Varianta 82

Subiectul I

a)1. b) $3\sqrt{3}$. c) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \sqrt{2}$. d) $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}\right); \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$. e) $\frac{35}{6}$. f) a=1, b=0, aplicând formula lui Moivre.

Subiectul II

1. a) $1{,}5 = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9} = \log_2 3$.

b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$ .c) $g(8) = 1$. d) x=1. e) 0.

2. a) $f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2}$. b) $2 - \frac{\pi}{4}$. c) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ strict crescătoare pe **R**.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - arctgx}{x} = 2 - 1 = 1$. e) $\frac{2}{3}\ln 2$.

Subiectul III

a) Pentru $\hat{x} = \hat{1},\ \hat{y} = \hat{0}$ obținem $I_2 \in G$, iar pentru $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$ obținem $O_2 \in G$;

b) Dacă $\hat{x} \in Z_5$ atunci $\hat{x}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$.

Daca $\hat{y}^2 = \hat{0}$ avem $\hat{x}^2 = \hat{0}$,deci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$. Daca $\hat{y}^2 = \hat{1}$ avem $\hat{x}^2 = \hat{3}$, imposibil. Dacă $\hat{y}^2 = \hat{4} \Rightarrow \hat{x}^2 = \hat{2}$, imposibil

c) Dacă $A, B \in G,$ avem $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \hat{c} & \hat{d} \\ \hat{2}\hat{d} & \hat{c} \end{pmatrix},\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in Z_5$, deci

$A + B = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{c} & \hat{b} + \hat{d} \\ \hat{2}(\hat{b} + \hat{d}) & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \in G$ şi $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{c} + \hat{2}\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c} \\ \hat{2}(\hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c}) & \hat{a}\hat{c} + \hat{2}\hat{b}\hat{d} \end{pmatrix} \in G$.

d) Cum $\hat{x}, \hat{y} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, mulțimea G are 5·5 elemente.

e) Dacă $A \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}$, $\det A = \hat{x} - \hat{2}\hat{y}^2$ şi deoarece $A \neq O_2$, folosind b) avem $\det A \neq \hat{0}$. Fie $\hat{z} \in \mathbf{Z}_5$, inversul elementului $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2$. Atunci matricea

$B = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{z} & -\hat{y}\hat{z} \\ -\hat{2}\hat{y}\hat{z} & \hat{x}\hat{z} \end{pmatrix} \in G$ şi $AB = BA = I_2$.

f) Din c) obținem că adunarea şi inmulțirea matricilor din G sunt operații interne. Adunarea şi inmulțirea matricelor din $M_2(\mathbf{Z}_5)$ fiind asociative, vor fi associative şi in G. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ 2\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \in G$ avem $-A = \begin{pmatrix} -\hat{x} & -\hat{y} \\ -\hat{2}\hat{y} & -\hat{x} \end{pmatrix} \in G$, iar dacă $A \neq O_2$ folosind e) obținem că este inversabilă. In plus se verifică prin calcul că AB=BA, $\forall A, B \in G$. Cum inmulțirea matricelor din $M_2(\mathbf{Z}_5)$ este distributivă față de adunare, această proprietate se păstrează şi in G, deci (G, +, ·) comutativ.

g) (G', +, ·) corp comutativ cu 9 elemente. $G' = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3 \right\}$

Subiectul IV

a) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3^{(n+1)^2}} > 0$, deci (a_n) strict crescător,

b) $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \dfrac{1}{3(n+1)\cdot 3^{(n+1)^2}} - a_n - \dfrac{1}{3n\cdot 3^{n^2}} \overset{a)}{=} \dfrac{1}{3^{(n+1)^2}} + \dfrac{1}{3(n+1)\cdot 3^{(n+1)^2}} - \dfrac{1}{3n\cdot 3^{n^2}} =$

$$= \frac{(3n+4)\cdot n - (n+1)\cdot 3^{2n+1}}{3n(n+1)\cdot 3^{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)(3n - 3^{2n+1} + n)}{3n(n+1)\cdot 3^{(n+1)^2}} < \frac{(n+1)(3n+1-3^{2n+1})}{3n(n+1)3^{(n+1)^2}}.$$

Se demonstrează prin inducție că $3n+1 < 3^{2n+1}$, $\forall n \in N^*$, deci $b_{n+1} - b_n < 0$, de unde (b_n) strict descrescător.

c) Din a), b) obținem $a_1 \le a_n$, $b_n \le b_1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, dar $a_n < b_n$, deci $\dfrac{1}{3} \le a_n \le b_n \le \dfrac{4}{9}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

d) Din a), b), c) obținem $(a_n),(b_n)$ convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + \dfrac{1}{3n\cdot 3^{n^2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

e) Avem $a_n < a < b_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Presupunem $a \in \mathbf{Q}$, deci $a = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbf{N}^*$ şi obținem $a_q < \dfrac{p}{q} < a_q + \dfrac{1}{3q\cdot 3^{q^2}}$. Inmulțim inegalitățile cu $q\cdot 3^{q^2}$ şi avem

$q\cdot 3^{q^2}\cdot a_q < p\cdot 3^{q^2} < q\cdot 3^{q^2}\cdot a_q + \dfrac{1}{3}$. Dar $q\cdot 3^{q^2}\cdot a_q = k \in \mathbf{Z}, p\cdot 3^{q^2} \in \mathbf{Z}$ şi

$k < p\cdot 3^{q^2} < k + \dfrac{1}{3}$ contradicție, deci $a \notin \mathbf{Q}$.

f) Fie $a_n = \frac{n^{2007}}{3^{n^2}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, deci $a_n > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2007}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^{2007}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2007} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

g) Presupunem că există polinoamele $f, g \in R[x]$, nenule, astfel incât $a_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $\dfrac{f(x+1)}{g(x+1)} - \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, cu $u, v \in R[x]$, nenule, prime intre ele.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{u(n)}{v(n)} = \dfrac{1}{2^{(n+1)^2}}$, deci $u(n) = \dfrac{v(n)}{2^{(n+1)^2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v(n)}{2^{(n+1)^2}} = 0$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = 0$, de unde u = 0, contradicție.