Centrul Educațional Math Academy®

Meditații la Matematică Online Live • academiademate.ro

Evaluare Națională • Pregătire de admitere • Olimpiade
Clasele V–VIII

TEORIE ȘI EXEMPLE EVALUARE NAȚIONALĂ

Toată teoria de gimnaziu, pe fișe,
cu probleme rezolvate pas cu pas.

Matematică clasele V–VIII ▪ 49 de fișe
Teorie completă ▪ Exemple rezolvate

prof. Andrei Octavian Dobre

Gradul didactic I • Evaluator național E.N. și Bacalaureat

academiademate.ro

MATH ACADEMY®

Cuprins

Mulțimi. Mulțimile de numere 3
Operații cu mulțimi 5
Divizibilitate în ℕ 7
Numere prime. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. 9
Operații cu numere naturale 11
Fracții ordinare și fracții zecimale 13
Rapoarte și proporții 15
Mărimi proporționale 17
Procente. Probleme practice 19
Numere întregi și raționale 21
Puteri 23
Rădăcina pătrată. Radicali 25
Medii. Numere reale 27
Calcul algebric 29
Rapoarte de numere reale 31
Ecuații și inecuații 33
Sisteme de ecuații 35
Funcții 37
Puncte în plan. Reperul cartezian 39
Organizarea datelor. Probabilități 41
Punct, dreaptă, plan, segment 43
Perechi de unghiuri 45
Triunghiul 47
Linii importante în triunghi 49
Triunghiuri particulare 51
Patrulatere. Paralelogramul 53
Paralelograme particulare 55
Trapezul 57
Teorema lui Thales. Asemănarea 59
Relații metrice în triunghiul dreptunghic 61
Trigonometrie în triunghiul dreptunghic 63
Cercul 65
Poligoane regulate 67
Arii ale figurilor plane 69
Simetrie și transformări geometrice 71
Puncte, drepte și plane 73
Paralelism în spațiu 75
Perpendicularitate în spațiu 77
Unghiuri în spațiu 79
Prisma. Paralelipipedul. Cubul 81
Piramida 83
Trunchiul de piramidă 85
Cilindrul circular drept 87
Conul circular drept 89
Sfera 91
Arii și volume — tabel de sinteză 93
Unități de măsură 95
Greșeli frecvente 97
Notații și simboluri 98

ALGEBRĂ · CLASELE V–VIII

Mulțimi. Mulțimile de numere

Notații, apartenență, incluziune, mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Fișa 1

Noțiunea de mulțime

O **mulțime** este o colecție de obiecte distincte, numite **elemente**. Se notează cu litere mari: A, B, M; elementele cu litere mici.

- $x \in A$ — x **aparține** mulțimii A;
- $x \notin A$ — x nu aparține lui A;
- $\emptyset$ — mulțimea **vidă** (fără niciun element);
- $\text{card}(A)$ sau $|A|$ — numărul de elemente (cardinalul);
- $A \subset B$ — A este **inclusă** în B: orice element al lui A este și element al lui B;
- $A = B \iff A \subset B$ și $B \subset A$.

MODURI DE A DESCRIE O MULȚIME

Prin enumerare	$A = \{1, 3, 5, 7\}$
Prin proprietate	$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, \ x < 8\}$
Cu diagrama Venn--Euler	elementele se scriu în interiorul unei curbe închise

Mulțimile de numere

Mulțime	Denumire	Descriere
$\mathbb{N}$	numere naturale	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}$	numere întregi	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$, $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$
$\mathbb{Q}$	numere raționale	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ sunt numerele care se pot scrie ca fracție
$\mathbb{R}$	numere reale	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = numere **iraționale**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

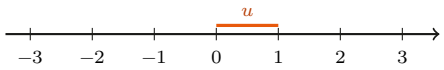
Numere iraționale

Numere care **nu** se pot scrie sub formă de fracție. Scrierea lor zecimală este infinită și neperiodică.

$$\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt[3]{5}, \ \pi, \ 0{,}1234\dots$$

Axa numerelor

Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe axă și reciproc.



u = unitatea de măsură; O = originea.

ATENȚIE Orice număr natural este întreg, orice întreg este rațional, orice rațional este real — dar nu și invers. De exemplu $-3 \in \mathbb{Z}$, dar $-3 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, dar $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 1.1

Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 12\}$ și precizați $\text{card}(A)$.

REZOLVARE

Divizorii lui 12 se obțin din descompunerea $12 = 2^2 \cdot 3$:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}, \qquad \text{card}(A) = 6.$$

Verificare cu formula numărului de divizori: $(2+1)(1+1) = 6$. ✓

Exemplul 1.2

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $-5 \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$; d) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

REZOLVARE

a) **Fals** — $\mathbb{N}$ conține doar numere nenegative, iar $-5 < 0$.
b) **Adevărat** — $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Z}$.
c) **Adevărat** — $\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$.
d) **Fals** — $\sqrt{2}$ este irațional, deci $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemplul 1.3

Arătați că numărul $a = 0,(6)$ este rațional.

REZOLVARE

Este o fracție periodică simplă, cu perioada formată dintr-o cifră:

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Cum $2 \in \mathbb{Z}$ și $3 \in \mathbb{Z}^*$, rezultă $a \in \mathbb{Q}$.

Exemplul 1.4

Determinați numerele întregi x pentru care $\frac{12}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

REZOLVARE

Trebuie ca $x + 2$ să fie divizor întreg al lui 12:

$$x + 2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}.$$

Scăzând 2 din fiecare valoare:

$$x \in \{-14,\ -8,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 10\}.$$

Exemplul 1.5

Scrieți mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$ prin enumerarea elementelor și calculați suma acestora.

REZOLVARE

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \qquad \text{card}(B) = 7$$

Suma: $-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 0$, deoarece termenii opuși se reduc.

ALGEBRĂ · CLASELE V–VIII

Operații cu mulțimi

Reuniune, intersecție, diferență, produs cartezian

Fișa 2

Definiții

Operație	Notație și definiție	Se citește
Reuniunea	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$	elementele din A **sau** din B
Intersecția	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$	elementele comune
Diferența	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$	elementele din A care nu sunt în B
Produsul cartezian	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$	mulțimea perechilor ordonate

Proprietăți

- $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitate)
- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

Mulțimi disjuncte și cardinal

Mulțimile A și B sunt **disjuncte** dacă $A \cap B = \emptyset$.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

Dacă $\text{card}(A) = n$, mulțimea A are 2^n submulțimi.

Intervale de numere reale

Interval	Mulțime	Interval	Mulțime
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Capătul **inclus** se marchează cu paranteză dreaptă [sau], capătul **exclus** cu paranteză rotundă. Simbolurile $-\infty$ și $+\infty$ nu sunt numere, deci sunt **întotdeauna** excluse.

DE REȚINUT $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$ și $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, pentru $a \geq 0$.

Exemple rezolvate

Exemplul 2.1

Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

REZOLVARE

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{4, 5\}$
$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$
$B \setminus A = \{6, 7\}$

Verificare cu formula cardinalului: $\text{card}(A \cup B) = 5 + 4 - 2 = 7$. ✓

Exemplul 2.2

Determinați $A \cap B$ și $A \cup B$, unde $A = [-2;\, 3)$ și $B = (1;\, 5]$.

REZOLVARE

Reprezentăm intervalele pe axă și citim porțiunile comune, respectiv reunite:

$$A \cap B = (1;\, 3), \qquad A \cup B = [-2;\, 5].$$

La intersecție se ia capătul **mai restrictiv**: în 3 ambele intervale nu îl conțin pe 3 (din A), iar în 1 capătul este exclus (din B).

Exemplul 2.3

Mulțimea A are 4 elemente. Câte submulțimi are A?

REZOLVARE

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n:

$$2^4 = 16 \text{ submulțimi},$$

dintre care $\emptyset$ și A însăși.

Exemplul 2.4

Într-o clasă de 30 de elevi, 18 joacă fotbal, 15 joacă baschet, iar 7 practică ambele sporturi. Câți elevi nu practică niciunul dintre cele două sporturi?

REZOLVARE

Fie F și B mulțimile respective:

$$\text{card}(F \cup B) = \text{card}(F) + \text{card}(B) - \text{card}(F \cap B) = 18 + 15 - 7 = 26.$$

Deci $30 - 26 = 4$ elevi nu practică niciunul dintre sporturi.

Exemplul 2.5

Determinați $A \setminus B$ și $B \setminus A$, unde $A = (-\infty;\, 2]$ și $B = (0;\, 5)$.

REZOLVARE

$$A \setminus B = (-\infty;\, 0], \qquad B \setminus A = (2;\, 5).$$

La $A \setminus B$ se păstrează din A tot ce nu este în B: capătul 0 rămâne inclus, fiindcă $0 \notin B$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Divizibilitate în $\mathbb{N}$

Divizori, multipli, criterii de divizibilitate

Fișa 3

Definiție

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Spunem că b **divide** a (notăm $b \mid a$) dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c$.

- $b \mid a$ se citește: „b divide a";
- $a \vdots b$ se citește: „a se divide cu b";
- b se numește **divizor** al lui a;
- a se numește **multiplu** al lui b;
- D_a = mulțimea divizorilor lui a;
- M_b = mulțimea multiplilor lui b.

Proprietăți ale relației de divizibilitate

1. $1 \mid n$ și $n \mid n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
2. $n \mid 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
3. dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$;
4. dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$;
5. dacă $d \mid a$, atunci $d \mid a \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
6. dacă $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = b$;
7. dacă $a \mid b$ și $b \neq 0$, atunci $a \leq b$.

Criterii de divizibilitate

Divizor	Criteriu — numărul n se divide cu ...
2	ultima cifră este pară: $u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
3	suma cifrelor $S(n)$ se divide cu 3
4	numărul format din ultimele două cifre se divide cu 4
5	ultima cifră este 0 sau 5
9	suma cifrelor $S(n)$ se divide cu 9
10	ultima cifră este 0 (10^k: ultimele k cifre sunt 0)
25	numărul format din ultimele două cifre este 00, 25, 50 sau 75
6	se divide simultan cu 2 și cu 3
15	se divide simultan cu 3 și cu 5

ATENȚIE Criteriul „se divide cu $a \cdot b$ dacă se divide cu a și cu b" este valabil **numai** dacă a și b sunt prime între ele. De exemplu $36 \vdots 4$ și $36 \vdots 6$, dar 36 **nu** se divide cu $4 \cdot 6 = 24$, pentru că $(4, 6) = 2 \neq 1$. În schimb $36 \vdots 4$ și $36 \vdots 9$ garantează $36 \vdots 36$, fiindcă $(4, 9) = 1$.

Exemple rezolvate

Exemplul 3.1

Determinați cifra a astfel încât numărul $\overline{3a4}$ să se dividă cu 3.

REZOLVARE

Aplicăm criteriul de divizibilitate cu 3: suma cifrelor trebuie să fie multiplu de 3.

$$S = 3 + a + 4 = 7 + a \vdots 3$$

Cum $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, avem $7 + a \in \{7, 8, \ldots, 16\}$; multiplii de 3 din acest interval sunt 9, 12 și 15, deci

$$a \in \{2, 5, 8\}.$$

Exemplul 3.2

Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{a45b}$ să se dividă cu 10 și cu 9.

REZOLVARE

Din divizibilitatea cu 10: ultima cifră este 0, deci $b = 0$.
Din divizibilitatea cu 9: $a + 4 + 5 + 0 = a + 9 \ \vdots \ 9$, deci $a \in \{0, 9\}$. Cum a este prima cifră, $a \neq 0$, prin urmare

$$a = 9, \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{a45b} = 9450.$$

Exemplul 3.3

Arătați că numărul $n = 2^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 7$ se divide cu 8.

REZOLVARE

Dăm factor comun:

$$n = 2^3(5 + 7) = 8 \cdot 12.$$

Cum n se scrie ca produs dintre 8 și un număr natural, rezultă $8 \mid n$.

Exemplul 3.4

Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{2a3b}$ să se dividă cu 5 și cu 9.

REZOLVARE

Divizibilitate cu 5: $b \in \{0, 5\}$.
Divizibilitate cu 9: $2 + a + 3 + b = 5 + a + b \ \vdots \ 9$.

- dacă $b = 0$: $5 + a \ \vdots \ 9 \Rightarrow a = 4$;
- dacă $b = 5$: $10 + a \ \vdots \ 9 \Rightarrow a = 8$.

Numerele sunt 2430 și 2835.

Exemplul 3.5

Arătați că suma a trei numere naturale consecutive se divide cu 3.

REZOLVARE

Fie numerele n, $n + 1$, $n + 2$, cu $n \in \mathbb{N}$:

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1).$$

Cum $n + 1 \in \mathbb{N}$, rezultă $3 \mid S$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Numere prime. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

Descompunere în factori primi, algoritmi de calcul

Fișa 4

Numere prime

Un număr natural $p \geq 2$ este **prim** dacă are exact doi divizori: 1 și p.

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

- 2 este singurul număr prim par;
- 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse;
- numerele ≥ 2 care nu sunt prime se numesc **compuse**.

Numere prime între ele

a și b sunt **prime între ele** (relativ prime) dacă $(a, b) = 1$, adică singurul divizor comun este 1.

$$(8, 15) = 1 \Rightarrow 8 \text{ și } 15 \text{ prime între ele}$$

Două numere prime distincte sunt întotdeauna prime între ele.

Descompunerea în factori primi

Orice număr natural $n \geq 2$ se scrie în mod unic (până la ordinea factorilor) sub forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \ldots\ \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad p_i \text{ prime distincte, } \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$

NUMĂRUL DIVIZORILOR

$$\text{card}(D_n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ \ldots\ \cdot (\alpha_k + 1)$$

Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun

	C.m.m.d.c. — (a, b)	C.m.m.m.c. — $[a, b]$
Definiție	$d = (a, b)$ dacă $d \mid a, d \mid b$ și orice divizor comun d' verifică $d' \mid d$	$m = [a, b]$ dacă $a \mid m, b \mid m$ și m divide orice multiplu comun
Algoritm	se descompun a și b în factori primi; se iau factorii **comuni**, o singură dată, la exponentul cel mai **mic**	se iau factorii **comuni și necomuni**, o singură dată, la exponentul cel mai **mare**

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \qquad (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b$$

PROPRIETĂȚI UTILE Dacă $d = (a, b)$, atunci $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$ cu $(x, y) = 1$.
Dacă $a \mid n$ și $b \mid n$, atunci $[a, b] \mid n$. Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

Exemple rezolvate

Exemplul 4.1

Determinați $(180,\ 240)$ și $[180,\ 240]$.

REZOLVARE

Descompunem în factori primi:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5.$$

C.m.m.d.c. — factori comuni la exponentul **mic**: $(180, 240) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
C.m.m.m.c. — factori comuni și necomuni la exponentul **mare**: $[180, 240] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Verificare: $(a, b) \cdot [a, b] = 60 \cdot 720 = 43\,200 = 180 \cdot 240$. ✓

Exemplul 4.2

Un florar are 84 de trandafiri și 126 de lalele. Vrea să facă buchete identice, folosind toate florile. Care este numărul **maxim** de buchete?

REZOLVARE

Numărul de buchete trebuie să dividă simultan 84 și 126, iar cel maxim este c.m.m.d.c.:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \qquad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \;\Rightarrow\; (84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

Se pot face 42 de buchete, fiecare cu 2 trandafiri și 3 lalele.

Exemplul 4.3

Câți divizori naturali are numărul 360?

REZOLVARE

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \;\Rightarrow\; \text{card}(D_{360}) = (3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Exemplul 4.4

Aflați cel mai mic număr natural nenul care se divide simultan cu 12, 18 și 30.

REZOLVARE

Numărul căutat este c.m.m.m.c.:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$[12, 18, 30] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

Exemplul 4.5

Două becuri se aprind la fiecare 12 secunde, respectiv 20 de secunde. Dacă s-au aprins simultan la ora $9{:}00$, peste cât timp se aprind din nou simultan?

REZOLVARE

$$[12, 20] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ secunde} = 1 \text{ minut}.$$

Se aprind simultan la ora $9{:}01$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Operații cu numere naturale

Teorema împărțirii cu rest, ordinea operațiilor, sisteme de numerație

Fișa 5

Teorema împărțirii cu rest

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, există și sunt unice $c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a = b \cdot c + r, \qquad 0 \leq r < b$$

unde a = deîmpărțit, b = împărțitor, c = cât, r = rest.

- $b \mid a \iff r = 0$;
- restul este **întotdeauna** mai mic decât împărțitorul;
- la împărțirea cu b se obțin b resturi posibile: $0, 1, \ldots, b-1$;
- în $\mathbb{Z}$: $a = b \cdot c + r$, cu $0 \leq r < |b|$.

Proprietățile operațiilor în $\mathbb{N}$

	Adunare	Înmulțire
Comutativitate	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativitate	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Element neutru	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivitate	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ (factor comun: $a \cdot b \pm a \cdot c = a(b \pm c)$)	

Ordinea efectuării operațiilor

1. paranteze: rotunde ( ), drepte [ ], acolade { };
2. ridicări la putere și radicali;
3. înmulțiri și împărțiri, în ordinea scrierii;
4. adunări și scăderi, în ordinea scrierii.

Sume remarcabile

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

Numărul termenilor: $\dfrac{\text{ultimul} - \text{primul}}{\text{rația}} + 1$.

Scrierea numerelor

Forma zecimală	$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$
Baza 2	cifrele sunt 0 și 1; $\overline{a_k \ldots a_0}^{(2)} = a_k \cdot 2^k + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$
Ultima cifră	$u(n)$ — se determină din periodicitatea puterilor: $u(2^n)$: $2, 4, 8, 6$; $u(3^n)$: $3, 9, 7, 1$; $u(7^n)$: $7, 9, 3, 1$; $u(5^n) = 5$, $u(6^n) = 6$

Exemple rezolvate

Exemplul 5.1

La împărțirea unui număr natural la 7 se obține câtul 12 și restul 5. Aflați numărul.

REZOLVARE

Din teorema împărțirii cu rest, $a = b \cdot c + r$ cu $0 \leq r < b$:

$$a = 7 \cdot 12 + 5 = 84 + 5 = 89.$$

Condiția $r < b$ este verificată: $5 < 7$. ✓

Exemplul 5.2

Calculați $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

REZOLVARE

Aplicăm formula sumei primelor n numere naturale nenule:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Exemplul 5.3

Determinați ultima cifră a numărului 3^{2026}.

REZOLVARE

Ultimele cifre ale puterilor lui 3 se repetă din 4 în 4: $3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9, \ldots$
Împărțim exponentul la 4: $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, deci restul este 2. Ultima cifră este a doua din grup:

$$u\left(3^{2026}\right) = 9.$$

Exemplul 5.4

Determinați numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul egal cu restul.

REZOLVARE

Din $a = 6c + r$ cu $c = r$ și $0 \leq r < 6$:

$$a = 6r + r = 7r, \qquad r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Numerele sunt 0, 7, 14, 21, 28, 35.

Exemplul 5.5

Calculați $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$.

REZOLVARE

Dăm factor comun 2 și folosim suma primelor 50 de numere naturale nenule:

$$S = 2(1 + 2 + \cdots + 50) = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2550.$$

Exemplul 5.6

Aflați ultima cifră a numărului $N = 2^{15} + 7^{22}$.

REZOLVARE

$u(2^n)$ are perioada $2, 4, 8, 6$; $15 = 4 \cdot 3 + 3$, deci $u(2^{15}) = 8$.
$u(7^n)$ are perioada $7, 9, 3, 1$; $22 = 4 \cdot 5 + 2$, deci $u(7^{22}) = 9$.
Rezultă $u(N) = u(8 + 9) = u(17) = 7$.

ARITMETICĂ · CLASELE V–VI

Fracții ordinare și fracții zecimale

Operații, transformări, comparare

Fișa 6

Fracții ordinare

Notație	$\frac{a}{b}$, cu a = numărător, b = numitor, $b \neq 0$
Subunitară	$a < b \quad (\frac{a}{b} < 1)$
Echiunitară	$a = b \quad (\frac{a}{b} = 1)$
Supraunitară	$a > b \quad (\frac{a}{b} > 1)$
Ireductibilă	$(a, b) = 1$
Echivalente	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$
Amplificare / simplificare	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, $k \neq 0$ $\qquad \frac{a : k}{b : k}$, k divizor comun

Operații cu fracții

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

COMPARARE

Cu același numitor: mai mare este cea cu numărătorul mai mare. Cu același numărător: mai mare este cea cu numitorul mai mic. În general: se aduc la același numitor sau se compară produsele încrucișate.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

Tipul fracției	Formula de transformare
Zecimală finită	$\overline{a, b_1 b_2 \ldots b_k} = \frac{\overline{a b_1 b_2 \ldots b_k}}{10^k}$
Periodică simplă	$a, \overline{(b_1 \ldots b_k)} = a + \frac{\overline{b_1 \ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}}$
Periodică mixtă	$a, c_1 \ldots c_p \overline{(b_1 \ldots b_k)} = a + \frac{\overline{c_1 \ldots c_p b_1 \ldots b_k} - \overline{c_1 \ldots c_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{p}}$

DE REȚINUT O fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ se scrie ca fracție zecimală **finită** $\iff$ numitorul b are în descompunere doar factorii primi 2 și 5. Altfel, scrierea este periodică.

