PĂCURAR CORNEL COSMIN

MATEMATICĂ PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

Profil : științele naturii

2027

Cuprins

Cuprins.... 1
Cuvânt înainte.... 3
Mulţimi de numere.... 4
Formule de calcul prescurtat.... 4
Progresii aritmetice.... 4
Progresii geometrice.... 5
Funcţii.... 5
Funcţia de gradul întâi.... 6
Funcţia de gradul doi.... 6
Vectori în plan.... 7
Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic.... 8
Relaţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic.... 8
Elemente de trigonometrie.... 9
Arii,teorema sinusului,teorema cosinusului.... 10
Funcţii trigonometrice inverse 10
Puteri,radicali,ecuaţii exponenţiale,ecuaţii iraţionale.... 11
Logaritmi,ecuaţii logaritmice.... 12
Ecuaţii trigonometrice.... 12
Metode de numărare.... 12
Matematici financiare ,probabilităţi.... 13
Elemente de geometrie analitică.... 13
Subiectul I.... 14
Matrice ,determinanţi,sisteme de ecuaţii liniare.... 43
Subiectul II1.... 45
Legi de compoziţie,grupuri.... 61
Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.... 61
Polinoame,rădăcini ale polinoamelor.... 61
Divizibilitatea polinoamelor,teorema restului,teorema lui Bezout.... 62
Relaţiile lui Viete.... 62
Subiectul II2.... 63
Tabel de derivate.... 77
Reguli de derivare.... 77
Derivate.... 77
Derivarea funcţiilor compuse.... 81
Tabel de derivate funcţii compuse.... 81
Derivate funcţii compuse.... 81
Limitele unor funcţii.... 82
Continuitate.... 82
Asimptote.... 83
Derivata unei funcţii într-un punct,ecuaţia tangentei,derivata de ordin doi.... 83
Regula lui l'Hospital.... 83
Rolul derivatei de ordin 1 şi 2 în studiul funcţiilor.... 83
Subiectul III1.... 84
Tabel de integrale nedefinite.... 101

Integrala nedefinită,primitive.....101
Proprietăţi pentru integrala nedefinită.....101
Primitive.....101
Integrala definită,proprietăţi pentru integrala definită.....103
Integrale definite.....103
Inegalităţi integrale.....104
Metoda integrării prin părţi.....104
Metoda schimbării de variabilă.....104
Arii,volume.....104
Subiectul III2.....104
Teste oficiale.....123
Teste propuse.....206
Bibliografie 361

Cuvânt înainte

Culegerea se adresează elevilor din clasele de Ştiinţele Naturii,care vor să se pregătească pentru susţinerea examenului de Bacalaureat.
Culegerea conţine elemente de teorie,exerciţii recapitulative precum şi teste.
La Subiectul I avem 858 exerciţii din clasele a 9-a şi a 10-a,la Subiectul II 1 avem 132 exerciţii de algebră clasa a 11-a, la Subiectul II 2 avem 132 exerciţii de algebră clasa a 12-a, la Subiectul III 1 avem 132 exerciţii de analiză matematică clasa a 11-a iar la Subiectul III 2 avem 132 exerciţii de analiză matematică clasa a 12-a.
Culegerea conţine 83 de teste oficiale şi 156 de teste propuse.
Testele propuse,precum şi exerciţiile recapitulative sunt asemănătoare celor întâlnite în subiectele oficiale,modelele oficiale şi în simulările oficiale din anii anteriori.
Culegerea conţine capitole dedicate noţiunilor de derivată,integrala nedefinită şi definită.
Culegerea nu conţine răspunsuri.
Recomand începerea pregătirii pentru Bacalaureat cu parcurgerea culegerii în ordinea crescătoare a paginilor până la testele oficiale.Testele oficiale au fiecare corespondent la testele propuse,de exemplu Testul K oficial este asemănător cu Testul K propus , $K\epsilon\{1,2,\dots,83\}$,din această cauză ,dacă culegerea e utilizată la clasă se recomandă ca unul dintre teste să se rezolve în clasă iar corespondentul său se dă temă.
Vă doresc spor la treabă,dacă utilizaţi culegerea şi mult succes la examenul de Bacalaureat.
Dacă observaţi erori le puteţi anunţa la 0744491758.
Autorul

Mulţimi de numere

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ este mulţimea numerelor naturale

$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$este mulţimea numerelor întregi

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}|m,n\epsilon\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$este mulţimea numerelor raţionale

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x|x$ este fracţie zecimală infinită neperiodică$\}$este mulţimea numerelor iraţionale

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ este mulţimea numerelor reale

Pentru $x\epsilon\mathbb{R}$ şi $n\epsilon\mathbb{Z}$ definim $[x]=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1\Leftrightarrow x\epsilon[n,n+1)$ şi $\{x\}=x-[x]$.

$[x]$ =partea întreagă a lui x,$\{x\}$ =partea fracţionară a lui x .

$x=[x]+\{x\}$.

Ex.$[6,73]=6$ $[-6,73]=-7$

$|x|=\begin{cases}x,\text{dacă } x\geq 0\\-x,\text{dacă } x<0\end{cases}$ $|x|$ =modulul lui x,valoarea absolută a lui x

Ex.$|-9|=9$ $|9|=9$

$\mathbb{C}=\{z=a+bi|a,b\epsilon\mathbb{R},i^2=-1\}$ este mulţimea numerelor complexe

Fie $a,b\epsilon\mathbb{R}$ şi $z=a+bi$, definim $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, numit modulul numărului complex z,

iar $\bar{z}=a-bi$ se numeşte conjugatul numărului complex $z=a+bi$

Ex.Pentru $z=6+4i$ atunci $|z|=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

Pentru $z=6+4i\Longrightarrow\bar{z}=6-4i$,pentru $z=5-3i\Longrightarrow\bar{z}=5+3i$

Fie $z_1=a+bi$ şi $z_2=c+di$ atunci

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$

$z_1=z_2\Leftrightarrow a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$

$i^2=-1,i^3=-i,i^4=1,i^5=i,i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1\ ,\ i^{4n+3}=-i$

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=i^n(1+i-1-i)=0$

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$

$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3+\cdots+b^{2n})$

Progresii aritmetice

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$se numeşte progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=a_{n-1}+r,\forall n\geq 2$,unde $r\epsilon\mathbb{R}$ se numeşte raţia progresiei.

$a_2=a_1+r,a_3=a_2+r=a_1+2r,a_4=a_3+r=a_1+3r$

Ex. a_n:2;6;10;14;18;22;...este o progresie aritmetică cu $a_1=2$ şi $r=a_2-a_1=6-2=4$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=a_1+(n-1)r,\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = r, \forall n \geq 2$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$.

x,y,z sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow y=\frac{x+z}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + r \\ z = y + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + r \\ z = x + 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - r \\ z = y + r. \end{cases}$

Progresii geometrice

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = b_{n-1} \cdot q, n \geq 2$,unde $q \neq 0$ se numeşte raţia progresiei,$b_1 \neq 0$.

$b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$.

Ex.b_n:3;6;12;24;...este o progresie geometrică cu $b_1 = 3$ şi $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{6}{3}=2$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2, q \neq 0, b_1 \neq 0$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2, q \neq 0, b_1 \neq 0$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Rightarrow S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} =$

$= \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$,pentru $q \neq 1$ şi $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = nb_1$,pentru $b_1 = 1$.

x,y,z sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow y^2 = xz \Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = yq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = xq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{q} \\ z = yq. \end{cases}$

Funcţii

Graficul ,imaginea unei funcţii

Fie funcţia f:D→C

$G_f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ este graficul funcţiei f

$\mathcal{G}_f = \{M(x, f(x)) | x \in D\}$ este imaginea geometrică a graficului funcţiei f

$\mathcal{G}_f$:y=f(x) e ecuaţia reprezentării geometrice a graficului funcţiei f

$M(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$ şi $\alpha \in D$

Imf ={f(x)|x∈D}={y∈C|∃x∈D pentru care $f(x) = y$} este imaginea funcţiei f,mulţimea valorilor funcţiei f

Intersecţia cu axele,intersecţia graficelor a două funcţii

$\mathcal{G}_f \cap Ox \ \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = 0$, $\mathcal{G}_f \cap Oy \ \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Oy: x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y=f(0), \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ \mathcal{G}_g: y = g(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = g(x)$

Monotonia funcţiilor

Pentru $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$,definim $R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, numit raport de variaţie al funcţiei f

f este strict crescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

f este strict crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) > 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) < 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este crescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$

f este crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este descrescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

f este descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \leq 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

Compunerea funcţiilor

Dacă f:D→C şi g:E→D definim f∘g:E→C şi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ex.Pentru f,g:ℝ→ℝ,$f(x) = 3x + 2$ şi $g(x) = 4x - 5$ avem

$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=3g(x)+2=3(4x-5)+2=12x-15+2=12x-13$
$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=4f(x)-5=4(3x+2)-5=12x+8-5=12x+3$
$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=3f(x)+2=3(3x+2)+2=9x+6+2=9x+8$
$(f\circ g)(0)=f\big(g(0)\big)=f(-5)=-15+2=-13$
$(f\circ f)(0)=f\big(f(0)\big)=f(2)=6+2=8$

Funcţia de gradul întâi

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=ax+b$,unde $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$ se numeşte funcţie de gradul întâi.

$\mathcal{G}_f\cap Ox=\left\{A\left(-\frac{b}{a},0\right)\right\}$ $\mathcal{G}_f\cap Oy=\{B(0,b)\}$

$a>0\Leftrightarrow$f este strict crescătoare $\Rightarrow$f este crescătoare

$a<0\Leftrightarrow$f este strict descrescătoare $\Rightarrow$f este descrescătoare

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	$-$semn a	0	semn a

Ex.Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=3x-6$ avem

$\left.\begin{matrix}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ Ox: y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=0\Leftrightarrow 3x-6=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow\mathcal{G}_f\cap Ox=\{A(2,0)\}$

$\left.\begin{matrix}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ Oy: x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=f(0)=-6\Rightarrow\mathcal{G}_f\cap Oy=\{B(0,-6)\}$

Dacă, în plus $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=5x+8$ determinaţi $\mathcal{G}_f\cap\mathcal{G}_g$.

$\left.\begin{matrix}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ \mathcal{G}_g: y=g(x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow 3x-6=5x+8\Leftrightarrow 3x-5x=8+6\Leftrightarrow -2x=14\Leftrightarrow x=-7\Rightarrow$

$f(-7)=-27\Rightarrow\mathcal{G}_f\cap\mathcal{G}_g=\{C(-7,-27)\}$

Funcţia de gradul doi

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=ax^2+bx+c$,unde $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ se numeşte funcţie de gradul doi.

$\Delta=b^2-4ac$ este discriminantul ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ este forma canonică a funcţiei de gradul doi

Graficul funcţiei de gradul doi este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi care are axa de simetrie d:$x=-\frac{b}{2a}$.

