Varianta 28

Subiectul I.

a) $\left|1+i\right|=\sqrt{2}$.

b) 0.

c) Ecuația tangentei este $x+2y-10=0$.

d) $LM=\sqrt{2}=MN=NP=PL$, $M=\dfrac{\pi}{2}$, deci patrulaterul *LMNP* este un pătrat.

e) $O(0,0)$ este punctul de intersecție al diagonalelor.

f) $a=13$ şi $b=0$.

Subiectul II.

1.

a) $a_6=243$.

b) Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{3}{5}$

c) $g(2)=1$.

d) $x\in\{-2,2\}$.

e) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=18$.

2.

a) $f'(x)=2^x\cdot\ln 2+3^x\cdot\ln 3$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}$.

c) $f''(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\cdot\ln 2+3\cdot\ln 3$.

e) Dreapta $Ox: y=0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției *f*.

Subiectul III.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $\det(A)=-1$, $\operatorname{rang}(A)=2$.

c) $\det(B)=-4+3\neq 0$, aşadar B este inversabilă. Obținem $B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=B$.

d) $AB=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, aşadar $AB\neq BA$.

e) Notăm $C = BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbf{R}$ astfel încât $C^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

mai mult, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 7a_n + 4b_n \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ şi se arată prin inducție că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $b_n > 0$,

deci $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $C^n \neq I_n$.

f) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm matricele $X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pentru care $X_n^2 = I_2$.

Aşadar ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții, deci mai mult de 2007.

g) În grupul $(Gl_2(\mathbf{R}), \cdot\,)$ al matricelor inversabile de ordinul 2 cu coeficienți reali, avem $A, B \in Gl_2(\mathbf{R})$, $A^2 = B^2 = I_2$ şi matricea BA are ordinul infinit.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Evident, deoarece funcția sinus este periodică, de perioadă principală 2π.

c) Dacă pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \overset{\text{a)}}{=} F'(x) \geq 0$, atunci funcția F este crescătoare pe $\mathbf{R}$ şi fiind periodică (din punctul **b)**), rezultă că F este constantă pe $\mathbf{R}$.

Deoarece $F(0) = 0$, deducem că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $F(x) = 0$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Dacă pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, din **c)** rezultă $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f(x) = F'(x) = 0$.

Atunci, pentru orice $p \in \{1, 2, ..., n\}$, avem:

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos px \cdot f(x)dx \overset{\text{d), e)}}{=} a_p \cdot S(p, p) = a_p \cdot \pi, \text{ deci } a_p = 0.$$

g) $\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{p=1}^{n} a_p^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 px\, dx + 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} a_p \cdot a_q \cdot \int_0^{2\pi} \cos px \cdot \cos qx\, dx = \pi \sum_{p=1}^{n} a_p^2.$$

Rezultă că $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.