Exemple rezolvate

Exemplul 6.1

Ordonați crescător fracțiile $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$.

REZOLVARE

Aducem la același numitor; $[4, 6, 12] = 12$:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \qquad \frac{5}{6} = \frac{10}{12}, \qquad \frac{7}{12} = \frac{7}{12}.$$

Cum $7 < 9 < 10$, obținem $\frac{7}{12} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Exemplul 6.2

Transformați $2,(45)$ în fracție ordinară ireductibilă.

REZOLVARE

Este o fracție periodică simplă, cu perioada de două cifre:

$$2,(45) = 2 + \frac{45}{99} = 2 + \frac{5}{11} = \frac{22+5}{11} = \frac{27}{11}.$$

Cum $(27, 11) = 1$, fracția este ireductibilă.

Exemplul 6.3

Calculați $E = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{6}$.

REZOLVARE

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$E = \frac{11}{12} : \frac{11}{6} = \frac{11}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Exemplul 6.4

Simplificați fracția $\frac{144}{180}$ până devine ireductibilă.

REZOLVARE

$$(144, 180) = 36 \Rightarrow \frac{144}{180} = \frac{144 : 36}{180 : 36} = \frac{4}{5}.$$

Exemplul 6.5

Aflați x din egalitatea $\frac{x}{15} = \frac{2}{5}$.

REZOLVARE

Fracțiile sunt echivalente, deci produsele încrucișate sunt egale:

$$5x = 30 \Rightarrow x = 6.$$

ARITMETICĂ · CLASA A VI-A

Rapoarte și proporții

Proporții derivate, șir de rapoarte egale

Fișa 7

Raport

Raportul numerelor a și b ($b \neq 0$) este câtul $\frac{a}{b}$.

- $\frac{a}{b} = k$ — k se numește **valoarea raportului**;
- rapoartele se pot amplifica și simplifica.

Proporție

Egalitatea a două rapoarte:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a, d — **extremii**; b, c — **mezii**.

Proprietatea fundamentală a proporțiilor

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$ (produsul mezilor = produsul extremilor)

AFLAREA UNUI TERMEN NECUNOSCUT

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; \qquad d = \frac{b \cdot c}{a}$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c}; \qquad c = \frac{a \cdot d}{b}$$

Proporții derivate

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c}{d},\ m \neq 0$$

Șir de rapoarte egale

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k \implies \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = k$$

Mai general, pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nu toate nule:

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{m_1 b_1 + m_2 b_2 + \cdots + m_n b_n} = k$$

PROCEDEU

Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ rezultă $a = bk$, $c = dk$ — se înlocuiește în condiția problemei și se află k.

Exemple rezolvate

Exemplul 7.1

Aflați x din proporția $\frac{x}{6} = \frac{15}{18}$.

REZOLVARE

Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$18x = 6 \cdot 15 \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5.$$

Exemplul 7.2

Știind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}$ și $a+b=32$, aflați a și b.

REZOLVARE

Folosim proprietatea șirului de rapoarte egale:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{a+b}{3+5}=\frac{32}{8}=4.$$

Deci $a=3\cdot 4=12$ și $b=5\cdot 4=20$. Verificare: $12+20=32$. ✓

Exemplul 7.3

Știind că $\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$, calculați $\frac{a+b}{b}$.

REZOLVARE

Aplicăm proporția derivată $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{3+7}{7}=\frac{10}{7}.$$

Exemplul 7.4

Numerele a, b, c verifică $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$ și $a+b+c=60$. Aflați numerele.

REZOLVARE

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{2+3+5}=\frac{60}{10}=6$$

$$a=12,\qquad b=18,\qquad c=30$$

Exemplul 7.5

Știind că $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$, calculați $\frac{a-b}{a+b}$.

REZOLVARE

Notăm $a=5k$ și $b=3k$, cu $k\neq 0$:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{5k-3k}{5k+3k}=\frac{2k}{8k}=\frac{1}{4}.$$

ARITMETICĂ · CLASA A VI-A

Mărimi proporționale

Direct proporționale, invers proporționale, regula de trei simplă

Fișa 8

Mărimi direct proporționale

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt **direct proporționale** cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dacă

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k \qquad (k = \text{coeficient de proporționalitate})$$

Când una dintre mărimi crește de n ori, cealaltă crește tot de n ori. Graficul dependenței este o **semidreaptă** cu originea în O.

Mărimi invers proporționale

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt **invers proporționale** cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dacă

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \cdots = a_n \cdot b_n = k \qquad \text{sau, echivalent,} \qquad \frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \cdots = k$$

Când una dintre mărimi crește de n ori, cealaltă scade de n ori.

Regula de trei simplă

	Direct proporționale	Invers proporționale
Schema	$a \quad \ldots \quad b$ $c \quad \ldots \quad x$	$a \quad \ldots \quad b$ $c \quad \ldots \quad x$
Relația	$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$	$a \cdot b = c \cdot x$
Necunoscuta	$x = \frac{b \cdot c}{a}$	$x = \frac{a \cdot b}{c}$

Împărțirea unui număr în părți proporționale

Direct proporțional cu a, b, c

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{S}{a+b+c}$$

Invers proporțional cu a, b, c

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

ATENȚIE „Invers proporțional cu a, b, c" înseamnă „direct proporțional cu $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$" — nu cu a, b, c în ordine inversă.

Exemple rezolvate

Exemplul 8.1

Împărțiți numărul 180 în părți direct proporționale cu 2, 3 și 4.

REZOLVARE

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{180}{9} = 20$$

Deci $x = 40$, $y = 60$, $z = 80$. Verificare: $40 + 60 + 80 = 180$. ✓

Exemplul 8.2

Împărțiți numărul 78 în părți invers proporționale cu 2 și 3.

REZOLVARE

Invers proporțional cu 2 și 3 înseamnă direct proporțional cu $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{78}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{78}{\frac{5}{6}} = 78 \cdot \frac{6}{5} = 93{,}6$$

Rezultă $x = 93{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 46{,}8$ și $y = 93{,}6 \cdot \frac{1}{3} = 31{,}2$.

Exemplul 8.3

5 muncitori termină o lucrare în 12 zile. În câte zile termină aceeași lucrare 6 muncitori, lucrând în același ritm?

REZOLVARE

Numărul de muncitori și numărul de zile sunt mărimi **invers proporționale**:

$$5 \cdot 12 = 6 \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{60}{6} = 10 \text{ zile.}$$

Exemplul 8.4

Trei frați împart 270 de lei în părți direct proporționale cu vârstele lor: 6, 9 și 12 ani. Ce sumă primește fiecare?

REZOLVARE

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{270}{27} = 10$$

Sumele sunt 60, 90 și 120 de lei. Verificare: $60 + 90 + 120 = 270$. ✓

Exemplul 8.5

4 robinete umplu un bazin în 9 ore. În cât timp îl umplu 6 robinete identice?

REZOLVARE

Numărul de robinete și timpul sunt invers proporționale:

$$4 \cdot 9 = 6 \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{36}{6} = 6 \text{ ore.}$$

ARITMETICĂ · CLASELE VI–VIII

Procente. Probleme practice

Aflarea procentului, dobândă, scumpiri și ieftiniri

Fișa 9

Definiție și tipuri de probleme

$$p\% \text{ dintr-un număr } N = \frac{p}{100} \cdot N \qquad p\% = \frac{p}{100}$$

Se cere	Formula
$p\%$ din N	$x = \dfrac{p \cdot N}{100}$
Numărul, cunoscând $p\%$ din el	$N = \dfrac{100 \cdot x}{p}$
Ce procent reprezintă x din N	$p = \dfrac{x \cdot 100}{N}\ \%$

Scumpiri și ieftiniri

Mărire cu $p\%$	Micșorare cu $p\%$
$N_{\text{nou}} = N\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$	$N_{\text{nou}} = N\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$

Două modificări succesive de $p\%$ și $q\%$: $N_{\text{final}} = N\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)\left(1 \pm \dfrac{q}{100}\right)$

Dobânda simplă

S — suma depusă, $p\%$ — dobânda anuală, t — timpul în ani.

$$D = \frac{S \cdot p \cdot t}{100}$$

$$S_{\text{finală}} = S + D = S\left(1 + \frac{p \cdot t}{100}\right)$$

Pentru t luni: $D = \dfrac{S \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$.

Concentrația soluției

$$c = \frac{m_{\text{substanță}}}{m_{\text{soluție}}} \cdot 100\ \%$$

$$m_{\text{soluție}} = m_{\text{substanță}} + m_{\text{solvent}}$$

La amestecarea a două soluții, masa de substanță se adună.

ATENȚIE O scumpire cu 20% urmată de o ieftinire cu 20% **nu** readuce prețul inițial: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$, deci prețul final este cu 4% mai mic. Procentele se aplică de fiecare dată la valoarea **curentă**, nu la cea inițială.

Exemple rezolvate

Exemplul 9.1

Calculați 15% din 240.

REZOLVARE

$$15\% \cdot 240 = \frac{15}{100} \cdot 240 = \frac{15 \cdot 240}{100} = 36.$$

Exemplul 9.2

Prețul unui produs este de 500 lei. Se scumpește cu 20%, apoi noul preț se ieftinește cu 20%. Care este prețul final?

REZOLVARE

$$P_1 = 500\left(1+\frac{20}{100}\right) = 500\cdot 1{,}2 = 600 \text{ lei}$$

$$P_2 = 600\left(1-\frac{20}{100}\right) = 600\cdot 0{,}8 = 480 \text{ lei}$$

Prețul final este 480 lei, deci cu 4% mai mic decât cel inițial — procentele se aplică de fiecare dată la valoarea **curentă**.

Exemplul 9.3

O sumă de 2000 de lei este depusă la bancă cu o dobândă de 5% pe an. Ce dobândă se obține după 2 ani?

REZOLVARE

$$D = \frac{S\cdot p\cdot t}{100} = \frac{2000\cdot 5\cdot 2}{100} = 200 \text{ lei.}$$

Suma finală este $2000+200=2200$ de lei.

Exemplul 9.4

Un elev a rezolvat corect 18 din cele 24 de probleme ale unui test. Ce procent reprezintă problemele rezolvate corect?

REZOLVARE

$$p = \frac{18\cdot 100}{24} = 75\%.$$

Exemplul 9.5

După o reducere de 30%, un produs costă 210 lei. Care era prețul inițial?

REZOLVARE

Prețul redus reprezintă 70% din cel inițial:

$$\frac{70}{100}\cdot P = 210 \;\Rightarrow\; P = \frac{210\cdot 100}{70} = 300 \text{ lei.}$$

Exemplul 9.6

Se amestecă 200 g de soluție cu concentrația 10% cu 300 g de soluție cu concentrația 20%. Ce concentrație are amestecul?

REZOLVARE

Masa de substanță: $0{,}1\cdot 200 + 0{,}2\cdot 300 = 20+60 = 80$ g.
Masa soluției: $200+300=500$ g.

$$c = \frac{80}{500}\cdot 100 = 16\%.$$

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VII

Numere întregi și raționale

Opus, modul, reguli de semne, operații

Fișa 10

Numere întregi

Opusul lui a	$-a$; $\quad a+(-a)=0$; $\quad -(-a)=a$
Modulul lui a	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$ — distanța de la a la 0 pe axă
Comparare	orice număr negativ $<0<$ orice număr pozitiv; dintre două numere negative, mai mare este cel cu modulul mai mic

Reguli de calcul cu semne

Adunare	Înmulțire și împărțire
acelasi semn: se adună modulele și se păstrează semnul	$(+)\cdot(+)=(+)$ $\quad (-)\cdot(-)=(+)$
semne diferite: se scad modulele și se ia semnul termenului cu modul mai mare	$(+)\cdot(-)=(-)$ $\quad (-)\cdot(+)=(-)$

Scăderea: $a-b=a+(-b)$. Desfacerea parantezelor: $+(a-b)=a-b,\ -(a-b)=-a+b$.

Proprietățile modulului

1. $\lvert a\rvert \geq 0,\ \forall a\in\mathbb{R};\ \lvert a\rvert=0 \iff a=0$;
2. $\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$;
3. $\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$;
4. $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert},\ b\neq 0$;
5. $\lvert a+b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$;
6. $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \iff a=b$ sau $a=-b$;
7. $\lvert a\rvert\leq r \iff -r\leq a\leq r\ (r\geq 0)$;
8. $\lvert a\rvert=a \iff a\geq 0$.

Numere raționale

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}^*\right\}$. Orice număr rațional admite o scriere zecimală finită sau periodică.

- opusul lui $\frac{a}{b}$ este $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$;
- inversul lui $\frac{a}{b}\neq 0$ este $\frac{b}{a}$;
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$;
- între două numere raționale distincte există o infinitate de numere raționale.

Exemple rezolvate

Exemplul 10.1

Calculați $E=-3+(-5)-(-8)+2\cdot(-4)$.

REZOLVARE

$$E=-3-5+8-8=-8+8-8=-8.$$

Atenție la desfacerea parantezei: $-(-8)=+8$.

Exemplul 10.2

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x-3|=5$.

REZOLVARE

Din $|E|=a$ cu $a>0$ rezultă $E=a$ sau $E=-a$:

$$x-3=5 \Rightarrow x=8; \qquad x-3=-5 \Rightarrow x=-2.$$

$$S=\{-2,\ 8\}$$

Exemplul 10.3

Ordonați descrescător numerele $-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$.

REZOLVARE

Aducem la numitorul comun 12: $-\frac{9}{12}, -\frac{8}{12}, -\frac{10}{12}$.

Dintre numere negative, mai mare este cel cu modulul mai mic:

$$-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4} > -\frac{5}{6}.$$

Exemplul 10.4

Calculați $E=(-2)^3+(-3)^2-|-5|$.

REZOLVARE

$$(-2)^3=-8; \qquad (-3)^2=9; \qquad |-5|=5$$

$$E=-8+9-5=-4$$

Exemplul 10.5

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $|x|\leq 3$.

REZOLVARE

Din $|x|\leq a$ rezultă $-a\leq x\leq a$:

$$-3\leq x\leq 3 \Rightarrow x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

Exemplul 10.6

Arătați că numărul $n=|a-3|+|3-a|$ este par, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

REZOLVARE

Cum $|3-a|=|-(a-3)|=|a-3|$, obținem

$$n=2\,|a-3|,$$

deci n este dublul unui număr, adică par (și, în plus, $n\geq 0$).

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VII

Puteri

Reguli de calcul, exponent întreg, comparare

Fișa 11

Definiție

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*; \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0); \qquad a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{N}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

a = baza, n = exponentul. 0^0 nu are sens.

Reguli de calcul

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n},\ a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$
6. $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$

Semnul unei puteri

	n par	n impar
$a > 0$	$a^n > 0$	$a^n > 0$
$a < 0$	$a^n > 0$	$a^n < 0$

Deci $a^{2k} \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ — proprietate folosită la demonstrarea inegalităților.

Compararea puterilor

- aceeași bază $a > 1$: $a^m < a^n \iff m < n$;
- aceeași bază $0 < a < 1$: $a^m < a^n \iff m > n$;
- același exponent n par: se compară modulele bazelor;
- exponenți diferiți: se aduc la aceeași bază sau la același exponent.

ATENȚIE $a^m + a^n$ **nu** se poate simplifica direct — se dă factor comun: $a^m + a^n = a^m(1 + a^{n-m})$ pentru $m < n$. $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. $-a^2 \neq (-a)^2$: primul este negativ, al doilea este pozitiv.

Exemple rezolvate

Exemplul 11.1

Calculați $E = \dfrac{2^5 \cdot 2^3}{2^6}$.

REZOLVARE

$$E = \frac{2^{5+3}}{2^6} = \frac{2^8}{2^6} = 2^{8-6} = 2^2 = 4.$$

Exemplul 11.2

Comparați numerele $a = 2^{30}$ și $b = 3^{20}$.

REZOLVARE

Aducem la același exponent, scoțând factorul comun 10:

$$a = 2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}, \qquad b = 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}.$$

Cum $8 < 9$ și exponentul este același, rezultă $a < b$.

Exemplul 11.3

Arătați că numărul $n = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ se divide cu 7.

REZOLVARE

Dăm factor comun puterea cea mai mică:

$$n = 2^{10}\left(1 + 2 + 2^2\right) = 2^{10} \cdot 7.$$

Cum 7 este factor, rezultă $7 \mid n$.

Exemplul 11.4

Scrieți ca putere a lui 3 numărul $E = \dfrac{9^4 \cdot 27^2}{81^3}$.

REZOLVARE

Aducem totul la baza 3:

$$E = \frac{\left(3^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^2}{\left(3^4\right)^3} = \frac{3^8 \cdot 3^6}{3^{12}} = \frac{3^{14}}{3^{12}} = 3^2 = 9.$$

Exemplul 11.5

Calculați $E = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{0}$.

REZOLVARE

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}; \qquad \left(\frac{4}{9}\right)^{0} = 1$$

$$E = \frac{9}{4}$$

Exemplul 11.6

Comparați numerele $a = 5^{100}$ și $b = 25^{51}$.

REZOLVARE

$$b = 25^{51} = \left(5^2\right)^{51} = 5^{102}.$$

Baza este aceeași și supraunitară, deci $5^{100} < 5^{102}$, adică $a < b$.

ALGEBRĂ · CLASA A VII-A

Rădăcina pătrată. Radicali

Reguli de calcul, scoaterea factorilor, raționalizare

Fișa 12

Definiție

$$\sqrt{a} = x \iff x^2 = a \text{ și } x \geq 0, \qquad a \geq 0$$

Rădăcina pătrată este definită doar pentru numere **nenegative** și rezultatul este **nenegativ**.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}; \qquad (\sqrt{a})^2 = a, \ a \geq 0$$

Reguli de calcul cu radicali $(a, b \geq 0)$

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \ b > 0$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \ a \geq 0$ (scoaterea factorilor)
4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \ a \geq 0$ (introducerea sub radical)
5. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$
6. $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$

Raționalizarea numitorului

Forma numitorului	Amplificare și rezultat
$a\sqrt{b}$	$\dfrac{c}{a\sqrt{b}} = \dfrac{c\sqrt{b}}{a \cdot b}$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$
$a + \sqrt{b}$	$\dfrac{c}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

Expresia cu care se amplifică se numește **conjugata** numitorului.

Formula radicalilor compuși

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

unde $c = \sqrt{a^2 - b}$, cu $a^2 - b \geq 0$ pătrat perfect.

Valori de reținut

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
$\sqrt{5} \approx 2{,}23$	$\sqrt{6} \approx 2{,}45$
$\sqrt{7} \approx 2{,}64$	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$

Pătrate perfecte: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225$.

Exemple rezolvate

Exemplul 12.1

Scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{72}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{108}$.

REZOLVARE

Descompunem astfel încât să apară pătrate perfecte:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}, \quad \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}.$$

Exemplul 12.2

Calculați $E = \sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{2}$.

REZOLVARE

După scoaterea factorilor, toți radicalii devin asemenea:

$$E = 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = (6 - 5 + 1)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Exemplul 12.3

Raționalizați numitorul fracției $\dfrac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

REZOLVARE

Amplificăm cu conjugata numitorului, $\sqrt{5} + \sqrt{2}$:

$$\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{6\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)}{5 - 2} = 2\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right).$$

Exemplul 12.4

Calculați $E = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 2\sqrt{3}$.

REZOLVARE

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$E = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4$$

Exemplul 12.5

Arătați că numărul $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ este natural.

REZOLVARE

Scriem radicandul ca pătrat perfect:

$$7 + 4\sqrt{3} = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 3 = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2.$$

Cum $2 + \sqrt{3} > 0$, avem $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, deci

$$a = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 12.6

Determinați partea întreagă a numărului $\sqrt{30}$.