Pentru $a>0$

f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punctul de minim a lui f , $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ este minimul,valoarea minimă a lui f

Imf=$\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$ este imaginea funcţiei f , $\mathcal{G}_f\cap Oy=\{C(0,c)\}$

Pentru $a<0$

f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

$x_V = -\frac{b}{2a}$ este punctul de maxim a lui f , $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ este maximul,valoarea maximă a lui f

Imf=$(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ este imaginea funcţiei f , $\mathcal{G}_f \cap Oy = \{C(0,c)\}$

Cazul 1 $\Delta<0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \notin \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \emptyset$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	semn a	

Cazul 2 $\Delta=0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \{D(x_1, 0)\}$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	semn a	0	semn a

Cazul 3 $\Delta>0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	semn a	0 $-$semn a	0	semna

$\mathcal{G}_f$ e deasupra de Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$parabola e deasupra de Ox$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{G}_f$ e sub Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$parabola e sub Ox$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$, $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Vectori în plan

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Dacă ABCD este paralelogram,atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Pentru $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a,b), \vec{u} = c\vec{i} + d\vec{j} = (c,d)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow (a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

$\vec{v} + \vec{u} = (a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j} = (a+c, b+d)$, $\vec{v} - \vec{u} = (a-c)\vec{i} + (b-d)\vec{j} = (a-c, b-d)$

$\alpha\vec{v} = (\alpha a)\vec{i} + (\alpha b)\vec{j} = (\alpha a, \alpha b)$

$\vec{v}, \vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\vec{v}, \vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos\varphi$ este produsul scalar al vectorilor $\vec{v}, \vec{u}$,unde $\varphi \in [0°, 180°]$ este măsura unghiului dintre vectorii $\vec{v}, \vec{u}$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = ac + bd$ este expresia analitică a produsului scalar

$\cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}}$

Pentru $\vec{u} \neq \vec{0}$ şi $\vec{v} \neq \vec{0}$ avem $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului A

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

Pentru $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), M(x_M, y_M), G(x_G, y_G)$ şi $O(0,0)$avem

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

$|\overrightarrow{AB}| = AB = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O, y_A - y_O) = (x_A, y_A)$

M este mijlocul lui [AB]$\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B}{2}$

G este centrul de greutate al triunghiului ABC $\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$

A,B,C coliniare $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ colniari , AB∥CD$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ coliniari

ABCD paralelogram $\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow(x_D-x_C,y_D-y_C)=(x_A-x_B,y_A-y_B)$

ABCD paralelogram $\Leftrightarrow$[AC], [BD] au acelaşi mijloc $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}\\ \frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$

Vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}$ sunt vectori opuşi, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$,unde $\vec{0}$ este vectorul nul

Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Fie ΔABC ,$m(\sphericalangle BAC)=90°$,AD⊥BC,DϵBC

T Pitagora$\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$,T catetei$\Rightarrow\begin{cases}AB^2=BD\cdot BC\\ AC^2=CD\cdot BC\end{cases}$,T înălţimii$\Rightarrow AD^2=BD\cdot CD$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AD}{2}$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}$ $\Rightarrow$AD=$\frac{AB\cdot AC}{BC}$

Dacă M este mijlocul lui [BC]$\Rightarrow$AM=$\frac{BC}{2}$ = BM = MC=R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC

$\left.\begin{matrix}m(\sphericalangle A)=90°\\ m(\sphericalangle B)=60°\\ m(\sphericalangle C)=30°\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB=\frac{BC}{2}$

Reciproca T Pitagora în ΔABC,dacă $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow$ΔABC e dreptunghic în A, $m(\sphericalangle BAC)=90°$

Relaţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic

Fie ΔABC ,$m(\sphericalangle A)=90°$,$m(\sphericalangle B)=x°$,$m(\sphericalangle C)=90°-x°$,BC=a,AB=c,AC=b

sin x° =sinB=$\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$=cosC=cos(90° − x°)⇒ sinx°=cos(90° − x°)

cos x° =cosB=$\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$ =sinC=sin(90° − x°)⇒ cosx°=sin(90° − x°)

tg x°=tgB=$\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$=ctgC=ctg(90° − x°)⇒ tgx°=ctg(90° − x°)

ctg x° =ctgB=$\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$=tgC=tg(90° − x°)⇒ ctgx°=tg(90° − x°)

$\sin^2x°+\cos^2x°=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1\Rightarrow\sin^2x°+\cos^2x°=1$

tg x°=$\frac{\sin x°}{\cos x°}$ ctg x°=$\frac{\cos x°}{\sin x°}$ tg x° = $\frac{1}{\text{ctg } x°}$ ctg x° = $\frac{1}{\text{tg } x°}$

x	0°=0	30°=$\frac{\pi}{6}$	45°=$\frac{\pi}{4}$	60°=$\frac{\pi}{3}$	90°=$\frac{\pi}{2}$
sinx	$\frac{\sqrt{0}}{2}$=0	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$=1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
ctgx		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Elemente de trigonometrie

Fie sistemul cartezian xOy,cercul $\mathcal{C}(O, r = 1)$,pe care considerăm un sens pozitiv de parcurgere,sens invers acelor de ceasornic,numit sens trigonometric

Fie $M(x_M, y_M) \in \mathcal{C}(O, r = 1)$,$\varphi \in \mathbb{R}$,astfel ca $m(\sphericalangle xOM)=\varphi$,atunci prin definiţie avem

$\begin{cases} \cos\varphi = x_M \\ \sin\varphi = y_M \end{cases}$

$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$,pentru $\cos\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

$ctg\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,pentru $\sin\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Paritate,imparitate

$\sin(-x)=-\sin x, \cos(-x) =\cos x, tg(-x) = -tgx, ctg(-x) = -ctgx$

Periodicitate $\pi=180°, \frac{\pi}{2} = 90°$

$\sin(x + 2\pi)=\sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,\ tg(x + \pi)=tgx,\ ctg(x + \pi)=ctgx$

$\sin(x + 2k\pi)=\sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ tg(x + k\pi)=tgx,\ ctg(x + k\pi)=ctgx, \forall k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x° + 360°) = \sin x°, \cos(x° + 360°) = \cos x°,$

$tg(x° + 180°) = tgx°, ctg(x° + 180°) = ctgx°$

$\sin(x° + 360°k) = \sin x°, \cos(x° + 360°k) = \cos x°,$

$tg(x° + 180°k) = tgx°, ctg(x° + 180°k) = ctgx°, \forall k \in \mathbb{Z}$

Formule

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ ,\qquad \sin^2 x° + \cos^2 x° = 1$

$\sin x°=\cos(90° - x°),\ \cos x°=\sin(90° - x°), tgx°=ctg(90° - x°), ctgx°=ctg(90° - x°)$

$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ \cos x°=\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), tgx=ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right), ctgx=ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$tg\ x° = \frac{1}{ctg\ x°}\ ,\quad ctg\ x° = \frac{1}{tg\ x°}\ ,\ tgx = \frac{1}{ctgx}\ ,\ ctgx = \frac{1}{tgx}$

Reducerea la primul cadran

$\sin(180° - x°) = \sin x°\ , \sin x° = \sin(180° - x°)$

$\cos(180° - x°) = -\cos x°\ , \cos x° = -\cos(180° - x°)$

$\sin(\pi - x)=\sin x, \sin x=\sin(\pi - x)$

$\cos(\pi - x)=-\cos x, \cos x=-\cos(\pi - x)$

$\sin(x° - 180°) = -\sin x°\ , \sin(x - \pi) = -\sin x$

$\cos(x° - 180°) = -\cos x°\ , \cos(x - \pi) = -\cos x$

$\sin(360° - x°) = -\sin x°\ , \sin(2\pi - x) = -\sin x$

$\cos(360° - x°) = \cos x°\ \ , \cos(2\pi - x) = \cos x$

Alte formule

$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a\ ,\quad \sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\ ,\quad \cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a - \sin^2 a\ ,\ \cos 2a=2\cos^2 a - 1\ ,\ \cos 2a=1-2\sin^2 a$

$tg(a + b) = \frac{tga+tgb}{1-tgatgb}\ ,\ tg(a - b) = \frac{tga-tgb}{1+tgatgb}\ ,\quad tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2 a}$

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\ ,$

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

Arii,teorema sinusului,teorema cosinusului

Fie ΔABC, $BC=a, AB=c, AC=b, AM\perp MC, BN\perp AC, CP\perp AB, M\in BC, N\in AC, P\in AB, AM=h_a, BN=h_b, CP=h_c$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{absinC}{2}=\frac{bcsinA}{2}=\frac{acsinB}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC

Fie $p=\frac{a+b+c}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=rp$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC

T cosinusului$\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bccosA\\b^2=a^2+c^2-2accosB\\c^2=a^2+b^2-2abcosC\end{cases}$

T sinusului$\Rightarrow\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$

Dacă ΔABC este echilateral cu latura $AB=a$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ şi $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ este înălţimea sa.

Funcţii trigonometrice inverse

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsinx	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$arsin(-x)=-arcsinx, \forall x\in[-1,1]$, $arcsin(sinx)=x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $sin(arcsinx)=x, \forall x\in[-1,1]$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccosx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$arccos(-x)=\pi-arccosx, \forall x\in[-1,1]$, $arccos(cosx)=x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $cos(arccosx)=x, \forall x\in[-1,1]$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctgx	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$arctg(-x)=-arctgx, \forall x\in\mathbb{R}$, $arctg(tgx)=x, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$, $tg(arctgx)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arcctgx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$arcctg(-x)=\pi-arcctgx, \forall x\in\mathbb{R}$, $arcctg(ctgx)=x, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$, $ctg(arcctgx)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

Puteri,radicali,ecuaţii exponenţiale,ecuaţii iraţionale

Puteri

$a^0 = 1$ pentru $a\neq 0$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a\cdot a\cdot a$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n factori}}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$, $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3$, $(-a)^{2n} = a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

Ecuaţii exponenţiale

Pentru $a>0, a\neq 1$, avem

$a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b$ etc.

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ etc. Pentru $b>0$

Ex. $5^{3x+4} = 25 \Leftrightarrow 5^{3x+4} = 5^2 \Leftrightarrow 3x+4=2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

$4^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (2^2)^x = \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

Radicali de ordin 2

Pentru $a\geq 0$ definim $\sqrt{a} = b$, unde $b\geq 0$ şi $b^2 = a$.

Proprietăţi

$\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$

Pentru $a\geq 0$, avem $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

Pentru $a<0$, avem $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$

Fie $a,b\geq 0$, atunci $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

Pentru $\sqrt{f(x)}$ avem c.e. $f(x) \geq 0$.

Ecuaţii iraţionale

$\sqrt{f(x)} = b$ c.e. $f(x) \geq 0$

Pentru $b\geq 0$ avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^2$ etc.

Pentru $b<0$ avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow x\in\emptyset$

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^2$ etc.

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

Radicali de ordin 3

Pentru $a\in\mathbb{R}$ definim $\sqrt[3]{a} = b$, unde $b\in\mathbb{R}$ şi $b^3 = a$.

$\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$, $\sqrt[3]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\sqrt[3]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$,

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^n = \sqrt[3]{a^n}$, $\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$

$a<b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

Pentru $\sqrt[3]{f(x)}$ avem c.e. $f(x)\in\mathbb{R}$

Ecuaţii iraţionale

$\sqrt[3]{f(x)}=b\Leftrightarrow f(x)=b^3$ etc

$\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\big(g(x)\big)^3$

$\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Logaritmi,ecuaţii logaritmice

Logaritmi

Fie $a>0,a\neq1,b>0$, avem $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$

Ex. $4^2=16\Longrightarrow\log_4 16=2$, $3^4=81\Longrightarrow\log_3 81=4$, $5^{-2}=\frac{1}{25}\Longrightarrow\log_5\frac{1}{25}=-2$

$a^{\log_a x}=x$, $\log_a a^x=x$, $\log_a 1=\log_a a^0=0$, $\log_a a=1$, $\log_a a^2=2$, $\log_a a^3=3$, $\log_a a^n=n$, $y=\log_a a^y$

$\log_a A+\log_a B=\log_a(A\cdot B)$, $\log_a A-\log_a B=\log_a\frac{A}{B}$, $n\cdot\log_a A=\log_a A^n$,

$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $\log_a\sqrt{x}=\frac{\log_a x}{2}$, $\log_a\sqrt[3]{x}=\frac{\log_a x}{3}$

Pentru $\log_a f(x)$ avem c.e. $\begin{cases}f(x)>0\\a>0\\a\neq1\end{cases}$

Ecuaţii logaritmice

$\log_a f(x)=b$ c.e. $\begin{cases}f(x)>0\\a>0\\a\neq1\end{cases}$

$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow\log_a f(x)=\log_a a^b\Leftrightarrow f(x)=a^b$ etc.

$\log_a f(x)=\log_a g(x)$ c.e. $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\a>0,a\neq1\end{cases}$

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ etc.

