Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor reale $a=2021-\sqrt{2}$ și $b=2021+\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(\sqrt{x}+3\right)+\log_3\left(\sqrt{x}-3\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,0)$, $N(8,3)$ și $P(6,3)$. Determinați coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A\cdot\cos A=\sin A$. Arătați că $A=\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_2 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, unde $\left(A(a)\right)^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-m(x+y)+m(m+1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2\circ 2=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2\circ 1=5$, atunci $2\circ 5=1$.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $\left(mx^3\right)\circ\left(-mx^2\right)=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.