REZOLVARE

Încadrăm între pătrate perfecte consecutive:

$$25 < 30 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{30} < 6 \Rightarrow \left[\sqrt{30}\right] = 5.$$

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VIII

Medii. Numere reale

Media aritmetică, geometrică, ponderată; aproximări

Fișa 13

Tipuri de medii

Media	Formula
Aritmetică	$m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (pentru două numere: $m_a = \dfrac{a+b}{2}$)
Aritmetică ponderată	$m_p = \dfrac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$, p_i = ponderi
Geometrică	$m_g = \sqrt{a \cdot b},\ a, b \geq 0$
Armonică	$m_h = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},\ a, b > 0$

Inegalitatea mediilor

$$\min(a,b) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq \max(a,b), \qquad \forall\, a, b > 0$$

Egalitatea are loc **dacă și numai dacă** $a = b$. Consecință des folosită:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,\ \forall x > 0 \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a, b > 0$$

Partea întreagă și partea fracționară

$$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad [x] \in \mathbb{Z}$$

$$\{x\} = x - [x], \qquad 0 \leq \{x\} < 1$$

$[x]$ — cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Aproximări

- **prin lipsă** cu o zecimală: se taie zecimalele de la a doua;
- **prin adaos**: aproximarea prin lipsă $+0{,}1$;
- **rotunjire**: dacă zecimala următoare este ≥ 5, se mărește cu o unitate.

Exemple rezolvate

Exemplul 13.1

Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor 8 și 18.

REZOLVARE

$$m_a = \frac{8+18}{2} = 13, \qquad m_g = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12.$$

Se verifică inegalitatea mediilor: $m_g = 12 < 13 = m_a$. ✓

Exemplul 13.2

Un elev are notele 8, 9 și 10, cu ponderile 1, 2 și respectiv 3. Calculați media ponderată.

REZOLVARE

$$m_p = \frac{8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = \frac{8 + 18 + 30}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3} \approx 9{,}33.$$

Exemplul 13.3

Arătați că $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$, pentru orice $x>0$.

REZOLVARE

Aducem la același numitor și folosim că un pătrat este nenegativ:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0,$$

deoarece $(x-1)^2\geq 0$ și $x>0$. Egalitatea are loc pentru $x=1$.

Exemplul 13.4

Media aritmetică a numerelor x și 12 este 9. Aflați x.

REZOLVARE

$$\frac{x+12}{2}=9\ \Rightarrow\ x+12=18\ \Rightarrow\ x=6.$$

Exemplul 13.5

Aflați media geometrică a numerelor $a=3\sqrt{2}$ și $b=6\sqrt{2}$.

REZOLVARE

$$m_g=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}=\sqrt{18\cdot 2}=\sqrt{36}=6.$$

Exemplul 13.6

Determinați $[x]$ și $\{x\}$ pentru $x=-2{,}3$.

REZOLVARE

Partea întreagă este cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x:

$$[-2{,}3]=-3,\qquad \{-2{,}3\}=-2{,}3-(-3)=0{,}7.$$

Atenție: la numere negative, partea întreagă **nu** se obține prin simpla tăiere a zecimalelor.

ALGEBRĂ · CLASELE VII–VIII

Calcul algebric

Formule de calcul prescurtat

Fișa 14

Formule fundamentale

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Identități derivate, utile în probleme

- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Descompunerea în factori — metode

Factor comun	$ab + ac = a(b+c); \quad ax + ay + bx + by = (a+b)(x+y)$
Grupare de termeni	se grupează termenii care au factor comun
Formule de calcul	$a^2 - b^2, \ a^2 \pm 2ab + b^2, \ a^3 \pm b^3$
Trinomul $x^2 + sx + p$	$= (x - x_1)(x - x_2)$, unde $x_1 + x_2 = -s, \ x_1 x_2 = p$

ERORI FRECVENTE $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ — lipsește dublul produs. $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.
$a^2 - b^2$ se descompune, dar $a^2 + b^2$ **nu** se descompune în $\mathbb{R}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 14.1

Calculați $(2x+3)^2$ și $(3a-2b)^2$.

REZOLVARE

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

Atenție: dublul produs nu se omite niciodată.

Exemplul 14.2

Descompuneți în factori: a) $x^2 - 9$; b) $x^2 + 6x + 9$; c) $2x^2 - 8$.

REZOLVARE

a) diferență de pătrate: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$;
b) pătrat perfect: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$;
c) factor comun, apoi diferență de pătrate: $2x^2 - 8 = 2\left(x^2 - 4\right) = 2(x-2)(x+2)$.

Exemplul 14.3

Arătați că $E(x) = x^2 - 4x + 7 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

REZOLVARE

Formăm un pătrat perfect:

$$E(x) = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x-2)^2 + 3.$$

Cum $(x-2)^2 \geq 0$, rezultă $E(x) \geq 3 > 0$ pentru orice x real.

Exemplul 14.4

Calculați $E = (x+2)^2 - (x-2)^2$.

REZOLVARE

Folosim identitatea $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, cu $a = x$ și $b = 2$:

$$E = 4 \cdot x \cdot 2 = 8x.$$

Exemplul 14.5

Descompuneți în factori $E = x^3 - 4x$.

REZOLVARE

$$E = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2).$$

Exemplul 14.6

Știind că $a + b = 7$ și $ab = 10$, calculați $a^2 + b^2$.

REZOLVARE

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 49 - 20 = 29.$$

Exemplul 14.7

Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x) = x^2 - 6x + 11$ și valoarea lui x pentru care se atinge.

REZOLVARE

$$E(x) = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$$

Valoarea minimă este 2, atinsă pentru $x = 3$.

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Rapoarte de numere reale

Condiții de existență, amplificare, operații cu fracții algebrice

Fișa 15

Condiții de existență

Un raport $\frac{E_1(x)}{E_2(x)}$ are sens **numai** pentru valorile lui x pentru care $E_2(x) \neq 0$.

Expresia	Condiția
$\frac{A}{B}$	$B \neq 0$
$\sqrt{A}$	$A \geq 0$
$\frac{A}{\sqrt{B}}$	$B > 0$

Operații cu rapoarte de numere reale

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B} \qquad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD} \qquad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C},\ C \neq 0$$

ETAPELE SIMPLIFICĂRII UNEI EXPRESII

1. se pun condițiile de existență;
2. se descompun în factori numărătorii și numitorii;
3. se află numitorul comun (c.m.m.m.c. al numitorilor);
4. se efectuează operațiile și se simplifică rezultatul.

Simplificări tipice

- $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b,\ a \neq b$
- $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,\ a \neq -b$
- $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = a + b,\ a \neq -b$
- $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$
- $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$
- $\frac{a - b}{b - a} = -1,\ a \neq b$

DE REȚINUT Condițiile de existență se pun **înainte** de a efectua calculele și se scriu în răspunsul final. La Evaluarea Națională, omiterea lor se penalizează chiar dacă restul rezolvării este corect.

Exemple rezolvate

Exemplul 15.1

Determinați condițiile de existență și simplificați $E(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$.

REZOLVARE

Condiții de existență: $x^2 + 4x + 4 \neq 0 \iff (x+2)^2 \neq 0 \iff x \neq -2$.
Descompunem numărătorul și numitorul:

$$E(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Exemplul 15.2

Calculați $E = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

REZOLVARE

Numitorul comun este $x(x+1)$:

$$E = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Exemplul 15.3

Aduceți la o formă mai simplă $E(x) = \frac{x^2-1}{x-1} - \frac{x^2}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

REZOLVARE

$$E(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - \frac{x \cdot x}{x} = (x+1) - x = 1.$$

Expresia este constantă pe domeniul ei de definiție.

Exemplul 15.4

Determinați condițiile de existență pentru $E(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$.

REZOLVARE

$$x^2 - 9 \neq 0 \iff (x-3)(x+3) \neq 0 \iff x \neq 3 \text{ și } x \neq -3.$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

Exemplul 15.5

Aduceți la forma cea mai simplă $E(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

REZOLVARE

$$E(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}.$$

Exemplul 15.6

Determinați numerele întregi x pentru care $E(x) = \frac{x+5}{x+1} \in \mathbb{Z}$, $x \neq -1$.

REZOLVARE

Scriem numărătorul în funcție de numitor:

$$E(x) = \frac{(x+1)+4}{x+1} = 1 + \frac{4}{x+1}.$$

Trebuie ca $x+1$ să fie divizor întreg al lui 4: $x+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, deci

$$x \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}.$$

ALGEBRĂ · CLASELE VII–VIII

Ecuații și inecuații

Ecuația de gradul I, ecuații cu modul, inecuații

Fișa 16

Ecuația de gradul I

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$a \neq 0$	soluție unică: $x = -\frac{b}{a}$	(ecuație **determinată**)
$a = 0, b \neq 0$	nicio soluție: $S = \emptyset$	(ecuație **imposibilă**)
$a = 0, b = 0$	orice $x \in \mathbb{R}$ este soluție: $S = \mathbb{R}$	(ecuație **nedeterminată**)

REGULI DE TRANSFORMARE

Se pot aduna sau scădea aceleași expresii în ambii membri; se poate înmulți sau împărți cu un număr **nenul**. Termenii care conțin necunoscuta se trec într-un membru, cei liberi în celălalt.

Ecuații reductibile la gradul I

Ecuația $\lvert E(x)\rvert = a$	$a < 0 \Rightarrow S = \emptyset$; $a = 0 \Rightarrow E(x) = 0$; $a > 0 \Rightarrow E(x) = a$ sau $E(x) = -a$
Ecuația $A \cdot B = 0$	$A = 0$ sau $B = 0$
Ecuația $\frac{A}{B} = 0$	$A = 0$ și $B \neq 0$
Sumă de pătrate $= 0$	$A^2 + B^2 = 0 \iff A = 0$ și $B = 0$

Inecuații de gradul I

$$ax + b > 0 \quad (\geq, <, \leq)$$

$a > 0$	$a < 0$
$x > -\frac{b}{a}$, $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$x < -\frac{b}{a}$, $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

ATENȚIE La înmulțirea sau împărțirea unei inecuații cu un număr **negativ**, sensul inegalității se **schimbă**: din $-2x > 6$ rezultă $x < -3$.

Exemple rezolvate

Exemplul 16.1

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3(x-2) + 5 = 2x + 1$.

REZOLVARE

$$3x - 6 + 5 = 2x + 1 \Rightarrow 3x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow 3x - 2x = 1 + 1 \Rightarrow x = 2.$$

Verificare: $3(2-2) + 5 = 5$ și $2 \cdot 2 + 1 = 5$. ✓ $S = \{2\}$.

Exemplul 16.2

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x-1|=7$.

REZOLVARE

$$2x-1=7 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$
$$2x-1=-7 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3$$
$$S=\{-3,\ 4\}$$

Exemplul 16.3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $-2x+5\leq 11$.

REZOLVARE

$$-2x\leq 6 \Rightarrow x\geq -3$$

La împărțirea cu -2 sensul inegalității se **schimbă**.

$$S=[-3;\ +\infty)$$

Exemplul 16.4

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+2}{3}=4$.

REZOLVARE

Înmulțim cu numitorul comun 6:

$$3(x-1)+2(x+2)=24 \Rightarrow 3x-3+2x+4=24 \Rightarrow 5x=23 \Rightarrow x=\frac{23}{5}.$$

Exemplul 16.5

Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $(m-2)x=5$ nu are soluții.

REZOLVARE

Ecuația $ax=b$ cu $b\neq 0$ nu are soluții doar dacă $a=0$:

$$m-2=0 \Rightarrow m=2.$$

Exemplul 16.6

Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația $2x+1<9$.

REZOLVARE

$$2x<8 \Rightarrow x<4$$

Cum $x\in\mathbb{N}$: $x\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Exemplul 16.7

Rezolvați ecuația $(x-2)(2x+6)=0$.

REZOLVARE

Un produs este nul dacă cel puțin un factor este nul:

$$x-2=0\Rightarrow x=2; \qquad 2x+6=0\Rightarrow x=-3.$$
$$S=\{-3,\ 2\}$$

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Sisteme de ecuații

Metoda substituției, metoda reducerii, interpretare geometrică

Fișa 17

Sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O **soluție** este o pereche ordonată (x_0, y_0) care verifică simultan ambele ecuații.

Metode de rezolvare

Metodă	Etape
Substituției	se exprimă o necunoscută din una dintre ecuații și se înlocuiește în cealaltă; se rezolvă ecuația cu o necunoscută; se revine pentru a doua necunoscută
Reducerii	se amplifică ecuațiile astfel încât coeficienții unei necunoscute să devină opuși; se adună ecuațiile; necunoscuta se elimină
Grafică	se reprezintă cele două drepte în reperul xOy; soluția este punctul lor de intersecție

Discuția sistemului

Condiție	Dreptele	Soluții	
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	concurente	soluție unică	(compatibil determinat)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	paralele	$S = \emptyset$	(incompatibil)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	confundate	o infinitate	(compatibil nedeterminat)

METODĂ DE LUCRU La problemele care se rezolvă cu ajutorul sistemelor: se notează necunoscutele cu x și y, se traduce fiecare informație din enunț într-o ecuație, se rezolvă sistemul, apoi se verifică soluția în contextul problemei (de exemplu, un număr de persoane trebuie să fie natural).

Exemple rezolvate

Exemplul 17.1

Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$ prin metoda reducerii.

REZOLVARE

Adunăm cele două ecuații; y se elimină:

$$2x = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow 7 + y = 10 \Rightarrow y = 3.$$

Soluția este perechea $(7;\ 3)$.

Exemplul 17.2

Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$ prin metoda substituției.

REZOLVARE

Din prima ecuație: $y=7-2x$. Înlocuim în a doua:

$$3x-2(7-2x)=0 \;\Rightarrow\; 3x-14+4x=0 \;\Rightarrow\; 7x=14 \;\Rightarrow\; x=2,$$

apoi $y=7-2\cdot 2=3$. Soluția este $(2;\,3)$.

Exemplul 17.3

Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 20 de capete și 56 de picioare. Câți iepuri sunt?

REZOLVARE

Fie x numărul de găini și y numărul de iepuri:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20-y \\ 2(20-y)+4y=56 \end{cases}$$

$$40-2y+4y=56 \;\Rightarrow\; 2y=16 \;\Rightarrow\; y=8.$$

Sunt 8 iepuri și 12 găini.

Exemplul 17.4

Rezolvați sistemul $\begin{cases} 3x+2y=16 \\ 5x-2y=8 \end{cases}$.

REZOLVARE

Adunăm ecuațiile, y se elimină:

$$8x=24 \;\Rightarrow\; x=3 \;\Rightarrow\; 9+2y=16 \;\Rightarrow\; y=3{,}5.$$

Soluția este $(3;\,3{,}5)$.

Exemplul 17.5

Suma a două numere este 45, iar diferența lor este 11. Aflați numerele.

REZOLVARE

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-y=11 \end{cases} \Rightarrow\; 2x=56 \;\Rightarrow\; x=28, \quad y=17.$$

Exemplul 17.6

Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care perechea $(2;\,1)$ este soluție a ecuației $mx+3y=7$.

REZOLVARE

Înlocuim $x=2$ și $y=1$:

$$2m+3=7 \;\Rightarrow\; 2m=4 \;\Rightarrow\; m=2.$$

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Funcții

Noțiunea de funcție, graficul, funcția de gradul I

Fișa 18

Noțiunea de funcție

Fie A și B două mulțimi nevide. O **funcție** definită pe A cu valori în B este o corespondență prin care **fiecărui** element din A i se asociază un **singur** element din B.

$$f : A \to B, \qquad x \mapsto f(x)$$

- A — **domeniul de definiție**;
- B — **codomeniul**;
- $f(x)$ — **valoarea** funcției în x;
- $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ — **graficul**;
- moduri de a defini o funcție: diagramă, tabel de valori, formulă;
- $f = g \iff$ au același domeniu, același codomeniu și $f(x) = g(x), \forall x$.

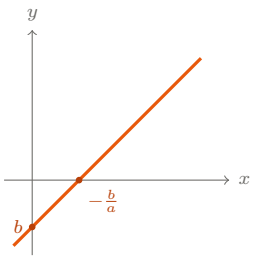
Funcția de gradul I

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Graficul este o **dreaptă oblică**.

Intersecția cu Oy	$x = 0 \Rightarrow A(0;\ b)$
Intersecția cu Ox	$f(x) = 0 \Rightarrow B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$
Monotonie	$a > 0$ — strict crescătoare; $a < 0$ — strict descrescătoare
Cazul $a = 0$	$f(x) = b$ — funcție constantă, grafic = dreaptă orizontală

Reprezentarea grafică



Sunt suficiente **două** puncte pentru a trasa dreapta.

Apartenența unui punct la grafic

$$M(x_0; y_0) \in G_f \iff y_0 = f(x_0)$$

- se înlocuiește x_0 în formulă și se compară cu y_0;
- punctul de intersecție a graficelor f și g: se rezolvă $f(x) = g(x)$.

Exemple rezolvate

Exemplul 18.1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Calculați $f(0)$, $f(2)$ și $f(-1)$.

REZOLVARE

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3, \qquad f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1, \qquad f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5.$$

Exemplul 18.2

Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f(x) = 2x - 3$ cu axele de coordonate.

REZOLVARE

Cu axa Oy: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -3$, deci $A(0; -3)$.

Cu axa Ox: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, deci $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Exemplul 18.3

Verificați dacă punctul $M(4; 5)$ aparține graficului funcției $f(x) = 2x - 3$.

REZOLVARE

Calculăm $f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Cum $f(4) = 5 = y_M$, rezultă $M \in G_f$.

Exemplul 18.4

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Știind că $f(1) = 5$ și $f(-2) = -1$, determinați a și b.

REZOLVARE

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a + b = -1 \end{cases}$$

Scădem a doua ecuație din prima: $3a = 6 \Rightarrow a = 2$, apoi $b = 3$.

$$f(x) = 2x + 3$$

Exemplul 18.5

Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = 3x - 1$ și $g(x) = x + 5$.

REZOLVARE

Rezolvăm $f(x) = g(x)$:

$$3x - 1 = x + 5 \;\Rightarrow\; 2x = 6 \;\Rightarrow\; x = 3, \qquad y = f(3) = 8.$$

Punctul de intersecție este $M(3; 8)$.

Exemplul 18.6

Precizați monotonia funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$, și calculați $f(1) - f(2)$.

REZOLVARE

Cum $a = -4 < 0$, funcția este strict **descrescătoare**.

$$f(1) = 3, \qquad f(2) = -1 \;\Rightarrow\; f(1) - f(2) = 4.$$

ALGEBRĂ · CLASA A VIII-A

Puncte în plan. Reperul cartezian

Distanța, mijlocul segmentului, ecuația dreptei

Fișa 19

Reperul cartezian xOy

Două axe perpendiculare cu aceeași origine O: Ox — axa **absciselor**, Oy — axa **ordonatelor**. Fiecărui punct M îi corespunde o pereche ordonată $M(x_M;\ y_M)$, unde x_M = abscisa, y_M = ordonata.

Cadranul I	Cadranul II	Cadranul III	Cadranul IV
$x > 0,\ y > 0$	$x < 0,\ y > 0$	$x < 0,\ y < 0$	$x > 0,\ y < 0$

$M \in Ox \iff y_M = 0$; $\quad M \in Oy \iff x_M = 0$.

Formule de bază

Distanța dintre două puncte	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Mijlocul segmentului AB	$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
Simetricul lui A față de M	$A'(2x_M - x_A;\ 2y_M - y_A)$
Simetricul lui A față de Ox / Oy / O	$(x_A; -y_A)$ / $(-x_A; y_A)$ / $(-x_A; -y_A)$

Dreapta în plan

Ecuația dreptei	$y = mx + n$, unde m = **panta**, n = ordonata la origine
Panta prin două puncte	$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A},\ x_A \neq x_B$
Drepte paralele	$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$ și $n_1 \neq n_2$
Puncte coliniare	A, B, C coliniare $\iff$ pantele $m_{AB} = m_{AC}$

Exemple rezolvate

Exemplul 19.1

Fie $A(1;\ 2)$ și $B(4;\ 6)$. Calculați lungimea segmentului $[AB]$.

REZOLVARE

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Exemplul 19.2

Determinați coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(-3;\ 1)$ și $B(5;\ 7)$.

REZOLVARE

$$M\left(\frac{-3+5}{2};\ \frac{1+7}{2}\right) = M(1;\ 4).$$

Exemplul 19.3

Verificați dacă punctele $A(1;\,2)$, $B(3;\,6)$ și $C(5;\,10)$ sunt coliniare.

REZOLVARE

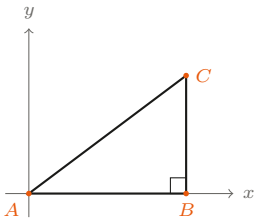
Calculăm pantele:

$$m_{AB}=\frac{6-2}{3-1}=\frac{4}{2}=2, \qquad m_{AC}=\frac{10-2}{5-1}=\frac{8}{4}=2.$$

Cum $m_{AB}=m_{AC}$ și dreptele au punctul A comun, punctele sunt **coliniare**.

Exemplul 19.4

Punctele $A(0;\,0)$, $B(4;\,0)$ și $C(4;\,3)$ sunt vârfurile unui triunghi. Arătați că triunghiul este dreptunghic și calculați aria sa.