$\log_a f(x)=g(x)$ c.e. $\begin{cases}f(x)>0\\a>0\\a\neq1\end{cases}$

$\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow\log_a f(x)=\log_a a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}$ etc.

Ecuaţii trigonometrice

Pentru $a\in[-1,1]$ avem $\sin x=a\Leftrightarrow x\in\{(-1)^k\arcsin a+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in[-1,1]$ avem $\cos x=a\Leftrightarrow x\in\{\arccos a\pm2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in\mathbb{R}$ avem $\operatorname{tg}x=a\Leftrightarrow x\in\{\operatorname{arctg}a+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in\mathbb{R}$ avem $\operatorname{ctg}x=a\Leftrightarrow x\in\{\operatorname{arctg}a+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Metode de numărare

Fie $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$, $\operatorname{card}A=n$ şi $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a_1\},\{a_2\},\dots,\{a_n\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\dots,\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\}$, numită mulţimea părţilor
lui A,mulţimea submulţimilor mulţimii A

$\operatorname{card}A=n\Leftrightarrow\operatorname{card}\mathcal{P}(A)=2^n$

Numărul de submulţimi ordonate de n elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $P_n=n!$.

$0!=1$, $1!=1$, $2!=1\cdot2=2$, $3!=1\cdot2\cdot3=6$,$4!=24$,$5!=120$,$6!=720$

Pentru $n\geq1$ avem $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$

$(n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1)$
$(n+2)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n+1)!\cdot(n+2)$
Numărul de submulţimi ordonate de k elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.
Numărul de submulţimi de k elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{A_n^k}{P_k}$.
$C_n^k=C_n^{n-k}$, $C_n^0=C_n^n=1$, $C_n^1=C_n^{n-1}=n$, $C_n^2=C_n^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$, $C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$
$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$,$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$
$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n=\sum_{k=0}^n C_n^ka^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^n T_{k+1}$,
unde$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$,$k\in\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k=$
$=\sum_{k=0}^n T_{k+1}$,unde$T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k$,$k\in\{0,1,2,3,\ldots,n\}$
Numărul de funcţii f:A→B este egal cu $(cardB)^{cardA}$.

Matematici financiare,probabilităţi

Procente

$\frac{a}{b}$ din $c=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$, $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
$p\%=\frac{p}{100}$, $p\%$din $c=\frac{p}{100}$din $c=\frac{p}{100}\cdot c=\frac{p\cdot c}{100}$
$p\%$din $x=r\Leftrightarrow\frac{p}{100}\cdot x=r\Leftrightarrow x=r\cdot\frac{100}{p}\Leftrightarrow x=\frac{100r}{p}$

Taxa pe valoare adăugată

$P_v=P_p+TVA$, $TVA=p\%\text{din}P_p$, $TVA=P_v-P_p$

Probabilităţi

$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Ex.Determinaţi probabilitatea ca alegând,la întâmplare un număr din mulţimea numerelor de două cifre ,acesta să fie pătrat perfect.
$A=\{10,11,12,\ldots,99\}=\{\overline{ab}|a\in\{1,2,3,\ldots,9\},b\in\{0,1,2,\ldots,9\}\}\Rightarrow cardA=99-9=9\cdot10=90=$numărul cazurilor posibile
$B=\{x\in A|x$ este pătrat perfect$\}=\{16,25,36,49,64,81\}=\{4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2\}\Rightarrow cardB=9-3=$
$=6=$numărul cazurilor favorabile
$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

Elemente de geometrie analitică

Se consideră sistemul cartezian xOy

Panta unei drepte

Fie dreapta d,$m(\sphericalangle d,Ox)=\alpha\in[0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $m_d=tg\alpha=$panta dreptei d
Dacă d:y=mx+n$\Rightarrow m_d=m$
Dacă d:ax+by+c=0$\Leftrightarrow$by=−ax−c$\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a}\Rightarrow m_d=-\frac{a}{b}$
Dacă $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=$panta dreptei AB

Ecuaţia unei drepte care trece prin două puncte

$AB:\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}$, $AB:y-y_B=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot(x-x_B)$, $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0$

Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct şi are o pantă dată

Dacă se ştie panta dreptei d, m_d şi $A(x_A,y_A)\in d\Rightarrow d:y-y_A=m_d(x-x_A)$

Fie $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$

Coliniaritate

A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$

Aria triunghiului ABC

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $A(x_A,y_A)$ şi $d:ax+by+c=0\Rightarrow d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Condiţia ca un punct să aparţină unei drepte

$A(x_A,y_A)\in d:ax+by+c=0\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$

Condiţii de paralelism,perpendicularitate

Fie $d_1:y=m_1x+n_1$ şi $d_2:y=m_2x+n_2$, atunci

$d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow m_1=m_2$

$d_1\perp d_2\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$

Subiectul I(prelucrări bacalaureat)

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_1=2$ şi raţia q=4.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=-5x-7$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia$\sqrt{5x}+x=10$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{64}\}$, acesta să fie număr natural.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2),B(0,-3)$ şi $C(6,-4)$.Determinaţi ecuaţia medianei din B a triunghiului ABC.

6.Arătaţi că $\sin x(6\sin x-\cos x)+\cos x(\sin x+6\cos x)=6$, pentru orice număr real x.

7.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_1=3$ şi raţia q=2.

8.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2-x+7$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=6x-5$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

9.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia$\sqrt{6x}+x=12$.

10.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{25}\}$, acesta să fie număr natural.

11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3),B(-4,1)$ şi $C(-3,2)$.Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.

12.Arătaţi că $\sin x(7\sin x-\cos x)+\cos x(\sin x+7\cos x)=7$, pentru orice număr real x.

13.Arătaţi că $2i+(1-i)^2=0$, unde $i^2=-1$.

14.Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-8x-9$ este egală cu 16.
15.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2+10x+105)=2$.
16.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,200}, acesta să fie număr par.
17.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,1)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, ştiind că ABCD este paralelogram.
18.Arătaţi că sin3x− sin2x+sinx= $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$,ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{1}{2}$.
19.Arătaţi că $2i-(1+i)^2=0$, unde $i^2=-1$.
20.Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-8x-7$ este egală cu 12.
21.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+10x+40)=2$.
22.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,200}, acesta să fie număr impar.
23.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(0,2)$ şi $C(2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, ştiind că ABCD este paralelogram.
24.Arătaţi că sin3x− sin2x+sinx= 0 ,ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
25.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=2$ şi raţia r=3.
26.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+9x+8$ cu axa Ox.
27.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}+3\cdot 5^x=8$.
28.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-8x+16=0$.
29.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, ştiind că triunghiul ABC este echilateral şi AB=2.
30.Arătaţi că $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos^2(x-\pi)=1$, pentru orice număr real x.
31.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=3$ şi raţia r=2.
32.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9x+8$ cu axa Ox.
33.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x+1}-3\cdot 6^x=3$.
34.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-10x+25=0$.
35.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$, ştiind că triunghiul ABC este echilateral şi AB=2.
36.Arătaţi că $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2(x+\pi)=1$, pentru orice număr real x.
37.Arătaţi că numărul a=$\left(\frac{2}{1+i}-\frac{2}{1-i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
38.Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+m=0$ sunt numere reale.
39.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=112$.
40.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 66 de submulţimi cu două elemente.
41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ şi $C(3,1)$. Determinaţi ecuaţia medianei din B a triunghiului ABC.

42.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43.Arătaţi că numărul $a=\left(\frac{2}{1+i}-\frac{2}{1-i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.

44.Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2-6x+m=0$ sunt numere reale.

45.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=351$.

46.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 55 de submulţimi cu două elemente.

47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$, $B(3,-2)$ şi $C(5,2)$. Determinaţi ecuaţia medianei din A a triunghiului ABC.

48.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

49.Determinaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2=3$.

50.Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)^2$ şi $g(x)=2019-x$.Calculaţi $g(f(3))$.

51.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^x=3^{x^2}$.

52.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 7.

53.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $(a-5)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

54.Arătaţi că tgx+ctgx=2 , ştiind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

55.Determinaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2=6$.

56.Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)^2$ şi $g(x)=2020-x$.Calculaţi $g(f(1))$.

57.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x=2^{x^2}$.

58.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 6.

59.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $(a-3)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

60.Arătaţi că tgx+ctgx=$\frac{3}{\sqrt{2}}$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

61.Arătaţi că $3+i+(i-2)(2+i)-(i-2)=0$, unde $i^2=-1$.

62.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+4$.Calculaţi $(f\circ f)(-2)$.

63.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-7x+12)=\log_3 6$.

64.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale impare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

65.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,5)$,$B(0,3)$,$C(6,5)$ şi $D(10,7)$.Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram.

66.Arătaţi că $\sin x+5\cos x=3\sqrt{2}$, ştiind că ctgx= 1 şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

67.Arătaţi că $5+i+(i-3)(3+i)-(i-5)=0$, unde $i^2=-1$.

68.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4$.Calculaţi $(f\circ f)(2)$.

69.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-8x+12)=\log_3 5$.

70.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

71.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$,$B(-2,2)$,$C(4,4)$ şi $D(8,6)$.Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram.

72.Arătaţi că sinx+7cosx=$4\sqrt{2}$, ştiind că tgx=1 şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
73.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 5$ şi $a_3 = 15$.
74.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$.Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n) < 4$.
75.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 9} = x + 3$.
76.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5}.
77.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : y = \frac{x}{2} + 5$ şi d_2:y=$(m - 2)x + 3$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare.
78.Arătaţi că, dacă sin2x=$\frac{1}{3}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{3}$.
79.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 8$ şi $a_3 = 14$.
80.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$.Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n) < 9$.
81.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 25} = x + 5$.
82.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
83.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : y = \frac{x}{3} + 3$ şi d_2:y=$(m - 3)x + 1$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare.
84.Arătaţi că, dacă sin2x=$\frac{2}{5}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{7}{5}$.
85.Arătaţi că $\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) - \sqrt{24} = 0$.
86.Determinaţi numărul real a, pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + a$ se intersectează într-un punct de abscisă x=1.
87.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x + 9} = 3 - \sqrt{x}$.
88.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3,5,6}.
89.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuaţie y=ax+4 şi d_2, de ecuaţie y=$\frac{x}{4} + 1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
90.Arătaţi că $\sin(2\pi - x)\cos(\pi - x) + \sin(\pi - x)\cos(2\pi - x) = \sin 2x$, pentru orice număr real x.
91.Arătaţi că $\sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right) - \sqrt{48} = 0$.
92.Determinaţi numărul real a, pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + a$ se intersectează într-un punct de abscisă x=1.
93.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x + 25} = 5 - \sqrt{x}$.
94.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5}.
95.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuaţie y=ax+5 şi d_2, de ecuaţie y=$\frac{x}{6} + 1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
96.Arătaţi că $\sin(\pi - x)\cos(2\pi - x) - \sin(2\pi + x)\cos(\pi - x) = \sin 2x$, pentru orice număr real x.
97.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\{n\epsilon\mathbb{N}|n(n + 1) < 14\}$ este egală cu 6.
98.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = ax + b$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $f(0) = 1$ şi $f(x + 1) = f(x) + 5$, pentru orice număr real x.
99.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia$(x + 3)^2 - 16 > 0$.
100.Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu două elemente ale mulţimii {1,3,5,7,8,9}.
101.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(3,4), B(5,2) şi C(−1,4). Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.

