# Varianta 86

**Subiectul I.**

**a)** $A, C \in (d)$, iar $B \notin (d)$.

**b)** $S_{ABC} = 1$.

**c)** Perimetrul triunghiului $ABC$ este $P = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$.

**d)** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

**e)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$.

**f)** $m = \frac{2}{3}$ şi $n = \frac{5}{3}$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{5}$.

**b)** Soluțiile din $\mathbf{Z}_4$ ale ecuției sunt $\hat{2}$ şi $\hat{3}$.

**c)** $\det(A) = -1$.

**d)** $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{a}{b}$.

**e)** Calcul direct.

**2.**

**a)** $f'(x) = 2x - 2^{-x} \ln 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**b)** $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\ln 2}$.

**c)** $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $f$ este convexă pe $\mathbf{R}$.

**d)** $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 - \frac{\ln 2}{2}$.

**e)** $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 13}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{14}{13}$.

**Subiectul III.**

**a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** Calcul direct.

**c)** Deoarece $A^3 = O_3$ şi matricele $A$ şi $I_3$ comută, avem :

$$I_3 = I_3 + A^3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2).$$

**d)** Din punctul **c)** obținem că $(I_3 + A)^{-1} = I_3 - A + A^2$.

**e)** Pentru $B = A^2 \neq O_3$, avem că $A \cdot B = O_3$.

**f)** Pentru orice $z \in \mathbf{C}$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, avem $\det(X) = 1$, deci matricea $X$ e inversabilă.

**g)** Din ipoteză, pentru orice $z \in \mathbf{C}$ avem $\det(I_3 + zB) = 1$.

Pentru $z \in \mathbf{C}^*$, $1 = \dfrac{1}{z^3} \cdot \det(z \cdot I_3 + B)$.

Aşadar, pentru orice $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\det(z \cdot I_3 + B) = z^3$. Cum $-z \in \mathbf{C}^*$, obținem $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $f(z) = \det(B - z \cdot I_3) = -z^3$ şi apoi $\forall z \in \mathbf{C}$, $f(z) = \det(B - z \cdot I_3) = -z^3$.

Obținem că $f(B) = -B^3$ şi apoi $B^3 = O_3$.

**Subiectul IV.**

**a)** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**b)** Calcul direct.

**c)** Deoarece $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, rezultă că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $g(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Obținem $k = g(0) = 0$, deci $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**d)** Calcul direct.

**e)** $\lim\limits_{x \to \infty}(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x) \overset{\text{c)}}{=} \lim\limits_{x \to \infty}\left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 + x + x^2}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

**f)** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 + k + k^2} \overset{\text{c)}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1$,

deci $a_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \dfrac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

**g)** $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1+2+2^2} + \ldots + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1+n+n^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \overset{\text{f)}}{=}$

$= \lim\limits_{n \to \infty}\left(\operatorname{arctg}(n+1) - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.