

Varianta 091

SUBIECTUL I

- a) $\sqrt{2}$. b) $a = -2$. c) $\sqrt{34}$. d) $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. e) $S = \frac{13}{2}$. f) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = 2$. b) $\frac{7}{2}$. c) $\hat{0}$. d) $r = 2, a_1 = 3$. e) $n = 21$.

2.

a) $f(x) - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+2} = f(x) + \frac{2x-1-x-2}{(2x-1)(x+2)} = 0, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

b) Din a) avem că $f(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x+2}$. Atunci

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2x-1) - \ln(x+2) + C, x \geq 1.$$

c) $x = \frac{1}{2}, x = -2$ sunt asimptote verticale. d) $-\frac{1}{2}$. e) $\frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = -2$. b) $\text{rang}(A) = 2$. c) $b = 1, a = \frac{1}{2}$.

d) Fie $U, V \in C(A)$. Atunci $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$, deci $UV \in C(A)$.

e) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C(A), t = x, z = 2y$, adică $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$ și luăm $a = x, b = y$.

f) Dacă $Y \in C(A), Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ și $Y^2 = O_2$, atunci $\begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab \\ 4ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de

unde obținem $a = b = 0$, adică $Y = O_2$.

g) Fie $Z \in C(A), Z^{2007} = O_2$. Atunci $Z^{2008} = O_2$ și notând $Y = Z^{1004} \in C(A)$, obținem $Y^2 = O_2$ iar din f) găsim că $Y = O_2$. Așadar, din $Z^{2008} = O_2 \Rightarrow Z^{1004} = O_2$ și procedând analog, avem $Z^{502} = O_2, Z^{251} = O_2, Z^{252} = O_2$ și așa mai departe până se ajunge la $Z^2 = O_2$ de unde rezultă $Z = O_2$.

SUBIECTUL IV

a) Deoarece $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$, avem că $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f(0) = f(2\pi) = \dots = f(2006\pi) = 0$, iar $f(\pi) = f(3\pi) = \dots = f(2007\pi) = \pi$, deci

$$\sum_{k=0}^{2007} f(k\pi) = 1004\pi.$$

c) Cum $f(x) = x, \forall x \in [0, \pi]$, avem că $f'(x) = 1, \forall x \in [0, \pi]$, deci $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

d) $F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0, \pi]$.

e) Deoarece $0 \leq \arccos t \leq \pi, \forall t \in [-1, 1]$, avem că $0 \leq f(x) \leq \pi, \forall x \in \mathbf{R}$.

f) Dacă G este o primitivă pentru funcția f , atunci $G' = f \geq 0$. Funcția G este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

g) $F(2\pi) = \pi^2$.