REZOLVARE

AB este pe axa Ox, iar BC este vertical, deci $AB\perp BC$ și triunghiul este dreptunghic în B.

$$AB=4, \qquad BC=3 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}=\frac{4\cdot 3}{2}=6.$$

Exemplul 19.5

Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1;\,3)$, $B(2;\,5)$ și $C(4;\,a)$ să fie coliniare.

REZOLVARE

Punctele sunt coliniare dacă $m_{AB}=m_{AC}$:

$$m_{AB}=\frac{5-3}{2-1}=2, \qquad m_{AC}=\frac{a-3}{4-1}=\frac{a-3}{3}$$

$$\frac{a-3}{3}=2 \;\Rightarrow\; a-3=6 \;\Rightarrow\; a=9.$$

Exemplul 19.6

Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $A(0;\,-1)$ și $B(2;\,3)$.

REZOLVARE

Panta este $m=\dfrac{3-(-1)}{2-0}=2$, iar ordonata la origine se citește din A: $n=-1$.

$$y=2x-1$$

ALGEBRĂ · CLASELE VI–VIII

Organizarea datelor. Probabilități

Reprezentarea datelor, media, probabilitatea unui eveniment

Fișa 20

Organizarea și reprezentarea datelor

Tabel de frecvențe	fiecărei valori i se asociază numărul de apariții (frecvența absolută)
Frecvența relativă	$f_{\text{rel}} = \dfrac{\text{frecvența absolută}}{\text{numărul total de date}}$, exprimată adesea procentual
Grafic cu bare	bare de înălțimi proporționale cu frecvențele
Grafic cu linii	potrivit pentru evoluția în timp a unei mărimi
Diagramă circulară	unghiul sectorului: $\alpha = \dfrac{f_{\text{rel}}}{100} \cdot 360^\circ$

Indicatori statistici

- **media aritmetică**: suma valorilor împărțită la numărul lor;
- **media ponderată**: când valorile apar de mai multe ori;
- **mediana**: valoarea din mijloc după ordonarea crescătoare a datelor;
- **modul**: valoarea cu frecvența cea mai mare.

Probabilitatea

$$P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

- $0 \le P \le 1$;
- $P = 0$ — eveniment imposibil;
- $P = 1$ — eveniment sigur;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — evenimentul contrar.

DE REȚINUT La problemele de probabilități din Evaluarea Națională, cazurile posibile se numără **explicit** (de exemplu, elementele unei mulțimi date), iar cazurile favorabile se determină prin verificarea condiției din enunț pentru fiecare element. Rezultatul se poate scrie ca fracție ireductibilă sau ca procent.

Exemple rezolvate

Exemplul 20.1

Notele obținute de 5 elevi sunt 7, 8, 8, 9 și 10. Calculați media, mediana și modul.

REZOLVARE

$$m_a = \frac{7+8+8+9+10}{5} = \frac{42}{5} = 8{,}4$$

Datele sunt deja ordonate crescător; valoarea din mijloc (a treia din cinci) este **mediana** $= 8$.
Valoarea cu frecvența cea mai mare este **modul** $= 8$ (apare de două ori).

Exemplul 20.2

Se alege la întâmplare un element al mulțimii $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Care este probabilitatea ca elementul ales să fie divizor al lui 12?

REZOLVARE

Cazuri posibile: $\text{card}(A) = 12$.
Cazuri favorabile: divizorii lui 12 din A sunt $1, 2, 3, 4, 6, 12$, deci 6 cazuri.

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Exemplul 20.3

Într-o diagramă circulară, un sector reprezintă 25% din total. Ce măsură are unghiul la centru corespunzător?

REZOLVARE

$$\alpha = \frac{25}{100} \cdot 360^\circ = 90^\circ.$$

Exemplul 20.4

Se aruncă un zar. Care este probabilitatea de a obține un număr par?

REZOLVARE

Cazuri posibile: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, deci 6. Cazuri favorabile: $\{2, 4, 6\}$, deci 3.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemplul 20.5

Într-o urnă sunt 5 bile albe și 7 bile negre. Se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca ea să fie albă?

REZOLVARE

$$P = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}.$$

Probabilitatea evenimentului contrar (bilă neagră) este $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

Exemplul 20.6

Media a 6 numere este 12. Dacă se mai adaugă un număr, media devine 13. Ce număr s-a adăugat?

REZOLVARE

Suma inițială: $6 \cdot 12 = 72$. Suma finală: $7 \cdot 13 = 91$.

$$x = 91 - 72 = 19.$$

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Punct, dreaptă, plan, segment

Noțiuni primare, poziții relative, măsurare

Fișa 21

Noțiuni primare

Punctul, **dreapta** și **planul** sunt noțiuni care nu se definesc. Se notează: punctele cu litere mari (A, B), dreptele cu litere mici (a, d) sau prin două puncte (AB), planele cu litere grecești (α, β).

- prin două puncte distincte trece o **singură** dreaptă;
- o dreaptă conține o infinitate de puncte;
- puncte **coliniare**: aparțin aceleiași drepte;
- drepte **concurente**: au un singur punct comun;
- drepte **paralele**: coplanare, fără puncte comune;
- drepte **identice**: au toate punctele comune.

Segment și semidreaptă

Segmentul $[AB]$	mulțimea punctelor dintre A și B, inclusiv capetele; AB = lungimea segmentului
Semidreapta $[AB$	originea A, trece prin B; are un capăt și este nemărginită în cealaltă direcție
Segmente congruente	$[AB] \equiv [CD] \iff AB = CD$
Mijlocul segmentului	$M \in [AB]$ cu $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$
Mediatoarea	dreapta perpendiculară pe $[AB]$ în mijlocul său; mulțimea punctelor egal depărtate de A și B

Unghiul

Unghiul este reuniunea a două semidrepte cu aceeași origine. Se notează $\sphericalangle AOB$, unde O = vârful, $[OA$ și $[OB$ = laturile. Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde:

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''$$

Nul	Ascuțit	Drept	Obtuz	Alungit
0°	$(0^\circ; 90^\circ)$	90°	$(90^\circ; 180^\circ)$	180°

Bisectoarea unui unghi este semidreapta cu originea în vârf, interioară unghiului, care îl împarte în două unghiuri congruente. Punctele bisectoarei sunt egal depărtate de laturile unghiului.

Exemple rezolvate

Exemplul 21.1

Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar $AM = 3{,}5$ cm. Aflați AB.

REZOLVARE

Din definiția mijlocului, $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$, deci

$$AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot 3{,}5 = 7 \text{ cm}.$$

Exemplul 21.2

Semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, cu $\sphericalangle AOB = 76^\circ$. Aflați $\sphericalangle AOC$.

REZOLVARE

Bisectoarea împarte unghiul în două unghiuri congruente:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB = \frac{76^\circ}{2} = 38^\circ.$$

Exemplul 21.3

Transformați $42^\circ\, 35'$ în minute.

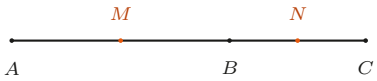
REZOLVARE

Cum $1^\circ = 60'$:

$$42^\circ\, 35' = 42 \cdot 60' + 35' = 2520' + 35' = 2555'.$$

Exemplul 21.4

Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, cu $AB = 8$ cm și $BC = 5$ cm. Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[BC]$. Aflați MN.



REZOLVARE

$$MB = \frac{AB}{2} = 4 \text{ cm}, \qquad BN = \frac{BC}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Cum B este între M și N:

$$MN = MB + BN = 4 + 2{,}5 = 6{,}5 \text{ cm}.$$

Se observă că $MN = \dfrac{AB + BC}{2} = \dfrac{AC}{2}$.

Exemplul 21.5

Punctul P aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ și $PA = 7$ cm. Aflați PB.

REZOLVARE

Mediatoarea este mulțimea punctelor egal depărtate de capetele segmentului, deci

$$PB = PA = 7 \text{ cm}.$$

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Perechi de unghiuri

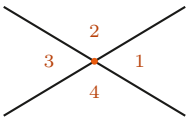
Adiacente, complementare, suplementare, opuse la vârf

Fișa 22

Clasificarea perechilor de unghiuri

Denumire	Definiție
Adiacente	au același vârf, o latură comună și niciun punct interior comun
Complementare	suma măsurilor este 90°; complementul lui x este $90^\circ - x$
Suplementare	suma măsurilor este 180°; suplementul lui x este $180^\circ - x$
Opuse la vârf	laturile unuia sunt prelungirile laturilor celuilalt; sunt **congruente**
Congruente	au aceeași măsură

Unghiuri opuse la vârf



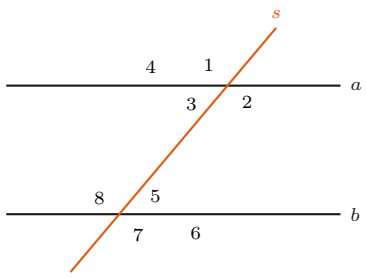
$\hat{1} \equiv \hat{3}$ și $\hat{2} \equiv \hat{4}$; $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$.

Drepte perpendiculare

Două drepte sunt **perpendiculare** dacă formează un unghi drept: $a \perp b$.

- printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o **singură** perpendiculară pe acea dreaptă;
- **distanța** de la un punct la o dreaptă = lungimea perpendicularei duse din punct pe dreaptă.

Drepte paralele tăiate de o secantă



Alterne interne	$\hat{3} \equiv \hat{5}$, $\hat{2} \equiv \hat{8}$
Alterne externe	$\hat{1} \equiv \hat{7}$, $\hat{4} \equiv \hat{6}$
Corespondente	$\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$
Interne de aceeași parte	$\hat{3} + \hat{8} = 180^\circ$, $\hat{2} + \hat{5} = 180^\circ$

RECIPROC Dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne (sau corespondente) congruente, atunci dreptele sunt **paralele**. Aceasta este metoda standard de a demonstra paralelismul.

Exemple rezolvate

Exemplul 22.1

Un unghi are măsura de 37°. Aflați complementul și suplementul său.

REZOLVARE

$$\text{complement} = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ, \qquad \text{suplement} = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ.$$

Exemplul 22.2

Două unghiuri adiacente suplementare au măsurile în raportul $2:3$. Aflați măsurile lor.

REZOLVARE

Fie măsurile $2k$ și $3k$. Din suplementaritate:

$$2k + 3k = 180^\circ \Rightarrow 5k = 180^\circ \Rightarrow k = 36^\circ.$$

Unghiurile au 72° și 108°. Verificare: $72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$. ✓

Exemplul 22.3

Dreptele a și b sunt paralele, tăiate de secanta s. Unul dintre unghiurile formate are 58°. Aflați măsura unghiului său altern intern și a celui intern de aceeași parte a secantei.

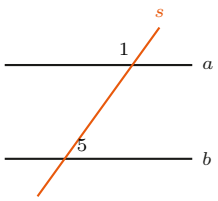
REZOLVARE

Unghiurile alterne interne sunt **congruente**, deci al doilea are tot 58°.
Unghiurile interne de aceeași parte a secantei sunt **suplementare**:

$$180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

Exemplul 22.4

Dreptele a și b sunt paralele, tăiate de secanta s. Știind că $\hat{1} = 3x + 10^\circ$ și $\hat{5} = x + 50^\circ$ sunt unghiuri corespondente, aflați x.



REZOLVARE

Unghiurile corespondente formate de două paralele cu o secantă sunt **congruente**:

$$3x + 10^\circ = x + 50^\circ \Rightarrow 2x = 40^\circ \Rightarrow x = 20^\circ.$$

Fiecare unghi are 70°.

Exemplul 22.5

Două unghiuri opuse la vârf au măsurile $5x - 12^\circ$ și $3x + 8^\circ$. Aflați măsura fiecăruia.

REZOLVARE

Unghiurile opuse la vârf sunt congruente:

$$5x - 12^\circ = 3x + 8^\circ \Rightarrow 2x = 20^\circ \Rightarrow x = 10^\circ,$$

deci fiecare unghi are $5 \cdot 10^\circ - 12^\circ = 38^\circ$.

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Triunghiul

Elemente, clasificare, suma unghiurilor, inegalități

Fișa 23

Elemente și notații

Notație	$\triangle ABC$
Vârfuri	A, B, C
Laturi	$[AB]$, $[BC]$, $[CA]$; se notează $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
Unghiuri	$\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ (pe scurt $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$)
Perimetrul	$P = a + b + c$; semiperimetrul $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Clasificare

Criteriu	Tipuri		
După laturi	oarecare (scalen)	isoscel: două laturi congruente	echilateral: toate laturile congruente
După unghiuri	ascuțitunghic: toate unghiurile ascuțite	dreptunghic: un unghi drept	obtuzunghic: un unghi obtuz

Teoreme fundamentale

Suma unghiurilor	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
Unghiul exterior	măsura unui unghi exterior este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri interioare neadiacente lui
Inegalitatea triunghiului	$\lvert b - c \rvert < a < b + c$ — orice latură este mai mică decât suma celorlalte două și mai mare decât diferența lor
Latură — unghi opus	într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, și reciproc

Cazurile de congruență a triunghiurilor

Triunghiuri oarecare	Triunghiuri dreptunghice
L.U.L. — două laturi și unghiul dintre ele	C.C. — cele două catete
U.L.U. — o latură și unghiurile alăturate	C.U. — o catetă și un unghi ascuțit
L.L.L. — cele trei laturi	I.U. — ipotenuza și un unghi ascuțit
	I.C. — ipotenuza și o catetă

Două triunghiuri sunt **congruente** dacă au laturile omoloage congruente și unghiurile omoloage congruente. Din congruență rezultă egalitatea **tuturor** elementelor corespunzătoare.

Exemple rezolvate

Exemplul 23.1

În $\triangle ABC$, $\hat{A} = 64^\circ$ și $\hat{B} = 53^\circ$. Aflați $\hat{C}$ și măsura unghiului exterior din C.

REZOLVARE

Din suma unghiurilor unui triunghi:

$$\hat{C} = 180^\circ - 64^\circ - 53^\circ = 63^\circ.$$

Unghiul exterior din C este suplementul lui $\hat{C}$, sau, echivalent, suma celorlalte două unghiuri interioare:

$$180^\circ - 63^\circ = 117^\circ = 64^\circ + 53^\circ. \checkmark$$

Exemplul 23.2

Pot fi 3 cm, 5 cm și 9 cm lungimile laturilor unui triunghi?

REZOLVARE

Verificăm inegalitatea triunghiului pentru latura cea mai mare:

$$3 + 5 = 8 < 9.$$

Suma a două laturi nu depășește a treia latură, deci **nu** există un astfel de triunghi.

Exemplul 23.3

În $\triangle ABC$ avem $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Ordonați crescător laturile.

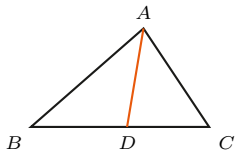
REZOLVARE

Laturii mai mari i se opune unghiul mai mare. Cum $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ și laturile opuse sunt AB, AC, respectiv BC:

$$AB < AC < BC.$$

Exemplul 23.4

În $\triangle ABC$, $\hat{B} = 50^\circ$ și $\hat{C} = 70^\circ$. Bisectoarea din A intersectează $[BC]$ în D. Aflați $\sphericalangle ADB$.



REZOLVARE

Din suma unghiurilor triunghiului: $\hat{A} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.
Bisectoarea îl înjumătățește: $\sphericalangle BAD = 30^\circ$.
În $\triangle ABD$:

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ.$$

Exemplul 23.5

Laturile unui triunghi au lungimile x, $x + 2$ și $x + 4$, iar perimetrul este 24 cm. Aflați laturile și precizați ce fel de triunghi este.

REZOLVARE

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 24 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6.$$

Laturile sunt 6, 8 și 10 cm. Cum $10^2 = 6^2 + 8^2$, triunghiul este **dreptunghic**.

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Linii importante în triunghi

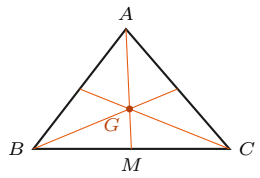
Mediana, bisectoarea, înălțimea, mediatoarea

Fișa 24

Definiții și puncte de concurență

Linia	Definiție	Punct de concurență
Mediana	segmentul care unește un vârf cu mijlocul laturii opuse	**centrul de greutate** G
Bisectoarea	semidreapta interioară care împarte un unghi în două unghiuri congruente	**centrul cercului înscris** I
Înălțimea	segmentul dus dintr-un vârf, perpendicular pe latura opusă (sau pe prelungirea ei)	**ortocentrul** H
Mediatoarea	dreapta perpendiculară pe o latură, dusă prin mijlocul acesteia	**centrul cercului circumscris** O

Centrul de greutate



$$AG = \frac{2}{3}AM, \qquad GM = \frac{1}{3}AM$$

Medianele se intersectează în G, situat la $\frac{2}{3}$ de vârf.

Cercul înscris și cercul circumscris

- I = intersecția bisectoarelor; $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA) = r$ — raza cercului **înscris**;
- O = intersecția mediatoarelor; $OA = OB = OC = R$ — raza cercului **circumscris**;
- aria: $\mathcal{A} = p \cdot r$, unde p = semiperimetrul.

Proprietăți importante

- într-un triunghi **isoscel**, mediana, bisectoarea, înălțimea și mediatoarea corespunzătoare bazei coincid;
- într-un triunghi **echilateral**, cele patru linii coincid pentru fiecare latură, iar $G = I = H = O$;
- într-un triunghi **dreptunghic**, ortocentrul este vârful unghiului drept, iar centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei;
- mediana din unghiul drept este egală cu jumătate din ipotenuză;
- punctele O, G, H sunt coliniare (dreapta lui Euler).

Exemple rezolvate

Exemplul 24.1

În $\triangle ABC$, G este centrul de greutate și AM este mediana din A, cu $AM = 12$ cm. Aflați AG și GM.

REZOLVARE

Centrul de greutate împarte mediana în raportul $2 : 1$ dinspre vârf:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm}, \qquad GM = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm}.$$

Exemplul 24.2

Triunghiul ABC are aria 60 cm^2 și perimetrul 40 cm. Aflați raza cercului înscris.

REZOLVARE

Din formula $\mathcal{A} = p \cdot r$, cu $p = \dfrac{P}{2} = 20$ cm:

$$60 = 20 \cdot r \Rightarrow r = 3 \text{ cm}.$$

Exemplul 24.3

În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $BC = 10$ cm. Aflați lungimea medianei din A și raza cercului circumscris.

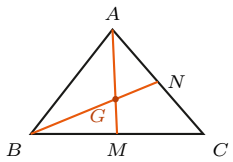
REZOLVARE

Mediana din unghiul drept este jumătate din ipotenuză, iar centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei:

$$AM = \frac{BC}{2} = 5 \text{ cm}, \qquad R = \frac{BC}{2} = 5 \text{ cm}.$$

Exemplul 24.4

În $\triangle ABC$, medianele $[AM]$ și $[BN]$ se intersectează în G. Știind că $BG = 10$ cm, aflați BN și GN.



REZOLVARE

Centrul de greutate împarte fiecare mediană în raportul $2:1$ dinspre vârf, deci $BG = \dfrac{2}{3}BN$:

$$BN = \frac{3}{2} \cdot BG = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15 \text{ cm}, \qquad GN = BN - BG = 5 \text{ cm}.$$

Exemplul 24.5

Într-un triunghi echilateral cu latura de 12 cm, aflați distanța de la centrul de greutate la o latură.

REZOLVARE

Înălțimea este $h = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. La triunghiul echilateral G coincide cu centrul cercului înscris, iar

$$r = \frac{1}{3}h = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

GEOMETRIE · CLASELE VI–VII

Triunghiuri particulare

Isoscel, echilateral, dreptunghic

Fișa 25

Triunghiul isoscel

Are două laturi congruente; a treia se numește **bază**.

- unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- bisectoarea unghiului de la vârf este simultan mediană, înălțime și mediatoare a bazei;
- este axial simetric față de această dreaptă;
- reciproc: dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci este isoscel.

Triunghiul echilateral

Are toate laturile congruente ($AB = BC = CA = \ell$).

Unghiuri	toate unghiurile au 60°
Înălțimea	$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$
Aria	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
Raza cercului circumscris	$R = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$
Raza cercului înscris	$r = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$

Triunghiul dreptunghic

Are un unghi de 90°; laturile care formează unghiul drept sunt **catetele**, latura opusă este **ipotenuza**.

- cele două unghiuri ascuțite sunt **complementare**: $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$;
- mediana din unghiul drept este egală cu jumătate din ipotenuză: $AM = \dfrac{BC}{2}$;
- cateta opusă unghiului de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză (teorema 30°–60°–90°);
- aria: $\mathcal{A} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2}$;
- ipotenuza este cea mai mare latură.

Triunghiuri remarcabile — elemente

Triunghi	Laturi	Unghiuri	Observație
Dreptunghic isoscel	$a,\ a,\ a\sqrt{2}$	$45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$	jumătate de pătrat
30°–60°–90°	$a,\ a\sqrt{3},\ 2a$	$30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$	jumătate de triunghi echilateral
Egiptean	$3k,\ 4k,\ 5k$	—	dreptunghic (Pitagora)

Exemple rezolvate

Exemplul 25.1

Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$ și $\hat{A} = 40^\circ$. Aflați $\hat{B}$ și $\hat{C}$.

