Varianta 27

Subiectul I.

a) $\left|\frac{3+2i}{3-2i}\right|=1$.

b) $DE=3\sqrt{3}$.

c) Evident.

d) Punctele de intersecție sunt $A\left(\frac{6\sqrt{13}}{13},-\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$ şi $B\left(-\frac{6\sqrt{13}}{13},\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$.

e) $V_{ABCD}=\frac{35}{6}$.

f) $a=1$ şi $b=0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_2 3<2 \iff 3<2^2$, adevărat.

b) Probabilitatea căutată este $p=\frac{2}{5}$.

c) $g(8)=1$.

d) $x=1$.

e) 0.

2.

a) $f'(x)=\frac{2x^2+1}{1+x^2}$, $x\in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx=2-\frac{\pi}{4}$.

c) $f'(x)>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{2}$.

e) $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\ln 2$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) $\det(A)=0$, $\operatorname{rang}(A)=1$.

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in M\setminus N$.

d) Considerăm $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in N$. Atunci $X^2=O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 & (1)\\ b(a+d)=0 & (2)\\ c(a+d)=0 & (3)\\ d^2+bc=0 & (4)\end{cases}$, de unde

obținem $a+d=0$, sau $X=O_2$.

e) Se demonstrează prin calcul direct.

f) $V\cdot D\cdot V^{-1}=\begin{pmatrix} a+d & \dfrac{bc^2-acd}{d^2}\\ \dfrac{d^2}{c} & 0\end{pmatrix}$.

g) Considerăm matricea $E=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\in M$.

Avem $a\cdot c\neq 0$ şi pentru $V=\begin{pmatrix}\dfrac{-c}{a} & 1\\ 0 & -\dfrac{a}{c}\end{pmatrix}$ obținem, utilizând **f)**, că

$V\cdot E\cdot V^{-1}=F+G$, cu $F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$ şi $G=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Cum $F^2=G^2=O_2$, rezultă că $F, G\in N$.

Mai mult, $E=V^{-1}\cdot F\cdot V+V^{-1}\cdot G\cdot V\in N$, de unde rezultă concluzia.

Subiectul IV.

a) $f'(x)=1-\cos x$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$.

b) Dacă $x\geq\dfrac{\pi}{2}$, evident $x>1\geq \sin x$.

Dacă $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, pe cercul trigonometric, considerăm punctele $M(\cos x, \sin x)$ şi $A(1,0)$. Deoarece lungimea arcului mic de cerc de extremități A şi M este mai mare decât distanța de la M la Ox, deducem $x\geq y_M$, adică $x\geq \sin x$, $\forall\, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $I_1=1-\cos 2006$.

d) Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ şi $x\in[0,1]$, aplicând **b)** obținem $0\leq\sin(x^n)\leq x^n$, de unde, integrând pe intervalul $[0,1]$ şi trecând la limită în inegalitatea obținută, deducem concluzia.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $x > 0$ $\frac{-1}{x^n} \leq \frac{\cos(x^n)}{x^n} \leq \frac{1}{x^n}$.

Integrând această inegalitate pe intervalul $[1, 2006]$ şi trecând apoi la limită, obținem concluzia.

g) Se trece la limită în egalitatea de la **e).**

Ținând cont de **f)** şi de **d)** deducem concluzia.