102.Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, ştiind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 12, DE=10 şi DF=8.
103.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\{n\epsilon\mathbb{N}|n(n+2)<16\}$ este egală cu 6.
104.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $f(0)=1$ şi $f(x+1)=f(x)+6$, pentru orice număr real x.
105.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x+2)^2-9>0$.
106.Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu două elemente ale mulţimii {1,3,5,6,7,9}.
107.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(1,2), B(3,5) şi C(−3,7). Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.
108.Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, ştiind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 12, DE=8 şi DF=10.
109.Determinaţi conjugatul numărului complex z=(3 − i)(1 + i) + 4i.
110.Determinaţi numerele naturale n pentru care $n^2+n-30<0$.
111.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+4)=2\lg(x-2)$.
112.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are 28 de submulţimi cu două elemente.
113.Se consideră dreptunghiul ABCD şi $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.Ştiind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 18, determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
114.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{10}}{3}$, atunci tgx+ctgx=18.
115.Determinaţi conjugatul numărului complex z=(1 − i)(3 + i) + 6i.
116.Determinaţi numerele naturale n pentru care $n^2+n-6<0$.
117.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+2)=2\lg(x-4)$.
118.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are 15 de submulţimi cu două elemente.
119.Se consideră dreptunghiul ABCD şi $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.Ştiind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 40, determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
120.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{7}}{2}$, atunci $\text{tg}x+\text{ctg}x=\frac{8}{3}$.
121.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3=12$ şi raţia r=5.
122.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul A(1,5) aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+3m$.
123.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $64^x+\frac{7}{64}=\frac{1}{8}$.
124.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii {2,3,4,5}.
125.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(6,2) şi B(2,6).Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
126.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=12 şi AC=5.
127.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4=10$ şi raţia r=3.
128.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul A(2,10) aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+5m$.
129.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x+\frac{4}{25}=\frac{1}{5}$.
130.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.

131.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ şi $B(6,4)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
132.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=24 şi AC=10.
133.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 6$.
134.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 1 = 0$.Arătaţi că $3x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.
135.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$.
136.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre ,acesta să fie multiplu de 12.
137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$,$B(1,a)$ şi $C(3,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
138.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$4\sqrt{2}$,AC=8 şi sinC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.Calculaţi sinB.
139.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 5$ şi $a_2 = 7$.
140.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + 4x + 1 = 0$.Arătaţi că $4x_1x_2 + (x_1 + x_2) = 0$.
141.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{2x+1} = \frac{1}{8}$.
142.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre ,acesta să fie divizibil cu 15.
143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(1,1)$ şi $C(-3,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
144.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$\sqrt{3}$,AC=$4\sqrt{3}$ şi sinB=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.Calculaţi sinC.
145.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 4i$ şi $z_2 = 3 - 4i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$este real.
146.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(2,m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5$.
147.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3x-5} = 2^{-2}$.
148.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40},acesta să fie multiplu de 5.
149.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$,$B(2,4)$ şi $C(m,2)$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.
150.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.
151.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ şi $z_2 = 3 + 2i$.Arătaţi că numărul $z_1 \cdot z_2$este real.
152.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(3,m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8$.
153.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{4x-6} = 3^{-2}$.
154.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,30},acesta să fie divizibil cu 5.
155.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$,$B(1,3)$ şi $C(1,m)$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.
156.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.
157.Se consideră numărul complex z=2−i.Arătaţi că $z^2 + 4i = 3$.
158.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 2016$ şi g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2016$.
159.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-5x} = 3^{x-9}$.

160.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,1,2,3, … ,90},acesta să fie pătrat perfect.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,2).Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie y=2x−10.
162.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=6,AC=$4\sqrt{3}$ şi A=$\frac{\pi}{3}$.
163.Se consideră numărul complex z=2−2i.Arătaţi că $z^2+8i=0$.
164.Calculaţi $(f\circ g)(0)$, unde f:ℝ→ℝ,$f(x)=x+2020$ şi g: ℝ→ℝ,$g(x)=x-2020$.
165.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-3x}=2^{x-4}$.
166.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,121},acesta să fie pătrat perfect.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,1).Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie y=x−12.
168.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=6,BC=4 şi B=$\frac{\pi}{6}$.
169.Determinaţi numărul complex z,ştiind că 2z+$\bar{z}$=6+3i,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
170.Se consideră funcţia f:ℝ →ℝ,f(x)=2x−3.Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
171.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+4)=1+\log_2(x+1)$.
172.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele identice.
173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2) şi B(5,5).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul C(−3,5) şi este perpendiculară pe dreapta AB.
174.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$6\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ACB)=30°$ şi $m(\sphericalangle BAC)=45°$.Determinaţi lungimea laturii BC.
175.Determinaţi numărul complex z,ştiind că 2z−$\bar{z}$=2+9i,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
176.Se consideră funcţia f:ℝ →ℝ,f(x)=2x+3.Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$.
177.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+3)=1+\log_3(x+1)$.
178.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele diferite.
179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,1) şi B(4,4).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul C(−1,3) şi este perpendiculară pe dreapta AB.
180.Se consideră triunghiul ABC cu AC=$4\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ACB)=45°$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30°$.Determinaţi lungimea laturii BC.
181.Se consideră numărul complex z = 2−2i.Arătaţi că $z^2=-8i$.
182.Calculaţi $(g\circ f)(0)$,unde f:ℝ→ℝ,$f(x)=x+2019$ şi g:ℝ→ℝ,$g(x)=x-2019$.
183.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{x-9}$.
184.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,90},acesta să fie pătrat perfect.
185.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,2).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=4x−2019.
186.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=6,BC=4 şi B =$\frac{\pi}{6}$.
187.Se consideră numărul complex z = 2+2i.Arătaţi că $z^2=8i$.
188.Calculaţi $(g\circ f)(0)$,unde f:ℝ→ℝ,$f(x)=x-2020$ şi g:ℝ→ℝ,$g(x)=x+2020$.
189.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+5x}=2^{x-4}$.
190.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,130},acesta să fie pătrat perfect.

191.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,1).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=−3x+2020.
192.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AC=6,BC=$4\sqrt{2}$ şi C = $\frac{\pi}{4}$.
193.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+3\right)^2 - 6\sqrt{5} = 14$.
194.Determinaţi numărul real m,ştiind că M(m, 4) aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = x + 6.
195.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+10) = \log_3 26$.
196.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 3.
197.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$ sunt coliniari.
198.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx = $\frac{1}{2}$,arătaţi că sin2x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
199.Arătaţi că $\left(\sqrt{6}-2\right)^2 + 4\sqrt{6} = 10$.
200.Determinaţi numărul real m,ştiind că M(m, 6) aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = x − 3.
201.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+4) = \log_2 40$.
202.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 4.
203.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.
204.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi cosx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$,arătaţi că sin2x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
205.Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 6$ şi raţia q=3.
206.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x) = $x^2 - 6x$.
207.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3x+1) = \log_3 4$.
208.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5}.
209.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul M(2,0) aparţine dreptei de ecuaţie y = mx−4.
210.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care BC=$\sqrt{3}$ şi A = $\frac{\pi}{3}$.
211.Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 8$ şi raţia q=2.
212.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x) = $x^2 + 4x$.
213.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(3x-1) = \log_2 5$.
214.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5}.
215.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul M(1,0) aparţine dreptei de ecuaţie y = mx+3.
216.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care AB=$3\sqrt{2}$ şi C = $\frac{\pi}{4}$.
217.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2 = 27$ şi $b_3 = 81$.
218.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f:[2,4]→$\mathbb{R}$,f(x) = x − 2.
219.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+20} = x+4$.
220.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7,8}.
221.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,4) şi B(0,1).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
222.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AC=8 şi B= $\frac{\pi}{6}$.
223.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_4 = 24$ şi $b_5 = 72$.
224.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:[1,5]→$\mathbb{R}$,f(x) = x − 3.
225.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+27} = x+3$.
226.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5,6}.
227.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,2) şi B(1,4).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
228.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care BC=6 şi A= $\frac{\pi}{3}$.

229.Se consideră numărul complex $z = 3+3i$.Arătaţi că $z^2 - 18i = 0$.
230.Calculaţi $(g \circ f)(2)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2018$.
231.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-5x} = 3^{3-3x}$.
232.Aflaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
233. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+9$.
234.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind că$MN=12$,$MP=3\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle M) = 60°$.
235.Se consideră numărul complex $z = 2+i$.Arătaţi că $z^2 - 3 - 4i = 0$.
236.Calculaţi $(g \circ f)(-4)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2020$.
237.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-6x} = 2^{4-3x}$.
238.Aflaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
239. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,5)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x+8$.
240.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind că$PN=12$,$MP=8$ şi $m(\sphericalangle P) = 30°$.
241.Calculaţi $(3 - 4i)(5 + 4i)$,unde $i^2 = -1$.
242.Calculaţi $f\big(f(3)\big)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x - 2$.
243.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2 + 14) = \log_5 50$.
244.Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 6.
245. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$, $B(4,2)$ şi $C(3,1)$.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
246.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.
247.Calculaţi $(2 + 3i)(5 - 3i)$,unde $i^2 = -1$.
248.Calculaţi $f\big(f(2)\big)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x - 3$.
249.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 + 3) = \log_2 28$.
250.Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
251. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 1)$, $B(3,2)$ şi $C(2,5)$.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
252.Se consideră $E(x) = \sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.
253.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 = 16$ şi $a_5 = 20$.
254.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2 - 8$.
255.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$.
256.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.
257. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ şi $B(1,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
258.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=10$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.
259.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_5 = 10$ şi $a_6 = 12$.
260.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2 - 25$.
261.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 11} = x + 1$.
262.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
263. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(0,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
264.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $BC=8\sqrt{3}$ şi $A=\frac{\pi}{3}$.

265.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 2$ şi raţia $r = 3$.
266.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m, 0)$,aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 6$.
267.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 + 6) = \log_3 10$.
268.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie divizibil cu 3.
269.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
270.Arătaţi că sin2x=1,ştiind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
271.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi raţia $r = 4$.
272.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m, 0)$,aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$.
273.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 + 3) = \log_2 19$.
274.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8}, acesta să fie divizibil cu 4.
275.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 2)\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sunt coliniari.
276.Arătaţi că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,ştiind că $\cos x = \frac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
277.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ şi $z_2 = 4 - i$.Arătaţi că numărul $z_1 z_2$este real.
278.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
279.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 12} = x$.
280.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
281.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,3)$ şi $B(3, a)$.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
282.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.
283.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 3 - 2i$.Arătaţi că numărul $z_1 z_2$este real.
284.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,3)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
285.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 4} = x$.
286.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,80} acesta să fie divizibil cu 6.
287.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,4)$ şi $B(4, a)$.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
288.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.
289.Fie z=2+i.Arătaţi că $z^2 - 3 - 4i = 0$.
290.Se consideră funcţiile f,g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x - 4, g(x) = x + 2016$.Calculaţi $(f \circ g)(2)$.
291.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x^2-4x} = 6^{4-x}$.
292.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5}.
293.Se cosideră punctul $A(1,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=2x+7.
294.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind că MN=8,NP=6 şi $m(\widehat{N}) = 60°$.
295.Calculaţi $(3 - 4i)(3 + 4i)$, unde $i^2 = -1$.

296.Calculaţi $f(f(2))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$.
297.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+13)=\log_4 62$.
298.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 6.
299.Se consideră punctele $A(3,a), B(2,4)$ şi $C(8,5)$.Aflaţi a din mulţimea numerelor reale pentru care A,B,C sunt coliniare.
300.Fie $E(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.
301.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_4=8$ şi $a_5=10$.
302.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-25$.
303.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+3$.
304.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1,3,5,7,9\}$.
305.Fie $A(3,2), B(2,3)$.Scrieţi ecuaţia dreptei AB.
306.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=10 şi C=$\frac{\pi}{3}$.
307.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1=3$ şi raţia r=4.
308.Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $A(m,0)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$.
309.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+9)=\log_3 25$.
310.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizibil cu 4.
311.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a+2)\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}$ sunt coliniari.
312.Arătaţi că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,ştiind că cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
313.Se consideră numerele complexe $z_1=4+i$ şi $z_2=4-i$.Arătaţi că numărul $z_1\cdot z_2$ este real.
314. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(3,3)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.
315. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+3x-5}=x$.
316. Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
317.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ $A(3,1)$ şi $B(a,4)$ .Determinaţi numărul a din mulţimea numerelor reale pentru care O,A şi B sunt coliniare.
318.Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.
319.Determinaţi numărul real care are partea întreagă -3 şi partea fracţionară 0,63.
320.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+6$ cu axa Ox şi,respectiv axa Oy.
321.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1=1$ şi raţia r=2.
322.Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $A(m,4)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+6$.
323.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+5)=\log_3 9$.
324.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizibil cu 9.
325.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a+2)\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.
326.Arătaţi că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,ştiind că sinx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
327.Se consideră numerele complexe $z_1=5+i$ şi $z_2=5-i$.Arătaţi că numărul $z_1\cdot z_2$ este real.

328. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(2,2)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+a$.

329.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+5x-6}=x$.

330.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,70}acesta să fie divizibil cu 7.

331.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ $A(2,3)$ şi $B(4,a)$ .Determinaţi numărul a din mulţimea numerelor reale pentru care O,A şi B sunt coliniare.

332.Se consideră $E(x)=\sin x-\cos\frac{x}{2}$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

333.Determinaţi numărul real care are partea întreagă -5 şi partea fracţionară 0,87.

334.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$cu axa Ox şi,respectiv axa Oy.

335.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+8}=64$.

336.Aflaţi numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=128$.

337.Se consideră punctele $A(-3,2), B(1,2)$ şi $C(1,6)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

338.Calculaţi lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC,ştiind că AB=3,AC=4 şi BC=5.

339.Calculaţi a_{2016},ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1=2016$ şi raţia $r=-1$.

340. Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $A(3,-2)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-(3m+2)x+5$.

341.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}=\sqrt{6}$.

342. Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii {1,2,3, … ,10} aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

343. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(5,7)$ şi $C(3,-5)$ .Determinaţi coordonatele punctului B,ştiind că patrulaterul OABC este paralelogram.

344.Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=$4\sqrt{3}$ şi BD=8.Calculaţi aria triunghiului ABC.

345.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu primul termen $a_1=4$ şi raţia r=3.

346.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-3$.

347.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-6x+10}=1$.

348.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.

349.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+7}=64$.

350.Aflaţi numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=256$.

351.Se consideră punctele $A(-1,1), B(1,4)$ şi $C(3,1)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

352.Calculaţi lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC,ştiind că AB=12,AC=16 şi BC=20.

353.Calculaţi a_{2017},ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1=2017$ şi raţia $r=-1$.

354. Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $A(3,-2)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-(3m+1)x+4$.

355.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\sqrt{10}$.

356. Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii {0,1,2,3, … ,9} aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

357.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,-3)$ şi $C(2,4)$ .Determinaţi coordonatele punctului B,ştiind că patrulaterul OABC este paralelogram.
358.Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=32 şi BD=5.Calculaţi aria triunghiului ABC.
359.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu primul termen $a_1 = 5$ şi raţia r=−3.
360.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:ℝ→ℝ, $f(x) = x^2 + 4x - 4$.
361.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 10x + 29} = 2$.
362.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4}.
363.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(1,-2)$ şi $C(5,-2)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$,ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
364.Calculaţi ctga,ştiind că sina $= \frac{2}{3}$ şi a$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
365.Determinaţi partea reală a numărului complex z=5+3(3 − i).
366.Arătaţi că $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 23$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x - 10 = 0$.
367.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + x + 4} = 2$.
368.Determinaţi câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {3,4,5}.
369.Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuaţii y=(a − 2)x + 3 şi y=4x−5 sunt paralele.
370.Determinaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=9,AC=12 şi BC=15.
371.Se consideră numărul complex z=3+i.Calculaţi z^2.
372. Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $M(m,3)$,aparţine graficului funcţiei f:ℝ→ℝ,$f(x) = x - 4$.
373. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x-4) = 2$.
374.Determinaţi numărul submulţimilor cu un număr impar de elemente al mulţimii A={0,2,4,6}.
375.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii AD.Arătaţi că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CD}$.
376.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A.Arătaţi că cosBsinC+cosCsinB=1.
377.Se consideră numărul complex z=2−3i.Calculaţi z^2.
378.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:ℝ→ℝ,$f(x)=x^2 - 10x + 25$.
379.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-3,2)$ şi $C(-3,6)$ .Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$,ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
380.Calculaţi ctga,ştiind că sina $= \frac{3}{4}$ şi a$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
381.Determinaţi partea reală a numărului complex z=4+3(1 − i).
382.Arătaţi că $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 31$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 9 = 0$.
383.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 2x + 9} = 3$.
384.Determinaţi câte numere naturale pare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {3,4,5}.
385.Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuaţii y=(a − 3)x + 2 şi y=3x+6 sunt paralele.
386.Determinaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=15,AC=20 şi BC=25.

387.Se consideră numărul complex z=3+2i.Calculaţi z^2.
388. Determinaţi valoarea numărului real m pentru care punctul $M(m,2)$,aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-4$.
389.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x-2)=3$.
390.Determinaţi numărul submulţimilor cu un număr impar de elemente al mulţimii A={1,2,3,4,5}.
391.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii CD.Arătaţi că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{DA}$.
392.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B.Arătaţi că sinAcosC+sinCcosA=1.
393.Se consideră numărul complex z=3+2i.Calculaţi z^2.
394.Calculaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12x+36$.
395. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_{10}(x^2+6)=1$.
396.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 12.
397.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$, $B(3,0)$ şi $C(0,2)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
398.Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\cos\frac{x}{2}$.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
399.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 3,x+3 şi 12 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
400.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-4x-7$.
401.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-3x)=4$.
402.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie impar.
403.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-3)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ sunt opuşi.
404.Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=5,AC=4 şi BC=7.
405.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.
406.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=-x^2+6x-11$.
407.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5-\sqrt{x^2+4}=x$.
408.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele egale.
409.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(5,1)$ şi $C(3,1)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
410.Arătaţi că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.
411.Determinaţi raţia unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$cu termeni reali,ştiind că $b_3=1$ şi $b_6=27$.
412.Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+5x+6$.
413.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_4(x-3)=\log_4(x-1)$.
414.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,50},acesta să fie divizibil cu 13.
415.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
416.Rezolvaţi în $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x-\sqrt{3}=0$.
417.Arătaţi că numărul $x=3(1+i)-3i$ este real.
418.Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$ pentru funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-3$.
419.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+2}=x+2$.
420.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 7.

421.Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
422.Se consideră expresia $E(x) = \cos x - \sin\frac{x}{2}$.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
423.Arătaţi că numărul $n=\sqrt{27} - 3\left(\sqrt{3} - 4\right)$ este natural.
424. Calculaţi $(f \circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$.
425.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4), B(5,1)$ şi $C(3,1)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
426. Arătaţi că $(\sin x - 2\cos x)^2 + (2\sin x + \cos x)^2 = 5$, pentru orice număr real x.
427.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1} = 25$.
428.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3, \dots ,20\}$,acesta să fie multiplu de 8.
429. Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
430.Aflaţi valoarea lui $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{4\sin x - 3\cos x}{\cos x} = 1$.
431.Arătaţi că numărul $n=3\left(\sqrt{5} + 1\right) - \sqrt{45}$ este natural.
432.Calculaţi $f(1) + f(2) + \cdots + f(11)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.
433.Calculaţi lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC=12.
434.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 2)\vec{i} + 5\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ sunt opuşi.
435.După o ieftinire cu 30% preţul unui produs scade cu 300 de lei.Calculaţi preţul produsului după ieftinire.
436.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 + 2) = \log_3 9$.
437.Arătaţi că numărul $a=6(3 + 4i) - 4(1 + 6i)$ este real.
438. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 + 12x + 36$.
439. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(x^2 + 2x + 3) = \log_6(x + 4)$.
440. După o ieftinire cu 20% preţul unui produs scade cu 80 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de ieftinire.
441.Se consideră dreapta h de ecuaţie $y=x-2$ şi punctul $A(3,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta h.
442.Calculaţi cosinusul unghiului A în triunghiul ABC în care AB=9,AC=7 şi BC=8.
443.Se consideră numărul complex $z=3+4i$.Calculaţi z^2.
444.Se consideră numărul complex $z=3-2i$.Calculaţi z^2.
445.Se consideră numărul complex $z=4-3i$.Calculaţi $z\cdot\bar{z}$.
446.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 + 6x + 9$.
447.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8(x^2 + 4) = 1$.
448.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 15.
449.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0), B(4,0)$ şi $C(0,4)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
450.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
451.Aflaţi valoarea lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele 2,x+1 şi 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
452.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 4x - 20$.
453.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 - 8x) = 2$.

454. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 2.
455.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-5)\vec{i} - 6\vec{j}$ şi $\vec{v} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt opuşi.
456.Calculaţi cosinusul unghiului B al triunghiului ABC în care AB=7,AC=6 şi BC=8.
457.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9$.
458.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+8x-7$.
459.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4-\sqrt{x^2+4}=x$.
460.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele diferite.
461.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,6), B(5,2) şi C(3,4).Calculaţi aria triunghiului ABC.
462.Arătaţi că $(3\sin x-\cos x)^2+(\sin x+3\cos x)^2=10$, pentru orice număr real x.
463.Determinaţi raţia unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_3=2$ şi $b_6=16$.
464.Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+6$.
465.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_4(x-3)=\log_4(x-1)$.
466.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,50},acesta să fie divizibil cu 14.
467.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
468.Rezolvaţi în $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x-\sqrt{2}=0$.
469.Arătaţi că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.
470.Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot \ldots \cdot f(7)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-4$.
471.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+9}=x+3$.
472.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
473.Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
474.Se consideră expresia $E(x)=\cos x-\sin x$ .Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
475.Arătaţi că numărul $n=\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-4\right)$ este natural.
476.Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-1$.
477.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+3)=\log_3 7$.
478.Aflaţi modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
479.Se consideră punctele A(3,1) şi B(5,7).Aflaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.
480.După o ieftinire cu 15% preţul unui produs scade cu 300 de lei.Calculaţi preţul produsului după ieftinire.
481.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} + 5\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ sunt opuşi.
482.Determinaţi lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC=12.
483.Arătaţi că numărul $n=3\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{63}$ este natural.
484.Calculaţi $f(1)+f(2)+\cdots+f(11)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-2$.
485.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x+1}=36$.
486.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,20} acesta să fie multiplu de 9.
487.Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - 3\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
488.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{5\sin x-4\cos x}{\cos x}=1$.