REZOLVARE

Unghiurile alăturate bazei sunt congruente, deci $\hat{B} = \hat{C} = x$:

$$40^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow 2x = 140^\circ \Rightarrow x = 70^\circ.$$

Exemplul 25.2

Un triunghi echilateral are latura de 6 cm. Calculați înălțimea și aria.

REZOLVARE

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Exemplul 25.3

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $\hat{C} = 30^\circ$ și $BC = 16$ cm. Aflați AB.

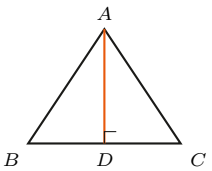
REZOLVARE

Cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză. Cateta opusă lui $\hat{C}$ este AB:

$$AB = \frac{BC}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}.$$

Exemplul 25.4

În $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm, aflați lungimea înălțimii din A și aria triunghiului.



REZOLVARE

În triunghiul isoscel, înălțimea din A este și mediană, deci $BD = DC = 6$ cm.
În $\triangle ABD$ dreptunghic în D:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

Exemplul 25.5

Un triunghi dreptunghic isoscel are cateta de 7 cm. Aflați ipotenuza și aria.

REZOLVARE

$$\text{ip} = \ell\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \text{ cm}, \qquad \mathcal{A} = \frac{7 \cdot 7}{2} = 24{,}5 \text{ cm}^2.$$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Patrulatere. Paralelogramul

Definiție, proprietăți, condiții de paralelogram

Fișa 26

Patrulaterul convex

- vârfuri: A, B, C, D;
- laturi: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$;
- diagonale: $[AC]$, $[BD]$;
- suma unghiurilor: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$;
- suma unghiurilor exterioare: 360°;
- perimetrul: suma lungimilor laturilor.

Paralelogramul

Definiție: patrulaterul convex cu laturile opuse paralele ($AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$).

Proprietăți	Consecințe
laturile opuse sunt congruente	$AB = CD$, $BC = AD$
unghiurile opuse sunt congruente	$\hat{A} \equiv \hat{C}$, $\hat{B} \equiv \hat{D}$
unghiurile alăturate sunt suplementare	$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$
diagonalele se înjumătățesc	$AO = OC$, $BO = OD$
centrul O este centru de simetrie	orice dreaptă prin O îl împarte în două părți congruente

Condiții suficiente ca un patrulater să fie paralelogram

1. laturile opuse sunt paralele;
2. laturile opuse sunt congruente;
3. două laturi opuse sunt paralele **și** congruente;
4. unghiurile opuse sunt congruente;
5. diagonalele se înjumătățesc.

Linia mijlocie

În triunghi	segmentul care unește mijloacele a două laturi; este **paralel** cu a treia latură și **egal cu jumătate** din ea: $MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2}$
În trapez	segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele; $MN \parallel$ baze și $MN = \frac{B+b}{2}$

Exemple rezolvate

Exemplul 26.1

În paralelogramul $ABCD$, $\hat{A} = 65^\circ$. Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

REZOLVARE

Unghiurile opuse sunt congruente, iar cele alăturate sunt suplementare:

$$\hat{C} = \hat{A} = 65^\circ, \qquad \hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Verificare: $65^\circ + 115^\circ + 65^\circ + 115^\circ = 360^\circ$. ✓

Exemplul 26.2

În $\triangle ABC$, M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$, iar $BC = 14$ cm. Aflați MN și precizați poziția lui MN față de BC.

REZOLVARE

$[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$, deci

$$MN \parallel BC \quad \text{și} \quad MN = \frac{BC}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}.$$

Exemplul 26.3

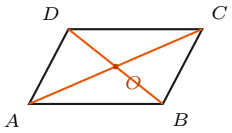
Arătați că patrulaterul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB = CD$ este paralelogram.

REZOLVARE

Două laturi opuse sunt simultan **paralele și congruente** — aceasta este una dintre condițiile suficiente ca un patrulater convex să fie paralelogram. Rezultă $ABCD$ paralelogram.

Exemplul 26.4

În paralelogramul $ABCD$, $AB = 12$ cm, $BC = 7$ cm, iar O este intersecția diagonalelor. Știind că $AC = 16$ cm, aflați perimetrul lui $\triangle AOB$ dacă $BD = 10$ cm.



REZOLVARE

Diagonalele paralelogramului se înjumătățesc:

$$AO = \frac{AC}{2} = 8 \text{ cm}, \qquad BO = \frac{BD}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$P_{\triangle AOB} = AO + OB + AB = 8 + 5 + 12 = 25 \text{ cm}$$

Exemplul 26.5

În $\triangle ABC$, MN este linie mijlocie paralelă cu BC. Ce raport există între aria lui $\triangle AMN$ și aria lui $\triangle ABC$?

REZOLVARE

Din teorema fundamentală a asemănării, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ cu $k = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}.$$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Paralelograme particulare

Dreptunghiul, rombul, pătratul

Fișa 27

Dreptunghiul

Definiție: paralelogramul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate unghiurile sunt drepte;
- diagonalele sunt **congruente**: $AC = BD$;
- diagonalele se înjumătățesc;
- are două axe de simetrie (mediatoarele laturilor);
- $\mathcal{A} = L \cdot \ell, \quad P = 2(L + \ell), \quad d = \sqrt{L^2 + \ell^2}$.

Rombul

Definiție: paralelogramul cu două laturi consecutive congruente (deci toate laturile congruente).

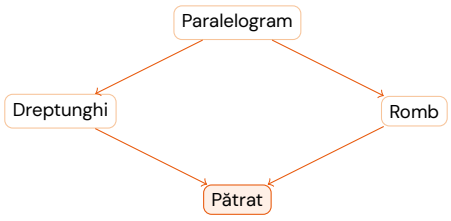
- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt **perpendiculare**;
- diagonalele sunt **bisectoarele** unghiurilor;
- are două axe de simetrie (diagonalele);
- $\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\sphericalangle A), \quad P = 4\ell$.

Pătratul

Definiție: rombul cu un unghi drept (echivalent: dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente).

- are **toate** proprietățile dreptunghiului și ale rombului;
- toate laturile congruente, toate unghiurile drepte;
- diagonalele: congruente, perpendiculare, bisectoare;
- are patru axe de simetrie;
- $\mathcal{A} = \ell^2 = \dfrac{d^2}{2}, \quad P = 4\ell, \quad d = \ell\sqrt{2}$.

Schema de incluziuni



Săgeata înseamnă „este un caz particular al”. Pătratul este simultan dreptunghi și romb.

Exemple rezolvate

Exemplul 27.1

Un dreptunghi are dimensiunile 6 cm și 8 cm. Calculați aria, perimetrul și lungimea diagonalei.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = L \cdot \ell = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2, \qquad P = 2(6 + 8) = 28 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{L^2 + \ell^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Exemplul 27.2

Diagonalele unui romb au 10 cm și 24 cm. Aflați aria și latura rombului.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$$

Diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc, deci latura este ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele 5 și 12:

$$\ell = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

Exemplul 27.3

Un pătrat are diagonala de $8\sqrt{2}$ cm. Aflați latura și aria.

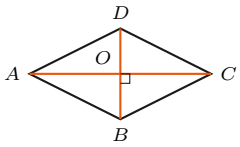
REZOLVARE

Din $d = \ell\sqrt{2}$:

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8 \text{ cm}, \qquad \mathcal{A} = \ell^2 = 64 \text{ cm}^2.$$

Exemplul 27.4

Un romb are latura de 10 cm și o diagonală de 16 cm. Aflați cealaltă diagonală și aria rombului.



REZOLVARE

Diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc, deci $AO = 8$ cm. În $\triangle AOB$ dreptunghic în O:

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ cm} \Rightarrow BD = 12 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

Exemplul 27.5

Perimetrul unui dreptunghi este 34 cm, iar diagonala are 13 cm. Aflați dimensiunile.

REZOLVARE

$$\begin{cases} L + \ell = 17 \\ L^2 + \ell^2 = 169 \end{cases}$$

Din $(L + \ell)^2 = L^2 + 2L\ell + \ell^2$: $289 = 169 + 2L\ell \Rightarrow L\ell = 60$.
Numerele cu suma 17 și produsul 60 sunt 12 și 5.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Trapezul

Definiție, tipuri, linia mijlocie, arie

Fișa 28

Definiție și elemente

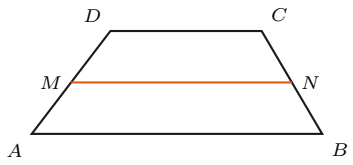
Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele și celelalte două neparalele.

Baze	laturile paralele: B = baza mare, b = baza mică
Laturi neparalele	laturile oblice
Înălțimea	distanța dintre baze: h
Unghiurile alăturate laturii oblice	sunt suplementare

Tipuri de trapeze

Tip	Definiție și proprietăți
Oarecare	fără proprietăți suplimentare
Dreptunghic	are un unghi drept; o latură oblică este perpendiculară pe baze și este chiar înălțimea
Isoscel	laturile neparalele sunt congruente. Atunci: unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente; **diagonalele sunt congruente**; are o axă de simetrie (mediatoarea bazelor)

Linia mijlocie și segmentul dintre mijloacele diagonalelor



$MN = \dfrac{B+b}{2}, \qquad MN \parallel AB \parallel DC$

$ST = \dfrac{|B-b|}{2}$ (S, T mijloacele diagonalelor)

Aria trapezului

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = MN \cdot h$$

Diagonalele trapezului îl împart în patru triunghiuri; cele două triunghiuri care au ca baze laturile neparalele au **arii egale**.

Exemple rezolvate

Exemplul 28.1

Un trapez are bazele de 12 cm și 8 cm, iar înălțimea de 5 cm. Calculați linia mijlocie și aria.

REZOLVARE

$$MN = \frac{B+b}{2} = \frac{12+8}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{20\cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2 = MN \cdot h = 10 \cdot 5. \checkmark$$

Exemplul 28.2

În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 15$ cm și $CD = 7$ cm, se notează cu S și T mijloacele diagonalelor. Aflați ST.

REZOLVARE

$$ST = \frac{|B-b|}{2} = \frac{15-7}{2} = 4 \text{ cm}.$$

Exemplul 28.3

În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\hat{A} = 72^\circ$. Aflați celelalte unghiuri.

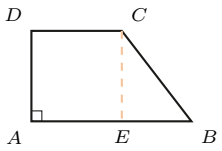
REZOLVARE

În trapezul isoscel, unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente, iar cele alăturate laturii oblice sunt suplementare:

$$\hat{B} = \hat{A} = 72^\circ, \qquad \hat{C} = \hat{D} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Exemplul 28.4

În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AB = 14$ cm, $CD = 8$ cm și $AD = 8$ cm. Aflați BC și aria trapezului.



REZOLVARE

Ducem $CE \perp AB$; atunci $AECD$ este dreptunghi, deci $AE = CD = 8$ cm și $CE = AD = 8$ cm.

$$EB = AB - AE = 14 - 8 = 6 \text{ cm}$$

În $\triangle CEB$ dreptunghic în E:

$$BC = \sqrt{CE^2 + EB^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(14+8)\cdot 8}{2} = 88 \text{ cm}^2$$

Exemplul 28.5

Linia mijlocie a unui trapez are 9 cm, iar baza mare este cu 6 cm mai lungă decât baza mică. Aflați bazele.

REZOLVARE

$$\frac{B+b}{2} = 9 \Rightarrow B + b = 18; \qquad B - b = 6$$

Adunând: $2B = 24 \Rightarrow B = 12$ cm, $b = 6$ cm.

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Teorema lui Thales. Asemănarea

Segmente proporționale, triunghiuri asemenea

Fișa 29

Teorema lui Thales

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale.

$$MN \parallel BC \iff \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{și} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Reciproca: dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, atunci $MN \parallel BC$ — metodă standard de a demonstra paralelismul.

Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi **asemenea** cu cel dat:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

Triunghiuri asemenea

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \iff \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM} = k \text{ și } \hat{A} \equiv \hat{M},\ \hat{B} \equiv \hat{N},\ \hat{C} \equiv \hat{P}$$

k se numește **raport de asemănare**.

CAZURI DE ASEMĂNARE

U.U.	două unghiuri respectiv congruente
L.U.L.	două laturi proporționale și unghiul dintre ele congruent
L.L.L.	cele trei laturi respectiv proporționale

Consecințe ale asemănării

- raportul perimetrelor $= k$;
- raportul înălțimilor, medianelor, bisectoarelor omoloage $= k$;
- raportul razelor cercurilor înscrise/circumscrise $= k$;
- **raportul ariilor** $= k^2$;
- toate triunghiurile echilaterale sunt asemenea;
- două triunghiuri congruente sunt asemenea cu $k = 1$.

TEOREMA BISECTOAREI Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile alăturate: dacă $[AD$ este bisectoarea $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$, atunci $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 29.1

În $\triangle ABC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și $MN \parallel BC$. Știind că $AM = 4$ cm, $MB = 6$ cm și $AN = 5$ cm, aflați NC.

REZOLVARE

Din teorema lui Thales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{5}{NC} \Rightarrow 4 \cdot NC = 30 \Rightarrow NC = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Exemplul 29.2

Triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea, cu raportul de asemănare $k = \frac{2}{3}$. Aria lui $\triangle ABC$ este 16 cm^2. Aflați aria lui $\triangle MNP$.

REZOLVARE

Raportul ariilor este k^2:

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{MNP}} = k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \mathcal{A}_{MNP} = \frac{9}{4} \cdot 16 = 36 \text{ cm}^2.$$

Exemplul 29.3

În $\triangle ABC$, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $D \in (BC)$. Știind că $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 15$ cm, aflați BD.

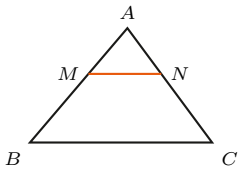
REZOLVARE

Din teorema bisectoarei, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Cu $BD + DC = 15$:

$$\frac{BD}{2} = \frac{DC}{3} = \frac{BD + DC}{5} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow BD = 6 \text{ cm}.$$

Exemplul 29.4

În $\triangle ABC$, $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $MN \parallel BC$. Se știe că $AM = 6$ cm, $AB = 15$ cm și $BC = 20$ cm. Aflați MN.



REZOLVARE

Din teorema fundamentală a asemănării, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, cu raportul

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$MN = k \cdot BC = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ cm}$$

Exemplul 29.5

Un stâlp de 2 m aruncă o umbră de 3 m. În același moment, un bloc aruncă o umbră de 27 m. Ce înălțime are blocul?

REZOLVARE

Triunghiurile formate sunt asemenea (razele solare sunt paralele):

$$\frac{2}{3} = \frac{h}{27} \Rightarrow 3h = 54 \Rightarrow h = 18 \text{ m}.$$

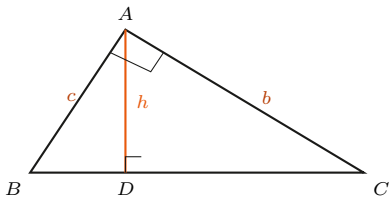
GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Teorema lui Pitagora, teorema catetei, teorema înălțimii

Fișa 30

Configurația de bază



$\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Notăm $a = BC$ (ipotenuza), $b = AC$, $c = AB$ (catetele), $h = AD$ (înălțimea din unghiul drept), BD și DC = **proiecțiile** catetelor pe ipotenuză.

Cele trei teoreme

Teorema	Relația
Teorema lui Pitagora	$a^2 = b^2 + c^2$, adică $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Reciproca lui Pitagora	dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A
Teorema catetei	$AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = DC \cdot BC$
Teorema înălțimii	$AD^2 = BD \cdot DC$
Relația ariilor	$AB \cdot AC = AD \cdot BC$, deci $h = \dfrac{b \cdot c}{a}$
Relația razelor	$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

Consecințe utile

- $BD + DC = BC$;
- mediana din A: $AM = \dfrac{BC}{2}$;
- raza cercului circumscris: $R = \dfrac{a}{2}$;
- raza cercului înscris: $r = \dfrac{b + c - a}{2}$;
- aria: $\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{a \cdot h}{2}$;
- triplete pitagoreice: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$.

Exemple rezolvate

Exemplul 30.1

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Aflați BC și înălțimea AD.

REZOLVARE

Din teorema lui Pitagora:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}.$$

Din relația ariilor $AB \cdot AC = AD \cdot BC$:

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8 \text{ cm}.$$

Exemplul 30.2

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $BD = 4$ cm și $DC = 9$ cm. Aflați AD, AB și AC.

REZOLVARE

Teorema înălțimii: $AD^2 = BD \cdot DC = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow AD = 6$ cm.
Teorema catetei, cu $BC = BD + DC = 13$ cm:

$$AB^2 = BD \cdot BC = 4 \cdot 13 = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$AC^2 = DC \cdot BC = 9 \cdot 13 = 117 \Rightarrow AC = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

Exemplul 30.3

Verificați dacă triunghiul cu laturile 5 cm, 12 cm și 13 cm este dreptunghic.

REZOLVARE

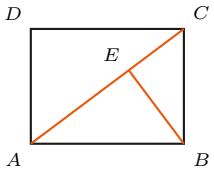
Comparăm pătratul laturii celei mai mari cu suma pătratelor celorlalte:

$$13^2 = 169, \qquad 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$$

Cum $13^2 = 5^2 + 12^2$, din reciproca teoremei lui Pitagora triunghiul este **dreptunghic**.

Exemplul 30.4

În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm și $BC = 9$ cm, se duce $BE \perp AC$, $E \in (AC)$. Aflați AC și BE.



REZOLVARE

În $\triangle ABC$ dreptunghic în B:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}.$$

BE este înălțimea din unghiul drept, deci din relația ariilor:

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7{,}2 \text{ cm}.$$

Exemplul 30.5

Într-un triunghi dreptunghic, proiecțiile catetelor pe ipotenuză sunt de 9 cm și 16 cm. Aflați lungimile catetelor și aria triunghiului.

REZOLVARE

Ipotenuza: $a = 9 + 16 = 25$ cm. Din teorema catetei:

$$b = \sqrt{9 \cdot 25} = 15 \text{ cm}, \qquad c = \sqrt{16 \cdot 25} = 20 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Sinus, cosinus, tangentă, cotangentă

Fișa 31

Definiții

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, pentru un unghi ascuțit x:

$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuza}} \qquad \cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

Tabelul valorilor

Funcția	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Relații între funcțiile trigonometrice

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (formula fundamentală)
2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
3. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
4. $\sin(90^\circ - x) = \cos x$
5. $\cos(90^\circ - x) = \sin x$
6. $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \operatorname{ctg} x$

Din relația 4 și 5: dacă $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sunt unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, atunci $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$.

Aplicații

Aflarea unei laturi	$c_{\text{opusă}} = \text{ip} \cdot \sin x$; $c_{\text{alăturată}} = \text{ip} \cdot \cos x$
Aria unui triunghi oarecare	$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle A)}{2}$
Aria paralelogramului	$\mathcal{A} = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle ABC)$
Unghiul de înclinare	în probleme practice (rampe, umbre, scări), se modelează cu un triunghi dreptunghic

Exemple rezolvate

Exemplul 31.1

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $AB = 3$ cm și $BC = 5$ cm. Calculați $\sin \hat{C}$, $\cos \hat{C}$ și $\operatorname{tg} \hat{C}$.

REZOLVARE

Din Pitagora, $AC = \sqrt{25-9} = 4$ cm. Față de $\hat{C}$: cateta opusă este $AB = 3$, cea alăturată $AC = 4$, ipotenuza $BC = 5$.

$$\sin \hat{C} = \frac{3}{5}, \qquad \cos \hat{C} = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{3}{4}$$

Verificare: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1.$ ✓

Exemplul 31.2

O scară de 6 m este sprijinită de un perete, formând cu solul un unghi de 60°. La ce înălțime ajunge scara pe perete?

REZOLVARE

Înălțimea este cateta opusă unghiului de 60°, iar scara este ipotenuza:

$$h = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}19 \text{ m}.$$

Exemplul 31.3

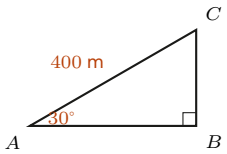
Calculați $E = \sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$.

REZOLVARE

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Exemplul 31.4

Un teren înclinat urcă sub un unghi de 30° față de orizontală. Un drum de 400 m pe acest teren corespunde cărei diferențe de nivel?



REZOLVARE

Diferența de nivel este cateta opusă unghiului de 30°, iar drumul este ipotenuza:

$$BC = AC \cdot \sin 30^\circ = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200 \text{ m}.$$

Exemplul 31.5

În $\triangle ABC$ dreptunghic în A, $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{3}{4}$ și $AC = 9$ cm. Aflați AB și BC.

