in\left[0,1\right)$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$.

c) Dacă $x\in[0,1)$, atunci $\{x\}=x$, așadar $f(x)=\sqrt{x-x^2}$.

d) Se folosește faptul că $\forall\, x\in \mathbf{R}$, avem: $\{x+1\}=\{x\}$.

e) Deoarece f este continuă pe $\left[0,1\right)$, este periodică de perioadă 1, iar $f(0)=f(1)$, rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$.

f) $\int_0^1 f(x)dx=A\left(\Gamma_f\right)$, unde Γ_f este subgraficul funcției f pe intervalul $\left[0,1\right]$, deci $A\left(\Gamma_f\right)$ este jumătate din aria cercului de ecuație $y^2=x-x^2$.

Obținem $\int_0^1 f(x)dx=A\left(\Gamma_f\right)=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$.

g) Pentru orice $k\in \mathbf{Z}$, efectuând schimbarea de variabilă $x-k=y$, obținem:

$\int_k^{k+1} f(x)dx=\frac{\pi}{8}$ și apoi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+...+\int_{n-1}^n f(x)dx}{n}=\frac{\pi}{8}$$