489.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{6\cos x-5\sin x}{\sin x}=1$.
490.Arătaţi că numărul $a=6(3+4i)-4(2+6i)$ este real.
491.Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$ cu axele de coordonate.
492.După o ieftinire cu 20% preţul unui produs scade cu 800 de lei.Calculaţi preţul produsului după ieftinire.
493.Se consideră dreapta h:y=2x−3 şi punctul A(4,5).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi e paralelă cu h.
494.Se consideră dreapta h:y=2x−3 şi punctul A(4,5).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi e perpendiculară pe h.
495.Calculaţi cosinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=6,BC=7 şi AC=5.
496.Determinaţi aria triunghiului ABC,în care AB=4,BC=8 şi $B=\frac{\pi}{3}$.
497.Arătaţi că numărul $x=5(1-i)+5i$ este real.
498.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+4$ cu axa Ox.
499.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3x-2}=32$.
500.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,30\}$ acesta să fie divizibil cu 6.
501.Fie A(4,3), B(5,2) şi C(6,3).Calculaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
502. Fie A(4,3), B(5,2) şi C(6,3).Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.
503.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că AC=6,$A=\frac{\pi}{6}$ şi $B=\frac{\pi}{3}$.
504.Calculaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=3$ şi $a_2=1$.
505.Aflaţi valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care $x^2-4x-m>0$,pentru orice număr real x.
506.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+1)+\log_3 x=\log_3 12$.
507. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
508.Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dacă $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ şi unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura egală cu $\frac{\pi}{4}$.
509.Se consideră punctele A(2,4), B(1,2) şi C(4,2).Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
510. Se consideră punctele A(2,4), B(1,2) şi C(4,2).Determinaţi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.
511.Se cosideră numerele complexe $z_1=5+i$ şi $z_2=5-i$,arătaţi că numărul z_1+z_2 este real.
512.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3-5x+4}=x$.
513.Se consideră expresia $E(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos x$.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
514.Determinaţi primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_5=48$ şi $b_8=-384$.
515.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+7x+6$.Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
516.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x=16\cdot 2^{-x}$.
517.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să verifice egalitatea $n^2-7n+12=0$.
518.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

519.Arătaţi că $(2\sin x-\cos x)^2+(\sin x-2\cos x)^2+4\sin 2x=5$,pentru orice număr real x.
520.Se consideră numărul complex $z=2-2i$.Arătaţi că $z^2=-8i$.
521.Calculaţi $(g\circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2018$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+2018$.
522.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-6x}=5^{x-12}$.
523.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,200},acesta să fie pătrat perfect.
524.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,1).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-3x+2017$.
525.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=$5\sqrt{3}$,AC=4 şi $A=\frac{\pi}{6}$.
526.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}-3\right)^2+6\sqrt{5}=14$.
527.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,7)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-7$.
528.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(x^2+36)=\log_6 100$.
529.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,20},acesta să fie divizibil cu 7.
530.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+6\vec{j}$ sunt coliniari.
531.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$,arătaţi că $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.
532.Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=2$ şi raţia q=6.
533.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$.
534.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(5x-10)=\log_5 5$.
535.Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5}.
536.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul M(2,0) aparţine dreptei de ecuaţie $y=mx-4$.
537.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care BC=$3\sqrt{2}$ şi $A=\frac{\pi}{4}$.
538.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2=5$ şi $b_3=15$.
539.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$.
540.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+11}=x+1$.
541.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.
542.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) şi B(1,4).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
543.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AB=4 şi C=$\frac{\pi}{4}$.
544.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$.
545.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AC=6 şi B=$\frac{\pi}{6}$.
546.Arătaţi că $(0,4\cdot 10-1)(0,4\cdot 10+1)=15$.
547.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-4x+m=0$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=20$.
548.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+15}$.
549.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor natural de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 4 mai mare decât cifra unităţilor.
550.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.
551.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care sinx=−cosx, atunci cos2x=0.
552.Arătaţi că $(0,5\cdot 10+1)(0,5\cdot 10-1)=24$.
553.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+6x-m=0$,unde m este număr real.Determinaţi

numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1 + x_2) = 30$.

554.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{6 - x} = \sqrt{x + 14}$.

555.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor natural de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor cu 4 mai mare decât cifra zecilor.

556.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 2)\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

557.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $-\cos x = \sin x$, atunci $\cos 2x = 0$.

558.Arătaţi că $\log_2 6 + \log_2 3 - \log_2 9 = 1$.

559.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -6x - 9$.Demonstraţi că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x.

560.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 32} = -3x$.

561.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 + 4x + 3 = 0$.

562.Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = 6\vec{i} - a\vec{j}$ şi $\vec{v} = b\vec{i} + 2\vec{j}$.

563.Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 2$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

564.Arătaţi că $\log_2 21 - \log_2 6 - \log_2 7 = 1$.

565.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 4$.Demonstraţi că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x.

566.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 12} = -2x$.

567.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$.

568.Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - b\vec{j}$.

569.Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 2$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

570.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2$ şi raţia r=4.Calculaţi a_3 .

571.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$.Determinaţi numerele reale x pentru care $f(x^2) = 51$.

572.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2} + 3^{2x} = 10$.

573.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizor al lui 60.

574.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătaţi că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB}$.

575.Arătaţi că $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

576.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 4$ şi raţia r=2.Calculaţi a_3 .

577.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$.Determinaţi numerele reale x pentru care $f(x^2) = 33$.

578.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3x+3} + 2^{3x} = 9$.

579.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizor al lui 70.

580.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătaţi că $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.

581.Arătaţi că $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

582.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 4$ şi $a_3 = 7$.

583.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 3$.Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n) = 13$.

584.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 36} = x - 2$.

585.Determinaţi numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7}.

586.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$,$N(4,4)$,$P(4,5)$ şi $Q(a,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN şi PQ.

587.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AC=6 şi cosC= $\frac{1}{2}$.

588.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 3$ şi $a_3 = 5$.

589.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 3$.Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n) = 6$.

590.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 64} = x - 4$.

591.Determinaţi numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.

592.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$,$N(4,4)$,$P(5,4)$ şi $Q(2,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN şi PQ.

593.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AB=6 şi cosB= $\frac{1}{2}$.

594.Arătaţi că numerele $\log_5 12$,$\log_5 6$ şi $\log_5 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

595.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x + 4$.Determinaţi numărul real x pentru care $f(x) = -3x$.

596.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|3x - 4| = 3x + 4$.

597.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor impară şi cifra unităţilor impară.

598.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

599.În triunghiul ABC dreptunghic în A, BC=16 şi C=$\frac{\pi}{6}$ .Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

600.Arătaţi că numerele $\log_5 3$,$\log_5 6$ şi $\log_5 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

601.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - x + 4$.Determinaţi numărul real x pentru care $f(x) = 3x$.

602.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|2x - 5| = 2x + 5$.

603.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară şi cifra unităţilor pară.

604.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.

605.În triunghiul ABC dreptunghic în A, BC=16 şi B=$\frac{\pi}{6}$ .Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

606.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 2$ şi $b_2 = 8$.

607.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x + 9$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x - 9$.Calculaţi $(f\circ g)(9)$.

608.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x + 1} = x - 1$.

609.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifra, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) > 0$.

610.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(6,5)$,$C(5,3)$ şi $D(0,-1)$.Demonstraţi că punctele B,D şi mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

611.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\cos x - \sin x)^2 = \frac{3}{2}$.

612.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 2$ şi $b_2 = 4$.

613.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x + 6$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x - 6$.Calculaţi $(f\circ g)(6)$.

614.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x - 2} = x - 2$.

615.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifra, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) > 0$.
616.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-1,0)$,$C(1,1)$ şi $D(5,6)$.Demonstraţi că punctele B,D şi mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
617.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x-\cos x)^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
618.Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_5=6$ şi $b_6=12$.
619.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+x-16$.Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m)=m$.
620.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1000\cdot 10^{3x}=10^{4x}$.
621.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulţimea $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.
622.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(0,-4)$ şi $C(4,0)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
623.Arătaţi că cos2x=$-\frac{1}{2}$, ştiind că tgx=$\sqrt{3}$ şi x$\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
624.Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_5=8$ şi $b_6=32$.
625.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+x-25$.Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m)=m$.
626.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1000\cdot 10^{3x}=10^{4x}$.
627.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulţimea $\{0,1,2,3,4\}$.
628.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(-4,0)$ şi $C(0,4)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
629.Arătaţi că cos2x=0, ştiind că tgx=1 şi x$\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
630.Arătaţi că $4(3+i)-4i(1+i)=16$, unde $i^2=-1$.
631.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-16$.Calculaţi $(f\circ f)(4)$.
632.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+4x+9)=1$.
633.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 8.
634.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,3)$ şi $B(4,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
635.Se consideră $E(x)=\cos 3x-\cos 2x+\cos x$., unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
636.Arătaţi că $5(4-i)+5i(1+i)=15$, unde $i^2=-1$.
637.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-4$.Calculaţi $(f\circ f)(-2)$.
638.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+2x+4)=1$.
639.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.
640.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,a)$ şi $B(2,4)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
641.Se consideră $E(x)=\cos x-\cos 2x+\cos 3x$., unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
642.Arătaţi că numărul N=$\log_5 30-\log_5 6+8$ este pătratul unui număr natural.
643.Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a,a^2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x-4$.
644.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-2x-4}=x-2$.

645.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={0! ,1! ,2! ,3!, … ,10!}, acesta să fie divizibil cu 9.

646.Se consideră triunghiul ABC şi punctul E mijlocul segmentului AC.Arătaţi că, pentru orice puncte D şi F astfel încât $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FE}$, are loc relaţia $2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FC}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

647.Arătaţi că $(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2 = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, pentru orice număr real x.

648.Arătaţi că numărul $N=\log_2 20 - \log_2 5 + 7$ este pătratul unui număr natural.

649.Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$.

650.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 2x - 6} = x - 2$.

651.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1! ,2! ,3!, … ,11!}, acesta să fie divizibil cu 9.

652.Se consideră triunghiul ABC şi punctul D mijlocul segmentului AC.Arătaţi că, pentru orice puncte E şi F astfel încât $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$, are loc relaţia $2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FC}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

653.Arătaţi că $(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2 = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, pentru orice număr real x.

654.Arătaţi că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(3 - \sqrt{3}\right) = 6$.

655.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 6x$. Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.

656.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x-4} = \frac{1}{3^{3x}}$.

657.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 13.

658.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(0,4)$ şi $C(3,0)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

659.Se consideră expresia $E(x) = tgx - 2\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

660.Arătaţi că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = 6$.

661.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 6x$. Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.

662.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x-3} = \frac{1}{3^{2x}}$.

663.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 14.

664.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$,$B(-1,0)$ şi $C(4,0)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

665.Se consideră expresia $E(x) = \sin\frac{3x}{2} + tgx - 2\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

666.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_2 = 7$ şi $a_3 = 14$.

667.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 5$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 5$.

668.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^x \cdot \frac{1}{7} = 49$.

669.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

670.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(5,2)$.Determinaţi coordonatele punctului C,astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.

671.Se consideră expresia $E(x) = \sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

672.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_2 = 4$ şi $a_3 = 8$.
673.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 6$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 3$.
674.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x \cdot \frac{1}{4} = 16$.
675.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 13.
676.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ şi $B(2,5)$.Determinaţi coordonatele punctului C,astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.
677.Se consideră expresia $E(x) = \sin x - \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.
678.Arătaţi că media aritmetică a numerelor $a=21+\sqrt{22}$ şi $b=23-\sqrt{22}$ este egală cu 22.
679.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 1$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=6-x$.Arătaţi că $f(a) + g(a) = 5$, pentru orice număr real a.
680.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{5x-4} = x$.
681.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulţimii {2,3,4,5}.
682.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$ şi $B(8,8)$.Arătaţi că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
683.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât AC=6 şi măsura unghiului B este egală cu 60°. Arătaţi că înălţimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 3.
684.Arătaţi că media aritmetică a numerelor $a=20+\sqrt{21}$ şi $b=22-\sqrt{21}$ este egală cu 21.
685.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 1$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$.Arătaţi că $f(a) + g(a) = 4$, pentru orice număr real a.
686.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x-3} = x$.
687.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulţimii {2,3,4,5}.
688.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,0)$ şi $B(8,8)$.Arătaţi că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
689.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât AB=6 şi măsura unghiului C este egală cu 60°. Arătaţi că înălţimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 3.
690.Arătaţi că $\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right) = 3$.
691.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 2$.Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a) = 2 + a$.
692.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+9) = \log_4(7x-3)$.
693.Determinaţi câte numere naturale de două cifre, cu cifra unităţilor număr impar, se pot forma cu elementele mulţimii {2,3,4,5,6}.
694.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,1)$ şi $B(3,3)$.Determinaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
695.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=8 şi $tgB=\sqrt{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.
696.Arătaţi că $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right) = 3$.
697.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 2$.Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a) = 2 - a$.
698.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+9) = \log_4(8x-6)$.

