Varianta 085

Subiectul I

a) 13. b) $\frac{\sqrt{30}}{2}$; c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$. d) $2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci sin2>0, cos2<0, de unde sin2>cos2. e) 6. f) a=b=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ aplicând Moivre

Subiectul II

1. a) $\log_3 4>1\Leftrightarrow 4>3$. b) Relația se verifică pentru $\hat{x}\in\{\hat{1},\hat{4}\}$. Probabilitatea este $\frac{2}{5}$.

c) f(1)=10 $\Rightarrow$g(10)=1. d) x=1 este unica soluție deoarece f:**R**$\rightarrow$**R**, $f(x)=2^x+8^x$ este funcție crescătoare. e) -10.

2. a) f'(x)=$3^x\cdot$ln3-1. b) 1. c) f''(x)=$3^x\cdot(\ln 3)^2>0$, deci f convexă pe **R**.

d) f'(1)=3ln3-1.e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x\ln 3-1}{3^x-x-1}=\ln 3$.

Subiectul III

a) $(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$.

b) Scăzând coloana 1 din celelalte coloane , dezvoltând determinantul după prima linie, apoi dăm factor comun de pe coloane şi finalizând calculele obținem detV=$(x_2-x_1)(\ldots)$ egalitatea cerută.

c) Polinomul g are rădăcini distincte, deci detV$\neq 0$ şi rangV=4.

d) Se verifică prin calcul direct, folosnd faptul că pentru $i=\overline{1,4}$ avem x_i rădăcini ale polinomului g, deci $x_i^4=1$ şi $f(x_i)=a+bx_i+cx_i^2+dx_i^3$.

e) Din d) obținem det(AV)=$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$detV şi cum det(AV)=det(A)$\cdot$det(V)$\neq$0, rezultă că det(A)=$f(x_1)f(x_2)\,f(x_3)\,f(x_4)$.

f) Avem A=$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ şi deci $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4$

g) Din f) avem $A^4=I_4$, deci A inversabilă şi $A^{-1}=A^3$

Subiectul IV

a) g(0)=0. h(0)=0.

b) $g'(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, deci

$g'(x)=e^{-x}\cdot\frac{x^n}{n!}\cdot h'(x)=\frac{1}{n!}f(x)=\frac{1}{n!}e^{-x}\cdot x^n$ de unde g'(x)=h(x).

c) Conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange , două funcții cu derivatele egale diferă cel mult printr-o constantă, deci există c$\in$ **R** astfel încât g(x)=h(x)+c şi folosind a) obținem c=0, deci g(x)=h(x).

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cdot x^n = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$.

e) Deoarece f(x)≥ 0, $\forall x \geq 0$ obținem $h(x)\geq 0, \forall x\geq 0$ şi deci $g(x)\geq 0, \forall x \geq 0$.

f'(x)=$-e^{-x}\cdot x^n + n\cdot e^{-x}\cdot x^{n-1} = e^{-x}\cdot x^{n-1}(n-x)>0$, $\forall x\in(0,n)$ deci f strict crescătoare pe [0,n].

Avem $g(x) = h(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{n!}\int_0^x f(x)dt = \frac{1}{n!}xf(x) = \frac{e^{-x}\cdot x^{n+1}}{n!}, \forall x\in[0,n]$

f) Fie $a_n=\frac{x^{n+1}}{n!}$, pentru x>0. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0 < 1$, *deci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pentru x=0 egalitatea este evidentă.

g) Din e) obținem $0\leq 1 - e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\leq\frac{e^{-x}\cdot x^{n+1}}{n!}$ şi, înmulțind inegalitățile cu e^x, avem $0\leq e^{-x} - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\leq\frac{x^{n+1}}{n!}, \forall x\in[0,n], \forall n\in N^*$.

Trecând la limită în inegalități, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-x} - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\right) = 0$ de unde

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\right) = e^x, \forall x\geq 0$.