

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = \sqrt{8}(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 - 6x + 5} = x - 1$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p 6. Arătați că $(\sin x + 7 \cos x)^2 + (7 \sin x - \cos x)^2 = 50$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & m+1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$, pentru orice număr real m .
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(5)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x \circ \left(-\frac{2}{3}\right) = x$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ (n-1) < 17$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f **nu** are puncte de inflexiune.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (e^x + 1) f(x) dx = 1$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{3}{2}$.
- 5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{e^x f(x)}$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n = \sqrt{16} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2} =$ $= 4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4 = 2^2$	2p 3p
2.	$f(a) = a^2 - a + 2, g(a) = a + 1$ $a^2 - a + 2 = a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$	2p 3p
3.	$2x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ $x = 2$ care convine	3p 2p
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere	1p 1p 3p
5.	$m_{AB} = -1$, deci panta dreptei d este $m_d = -1$ Mijlocul segmentului OA este punctul $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, deci ecuația dreptei d este $y = -x + \frac{3}{2}$	2p 3p
6.	$(\sin x + 7 \cos x)^2 = \sin^2 x + 14 \sin x \cos x + 49 \cos^2 x$ $(7 \sin x - \cos x)^2 = 49 \sin^2 x - 14 \sin x \cos x + \cos^2 x \Rightarrow (\sin x + 7 \cos x)^2 + (7 \sin x - \cos x)^2 =$ $= 50 \sin^2 x + 50 \cos^2 x = 50(\sin^2 x + \cos^2 x) = 50$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(m) + A(-m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & m+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -m & -m+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real m	3p 2p
c)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \det(A(2)) = -1 \Rightarrow (A(2))^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $X = (A(2))^{-1} \cdot A(5) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$ $= 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

b)	$x \circ \left(-\frac{2}{3}\right) = 3(x+1)\left(-\frac{2}{3}+1\right) - 1 = 3(x+1) \cdot \frac{1}{3} - 1 =$ $= x+1-1 = x$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$3(n+1)n-1 < 17 \Leftrightarrow n^2+n-6 < 0$ $n \in (-3, 2)$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$, $n=1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+6)(x-2) - (x^2+6x) \cdot 1}{(x-2)^2} =$ $= \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x}{x(x-2)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x-2} = 8$, deci dreapta de ecuație $y = x+8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$, $x \in (2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty) \Rightarrow f$ nu are puncte de inflexiune	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (e^x+1)f(x) dx = \int_0^1 (e^x+1) \cdot \frac{1}{e^x+1} dx = \int_0^1 1 dx = x \Big _0^1 =$ $= 1-0=1$	3p 2p
b)	$\int_0^1 \frac{x}{f(x)} dx = \int_0^1 x(e^x+1) dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 x dx =$ $= (x-1)e^x \Big _0^1 + \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	2p 3p
c)	$g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \Rightarrow V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx =$ $= \pi \ln(e^x+1) \Big _0^1 = \pi \ln \frac{e+1}{2}$	2p 3p