699.Determinaţi câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulţimii $\{2,3,4,5,6\}$.
700.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$ şi $B(3,3)$.Determinaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
701.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=8 şi tgC=$\sqrt{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.
702.Arătaţi că $3-6\sqrt{3}+2\left(3\sqrt{3}-1\right)=1$.
703.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x-4$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
704.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-3}\cdot 2^3=1$.
705.Determinaţi câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{2,3,4,5,6\}$.
706.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$, $B(2,0)$,$C(4,4)$ şi M, mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele MO şi MC au lungimi egale.
707.Se consideră $E(x)=2\sin 2x\sin x-\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
708.Arătaţi că $4-6\sqrt{2}+3\left(2\sqrt{2}-1\right)=1$.
709.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x+4$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
710.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+3}\cdot 2^3=1$.
711.Determinaţi câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{3,4,5,6,7\}$.
712.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(0,2)$,$C(4,4)$ şi M, mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele MO şi MC au lungimi egale.
713.Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
714.Arătaţi că $4-5i+i(5-i)=5$, unde $i^2=-1$.
715.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=8-2x$.Arătaţi că $(f\circ f)(2)=0$.
716.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-3x+5)=\log_3 5$.
717.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7 şi cu 2.
718.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(0,a)$ şi $C(b,0)$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
719.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=AC=5 şi BC=8. Arătaţi că AD=3, unde AD este înălţime în triunghiul ABC.
720.Arătaţi că $3-5i+i(5-i)=4$, unde $i^2=-1$.
721.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=12-2x$.Arătaţi că $(f\circ f)(3)=0$.
722.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-2x+4)=\log_3 4$.
723.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 şi cu 7.
725.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(a,0)$ şi $C(0,b)$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
726.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=AC=5 şi BC=6. Arătaţi că AD=4, unde AD este înălţime în triunghiul ABC.
727.Arătaţi că $6-3\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)=1$.

728.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x-6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
729.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^{x-2}=10^{-3x}\cdot 10^{6}$.
730.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cu cifre din mulţimea A= {1,2,3,4,5,6,7,8}, au ambele cifre impare.
731.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$ şi $B(0,4)$.Determinaţi distanţa dintre punctele B şi M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
732.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi aria egală cu 21. Arătaţi că AC=7.
733.Arătaţi că $7-2\sqrt{6}+\sqrt{6}\cdot\left(2-\sqrt{6}\right)=1$.
734.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-4$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
735.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^{x-2}=10^{-2x}\cdot 10^{4}$.
736.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cu cifre din mulţimea A= {1,2,3,4,5,6,7,8}, au ambele cifre pare.
737.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ şi $B(4,0)$.Determinaţi distanţa dintre punctele B şi M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
738.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi aria egală cu 21. Arătaţi că AB=7.
739.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2=9$ şi $a_3=13$.
740.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5x-4$. Determinaţi numărul real m pentru care $f(m)=m$.
741.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(16-x^2)=\log_2 7$.
742.Se consideră mulţimea A={0,1,2, … ,9}. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $\sqrt{4n+1}$ să aparţină mulţimii A.
743.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(4,5)$ şi $C(2,6)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
744.Se consideră expresia $E(x)=2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x-\left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$ .Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.
745.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2=8$ şi $a_3=13$.
746.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=6x-5$. Determinaţi numărul real m pentru care $f(m)=m$.
747.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(9-x^2)=\log_3 5$.
748.Se consideră mulţimea A={0,1,2, … ,9}. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $\sqrt{5n+1}$ să aparţină mulţimii A.
749.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(5,4)$ şi $C(6,2)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
750.Se consideră expresia $E(x)=2\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}-\left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$ .Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.
751.Arătaţi că $2\cdot(0,1+1,3)+0,2=3$.
752.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=4x+1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.
753.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(x^2-7x+7)=\log_6 x$.
754.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,3,5,6,8}.
755.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(5,4)$ şi C, mijlocul segmentului OA. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului BC.
756.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi B=$\frac{\pi}{4}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

757.Arătaţi că $2\cdot(1,3+0,1)+0,2=3$.
758.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=3a$.
759.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(x^2-8x+8)=\log_6 x$.
760.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{1,3,4,6,8\}$.
761.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$, $B(4,5)$ şi C, mijlocul segmentului OA. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului BC.
762.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi $C=\frac{\pi}{4}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 18.
763.Arătaţi că $3-4i+i(4-2i)=5$, unde $i^2=-1$.
764.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=11$.
765.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x+3}=5^x\cdot 5^4$.
766.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin una dintre cifre egală cu 3.
767.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$ şi $B(4,6)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului OB.
768.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=5 şi $BC=5\sqrt{5}$. Arătaţi că $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
769.Arătaţi că $2-6i+i(6-3i)=5$, unde $i^2=-1$.
770.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+m$, unde m este num[r real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=11$.
771.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x+3}=7^x\cdot 7^4$.
772.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin una dintre cifre egală cu 4.
773.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$ şi $B(6,4)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului OB.
774.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=5 şi $BC=5\sqrt{5}$. Arătaţi că $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
775.Arătaţi că $2\cdot(0,2+1,2)-1,8=1$.
776.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+10$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.
777.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2+2x-7}$.
778.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>8$.
779.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(0,2)$ şi $C(4,8)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului BC.
780.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=10 şi $\sin C=\frac{3}{5}$. Arătaţi că AB=6.
781.Arătaţi că $2\cdot(1,2+0,2)-1,8=1$.
782.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+8$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.
783.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2+x-5}$.
784.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>11$.

785.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,0)$ şi $C(8,4)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului BC.

786.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=10 şi sinB=$\frac{3}{5}$. Arătaţi că AC=6.

787.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 12$.

788.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 6x - 5$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(3) = 5a$.

789.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(3 + x)$.

790.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,5,6,7,8}.

791.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(10,0)$, $B(8,16)$ şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO=AC.

792.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi cosC=$\frac{3}{4}$. Arătaţi că BC=8.

793.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 5$ şi $a_2 = 15$.

794.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 5x - 4$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(3) = 4a$.

795.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2 + x)$.

796.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,5,6,7,8}.

797.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,10)$, $B(16,8)$ şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO=AC.

798.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi cosB=$\frac{3}{4}$. Arătaţi că BC=8.

799.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 6$ şi $a_3 = 36$.

800.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.

801.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{5x - 8}$.

802.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $4n^2 < 101$.

803.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(3,4)$ şi C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC.Determinaţi coordonatele punctului C.

804.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=AC şi aria egală cu 72. Arătaţi că $BC=12\sqrt{2}$.

805.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 4$ şi $a_3 = 24$.

806.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 7$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.

807.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{6x - 9}$.

808.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 98$.

809.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(4,3)$ şi C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC.Determinaţi coordonatele punctului C.

810.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=AC şi aria egală cu 50. Arătaţi că $BC=10\sqrt{2}$.

811.Arătaţi că $3\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)-2\left(1-3\sqrt{2}\right)=-8$.

812.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x + 11$.Determinaţi numărul real a pentru care

$f(2a) = f(a) - 3$.

813.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x^2 - 9x + 8} = x\sqrt{3}$.

814.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel puţin egală cu 4.

815.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(0,6)$ şi $C(5,1)$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

816.Se consideră expresia $E(x) = \sin 3x \cdot \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

817.Arătaţi că $2\sqrt{2}\left(3 - \sqrt{2}\right) - 3\left(1 - 2\sqrt{2}\right) = -7$.

818.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x + 10$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(2a) = f(a) - 3$.

819.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x^2 - 10x + 9} = x\sqrt{3}$.

820.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel puţin egală cu 3.

821.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(6,0)$ şi $C(1,5)$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

822.Se consideră expresia $E(x) = \sin 2x \cdot \sin 3x - \cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

823.Arătaţi că $(4{,}6 - 3{,}1) : 3 + 3{,}5 = 4$.

824.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 28$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(-3a, a)$ aparţine graficului funcţiei f.

825.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(1 + 4x - x^2) = \log_7(5 - x)$.

826.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu par de 13.

827.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$, $B(2,4)$ şi $C(0,2)$. Arătaţi că triunghiul ADB este isoscel, unde D este mijlocul segmentului BC.

828.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu tgC=3 şi aria egală cu 24.Arătaţi că AC=4.

829.Arătaţi că $(4{,}8 - 3{,}3) : 3 + 3{,}5 = 4$.

830.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 28$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(-3a, a)$ aparţine graficului funcţiei f.

831.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(1 + 5x - x^2) = \log_7(6 - x)$.

832.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar de 13.

833.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(4,2)$ şi $C(2,0)$. Arătaţi că triunghiul ADB este isoscel, unde D este mijlocul segmentului BC.

834.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu tgB=3 şi aria egală cu 24.Arătaţi că AB=4.

835.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 4i$ şi $z_2 = 1 - 3i$. Arătaţi că $iz_1 + z_2 = 5$.

836.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 5$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a + 4) = a + f(a)$.

837.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{6x} = \sqrt{x^2 - x + 6}$.

838.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 > 102$.

839.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$, $B(2,6)$ şi $C(9,1)$.Determinaţi distanţa dintre punctul C şi mijlocul segmentului AB.

840.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=6 şi C=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.
841.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 - 3i$ şi $z_2 = 1 - 4i$. Arătaţi că $iz_1 + z_2 = 4$.
842.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x + 6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a + 5) = a + f(a)$.
843.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{5x} = \sqrt{x^2 - x + 5}$.
844.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 > 103$.
845.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,0)$, $B(6,2)$ şi $C(1,9)$.Determinaţi distanţa dintre punctul C şi mijlocul segmentului AB.
846.Se consideră triunghiul ABC, cu AC=6 şi B=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.
847.Arătaţi că $i(9 - i) + 3(2 - 3i) = 7$, unde $i^2 = -1$.
848.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 5x$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
849.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{2x-1} = 6^{-x} \cdot 36$.
850.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea
A={1,2,3,4,5,8}.
851.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$,$B(4,5)$ şi C, astfel încât A este mijlocul segmentului BC. Determinaţi lungimea segmentului OC.
852.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=4 şi BC=8.Arătaţi că AD=$2\sqrt{3}$, unde AD este înălţime a triunghiului ABC.
853.Arătaţi că $i(8 - i) + 4(3 - 2i) = 13$, unde $i^2 = -1$.
854.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 6x$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
855.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{3x-2} = 6^{-x} \cdot 34$.
856.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea
A={2,3,4,5,8,9}.
857.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$,$B(5,4)$ şi C, astfel încât A este mijlocul segmentului BC. Determinaţi lungimea segmentului OC.
858.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=4 şi BC=8.Arătaţi că AD=$2\sqrt{3}$, unde AD este înălţime a triunghiului ABC.

Matrice ,determinanţi,sisteme de ecuaţii liniare

Matrice patratice de ordin doi

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ şi α

$detA=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

Sisteme liniare de două ecuaţii cu două necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Pentru $d=detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$, $d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$, $\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \end{cases}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow detA\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d=d$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot c=-c$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot b=-b$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a=a$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot A^*=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Matrice patratice de ordin trei

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}$ şi α

$detA=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+bfg-(gec+afh+bdi)$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+t \\ g+p & h+r & i+s \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ d-u & e-v & f-t \\ g-p & h-r & i-s \end{pmatrix}$

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bu+cp & ay+bv+cr & az+bt+cs \\ dx+eu+fp & dy+ev+fr & dz+et+fs \\ gx+hu+ip & gy+hv+ir & gz+ht+is \end{pmatrix}$$

Sisteme liniare de trei ecuaţii cu trei necunoscute,regula lui Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})\neq 0$

$$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-(b_3a_{22}a_{13}+b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{12}a_{33})$$

$$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-(a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_1a_{33}+a_{11}b_3a_{23})$$

$$d_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}a_{31}b_2-(a_{31}a_{22}b_1+a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{12}b_3)$$

$$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \\ z=\frac{d_z}{d} \end{cases}$$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}, A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$$

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_3, \text{ unde } I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B \quad , \quad X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Subiectul II1(prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 5 \\ -5 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=26$.

b)Demonstraţi că $A(2019-a)+A(2019+a)=2A(2019)$,pentru orice număr real a.

c)Determinaţi perechile de numere reale x şi y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-14)$.

2.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=26$.

b)Demonstraţi că $A(2020-a)+A(2020+a)=2A(2020)$,pentru orice număr real a.

c)Determinaţi perechile de numere reale x şi y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-14)$.

3.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(1))=4$.

b)Demonstraţi că $M(a)M(b)=M(a+b+3ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(1)$.

4.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(1))=6$.

b)Demonstraţi că $M(a)M(b)=M(a+b+5ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(3)$.

