Varianta 84

Subiectul I.

a) $\left|\dfrac{1+i}{2-3i}\right| = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

c) Ecuația tangentei este $x+3y-4=0$

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD} = \dfrac{10}{3}$.

f) $a=2$ şi $b=11$.

Subiectul II.

1.

a) $a_{10} = 512$.

b) Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{2}{3}$.

c) $g(1)+g(2)=1$.

d) $x=1$.

e) $x_1\cdot x_2\cdot x_3 = 24$.

2.

a) $f'(x)=2x+\cos x$, $x\in \mathbf{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}-\cos 1$.

c) $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2+\cos 1$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

Subiectul III.

a) Se demonstrează prin reducere la absurd.

b) Funcția polinomială asociată polinomului f este strict crescătoare şi de grad impar, de unde rezultă că f are o unică rădăcină $a\in\mathbf{R}$.

c) Pentru polinomul din enunț, $f\in\mathbf{Q}[X]$, avem că $f(a)=0$, deci $0\in\mathbf{Q}(a)$.
Considerăm $g\in\mathbf{Q}[X]$, $g=f+1$. Avem $g(a)=f(a)+1=1$, deci $1\in\mathbf{Q}(a)$.

d) Evident.

e) Notăm $M=\left\{p+qa+ra^2 \mid p,q,r\in\mathbf{Q}\right\}$.

„$\supset$” Pentru orice $p,q,r\in\mathbf{Q}$ şi $p+qa+ra^2\in M$, alegem polinomul $g=p+qX+rX^2\in\mathbf{Q}[X]$ şi avem $p+qa+ra^2=g(a)\in\mathbf{Q}(a)$, aşadar $M\subset\mathbf{Q}(a)$.

„$\subset$” Reciproc, considerăm elementul $\alpha\in\mathbf{Q}(a)$ şi polinomul $g\in\mathbf{Q}[X]$, astfel încât $g(a)=\alpha$. Din teorema împărțirii cu rest, există şi sunt unice $q\in\mathbf{Q}[X]$ şi $p,q,r\in\mathbf{Q}$, astfel încât $g=f\cdot q+rX^2+qX+p$

iar $\alpha=g(a)=ra^2+qa+p\in M$, deci $\mathbf{Q}(a)\subset M$.

f) Deoarece $a\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ este rădăcină a lui f, avem $a^3=-3a-3\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$

Considerăm $p,q,r\in\mathbf{Q}$, astfel încât $p+qa+ra^2=0$.

Înmulțind relația precedentă cu $a\neq 0$ şi reducându-l pe a^2, rezultă:
$\left(pr-3r^2-q^2\right)\cdot a=3r^2+pq$. Deoarece $a\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, obținem $q^3+3r^2q+3r^3=0$.

Dacă $r\neq 0$, împărțind relația precedentă la $r^3\neq 0$ deducem $\left(\frac{q}{r}\right)^3+3\frac{q}{r}+3=0$,

aşadar $\alpha=\frac{q}{r}\in\mathbf{Q}$ este o rădăcină a lui f, contradicție cu punctul **a)**.

Obținem că $r=0$ şi apoi $q=0$ şi $p=0$.

g) Presupunem că $a^{2007}=t\in\mathbf{Q}$. Considerăm polinomul $g\in\mathbf{Q}[X]$, $g=X^{2007}-t$.
Din teorema împărțirii cu rest, există şi sunt unice $q\in\mathbf{Q}[X]$ şi $p,q,r\in\mathbf{Q}$, astfel încât $g=f\cdot q+rX^2+qX+p$. Deoarece $g(a)=0$, rezultă $p+qa+ra^2=0$ şi din **f)** obținem că $p=q=r=0$, deci $g=f\cdot q$. În concluzie, toate rădăcinile lui f sunt şi rădăcini ale lui g. Deoarece toate rădăcinile lui g au acelaşi modul, rezultă că şi rădăcinile a,x_2,x_3 ale lui f sunt de module egale. Rezultă $a=-\sqrt[3]{3}$.

Cum $f\left(-\sqrt[3]{3}\right)=3\cdot\sqrt[3]{3}\neq 0$, am ajuns la o contradicție, aşadar $a^{2007}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) $I_0(a)=\sin a$, $\forall\, a\geq 0$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se foloseşte primul principiu al inducției matematice şi punctul **b)**.

d) Pentru orice $x\in\mathbf{R}$, se demonstrează prin inducție că

$$\forall\, k\in\mathbf{N},\ \sin^{(k)}x=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\in[-1,1]$$

Avem: $0\leq\left|I_n(a)\right|\leq\int_0^a\frac{|a-x|^n}{n!}\cdot\left|\sin^{(n+1)}x\right|dx\leq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

e) Se foloseşte criteriul raportului.

f) Trecând la limită în inegalitatea de la **d)** şi folosind punctul **e)** şi criteriul cleştelui, obținem concluzia.

g) Din (2) rezultă $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\sin^{(2n)}(0) = 0$ şi $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$

Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in \mathbf{R}$, din **c)** obținem:

$$\sin 0 + \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin^{(2n+1)}(0) + I_{2n+1}(x) = \sin x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + I_{2n+1}(x) = \sin x$$

şi trecând la limită şi ținând cont de punctul **f)** deducem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sin x\ .$$