

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $5 - 2\sqrt{6}$, 1 și $5 + \sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f \circ f)(1) = 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = 32$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 1)$ și $B(2, 5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p** 6. Arătați că $(\operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = 2\operatorname{ctg} 2x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + (a+1)z = a \\ x + ay - z = 4 \\ 2x - ay + 4z = -4 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -9$.
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) , atunci $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 6$, arătați că $f(-1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X^2 + 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) - x \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 3(f(x) - x \ln x) dx = 7$.

5p b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3} dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

5p c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(5 - 2\sqrt{6})(5 + \sqrt{24}) = (5 - \sqrt{24})(5 + \sqrt{24}) = 5^2 - \sqrt{24}^2 =$ $= 25 - 24 = 1^2$, deci numerele $5 - 2\sqrt{6}$, 1 și $5 + \sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	$f(1) = a + 1$, $(f \circ f)(1) = a(a + 1) + 1$, pentru orice număr real nenul a $a(a + 1) + 1 = 1$, deci $a(a + 1) = 0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a = -1$	3p 2p
3.	$2^x \cdot 2^{-4+2x} = 32 \Rightarrow 2^{3x-4} = 2^5$, de unde obținem $3x - 4 = 5$ $x = 3$	3p 2p
4.	$A_5^2 = \frac{5!}{3!} =$ $= 4 \cdot 5 = 20$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 1$ și, cum $d \perp AB$, obținem $m_d = -1$ Ecuația dreptei d este $y - 5 = -1(x - 2)$, adică $y = -x + 7$	3p 2p
6.	$(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x} - 1\right) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} =$ $= \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$ $= 4 - 2 - 2 - 4 - 1 - 4 = -9$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{vmatrix} = -3a - 6$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$; sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	2p 3p
c)	Adunând ultimele două ecuații ale sistemului, obținem $x_0 + z_0 = 0$ $y_0 + z_0 = a$, $ay_0 - 2z_0 = 4$, deci $(a + 2)(y_0 - 2) = 0$ și, cum $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, obținem $y_0 = 2$, deci $x_0 + y_0 + z_0 = 2$	2p 3p
2.a)	$f = X^3 - 3X^2 + 2X + 6 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 6 =$ $= -1 - 3 - 2 + 6 = 0$	3p 2p

b)	$f = (X - 3)(X^2 + 2) + 6 + m$, pentru orice număr real m f este divizibil cu polinomul g dacă $6 + m = 0$, de unde obținem $m = -6$	3p 2p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$ și $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9 - 3m$, pentru orice număr real m $9 - 3m = 0$, deci $m = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot e^x - \sqrt{x+1} \cdot e^x =$ $= 1 + \frac{1-2x-2}{2e^x\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}, x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = -\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $g'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow g$ este crescătoare pe $\left(-1, -\frac{1}{2}\right]$, $g'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow g$ este descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, deci $g(x) \leq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ și, cum $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}$, obținem $f(x) - x \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 3(f(x) - x \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$ $= 8 - 1 = 7$	3p 2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x^3} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = \ln x \Big _1^e - \frac{\ln x}{x} \Big _1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx =$ $= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big _1^e = 2 - \frac{2}{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} \geq 0$, pentru orice $x \in [1, e]$, deci $\mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx =$ $= \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x + \ln x} dx = \int_1^e (x + \ln x)' \cdot \frac{1}{x + \ln x} dx = \ln(x + \ln x) \Big _1^e = \ln(e+1) > \ln e = 1$	2p 3p