Varianta 78

Subiectul I.

a) $\vec{v}\cdot\vec{w}-1$.

b) $2\sqrt{3}$.

c) Tangenta prin P la hiperbolă are ecuația $2x-3y-1=0$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=3$.

f) $a=-\dfrac{1}{2}$ şi $b=-\dfrac{1}{2}$

Subiectul II.

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$.

b) Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{2}{5}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Rangul matricei este egal cu 1.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10}=I_2$.

2.

a) $f''(x)=e^x+2\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx=e-1+\ln 2$.

c) $f'(x)>0$, $\forall x\geq 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e+1$.

e) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{3x^3+4}\,dx=\dfrac{1}{9}\cdot\ln\dfrac{7}{4}$.

Subiectul III.

a) $z+\bar{z}=2a$.

b) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Pentru $c, d \in \mathbf{R}$, numărul $x = 3 + 4i$ este o soluție a ecuației $x^2 + cx + d = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 25 \\ c = -6 \end{cases}$.

e) Se folosește primul principiu de inducție și punctul **c)**.

f) Considerăm $w \in \mathbf{C}$. Din **e)** rezultă că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, există $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, astfel încât $w^n = a_n w + b_n$.

Pentru $p = -a_n \in \mathbf{R}$ și $q = -b_n \in \mathbf{R}$, alegem $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^n + pX + q$.

g) Demonstrăm, mai general, că $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, numărul $x = 3 + 4i$ nu este rădăcină pentru nici un polinom de forma $g(X) = X^n + r \in \mathbf{R}[X]$.

Din **e)** știm că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, există $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, astfel încât $x^n = a_n x + b_n$.

Mai mult, șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ verifică relațiile de recurență:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n a_2 + b_n \\ b_{n+1} = a_n b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 6 \cdot a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25 \cdot a_n \end{cases}, \ \forall\, n \in \mathbf{N},\ n \ge 2.$$

Din relațiile anterioare se demonstrează imediat, prin inducție, că $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$ și $a_n \equiv 1 (\text{mod } 5)$.

Rezultă că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \ne 0$, de unde deducem concluzia.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall\, x \in (0, \infty)$.

b) $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$, deci funcția f' este strict descrescătoare pe $x \in (0, \infty)$.

c) Pentru $k \in (0, \infty)$, funcția f este o funcție Rolle pe $[k, k+1]$ și din teorema lui Lagrange și din **a)** deducem că există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

d) Folosind succesiv punctele **b)**, **c)** și **a)**, obținem concluzia.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, avem

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}\right) \overset{\mathbf{d)}}{<} 0 \quad \text{și} \quad c_{n+1} - c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1}\right) \overset{\mathbf{d)}}{>} 0$$

deci șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător iar șirul $(c_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

f) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ avem $b_n - c_n = f(n+1) - f(n) > 0$ și folosind monotonia celor două șiruri deducem: $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $c_1 < c_n < b_n < b_1$.

Obținem că șirurile $(b_n)_{n\ge1}$ și $(c_n)_{n\ge1}$ sunt convergente, fiind monotone și mărginite.

Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

g) Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n + 2\sqrt{x}\right) = +\infty$.

h) Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, şi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b_{2n}-b_n}{\sqrt{n}}+\frac{2\sqrt{n}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{n}}\right] = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$