REZOLVARE

Față de $\hat{B}$, cateta opusă este AC și cea alăturată AB:

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 12 \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Cercul

Elemente, unghiuri, lungimi, arii

Fișa 32

Elemente

Cercul $\mathcal{C}(O,r)$ este mulțimea punctelor din plan situate la distanța $r>0$ față de un punct fix O.

Centrul	punctul O
Raza	segmentul $[OA]$ cu A pe cerc, sau lungimea sa r
Coarda	segment care unește două puncte ale cercului
Diametrul	coarda care trece prin centru; $d=2r$ — cea mai lungă coardă
Arcul	porțiune de cerc determinată de două puncte: $\overset{\frown}{AB}$
Discul	cercul împreună cu interiorul său

Unghiuri în cerc

Unghi la centru	are vârful în O; măsura sa este egală cu măsura arcului cuprins între laturi: $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$
Unghi înscris	are vârful pe cerc; măsura sa este **jumătate** din măsura arcului cuprins: $\sphericalangle MNP = \dfrac{\overset{\frown}{MP}}{2}$
Consecință	unghiul înscris într-un semicerc este **drept** (90°)
Consecință	unghiurile înscrise care subîntind același arc sunt congruente

Lungimi și arii

Lungimi	Arii
$L_{\text{cerc}} = 2\pi r = \pi d$	$\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi r^2$
$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi r n}{180}$ (n = măsura arcului în grade)	$\mathcal{A}_{\text{sector}} = \dfrac{\pi r^2 n}{360} = \dfrac{\ell \cdot r}{2}$

$\pi \approx 3{,}14$. Aria coroanei circulare: $\mathcal{A} = \pi(R^2 - r^2)$.

Poziții relative

- **dreaptă și cerc**: $d(O,\text{dreapta}) > r$ — exterioară; $= r$ — **tangentă**; $< r$ — secantă;
- raza dusă în punctul de tangență este **perpendiculară** pe tangentă;
- tangentele duse dintr-un punct exterior sunt **congruente**;
- diametrul perpendicular pe o coardă o **înjumătățește**;
- coarde congruente sunt egal depărtate de centru.

Exemple rezolvate

Exemplul 32.1

Un cerc are raza de 6 cm. Calculați lungimea cercului și aria discului.

REZOLVARE

$$L = 2\pi r = 12\pi \text{ cm}, \qquad \mathcal{A} = \pi r^2 = 36\pi \text{ cm}^2.$$

Exemplul 32.2

Un unghi înscris într-un cerc are măsura de 35°. Ce măsură are arcul cuprins între laturile sale? Dar unghiul la centru corespunzător?

REZOLVARE

Unghiul înscris are măsura egală cu jumătate din arcul cuprins, deci

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ,$$

iar unghiul la centru are măsura arcului: 70°.

Exemplul 32.3

Într-un cerc de rază 10 cm, un sector circular corespunde unui arc de 72°. Calculați lungimea arcului și aria sectorului.

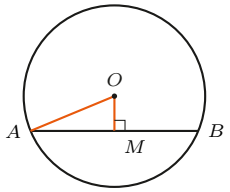
REZOLVARE

$$\ell = \frac{\pi r n}{180} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 72}{180} = 4\pi \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 72}{360} = 20\pi \text{ cm}^2$$

Exemplul 32.4

În cercul de centru O și rază 13 cm, coarda $[AB]$ are lungimea de 24 cm. Aflați distanța de la centru la coardă.



REZOLVARE

Perpendiculara din centru pe coardă o **înjumătățește**, deci $AM = 12$ cm.
În $\triangle OMA$ dreptunghic în M:

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Exemplul 32.5

Un triunghi ABC este înscris într-un cerc, iar $[BC]$ este diametru. Ce fel de triunghi este ABC? Dacă $BC = 26$ cm și $AB = 10$ cm, aflați AC.

REZOLVARE

Unghiul înscris într-un semicerc este drept, deci $\triangle ABC$ este **dreptunghic în** A.

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

GEOMETRIE · CLASA A VII-A

Poligoane regulate

Triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat

Fișa 33

Definiție și elemente

Un **poligon regulat** are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc și circumscrie unui cerc, cele două cercuri fiind **concentrice**.

Apotema a_n	distanța de la centru la o latură (raza cercului înscris)
Raza R	distanța de la centru la un vârf (raza cercului circumscris)
Unghiul la centru	$\dfrac{360^\circ}{n}$
Unghiul interior	$\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$
Suma unghiurilor interioare	$(n-2)\cdot 180^\circ$
Numărul diagonalelor	$\dfrac{n(n-3)}{2}$

Poligoanele regulate din programa de gimnaziu

Element	Triunghi echilateral	Pătrat	Hexagon regulat
Latura ℓ_n	$\ell_3 = R\sqrt{3}$	$\ell_4 = R\sqrt{2}$	$\ell_6 = R$
Apotema a_n	$a_3 = \dfrac{R}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\ell}{2}$	$a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$
Raza R	$R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$	$R = \ell$
Aria	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$\mathcal{A} = \ell^2$	$\mathcal{A} = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$
Unghiul interior	60°	90°	120°

Formula generală a ariei

$$\mathcal{A}_{\text{poligon regulat}} = \frac{P \cdot a_n}{2} = \frac{n \cdot \ell_n \cdot a_n}{2}$$

DE REȚINUT Hexagonul regulat este format din **șase** triunghiuri echilaterale cu latura egală cu raza cercului circumscris. De aceea $\ell_6 = R$ și $\mathcal{A}_{\text{hexagon}} = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 33.1

Un hexagon regulat are latura de 5 cm. Calculați raza cercului circumscris, apotema și aria.

REZOLVARE

La hexagonul regulat, $R = \ell$:

$$R = 5 \text{ cm}, \qquad a_6 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 25\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Exemplul 33.2

Aflați măsura unui unghi interior al unui poligon regulat cu 12 laturi și numărul diagonalelor sale.

REZOLVARE

$$\text{unghiul interior} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{10 \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$$

$$\text{numărul diagonalelor} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$$

Exemplul 33.3

Un pătrat este înscris într-un cerc de rază 4 cm. Aflați latura și aria pătratului.

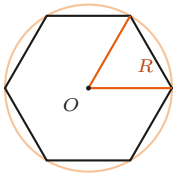
REZOLVARE

Din $\ell_4 = R\sqrt{2}$:

$$\ell = 4\sqrt{2} \text{ cm}, \qquad \mathcal{A} = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Exemplul 33.4

Un hexagon regulat cu latura de 4 cm este înscris într-un cerc. Aflați aria hexagonului și aria discului.



REZOLVARE

La hexagonul regulat $R = \ell = 4$ cm, iar hexagonul este format din 6 triunghiuri echilaterale de latură 4:

$$\mathcal{A}_{\text{hexagon}} = 6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi R^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

Exemplul 33.5

Un triunghi echilateral este înscris într-un cerc de rază 6 cm. Aflați latura triunghiului.

REZOLVARE

$$\ell_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

GEOMETRIE · CLASELE VI–VIII

Arii ale figurilor plane

Tabel de sinteză și metode de calcul

Fișa 34

Formule de arie

Figura	Aria
Triunghi oarecare	$\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$ (b = baza, h = înălțimea corespunzătoare)
Triunghi — formula lui Heron	$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$
Triunghi — cu sinus	$\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$
Triunghi — cu raza înscrisă	$\mathcal{A} = p \cdot r$
Triunghi dreptunghic	$\mathcal{A} = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2} = \dfrac{a \cdot h}{2}$
Triunghi echilateral	$\mathcal{A} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
Pătrat	$\mathcal{A} = \ell^2 = \dfrac{d^2}{2}$
Dreptunghi	$\mathcal{A} = L \cdot \ell$
Paralelogram	$\mathcal{A} = b \cdot h = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle B)$
Romb	$\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\sphericalangle A) = b \cdot h$
Trapez	$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$
Poligon regulat	$\mathcal{A} = \dfrac{P \cdot a_n}{2}$
Disc	$\mathcal{A} = \pi r^2$
Sector circular	$\mathcal{A} = \dfrac{\pi r^2 n}{360}$

METODE DE LUCRU Pentru figuri neregulate: se **descompune** figura în triunghiuri și patrulatere cunoscute, sau se **completează** la o figură simplă din care se scad părțile în plus.
Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu **pătratul** raportului de asemănare.

Exemple rezolvate

Exemplul 34.1

Calculați aria triunghiului cu laturile de 13 cm, 14 cm și 15 cm.

REZOLVARE

Aplicăm formula lui Heron, cu $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$:

$$\mathcal{A} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Exemplul 34.2

Un paralelogram are laturile de 6 cm și 8 cm, iar unghiul dintre ele de 30°. Calculați aria.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = AB \cdot BC \cdot \sin(\sphericalangle B) = 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

Exemplul 34.3

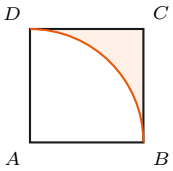
Aria unui teren în formă de trapez este 180 m^2, bazele au 16 m și 20 m. Aflați înălțimea.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2} \Rightarrow 180 = \frac{(20+16)h}{2} = 18h \Rightarrow h = 10 \text{ m}.$$

Exemplul 34.4

Din pătratul $ABCD$ cu latura de 10 cm se decupează un sfert de disc cu centrul în A și raza egală cu latura. Aflați aria porțiunii rămase.



REZOLVARE

$$\mathcal{A}_{\text{pătrat}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{sfert de disc}} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{100\pi}{4} = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{rămasă}} = 100 - 25\pi \approx 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \text{ cm}^2$$

Exemplul 34.5

Aria unui triunghi echilateral este $36\sqrt{3}$ cm^2. Aflați latura și perimetrul.

REZOLVARE

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 144 \Rightarrow \ell = 12 \text{ cm}, \qquad P = 36 \text{ cm}.$$

GEOMETRIE · CLASA A VI-A

Simetrie și transformări geometrice

Simetrie axială, simetrie centrală, translație

Fișa 35

Simetria față de un punct

Punctele A și A' sunt **simetrice** față de punctul O dacă O este mijlocul segmentului $[AA']$.

- O se numește **centru de simetrie**;
- simetricul lui O față de O este O însuși;
- simetria centrală păstrează lungimile și măsurile unghiurilor;
- figuri cu centru de simetrie: segmentul, paralelogramul, cercul, dreptunghiul, rombul, pătratul.

Simetria față de o dreaptă

Punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d dacă d este **mediatoarea** segmentului $[AA']$.

- d se numește **axă de simetrie**;
- punctele de pe d sunt propriile lor simetrice;
- simetria axială păstrează lungimile și unghiurile.

NUMĂRUL AXELOR DE SIMETRIE

Figura	Triunghi isoscel	Triunghi echilateral	Dreptunghi	Pătrat	Cerc
Axe	1	3	2	4	o infinitate

Alte transformări

Translația	deplasarea tuturor punctelor cu aceeași distanță, în aceeași direcție și același sens
Rotația	în jurul unui punct, cu un unghi dat
Asemănarea	modifică lungimile în același raport k, păstrând unghiurile

Simetria, translația și rotația sunt **izometrii**: păstrează distanțele, deci transformă o figură într-o figură **congruentă** cu ea.

Exemple rezolvate

Exemplul 35.1

Determinați simetricul punctului $A(3;\,-2)$ față de axa Ox, față de axa Oy și față de origine.

REZOLVARE

față de Ox: $A_1(3;\,2)$
față de Oy: $A_2(-3;\,-2)$
față de O: $A_3(-3;\,2)$

Se schimbă semnul ordonatei, al abscisei, respectiv al amândurora.

Exemplul 35.2

Câte axe de simetrie are un dreptunghi care nu este pătrat? Dar un pătrat?

REZOLVARE

Dreptunghiul are **două** axe de simetrie — mediatoarele laturilor. Diagonalele **nu** sunt axe de simetrie la dreptunghi.
Pătratul are **patru**: cele două mediatoare și cele două diagonale.

Exemplul 35.3

Punctul A' este simetricul lui $A(2;\ 5)$ față de punctul $M(4;\ 1)$. Aflați coordonatele lui A'.

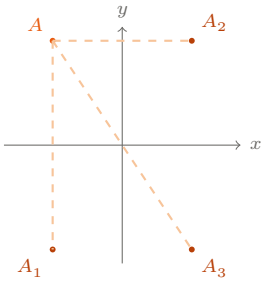
REZOLVARE

M este mijlocul lui $[AA']$, deci $x_{A'} = 2x_M - x_A$ și $y_{A'} = 2y_M - y_A$:

$$x_{A'} = 8 - 2 = 6, \qquad y_{A'} = 2 - 5 = -3 \ \Rightarrow \ A'(6;\ -3).$$

Exemplul 35.4

Reprezentați într-un reper cartezian punctul $A(-2;\ 3)$ și simetricele sale față de Ox, Oy și O.



REZOLVARE

$A_1(-2;\ -3)$ — față de Ox; $\quad A_2(2;\ 3)$ — față de Oy; $\quad A_3(2;\ -3)$ — față de O.

Se observă că A_3 este simultan simetricul lui A_1 față de Oy și al lui A_2 față de Ox.

Exemplul 35.5

Un triunghi este translatat astfel încât vârful $A(1;\ 2)$ ajunge în $A'(4;\ 6)$. În ce punct ajunge vârful $B(3;\ -1)$?

REZOLVARE

Translația deplasează toate punctele cu aceeași cantitate: $+3$ pe Ox și $+4$ pe Oy.

$$B'(3+3;\ -1+4) = B'(6;\ 3).$$

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Puncte, drepte și plane

Determinarea planului, poziții relative

Fișa 36

Determinarea unui plan

Un plan este determinat de:

1. trei puncte necoliniare;
2. o dreaptă și un punct exterior ei;
3. două drepte concurente;
4. două drepte paralele distincte.

Puncte **coplanare**: aparțin aceluiași plan. Dacă două puncte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci întreaga dreaptă este inclusă în plan.

Poziții relative a două drepte în spațiu

Poziție	Caracterizare
Concurente	coplanare, au exact un punct comun
Paralele	coplanare, fără puncte comune
Identice	toate punctele comune
Necoplanare	nu există niciun plan care să le conțină pe ambele; nu au puncte comune, dar **nu** sunt paralele

Poziții relative dreaptă–plan și plan–plan

Dreapta d și planul α	Planele α și β
$d \subset \alpha$ — dreapta este inclusă în plan	$\alpha = \beta$ — plane confundate
$d \cap \alpha = \{P\}$ — dreapta „înțeapă” planul	$\alpha \cap \beta = d$ — plane secante, se intersectează după o dreaptă
$d \cap \alpha = \emptyset$ — dreapta este **paralelă** cu planul	$\alpha \cap \beta = \emptyset$ — plane **paralele**

Unghiul a două drepte în spațiu

- dacă d_1 și d_2 sunt concurente, unghiul lor este cel mai mic dintre unghiurile formate;
- dacă $d_1 \parallel d_2$, unghiul lor este $0°$;
- dacă d_1 și d_2 sunt **necoplanare**: prin același punct se duc paralele $a \parallel d_1$ și $b \parallel d_2$; unghiul lui d_1 cu d_2 este unghiul dintre a și b;
- drepte **perpendiculare** în spațiu: unghiul lor este de $90°$ (pot fi și necoplanare).

Exemple rezolvate

Exemplul 36.1

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, precizați poziția relativă a dreptelor AB și CC'.

REZOLVARE

Dreptele AB și CC' nu au puncte comune. Nu există niciun plan care să le conțină pe amândouă: AB este în planul bazei (ABC), iar CC' intersectează acest plan în $C \notin AB$. Prin urmare sunt **necoplanare**.

Exemplul 36.2

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, arătați că $AB \parallel D'C'$.

REZOLVARE

$AB \parallel DC$ (laturi opuse ale pătratului $ABCD$) și $DC \parallel D'C'$ (fețe opuse ale cubului). Din tranzitivitatea paralelismului dreptelor,

$$AB \parallel D'C'.$$

Exemplul 36.3

Câte plane determină 4 puncte, dintre care oricare 3 sunt necoliniare și nu toate 4 coplanare?

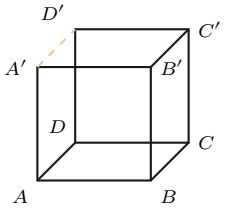
REZOLVARE

Fiecare grup de 3 puncte necoliniare determină un plan, iar cele 4 puncte nefiind coplanare, planele sunt distincte:

$$\text{numărul planelor} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Exemplul 36.4

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, precizați poziția relativă a dreptelor: a) AD și $B'C'$; b) AB' și DC; c) AA' și CC'.



REZOLVARE

a) $AD \parallel BC$ și $BC \parallel B'C'$, deci $AD \parallel B'C'$ — **paralele**.
b) AB' este în planul (ABB'), iar DC îl intersectează într-un punct care nu aparține lui AB'; nu există un plan comun — **necoplanare**.
c) $AA' \parallel CC'$, ambele fiind muchii laterale ale cubului — **paralele**.

Exemplul 36.5

Câte drepte determină 5 puncte, dintre care oricare 3 sunt necoliniare?

REZOLVARE

Fiecare pereche de puncte determină o dreaptă:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ drepte.}$$

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Paralelism în spațiu

Dreaptă paralelă cu plan, plane paralele

Fișa 37

Dreaptă paralelă cu un plan

Definiție	$d \parallel \alpha \iff d \cap \alpha = \emptyset$
Criteriu	dacă $d \parallel a$ și $a \subset \alpha$, cu $d \not\subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$
Proprietate	dacă $d \parallel \alpha$ și un plan β care conține d taie α după dreapta a, atunci $d \parallel a$

Plane paralele

Definiție	$\alpha \parallel \beta \iff \alpha \cap \beta = \emptyset$
Criteriu	dacă două drepte concurente din α sunt paralele cu două drepte concurente din β, atunci $\alpha \parallel \beta$
Proprietate	dacă $\alpha \parallel \beta$ și un plan γ le taie pe amândouă, dreptele de intersecție sunt **paralele**
Distanța	distanța dintre două plane paralele este constantă

Teorema lui Thales în spațiu

Mai multe plane paralele determină pe două drepte secante segmente **proporționale**.

$$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma, \quad d_1 \cap = \{A, B, C\}, \quad d_2 \cap = \{A', B', C'\} \implies \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Proprietăți de tranzitivitate

- dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$;
- dacă $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, atunci $\alpha \parallel \gamma$;
- dacă $\alpha \parallel \beta$ și $d \subset \alpha$, atunci $d \parallel \beta$;
- dacă $d \parallel \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$, atunci $d \parallel \beta$ sau $d \subset \beta$.

ATENȚIE Două drepte paralele cu același plan **nu** sunt neapărat paralele între ele — pot fi concurente sau necoplanare. Tranzitivitatea funcționează pentru drepte cu drepte și plane cu plane, nu în combinație.

Exemple rezolvate

Exemplul 37.1

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, arătați că $AB \parallel (A'B'C')$.

REZOLVARE

$AB \parallel A'B'$, deoarece $ABB'A'$ este pătrat. Cum $A'B' \subset (A'B'C')$ și $AB \not\subset (A'B'C')$, din criteriul de paralelism dreaptă–plan rezultă

$$AB \parallel (A'B'C').$$

Exemplul 37.2

Trei plane paralele taie o dreaptă în punctele A, B, C și o a doua dreaptă în A', B', C'. Știind că $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $A'B' = 4$ cm, aflați $B'C'$.

REZOLVARE

Din teorema lui Thales în spațiu:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{4}{B'C'} \Rightarrow 6 \cdot B'C' = 36 \Rightarrow B'C' = 6 \text{ cm}.$$

Exemplul 37.3

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, arătați că planele (ABC) și $(A'B'C')$ sunt paralele.

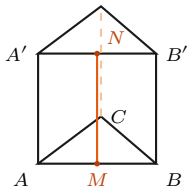
REZOLVARE

$AB \parallel A'B'$ și $BC \parallel B'C'$, iar $AB \cap BC = \{B\}$, $A'B' \cap B'C' = \{B'\}$. Două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu două drepte concurente din celălalt, deci

$$(ABC) \parallel (A'B'C').$$

Exemplul 37.4

În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, M și N sunt mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[A'B']$. Arătați că $MN \parallel (ACC')$.



REZOLVARE

$MN \parallel AA'$, fiindcă $MNA'A$ este paralelogram ($AM \parallel A'N$ și $AM = A'N$).
Cum $AA' \subset (ACC')$ și $MN \not\subset (ACC')$, din criteriul de paralelism dreaptă–plan rezultă

$$MN \parallel (ACC').$$

Exemplul 37.5

Planele paralele α, β, γ taie o dreaptă în A, B, C și alta în A', B', C'. Se dau $AB = 3$ cm, $AC = 8$ cm și $A'C' = 12$ cm. Aflați $A'B'$.

