Varianta 63

Subiectul I.

a) $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$

b) $DE=3\sqrt{3}$.

c) $\vec{v}\cdot\vec{w}=18$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $S_{ABC}=3$.

f) $a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{4}{5}$.

Subiectul II.

1.

a) În mulțimea $\mathbf{Z}_5$, $\hat{3}^{2007}=\hat{2}$.

b) $a_5=9$.

c) $g(3)=1$.

d) $x=2$.

e) $x_1+x_2+x_3+x_4=-1$.

2.

a) $f'(x)=1+2^x\ln 2$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln 2}$.

c) $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1+2\cdot\ln 2$.

e) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+10}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{11}{10}$.

Subiectul III.

a) $\det(A)=-6$.

b) $\operatorname{rang}(A)=3$.

c) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$.

d) Evident.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Considerăm $Y\in C(A)$, astfel încât $Y^2=O_3$.

Din **e)** deducem că există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

Deoarece $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2+3c^2 & 0 & 2ac \\ 0 & b^2 & 0 \\ 6ac & 0 & a^2+3c^2 \end{pmatrix} = O_3$, obținem $a=b=c=0$, deci $Y = O_3$.

g) $Z^{2007} = O_3 \Rightarrow Z^{2048} = O_3 \Leftrightarrow \left(Z^{2^{10}}\right)^2 = O_3 \overset{\text{f)}}{\Leftrightarrow} Z^{2^{10}} = O_3 \Leftrightarrow \ldots\ Z^2 = O_3 \overset{\text{f)}}{\Leftrightarrow} Z = O_3$.

Subiectul IV.

a) Deoarece avem $\{x+1\} = \{x\}$, rezultă că $f(x+1) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Pentru $x \in [0,1)$, $f(x) = 3 + x(1-x)$ şi pentru $x \in [1,2)$, $f(x) = 3 + (x-1)(2-x)$, de unde deducem că f este continuă în $x = 1$.

c) Pentru $x \in [0,1)$, $f(x) = 3 + x - x^2$ şi obținem $F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $\forall\, x \in [0,1)$.

d) Evident, folosind faptul că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $0 \le \{x\} < 1$.

e) Se arată că funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$. În consecință, f are primitive pe $\mathbf{R}$.
Considerăm o primitivă oarecare $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a funcției *f*.
Din **d)** deducem că funcția G e strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

f) Considerăm $x > 0$.

Din **d)** avem că $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $f(t) \ge 3$, deci $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \ge 3x$ şi obținem

$\lim_{x\to\infty} F(x) \ge \lim_{x\to\infty} 3x = +\infty$, adică $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

g) Se arată că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $F(x+1) - F(x) = F(1) - F(0)$
şi $G(x+1) - G(x) = 0 \Leftrightarrow a = F(1) - F(0)$.
Aşadar pentru $a = F(1) - F(0)$, funcția G este periodică pe $\mathbf{R}$, de perioadă 1.