Varianta 075

Subiectul I

a) 25 . b) $2\sqrt{2}$. c) x-y=4. d) L, M, N coliniare $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{LN}$ e) V== $\frac{91}{6}$. f) a=18 şi b=-26.

Subiectul II

1.a) Se verifica prin calcul direct.b) $\frac{99}{100}$.c) Probabilitatea ceruta este $\frac{3}{4}$.d) x=1 solutie unica. e) -24.

2.a) f'(x)=1-2^{-x} ln2.b) $\int_0^1 f(x)dx\Big| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln 2}$.c) f''(x)dx= $2^{-x}\cdot(\ln 2)^2>0$ $\forall$ x$\in$ **R**$\Rightarrow$f convexa pe **R**.d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1-\frac{\ln 2}{2}$ .f) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0\in\mathbf{R}\Rightarrow$ y=x asimptota oblica la $+\infty$

Subiectul III

a) f(0)=0 obtinem, daca in relatia ceruta se inlocuieste x=y=0.

b) Pentru y=-x din relatia data$\Rightarrow$f(x)+f(-x)=0$\Rightarrow$f(-x)=-f(x), $\forall$ x$\in$ **R**.

c) Fie P(n): $f(a_1+a_2+...a_n)=f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n), n\in N, a_1,a_2,...a_n\in\mathbf{R}$

Pentru n=1, P(1): $f(a_1)=f(a_1)$ este adevarata.

P(n+1): $f(a_1+a_2+...a_{n+1})=f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{n+1}), n\in N, a_1,a_2,...a_{n+1}\in\mathbf{R}$

Avem $f(a_1+a_2+...a_{n+1})=f((a_1+a_2+...+a_n)+a_{n+1})=f(a_1+a_2+...+a_n)+f(a_{n+1})=$ $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)+f(a_{n+1}), n\in N, a_1,a_2,...a_{n+1}\in\mathbf{R}$

d) Pentru $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n}$ in relatia c) avem $f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

e) f$\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n}\right)=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n},\forall\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}_+$ si $f\left(-\frac{m}{n}\right)=-f\left(\frac{m}{n}\right)=-\frac{m}{n}\,\forall$ n $\in\mathbf{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow$f(x)=x, $\forall$ x $\in$ **Q**

f) Fie b-a=c>0 $\Rightarrow\exists$ $n_0\in\mathbf{N}^*$: $\frac{1}{n_0}<c$. Deoarece şirul $\left(\frac{n}{n_0}\right)$, n $\in$ **N*** este progresie aritmetica $\Rightarrow$ cel puțin unul dintre termenii progresiei se află în (a,b).

g) Reducere la absurd: presupunem $\exists$x$\in$ **R**: f(x)$\neq$x$\Rightarrow$f(x)<x sau f(x)>x. Tratăm primul caz: f(x)<x$\Rightarrow$ $\Rightarrow\exists$r$\in$ **Q**: f(x)<r<x$\Leftrightarrow$ f(r)<f(x) dar f(r)=r $\Rightarrow$r<f(x) contradicție.

La fel se tratează şi al doilea caz.

Subiectul IV

a) f'(x)=$-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(2x+1)(2x+3)(x+1)^2}$

g'(x)=$-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+\frac{1}{x+\frac{2}{3}}=\frac{-3x-1}{(3x+5)(3x+2)(x+1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln 1=0; \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

c) f'(x)>0, $\forall$ x>0 si g'(x)<0, $\forall$ x>0 (din a)

d) Din (c)$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ strict crescatoare pe } \mathbf{R} \text{ si din (b)} \Rightarrow f(x) < \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \\ g \text{ strict descrescatoare pe } \mathbf{R} \text{ si din (b)} \Rightarrow g(x) > \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0 \end{cases}$

deci f(x)<0<g(x), $\forall$ x$\in$ **R**.

e) Se verifica prin calcul ca $a_{n+1}-a_n=g(n)>0$, $\forall n\in \mathbf{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este strict crescător şi $b_{n+1}-b_n=f(n)<0, \forall n\in \mathbf{N} \Rightarrow (b_n)_{n\in \mathbf{N}}$ strict descrescător .

f) $b_n-a_n=ln\left(1+\frac{1}{6n+3}\right)<\frac{1}{6n+3}<\frac{1}{6n}, \forall n\in \mathbf{N}^*$ si din (e)$\Rightarrow$ $b_n-a_n>0$, $\forall n\in \mathbf{N}$.

g) din e), f), $\Rightarrow a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots<b_n<\ldots<b_1 \Rightarrow$ şirurile $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ sunt mărginite si strict monotone, deci sunt convergente. Dar f) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{6n}=0 \Rightarrow$ cele două şiruri au aceeaşi limită.