REZOLVARE

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{A'B'}{12} \Rightarrow A'B' = 4{,}5 \text{ cm}.$$

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Perpendicularitate în spațiu

Dreaptă perpendiculară pe plan, teorema celor trei perpendiculare

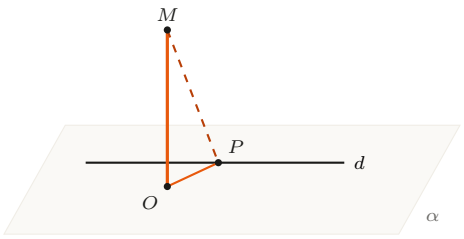
Fișa 38

Dreaptă perpendiculară pe plan

Definiție	$d \perp \alpha$ dacă d este perpendiculară pe **orice** dreaptă din α
Criteriu	dacă $d \perp a$, $d \perp b$, cu $a, b \subset \alpha$ și $a \cap b = \{O\}$, atunci $d \perp \alpha$
Unicitate	printr-un punct dat se poate duce o **singură** perpendiculară pe un plan
Proprietate	dacă $d \perp \alpha$ și $d' \parallel d$, atunci $d' \perp \alpha$; dacă $d \perp \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \parallel \beta$

Criteriul este esențial: se demonstrează perpendicularitatea pe **două drepte concurente** din plan, nu pe una singură.

Teorema celor trei perpendiculare (T3P)



Ipoteză	$MO \perp \alpha$ ($O \in \alpha$), $OP \perp d$ ($P \in d$), $d \subset \alpha$
Concluzie	$MP \perp d$
Reciproca 1	dacă $MO \perp \alpha$, $MP \perp d$, $d \subset \alpha$, atunci $OP \perp d$
Reciproca 2	dacă $MP \perp d$, $OP \perp d$, $d \subset \alpha$, $MO \perp OP$, atunci $MO \perp \alpha$

Proiecții și distanțe

Proiecția unui punct pe plan	piciorul perpendicularei duse din punct pe plan
Distanța de la punct la plan	lungimea acestei perpendiculare — este cea mai **mică** distanță de la punct la punctele planului
Proiecția unei drepte	mulțimea proiecțiilor punctelor sale; este o dreaptă (sau un punct, dacă $d \perp \alpha$)
Distanța dintre două drepte necoplanare	lungimea perpendicularei comune

Exemple rezolvate

Exemplul 38.1

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, arătați că $AA' \perp (ABC)$.

REZOLVARE

$AA' \perp AB$ și $AA' \perp AD$, fiindcă fețele $ABB'A'$ și $ADD'A'$ sunt pătrate. Cum AB și AD sunt **două drepte concurente** din planul (ABC), din criteriul de perpendicularitate rezultă

$$AA' \perp (ABC).$$

Exemplul 38.2

$VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu $VO \perp (ABC)$, O centrul bazei. M este mijlocul laturii $[BC]$. Arătați că $VM \perp BC$.

REZOLVARE

Aplicăm teorema celor trei perpendiculare: $VO \perp (ABC)$, iar $OM \perp BC$ (în pătratul $ABCD$, segmentul de la centru la mijlocul laturii este perpendicular pe latură). Cum $BC \subset (ABC)$, rezultă

$$VM \perp BC.$$

Exemplul 38.3

$VA \perp (ABC)$, $VA = 12$ cm, iar $d(A, BC) = 5$ cm, cu $BC \subset (ABC)$. Aflați $d(V, BC)$.

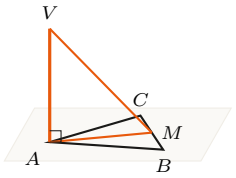
REZOLVARE

Fie P piciorul perpendicularei din A pe BC, deci $AP = 5$ cm. Din T3P, $VP \perp BC$, iar $\triangle VAP$ este dreptunghic în A:

$$VP = \sqrt{VA^2 + AP^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

Exemplul 38.4

$VA \perp (ABC)$, triunghiul ABC este echilateral cu latura de 6 cm, iar $VA = 4$ cm. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Aflați VM.



REZOLVARE

AM este înălțime în triunghiul echilateral, deci $AM = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.
Cum $VA \perp (ABC)$, avem $VA \perp AM$, iar $\triangle VAM$ este dreptunghic în A:

$$VM = \sqrt{VA^2 + AM^2} = \sqrt{16 + 27} = \sqrt{43} \text{ cm}.$$

Din T3P rezultă și $VM \perp BC$.

Exemplul 38.5

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 5 cm, calculați $d(A', (ABC))$.

REZOLVARE

$A'A \perp (ABC)$, deci distanța de la A' la planul bazei este chiar lungimea muchiei:

$$d(A', (ABC)) = AA' = 5 \text{ cm}.$$

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU · CLASA A VIII-A

Unghiuri în spațiu

Unghiul dreaptă–plan, unghiul diedru, plane perpendiculare

Fișa 39

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Definiție	unghiul dintre dreaptă și **proiecția** ei pe plan
$d \parallel \alpha$ **sau** $d \subset \alpha$	unghiul este 0°
$d \perp \alpha$	unghiul este 90°
În celelalte cazuri	$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$, unde $d' = \text{pr}_\alpha d$

Metodă de lucru: se coboară perpendiculara din punctul de pe dreaptă pe plan, se unește piciorul perpendicularei cu punctul de intersecție dintre dreaptă și plan — se obține un triunghi dreptunghic în care se calculează unghiul.

Unghiul diedru

Diedrul este figura formată de două semiplane cu aceeași frontieră (muchia diedrului).

Unghi plan corespunzător	se obține ducând, dintr-un punct al muchiei, câte o perpendiculară pe muchie în fiecare semiplan
Măsura diedrului	măsura unghiului plan corespunzător
Unghiul a două plane secante	cel mai mic dintre cele patru diedre formate

Plane perpendiculare

Definiție	$\alpha \perp \beta$ dacă unghiul diedru dintre ele este de 90°
Criteriu	dacă $d \subset \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \perp \beta$
Proprietate	dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $d \subset \alpha$ și $d \perp a$, atunci $d \perp \beta$

STRATEGIE DE REZOLVARE Aproape toate problemele de geometrie în spațiu din Evaluarea Națională se reduc la identificarea unui **triunghi dreptunghic** în care se aplică Pitagora, teorema catetei/înălțimii sau raporturi trigonometrice. Pașii: se face desenul, se marchează perpendicularele, se aplică T3P dacă e nevoie, se izolează triunghiul dreptunghic.

Exemple rezolvate

Exemplul 39.1

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 6 cm, aflați măsura unghiului dintre dreapta $A'C$ și planul (ABC).

REZOLVARE

Proiecția lui A' pe (ABC) este A, deci proiecția dreptei $A'C$ este AC, iar unghiul căutat este $\sphericalangle A'CA$. În $\triangle A'AC$ dreptunghic în A, cu $AC = 6\sqrt{2}$ (diagonala fetei) și $AA' = 6$:

$$\text{tg}(\sphericalangle A'CA) = \frac{AA'}{AC} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71.$$

Exemplul 39.2

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu latura bazei 8 cm și înălțimea $VO = 3$ cm. Aflați tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei.

REZOLVARE

Fie M mijlocul lui $[BC]$. Unghiul dintre fața (VBC) și bază este $\sphericalangle VMO$. Apotema bazei este $a_b = OM = \frac{8}{2} = 4$ cm:

$$\text{tg}(\sphericalangle VMO) = \frac{VO}{OM} = \frac{3}{4}.$$

Exemplul 39.3

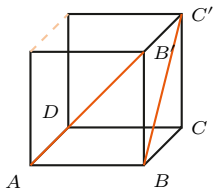
În cubul $ABCDA'B'C'D'$, arătați că planele (ABB') și (ABC) sunt perpendiculare.

REZOLVARE

$AA' \subset (ABB')$ și $AA' \perp (ABC)$. Din criteriul de perpendicularitate a două plane — un plan care conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan este perpendicular pe acesta — rezultă $(ABB') \perp (ABC)$.

Exemplul 39.4

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4 cm, aflați măsura unghiului dintre dreptele AB' și BC'.



REZOLVARE

Cele două drepte sunt necoplanare. Cum $BC' \parallel AD'$, unghiul căutat este $\sphericalangle(AB', AD') = \sphericalangle B'AD'$.
Triunghiul $AB'D'$ are toate laturile diagonale de fețe, deci $AB' = AD' = B'D' = 4\sqrt{2}$ cm — este **echilateral**:

$$\sphericalangle(AB', BC') = 60^\circ.$$

Exemplul 39.5

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu latura bazei 6 cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{3}$ cm. Aflați măsura unghiului dintre o față laterală și planul bazei.

REZOLVARE

Cu M mijlocul lui $[BC]$, unghiul este $\sphericalangle VMO$, iar $OM = 3$ cm:

$$\text{tg}(\sphericalangle VMO) = \frac{VO}{OM} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \sphericalangle VMO = 60^\circ.$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

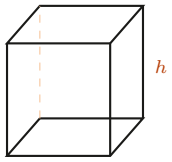
Prisma. Paralelipipedul. Cubul

Elemente, arii, volume, diagonale

Fișa 40

Prisma

Prisma este corpul mărginit de două poligoane congruente și paralele (bazele) și de paralelograme (fețele laterale). Prisma este **dreaptă** dacă muchiile laterale sunt perpendiculare pe baze și **regulată** dacă, în plus, bazele sunt poligoane regulate.



$$\mathcal{A}_\ell = P_{\text{bazei}} \cdot h, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_{\text{bazei}}, \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{bazei}} \cdot h$$

Paralelipipedul dreptunghic

Prismă dreaptă cu baza dreptunghi; are 6 fețe dreptunghiulare, 12 muchii, 8 vârfuri. Dimensiuni: a, b, c.

$$\mathcal{A}_\ell = 2c(a+b)$$
$$\mathcal{A}_t = 2(ab+ac+bc)$$
$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Cubul

Paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile congruente ($a = b = c = \ell$).

$$\mathcal{A}_\ell = 4\ell^2, \qquad \mathcal{A}_t = 6\ell^2$$
$$\mathcal{V} = \ell^3, \qquad d = \ell\sqrt{3}$$

Diagonala unei fețe: $d_{\text{față}} = \ell\sqrt{2}$.

Prisme regulate uzuale

Prisma	Aria bazei	Perimetrul bazei
Triunghiulară regulată	$\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	3ℓ
Patrulateră regulată	ℓ^2	4ℓ
Hexagonală regulată	$\dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$	6ℓ

Exemple rezolvate

Exemplul 40.1

Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm și 12 cm. Calculați aria totală, volumul și diagonala.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_t = 2(ab+ac+bc) = 2(12+36+48) = 192 \text{ cm}^2$$
$$\mathcal{V} = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^3$$
$$d = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Exemplul 40.2

Un cub are diagonala de $6\sqrt{3}$ cm. Aflați muchia, aria totală și volumul.

REZOLVARE

Din $d = \ell\sqrt{3}$ rezultă $\ell = 6$ cm.

$$\mathcal{A}_t = 6\ell^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2, \qquad \mathcal{V} = \ell^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

Exemplul 40.3

O prismă triunghiulară regulată are latura bazei de 4 cm și înălțimea de 10 cm. Calculați aria laterală și volumul.

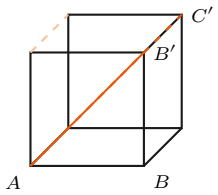
REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow \mathcal{V} = 4\sqrt{3} \cdot 10 = 40\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Exemplul 40.4

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 6 cm, calculați lungimea diagonalei unei fețe și lungimea diagonalei cubului.



REZOLVARE

$$d_{\text{față}} = \ell\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}, \qquad d_{\text{cub}} = \ell\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Exemplul 40.5

O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 5 cm și aria laterală de 180 cm^2. Aflați înălțimea și volumul.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h \Rightarrow 180 = 20h \Rightarrow h = 9 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 25 \cdot 9 = 225 \text{ cm}^3$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

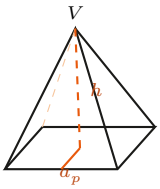
Piramida

Elemente, apotemă, arii, volum, tetraedrul regulat

Fișa 41

Piramida regulată

Piramida are ca bază un poligon, iar fețele laterale sunt triunghiuri cu vârful comun V. Este **regulată** dacă baza este poligon regulat și înălțimea cade în centrul bazei; atunci muchiile laterale sunt congruente și fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.



Înălțimea h	VO, unde O = centrul bazei
Apotema piramidei a_p	înălțimea unei fețe laterale (din V pe muchia bazei)
Apotema bazei a_b	distanța de la O la o latură a bazei
Relația fundamentală	$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ (triunghi dreptunghic)
Muchia laterală m	$m^2 = h^2 + R^2$, R = raza cercului circumscris bazei

Arii și volum

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{P_{\text{bazei}} \cdot a_p}{2}, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_{\text{bazei}}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{\text{bazei}} \cdot h}{3}$$

UNGHIURI CARACTERISTICE

Unghiul dintre o **muchie laterală** și planul bazei: în triunghiul VOA ($\text{tg} = \dfrac{h}{R}$).

Unghiul dintre o **față laterală** și planul bazei: în triunghiul VOM ($\text{tg} = \dfrac{h}{a_b}$), unde M = mijlocul unei laturi a bazei.

Tetraedrul regulat

Piramida triunghiulară regulată cu **toate** muchiile congruente (ℓ).

$$\mathcal{A}_\ell = 3 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \mathcal{A}_t = \ell^2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$$

Exemple rezolvate

Exemplul 41.1

O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm. Calculați apotema piramidei, aria laterală și volumul.

REZOLVARE

Apotema bazei: $a_b = \dfrac{12}{2} = 6$ cm. Din relația fundamentală:

$$a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{48 \cdot 10}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{144 \cdot 8}{3} = 384 \text{ cm}^3$$

Exemplul 41.2

Un tetraedru regulat are muchia de 6 cm. Calculați aria totală și volumul.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_t = \ell^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{216\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Exemplul 41.3

O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 cm și muchia laterală de 5 cm. Aflați înălțimea piramidei.

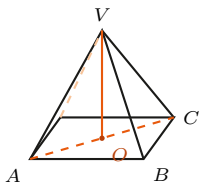
REZOLVARE

Raza cercului circumscris bazei este $R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Din $m^2 = h^2 + R^2$:

$$h = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13} \text{ cm.}$$

Exemplul 41.4

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu latura bazei 6 cm și muchia laterală $VA = 9$ cm. Aflați înălțimea piramidei.



REZOLVARE

Diagonala bazei este $AC = 6\sqrt{2}$ cm, deci $AO = \dfrac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

În $\triangle VOA$ dreptunghic în O:

$$VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{81 - 18} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Exemplul 41.5

O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei 6 cm și apotema piramidei 5 cm. Aflați aria totală.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{18 \cdot 5}{2} = 45 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_t = 45 + 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Trunchiul de piramidă

Secțiuni paralele cu baza, arii, volum

Fișa 42

Definiție

Trunchiul de piramidă se obține secționând o piramidă cu un plan paralel cu baza și îndepărtând piramida mică formată la vârf. Are două baze paralele și asemenea, iar fețele laterale sunt trapeze.

Secțiuni paralele cu baza

Dacă un plan paralel cu baza taie piramida la distanța corespunzătoare unui raport k, atunci:

$$\frac{\ell_{\text{mică}}}{\ell_{\text{mare}}} = \frac{h_{\text{mică}}}{h_{\text{mare}}} = \frac{m_{\text{mică}}}{m_{\text{mare}}} = k, \qquad \frac{\mathcal{A}_{\text{mică}}}{\mathcal{A}_{\text{mare}}} = k^2, \qquad \frac{\mathcal{V}_{\text{mică}}}{\mathcal{V}_{\text{mare}}} = k^3$$

Piramida mică este **asemenea** cu piramida inițială.

Trunchiul de piramidă regulată — formule

Notăm: $\mathcal{A}_B$ = aria bazei mari, $\mathcal{A}_b$ = aria bazei mici, P_B, P_b = perimetrele bazelor, a_p = apotema trunchiului, h = înălțimea.

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_p}{2}, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)$$

Relații metrice în trunchi

Apotema trunchiului	$a_p^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$, unde a_B, a_b = apotemele bazelor
Muchia laterală	$m^2 = h^2 + (R_B - R_b)^2$
Fața laterală	este un trapez isoscel cu bazele ℓ_B și ℓ_b și înălțimea a_p

METODĂ Multe probleme cu trunchiul se rezolvă mai simplu **completând** trunchiul până la piramida întreagă și folosind raportul de asemănare k. Volumul trunchiului $= \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} - \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}$.

Exemple rezolvate

Exemplul 42.1

Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 10 cm și 4 cm, iar înălțimea de 4 cm. Calculați apotema trunchiului.

REZOLVARE

Apotemele bazelor sunt $a_B = 5$ cm și $a_b = 2$ cm:

$$a_p = \sqrt{h^2 + (a_B - a_b)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Exemplul 42.2

Pentru trunchiul de la exemplul anterior, calculați aria laterală și volumul.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_p}{2} = \frac{(40+16)\cdot 5}{2} = 140 \text{ cm}^2$$

Cu $\mathcal{A}_B = 100$ cm^2 și $\mathcal{A}_b = 16$ cm^2:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b}\right) = \frac{4}{3}(100+16+40) = 208 \text{ cm}^3$$

Exemplul 42.3

Un plan paralel cu baza taie o piramidă la jumătatea înălțimii. Ce raport există între volumul piramidei mici și cel al piramidei inițiale?

REZOLVARE

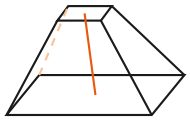
Raportul de asemănare este $k = \frac{1}{2}$, iar volumele sunt în raportul k^3:

$$\frac{\mathcal{V}_{\text{mică}}}{\mathcal{V}_{\text{mare}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Volumul trunchiului rămas este $\frac{7}{8}$ din volumul piramidei inițiale.

Exemplul 42.4

Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 8 cm și 2 cm, iar muchia laterală de 5 cm. Aflați înălțimea trunchiului.



REZOLVARE

Razele cercurilor circumscrise bazelor: $R_B = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm, $R_b = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm.

$$h = \sqrt{m^2 - (R_B - R_b)^2} = \sqrt{25 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

Exemplul 42.5

Un plan paralel cu baza taie o piramidă astfel încât aria secțiunii este $\frac{1}{9}$ din aria bazei. Ce raport există între înălțimea piramidei mici și cea a piramidei inițiale?

REZOLVARE

Raportul ariilor este k^2:

$$k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{1}{3},$$

deci înălțimea piramidei mici este a treia parte din cea a piramidei inițiale.

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

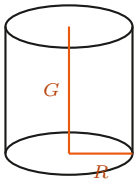
Cilindrul circular drept

Desfășurare, secțiuni, arii, volum

Fișa 43

Elemente

Cilindrul circular drept se obține prin rotirea unui dreptunghi în jurul uneia dintre laturi.



Bazele	două discuri congruente și paralele, de rază R
Generatoarea G	segmentul care unește două puncte corespunzătoare ale cercurilor de bază
Înălțimea H	la cilindrul **drept**, $H = G$
Axa de rotație	dreapta care unește centrele bazelor

Desfășurarea suprafeței laterale

Desfășurata suprafeței laterale este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2\pi R$ (lungimea cercului de bază) și G.

$$\mathcal{A}_\ell = 2\pi R \cdot G, \qquad \mathcal{A}_{\text{bazei}} = \pi R^2, \qquad \mathcal{A}_t = 2\pi R(G+R), \qquad \mathcal{V} = \pi R^2 H$$

Secțiuni în cilindru

Secțiune axială	planul conține axa; este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2R$ și G; aria $= 2RG$
Secțiune paralelă cu baza	este un **cerc** congruent cu cercul de bază
Cilindru echilateral	$G = 2R$; secțiunea axială este un **pătrat**

Exemple rezolvate

Exemplul 43.1

Un cilindru circular drept are raza de 5 cm și înălțimea de 12 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul.

REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = 2\pi RG = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$
$$\mathcal{A}_t = 2\pi R(G+R) = 2\pi \cdot 5 \cdot 17 = 170\pi \text{ cm}^2$$
$$\mathcal{V} = \pi R^2 H = \pi \cdot 25 \cdot 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

Exemplul 43.2

Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu latura de 8 cm. Aflați raza, înălțimea și volumul cilindrului.

REZOLVARE

Secțiunea axială are dimensiunile $2R$ și G. Fiind pătrat, $2R = G = 8$ cm, deci $R = 4$ cm și $H = 8$ cm:

$$\mathcal{V} = \pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\pi \text{ cm}^3.$$

Exemplul 43.3

Un rezervor cilindric are raza de 2 m și înălțimea de 3 m. Câți litri de apă încap în el? (Se ia $\pi \approx 3{,}14$.)

