Varianta 090

Subiectul I

a) 13. b) $\sqrt{2}$. c) x + y +1 = 0. d) a = 25. e) 2. f) 0.

Subiectul II

1. a) x = 0. b) 6. c) 0. d) $\frac{3}{5}$. e) $\hat{9}$.

2. a) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$. b) $\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\ln 2$. c) f strict crescătoare pe $[0,\infty)$ şi f strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$. d) $f'(1)=1$. e) $f(x)\ge 1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 0$.

Subiectul III

a) $E^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, deci $E\in H$. $I^2=I_2$, deci $I_2\in H$;

b) $P=E\in H$ şi $rang(P)=1$, $Q=I_2\in Q$ şi $rang(Q)=2$;

c) $\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}\in H$;

$\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}\in H$;

d) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in H$. Atunci $A^2=A$, deci $a^2+bc=a, b(a+d)=b, c(a+d)=c,\ bc+d^2=d$.

Obținem $a^2-d^2=a-d$, deci $(a+d)(a-d)=a-d$. Pentru $a\ne d$ avem $a+d=1$.

Pentru $a=d$ egalitățile devin $a^2+bc=a, 2ab=b, 2ac=c$. Dacă $b=0$ avem $a=0$ sau $a=1$, iar dacă $b\ne 0$ avem $a=\frac{1}{2}$ şi din a=d obținem $a+d=0$ sau $a+d=2$ sau $a+d=1$.

e) Din $B\in H$ avem $B^2=B$. B fiind inversabilă, există B^{-1}. Inmulțind egalitatea $B^2=B$ cu B^{-1} obținem $B=I_2$.

f) Evident $M\subseteq M_2(\mathbf{R})$. Demonstrăm că $M_2(R)\subseteq M$. Fie

$$Y=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\beta\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\\gamma&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\delta&0\\0&\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha-2-\delta&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\beta\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\\gamma&0\end{pmatrix}+\delta I_2+(\alpha-2-\delta)E\in M$$

g) Presupunem că există $A_1, A_2,\ldots, A_n\in H$ astfel ca $A_1+A_2+\ldots+A_n=F$.

$Tr(A_1+A_2+\ldots+A_n=Tr(A_1)+Tr(A_2)+\ldots+Tr(A_n)\in\mathbf{Z}$ (din d)). $TrF=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}\notin Z$. Deci F nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice din mulțimea H.

Subiectul IV

a) $h(x) \geq 1 - x^9, \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow \sqrt{1-x^9} \geq 1 - x^9, \forall x \in H \Leftrightarrow 1 - x^9 \geq (1-x^9)^2$, adevărat pt. că $1 - x^9 \in [0,1]$;

b) $\int_0^1 h^2(x)dx = \int_0^1 (1-x^9)dx = x - \frac{x^{10}}{10}\Big|_0^1 = \frac{9}{10}$;

c) Inegalitatea este echivalentă cu $(tf(x) - g(x))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in [a,b]$, care este adevărată.

d) Relația se obține integrând inegalitatea de la punctul c) pe intervalul [0,1] în raport cu x.

e) Relația de la punctul d) are loc dacă şi numai dacă

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

Ea este varianta integrală a inegalității lui Cauchy-Buniakovski.

f) $\left(\int_0^1 u(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot u(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 1^2\, dx \cdot \int_0^1 u^2(x)dx = \int_0^1 u^2(x)dx$;

g) Aria căutată este $A = \int_0^1 h(x)dx$. Conform pct. a) avem $\int_0^1 h(x)dx > \int_0^1 (1-x^9)dx = 0{,}9$.

Pe de altă parte, conform pct. f) avem $\left(\int_0^1 h(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 h^2(x)dx = 0{,}9$, deci

$\int_0^1 h(x)dx \leq \sqrt{0{,}9} < 0{,}95$.