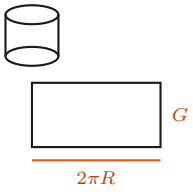
REZOLVARE

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H \approx 3{,}14 \cdot 4 \cdot 3 = 37{,}68 \text{ m}^3$$

Cum $1 \text{ m}^3 = 1000\ \ell$, rezultă aproximativ $37\,680$ de litri.

Exemplul 43.4

Desfășurata suprafeței laterale a unui cilindru este un dreptunghi cu dimensiunile 12π cm și 5 cm. Aflați raza, volumul și aria totală.



REZOLVARE

Latura mare a dreptunghiului este lungimea cercului de bază:

$$2\pi R = 12\pi \Rightarrow R = 6 \text{ cm}, \qquad G = H = 5 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = \pi R^2 H = 180\pi \text{ cm}^3, \qquad \mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 6 \cdot 11 = 132\pi \text{ cm}^2$$

Exemplul 43.5

Un cilindru are volumul 250π cm^3 și înălțimea 10 cm. Aflați raza bazei.

REZOLVARE

$$\pi R^2 \cdot 10 = 250\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ cm}.$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

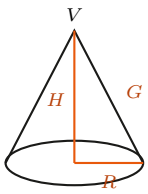
Conul circular drept

Desfășurare, secțiuni, arii, volum

Fișa 44

Elemente

Conul circular drept se obține prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catete.



$G^2 = R^2 + H^2$ (teorema lui Pitagora în triunghiul axial)

Desfășurarea și formulele

Desfășurata suprafeței laterale este un **sector de cerc** de rază G și unghi la centru

$$\alpha^\circ = \frac{360^\circ \cdot R}{G}$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi RG, \qquad \mathcal{A}_{\text{bazei}} = \pi R^2, \qquad \mathcal{A}_t = \pi R(G+R), \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Secțiuni în con

Secțiune axială	**triunghi isoscel** cu laturile G, G și baza $2R$; aria $= R \cdot H$
Secțiune paralelă cu baza	**cerc**; conul mic este asemenea cu conul mare
Con echilateral	$G = 2R$; secțiunea axială este un triunghi **echilateral**

Pentru o secțiune paralelă cu baza, cu raportul de asemănare k:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{g}{G} = k, \qquad \frac{\mathcal{A}_{\ell\,\text{mic}}}{\mathcal{A}_{\ell\,\text{mare}}} = k^2, \qquad \frac{\mathcal{V}_{\text{mic}}}{\mathcal{V}_{\text{mare}}} = k^3$$

Trunchiul de con circular drept

$$G_1^2 = H_1^2 + (R-r)^2$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi G_1(R+r), \qquad \mathcal{A}_t = \pi[G_1(R+r) + R^2 + r^2], \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi H_1}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

Exemple rezolvate

Exemplul 44.1

Un con circular drept are raza de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Calculați generatoarea, aria totală și volumul.

REZOLVARE

$$G = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm}$$
$$\mathcal{A}_t = \pi R(G + R) = \pi \cdot 6 \cdot 16 = 96\pi \text{ cm}^2$$
$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 96\pi \text{ cm}^3$$

Exemplul 44.2

Desfășurata suprafeței laterale a unui con este un sector de cerc de rază 12 cm și unghi la centru de 120°. Aflați raza bazei conului.

REZOLVARE

Generatoarea este raza sectorului, $G = 12$ cm. Din $\alpha = \dfrac{360^\circ R}{G}$:

$$120 = \frac{360R}{12} = 30R \Rightarrow R = 4 \text{ cm}.$$

Exemplul 44.3

Secțiunea axială a unui con este un triunghi echilateral cu latura de 10 cm. Aflați raza, înălțimea și volumul conului.

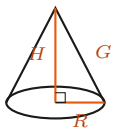
REZOLVARE

Latura triunghiului este $G = 10$ cm, iar baza este $2R = 10$, deci $R = 5$ cm.

$$H = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} \text{ cm}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

Exemplul 44.4

Un con circular drept are aria laterală 65π cm^2 și raza bazei 5 cm. Aflați generatoarea, înălțimea și volumul.



REZOLVARE

$$\mathcal{A}_\ell = \pi RG \Rightarrow 65\pi = 5\pi G \Rightarrow G = 13 \text{ cm}$$
$$H = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm}$$
$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$$

Exemplul 44.5

Un trunchi de con are razele bazelor de 6 cm și 2 cm și înălțimea de 3 cm. Aflați generatoarea și volumul.

REZOLVARE

$$G_1 = \sqrt{H^2 + (R - r)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm}$$
$$\mathcal{V} = \frac{\pi \cdot 3}{3}(36 + 4 + 12) = 52\pi \text{ cm}^3$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Sfera

Elemente, arie, volum, secțiuni

Fișa 45

Definiții

Sfera $S(O,R)$	mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța R față de punctul fix O
Corpul sferic (bila)	sfera împreună cu interiorul ei
Raza	segmentul care unește centrul cu un punct al sferei
Diametrul	$d = 2R$; coarda care trece prin centru
Cerc mare	secțiunea prin planul care trece prin centru; are raza R

Arie și volum

$$\mathcal{A}_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 \qquad \mathcal{V}_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Aria sferei este egală cu aria laterală a cilindrului circumscris ei, iar volumul sferei este $\frac{2}{3}$ din volumul acelui cilindru.

Poziția unui plan față de sferă

Fie $d = d(O,\alpha)$ distanța de la centru la plan.

$d > R$	$d = R$	$d < R$
plan **exterior**: nu are puncte comune	plan **tangent**: un singur punct comun	plan **secant**: secțiunea este un cerc de rază $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Sfera înscrisă și sfera circumscrisă

Sfera circumscrisă unui cub	$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (jumătate din diagonala cubului)
Sfera înscrisă într-un cub	$r = \frac{\ell}{2}$
Sfera circumscrisă unui paralelipiped	$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

Exemple rezolvate

Exemplul 45.1

O sferă are raza de 3 cm. Calculați aria și volumul.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi \text{ cm}^2, \qquad \mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 27}{3} = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Exemplul 45.2

Un plan situat la 8 cm de centrul unei sfere de rază 10 cm o intersectează. Aflați raza cercului de secțiune.

REZOLVARE

Cum $d = 8 < 10 = R$, planul este secant:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}.$$

Exemplul 45.3

Un cub are muchia de 4 cm. Aflați raza sferei circumscrise și raza sferei înscrise.

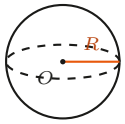
REZOLVARE

Sfera circumscrisă are diametrul egal cu diagonala cubului, iar sfera înscrisă are diametrul egal cu muchia:

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}, \qquad r = \frac{\ell}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Exemplul 45.4

O sferă are aria de 100π cm^2. Aflați raza și volumul sferei.



REZOLVARE

$$4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 125}{3} = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Exemplul 45.5

O sferă de rază 5 cm este secționată cu un plan, obținându-se un cerc de rază 4 cm. La ce distanță de centrul sferei se află planul?

REZOLVARE

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow 16 = 25 - d^2 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = 3 \text{ cm}.$$

CORPURI GEOMETRICE · CLASA A VIII-A

Arii și volume — tabel de sinteză

Toate corpurile studiate în gimnaziu

Fișa 46

Tabelul complet

Corpul	Aria laterală	Aria totală	Volumul
Cub (ℓ)	$4\ell^2$	$6\ell^2$	ℓ^3
Paralelipiped (a, b, c)	$2c(a+b)$	$2(ab+ac+bc)$	abc
Prismă dreaptă	$P_b \cdot h$	$\mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_b \cdot h$
Piramidă regulată	$\dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$	$\mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b$	$\dfrac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$
Trunchi de piramidă	$\dfrac{(P_B + P_b)a_p}{2}$	$\mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$	$\dfrac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b}\right)$
Cilindru (R, G)	$2\pi RG$	$2\pi R(G+R)$	$\pi R^2 H$
Con (R, G)	πRG	$\pi R(G+R)$	$\dfrac{\pi R^2 H}{3}$
Trunchi de con	$\pi G_1(R+r)$	$\pi[G_1(R+r) + R^2 + r^2]$	$\dfrac{\pi H_1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$
Sferă (R)	—	$4\pi R^2$	$\dfrac{4\pi R^3}{3}$

Relații de verificare rapidă

- piramida și conul: volumul este $\frac{1}{3}$ din al prismei/-cilindrului cu aceeași bază și înălțime;
- corpuri asemenea cu raportul k: ariile în raportul k^2, volumele în raportul k^3;
- toate formulele de volum au dimensiunea lungime^3, iar cele de arie lungime^2 — verificare utilă;
- la con și cilindru, G apare doar în arii, H doar în volume.

Exemple rezolvate

Exemplul 46.1

Un con și un cilindru au aceeași bază, de rază 3 cm, și aceeași înălțime, de 10 cm. Ce raport există între volumele lor?

REZOLVARE

$$\mathcal{V}_{\text{con}} = \frac{\pi R^2 H}{3}, \qquad \mathcal{V}_{\text{cilindru}} = \pi R^2 H \;\Rightarrow\; \frac{\mathcal{V}_{\text{con}}}{\mathcal{V}_{\text{cilindru}}} = \frac{1}{3}.$$

Numeric: 30π cm^3 față de 90π cm^3.

Exemplul 46.2

Două cuburi au muchiile în raportul $2:3$. Ce raport au ariile totale? Dar volumele?

REZOLVARE

Corpurile sunt asemenea cu $k=\frac{2}{3}$:

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}=k^2=\frac{4}{9},\qquad \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2}=k^3=\frac{8}{27}.$$

Exemplul 46.3

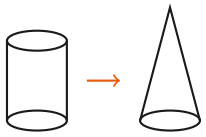
Volumul unei piramide patrulatere regulate este 75 cm^3, iar latura bazei este de 5 cm. Aflați înălțimea.

REZOLVARE

$$\mathcal{V}=\frac{\mathcal{A}_b\cdot h}{3}\ \Rightarrow\ 75=\frac{25h}{3}\ \Rightarrow\ 25h=225\ \Rightarrow\ h=9\text{ cm}.$$

Exemplul 46.4

Un vas cilindric cu raza 6 cm și înălțimea 10 cm este plin cu apă. Apa se toarnă într-un vas conic cu aceeași rază. Ce înălțime trebuie să aibă conul pentru a cuprinde exact toată apa?



REZOLVARE

$$\mathcal{V}_{\text{cilindru}}=\pi\cdot 36\cdot 10=360\pi\text{ cm}^3$$

$$\frac{\pi\cdot 36\cdot H}{3}=360\pi\ \Rightarrow\ 12H=360\ \Rightarrow\ H=30\text{ cm}$$

Conul trebuie să fie de **trei ori** mai înalt — se regăsește raportul $\frac{1}{3}$ dintre volumele con și cilindru.

Exemplul 46.5

Aria totală a unui cub este 150 cm^2. Aflați volumul cubului.

REZOLVARE

$$6\ell^2=150\ \Rightarrow\ \ell^2=25\ \Rightarrow\ \ell=5\text{ cm},\qquad \mathcal{V}=125\text{ cm}^3.$$

MĂSURARE · CLASELE V–VIII

Unități de măsură

Lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp

Fișa 47

Transformări

Mărimea	Unitatea principală	Raport între unități consecutive
Lungime	metrul (m)	$\times 10$ / $: 10$ (mm, cm, dm, m, dam, hm, km)
Arie	metrul pătrat (m^2)	$\times 100$ / $: 100$
Volum	metrul cub (m^3)	$\times 1000$ / $: 1000$
Capacitate	litrul (ℓ)	$\times 10$ / $: 10$
Masă	kilogramul (kg)	$\times 10$ / $: 10$

Echivalențe de reținut

- 1 dm^3 $= 1\ \ell$; 1 cm^3 $= 1$ mℓ; 1 m^3 $= 1000\ \ell$;
- 1 ar $= 100$ m^2; 1 ha $= 100$ ari $= 10\,000$ m^2;
- 1 km^2 $= 100$ ha $= 1\,000\,000$ m^2;
- 1 t $= 1000$ kg; 1 q $= 100$ kg; 1 kg $= 1000$ g;
- 1 min $= 60$ s; 1 h $= 60$ min $= 3600$ s; 1 zi $= 24$ h;
- unghiuri: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Mărimi derivate

Viteza	$v = \frac{d}{t}$; unități: m/s, km/h; 1 m/s $= 3{,}6$ km/h
Densitatea	$\rho = \frac{m}{V}$; unități: kg/m^3, g/cm^3
Debitul	$Q = \frac{V}{t}$; unități: ℓ/s, m^3/h

ATENȚIE La transformarea unităților de **arie** raportul este 100, iar la cele de **volum** este 1000 — nu 10. De exemplu 1 m^2 $= 100$ dm^2, dar 1 m^3 $= 1000$ dm^3. Este una dintre cele mai frecvente greșeli la Evaluarea Națională.

Exemple rezolvate

Exemplul 47.1

Transformați: a) $3{,}5$ m în cm; b) 2 m^2 în dm^2; c) $0{,}4$ m^3 în dm^3.

REZOLVARE

a) unități de lungime, raport 10 între unități consecutive: $3{,}5$ m $= 350$ cm;
b) unități de arie, raport 100: 2 m^2 $= 200$ dm^2;
c) unități de volum, raport 1000: $0{,}4$ m^3 $= 400$ dm^3.

Exemplul 47.2

Un bazin are volumul de $2{,}4$ m^3. Câți litri de apă încap în el?

REZOLVARE

Cum 1 dm^3 $= 1\ \ell$ și 1 m^3 $= 1000$ dm^3:

$$2{,}4 \text{ m}^3 = 2400 \text{ dm}^3 = 2400\ \ell.$$

Exemplul 47.3

Un autoturism parcurge 90 km în 1 oră şi 15 minute. Aflați viteza medie în km/h și în m/s.

REZOLVARE

1 h 15 min $= 1{,}25$ h, deci

$$v = \frac{d}{t} = \frac{90}{1{,}25} = 72 \text{ km/h}.$$

Cum 1 m/s $= 3{,}6$ km/h:

$$v = \frac{72}{3{,}6} = 20 \text{ m/s}.$$

Exemplul 47.4

O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 12 m, 6 m și $1{,}5$ m. Câți litri de apă sunt necesari pentru a o umple?

REZOLVARE

$$\mathcal{V} = 12 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 108 \text{ m}^3 = 108\,000 \text{ dm}^3 = 108\,000\ \ell.$$

Exemplul 47.5

Un teren dreptunghiular are 250 m lungime și 80 m lățime. Exprimați aria în ari și în hectare.

REZOLVARE

$$\mathcal{A} = 250 \cdot 80 = 20\,000 \text{ m}^2$$

Cum 1 ar $= 100$ m^2 și 1 ha $= 10\,000$ m^2:

$$\mathcal{A} = 200 \text{ ari} = 2 \text{ ha}.$$

Exemplul 47.6

Un bloc de metal are volumul de 500 cm^3 și masa de $3{,}95$ kg. Calculați densitatea în g/cm^3.

REZOLVARE

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3950 \text{ g}}{500 \text{ cm}^3} = 7{,}9 \text{ g/cm}^3.$$

ANEXĂ · EXAMEN

Greșeli frecvente

Ce văd cel mai des la corectarea lucrărilor

Fișa 48

Algebră — greșit / corect

Greșit	Corect
$(a+b)^2 = a^2+b^2$	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$	nu se simplifică; $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$
$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b}$	radicalii se adună doar dacă sunt **asemenea**
$\frac{a+b}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} = 1+\frac{b}{a}$; simplificarea se face doar prin **factori**
$-2x > 6 \Rightarrow x > -3$	$-2x > 6 \Rightarrow x < -3$ (sensul se schimbă)
$2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (exponenții se adună)
$(-2)^2 = -4$	$(-2)^2 = 4$; $-2^2 = -4$
scrierea soluției fără condiții de existență	se pun întâi condițiile, apoi se rezolvă

Geometrie — greșit / corect

Greșit	Corect
aplicarea lui Pitagora într-un triunghi oarecare	se aplică **numai** în triunghiul dreptunghic
confundarea apotemei bazei cu apotema piramidei	$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ — sunt mărimi diferite
$1\ \text{m}^2 = 10\ \text{dm}^2$	$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$
$1\ \text{m}^3 = 100\ \text{dm}^3$	$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$
raportul ariilor $= k$ la figuri asemenea	raportul ariilor $= k^2$, al volumelor $= k^3$
folosirea generatoarei în formula volumului conului	$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 H}{3}$ — cu **înălțimea**, nu cu G
demonstrarea perpendicularității pe o singură dreaptă din plan	sunt necesare **două drepte concurente** din plan
rezolvarea fără figură	figura corectă se punctează și orientează raționamentul

CEL MAI IMPORTANT SFAT Majoritatea punctelor pierdute la Evaluarea Națională nu vin din necunoașterea teoriei, ci din **redactarea incompletă**: pași săriţi, teoreme neinvocate, unități lipsă. Scrie ca și cum cel care corectează nu poate ghici ce ai gândit — pentru că exact așa este.

ANEXĂ

Notații și simboluri

Dicționar rapid de simboluri matematice

Fișa 49

Simboluri generale

$\in$	aparține	$\notin$	nu aparține
$\subset$	este inclus în	$\emptyset$	mulțimea vidă
$\cup$	reuniune	$\cap$	intersecție
$\setminus$	diferență de mulțimi	$\times$	produs cartezian
$\forall$	pentru orice	$\exists$	există
$\Rightarrow$	implică	$\Longleftrightarrow$	echivalent cu
$\mid$	divide	$:$	se divide cu
(a, b)	c.m.m.d.c.	$[a, b]$	c.m.m.m.c.
$\lvert a\rvert$	modulul lui a	$[x]$	partea întreagă
$\{x\}$	partea fracționară	$\text{card}(A)$	numărul de elemente

Simboluri de geometrie

$[AB]$	segmentul AB	AB	lungimea segmentului
$[AB$	semidreapta	AB	dreapta AB
$\parallel$	paralel cu	$\perp$	perpendicular pe
$\equiv$	congruent cu	$\sim$	asemenea cu
$\sphericalangle ABC$	unghiul ABC	$\overset{\frown}{AB}$	arcul AB
$\triangle ABC$	triunghiul ABC	$\mathcal{C}(O, r)$	cercul de centru O și rază r
$d(A, B)$	distanța	$\text{pr}_{\alpha}A$	proiecția lui A pe α
$\mathcal{A}$	aria	$\mathcal{V}$	volumul
$\mathcal{A}_{\ell}$	aria laterală	$\mathcal{A}_{t}$	aria totală
P	perimetrul	p	semiperimetrul

Litere folosite prin convenție

- a, b, c — laturile triunghiului, opuse vârfurilor A, B, C;
- h — înălțimea; m — mediana; ℓ — latura;
- R — raza cercului circumscris; r — raza cercului înscris;
- G — generatoarea (la con și cilindru) sau centrul de greutate;
- H — înălțimea corpului sau ortocentrul;
- B și b — bazele trapezului sau ale trunchiului.

CENTRUL EDUCAȚIONAL

Math Academy®

Despre această lucrare

Broșura de față sintetizează întreaga teorie de matematică de gimnaziu necesară la Evaluarea Națională, organizată pe fișe — câte un capitol pe pagină. Fiecare fișă începe cu teoria: definiții, proprietăți, formule și metode de lucru. Urmează exemplele rezolvate pas cu pas, cu figuri la problemele de geometrie. Există și varianta **„Teorie – Matematică Evaluare Națională”**, care conține aceleași fișe de teorie, fără exemple, pentru recapitulare rapidă înaintea examenului.

Despre autor

prof. Andrei Octavian Dobre — profesor de matematică, gradul didactic I, evaluator național pentru Evaluarea Națională și Bacalaureat, Global Math Ambassador, coordonator al Centrului Educațional Math Academy® din Ploiești și autor de culegeri de matematică.

Cum lucrăm la Math Academy®

- ședințe **online live**, în grupe de maximum 7 elevi;
- platforma proprie **AcadMath®**, cu teme, fișe și evidența progresului;
- **înregistrarea lecțiilor**, accesibilă elevilor care lipsesc;
- pregătire pentru Evaluarea Națională, Bacalaureat și olimpiade, clasele V–XII;
- prima ședință este **gratuită**.

academiademate.ro

Drepturi de autor și distribuire

Această lucrare poate fi distribuită numai cu acordul scris al autorului, prof. Andrei Octavian Dobre.

Reproducerea integrală sau parțială, prin orice mijloace — tipărire, fotocopiere, scanare, publicare online sau redistribuire în format electronic — fără acest acord scris, este interzisă.

© 2026 Centrul Educațional Math Academy® — academiademate.ro. Toate drepturile rezervate.