5.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-4a & -2a \\ 6a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=2$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(a+b-ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n pentru care $A(m)A(n)=A(-2)$.

6.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-4a & 6a \\ -2a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=2$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(a+b-ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n pentru care $A(m)A(n)=A(-5)$.

7.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} (a-3) & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (a-3)x+ay+z=2a-1 \\ 3x+(2a-1)y+z=1 \\ 2x+ay+z=1 \end{cases}$$

a)Arătaţi că $\det(A(0))=5$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.

8.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a-1 & 3 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ a & a-3 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (2a-1)x+3y+z=1 \\ ax+2y+z=1 \\ ax+(a-3)y+z=2a-1 \end{cases}$$

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-5$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $y_0^2=x_0z_0$.

9.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-7$.
b)Demonstraţi că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a,ştiind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.

10.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&1\\x&-2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-7$.
b)Demonstraţi că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a,ştiind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.

11.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}a&1\\3&a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(X(1))=-2$.
b)Demonstraţi că $X(-a)+X(a)=X(-2020)+X(2020)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale (a, b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.

12.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}a&6\\1&a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(X(1))=-5$.
b)Demonstraţi că $X(-a)+X(a)=X(-2019)+X(2019)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale (a, b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.

13.Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix}a&-9b\\-b&a\end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(X(3,1))=0$.
b)Demonstraţi că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a,b,c şi d.
c)Determinaţi perechile de numere întregi (m, n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

14.Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix}-a&b\\9b&-a\end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(X(3,1))=0$.
b)Demonstraţi că $X(a,b)X(c,d)=X(-ac-9bd,-ad-bc)$, pentru orice numere reale a,b,c şi d.
c)Determinaţi perechile de numere întregi (m, n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

15.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-3\\2&-3\end{pmatrix}$ şi $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=0$.
b)Demonstraţi că $M(x)-M(2019)=M(-2019)-M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

16.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&3\\-2&-3\end{pmatrix}$ şi $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=0$.
b)Demonstraţi că $M(x)-M(2020)=M(-2020)-M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

17.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a)Arătaţi că detA=2.
b)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care A·A·A=xA−yI_3.
c)Determinaţi inversa matricei B=A−I_3.

18.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că detA=2.
b)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care A·A·A=xA−yI_3.
c)Determinaţi inversa matricei B=A−I_3.

19.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 3x+2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(-2)\big)=9$.
b)Demonstraţi că $A(x)+A(-x)=A(2018)+A(-2018)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$.

20.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 3x+7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(-2)\big)=-6$.
b)Demonstraţi că $A(x)+A(-x)=A(2019)+A(-2019)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$.

21.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0 & -x\\ -x & 0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=-1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=xyI_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2})=A(27)$.

22.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 2x\\ x & 0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=-2$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=2xyI_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $A(2^a)A(2^{a+1})A(2^{a+2})=A(32)$.

23.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & x+2 & 1\\ 3 & x & 1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=2$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(3)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+2)$,$N(3,n)$ şi $P(4,0)$.Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.

24.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & x+3 & 1\\ 4 & x & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=3$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(6)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+3)$,$N(4,n)$ şi $P(5,0)$.Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.

25.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-2 & -1 \\ 2 & m-3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(0))$.

b)Demonstraţi că $A(m)+A(2-m)=2A(1)$,pentru orice număr real m.

c)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.

26.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} -m-1 & -1 \\ 2 & -m-2 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(0))$.

b)Demonstraţi că $A(1+m)+A(1-m)=2A(-1)$,pentru orice număr real m.

c)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.

27.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & x \\ 4 & 25 & x^2 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Calculaţi $A(1)-A(0)$.

b)Arătaţi că $\det(A(x))=3(x-2)(x-5)$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$,pentru orice număr real x.

28.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Calculaţi $A(1)-A(0)$.

b)Arătaţi că $\det(A(x))=-5(x-2)(x+3)$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$,pentru orice număr real x.

29.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=4$.

b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Arătaţi că $A(a)A(b)=2A(a+b)+abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -3a \\ -3a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Arătaţi că $A(a)A(b)=A(a+b)+9abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

31.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3a & 16 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(3)+A(-3)=2A(0)$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(1)$.

32.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 9 & 2a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.

33.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=-2$.

b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x)+I_2)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

34.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 4\\ 3 & 12\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=-2$.

b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x)+I_2)=14$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

35. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & a-1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(2017)+A(2019)=2A(2018)$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det A(a)=0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\big(A(2)+xA(3)\big)=0$.

36. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & a-2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(2018)+A(2020)=2A(2019)$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det A(a)=0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\big(A(3)+xA(5)\big)=0$.

37. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x\\ x & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=9$.

b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(1)+A(5)=aA(3)$.

c)Arătaţi că $A(x)A(y)=3A(x+y)+xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

38. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}4 & x\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=16$.

b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(1)+A(3)=aA(2)$.

c)Arătaţi că $A(x)A(y)=4A(x+y)+xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

39. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ 3 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Calculaţi $\det\big(A(4)\big)$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Arătaţi că $\det\big(A(1)+A(2)+\cdots+A(n)\big)=\frac{n^2(n-5)(n+7)}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

40. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & -1\\ -1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Calculaţi $\det\big(A(2)\big)$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Arătaţi că $\det\big(A(1)+A(2)+\cdots+A(n)\big)=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

41.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2019\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det A$.

b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2019I_2$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2019I_2$.

42.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2014 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $detA$.

b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2014I_2$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2014I_2$.

43.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Calculaţi $detA(1)$.

b)Determinaţi numărul real a ştiind că $detA(a)=1$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

44.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3a+2 & 1-a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Calculaţi $detA(1)$.

b)Determinaţi numărul real a ştiind că $detA(a)=3$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

45.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $detB$.

b)Arătaţi că $AB=BA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $det(B+xA)=64$.

46.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $detB$.

b)Arătaţi că $AB=BA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $det(B+xA)=-1$.

47.Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 2n+1 & 2n^2+1 \\ 0 & n & n^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi suma elementelor matricei A.

b)Aflaţi numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2n+1)$,$n\in\mathbb{N}$,$n\geq 2$.Determinaţi valorile numărului natural n,$n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

48.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 2-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $detM(3)$.

b)Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-2x-2y+2)+2I_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=2M(x)$,pentru orice număr real x.

49. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 4-x \\ 4-x & x \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $detM(5)$.

b)Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(-x)=M(4-2x^2)+12I_2$, pentru orice număr real x,

unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=4M(a)$,pentru orice număr real x.

50.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătaţi că $A(6)+A(2)=2A(4)$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det A(x)=0$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

51.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 2x & 1 & 2x \\ 2x & 2x & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det\big(A(1)\big)$.

b)Arătaţi că $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)=5A\left(\frac{1}{2}\right)$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\big(A(x)\big)=0$.

52.Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+2z=a \\ 2x+y=0 \\ -y-z=1 \end{cases}$,unde a este un număr real.

a)Determinaţi numărul real a ştiind că $(x,y,z)=(1,-2,1)$ este soluţie a sistemului.

b)Calculaţi determinantul matricei sistemului.

c)Rezolvaţi sistemul pentru $a=-2$.

53.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi detA.

b)Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.

c)Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

54.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

a)Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A$.

b)Verificaţi dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.

c)Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pentru care $X^2=A$,unde a şi b sunt numere reale.

55.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(1,0)$.

b)Arătaţi că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m şi n.

56.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi detB.

b)Arătaţi că AB=BA.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

57.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det A(1)$.

b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a)=1$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

58.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Verificaţi dacă $A(2015)+A(2017)=2A(2016)$.

b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a)=0$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $\det\big(A(3)-xA(2)\big)=0$.

59.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=9$.

b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(1)+A(3)=a\cdot A(2)$.

c)Arătaţi că $A(x)A(y)=3A(x+y)+xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

60.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ -2a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=1$.

b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det\big(A(a)\big)=0$.

c)Arătaţi că $A(a)A(b)=A(a+b)+4abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

61.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3a & 9 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(2)+A(-2)=2A(0)$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det\big(A(a)\big)=0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(3)\cdot X=A(6)$.

62.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=-2$.

b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x)+I_2)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

63.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} 1+4a & -8a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $X(-2)+X(2)=2X(0)$.

b)Arătaţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+2ab)$,pentru orice numere reale a şi b.

c)Aflaţi valorile lui a din $\mathbb{R}$ pentru care $X(a)$ este inversabilă.

64.Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & x-1 & -2 \\ 4 & 7-x & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

a)Calculaţi $D(2)$.

b)Arătaţi că $D(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$,pentru orice număr real x.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(2^x-3)=0$.

65.Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & 2a & 2a \\ -2a & x & 2a \\ -2a & -2a & x \end{pmatrix}$, unde x şi a sunt numere reale.

a)Calculaţi $\det A(3,0)$.

b)Arătaţi că $A(x,a)+A(x,-a)=2x\cdot A(1,0)$,pentru orice numere reale x şi a.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det A(x,-1)=0$.

66.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Calculaţi $\det\big(A(4)\big)$.

b)Arătaţi că $A(-2016)+A(2016)=2A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=x^2$.

67.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2017\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2017I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2017I_2$.

68.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2014 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2014I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2014I_2$.

69.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1-a\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det A(1)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a)=1$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

70. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2016\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2016I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2016I_2$.

71.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 1\\ a+1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det A(1)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a)=1$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

72.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detB.
b)Arătaţi că AB=BA.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=8$.

73.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detB.
b)Arătaţi că AB=BA.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

74. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detB.
b)Arătaţi că AB=BA.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

75. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(1,0)$.
b)Arătaţi că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m şi n.

76. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A$.
b)Verificaţi dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.
c)Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, pentru care $X^2=A$,unde a şi b sunt numere reale.

77. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det A$.
b)Arătaţi că $A^2+4A=-I_2$.
c)Determinaţi inversa matricei $B=A+4I_2$.

78.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=0$.
b)Demonstraţi că $A(2a)+A(-2a)=2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(3x)A(3x)=2A(1)$.

79.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & -2x\\ x & 1-x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y+xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale $x,x\neq-1$,pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei .

80.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 3x-2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2))=-15$.
b)Demonstraţi că $A(-x)+A(x)=A(2020)+A(-2020)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\cdot\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -1\end{pmatrix}$.

81.Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & 3b\\ -b & a\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-2ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

82.Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & -b\\ 4b & a\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=5$.
b)Demonstraţi că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-3ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

83.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+3 & x+2\\ x-2 & x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x))=-5$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul natural n astfel încât
$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}16 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

84.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x-3 & x-2 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(x))=-5$, pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numărul natural n astfel încât

$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

85.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=36$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea X·X=A(0).Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

86.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+3 & a+1 \\ a & a+12 \end{pmatrix}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=36$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea X·X=A(0).Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

87.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A\cdot A)=b^2a^2$, pentru orice numere reale a şi b.

b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât X·A=A·X.Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x şi t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

c)Pentru a=−1 şi b=−9, determinaţi matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care Y·Y=A.

88.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a şi b.

b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât X·A=A·X.Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x şi t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

c)Pentru a=−9 şi b=−4, determinaţi matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care Y·Y=A.

89.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3a-2 & 1-a \\ 9a-9 & 4-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul natural n, ştiind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^4)\cdot A(2^5)=A(64)\cdot A(-n)$.

90.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} -2a+3 & -4a+4 \\ a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul natural n, ştiind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^4)\cdot A(2^5)=A(64)\cdot A(-n)$.

91.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix} 1-2^a & -2^a \\ 2^a & 1+2^a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Arătaţi că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.
c)Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$.Arătaţi că m=n=1.

92.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.
c)Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$.Arătaţi că m=n=1.

93.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -1\\ 3 & x+2\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
c)Se consideră numerele reale a,b şi c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$.Demonstraţi că $a^2+b^2+2c=3$.

94.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & 3\\ -1 & x+2\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
c)Se consideră numerele reale a,b şi c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$.Demonstraţi că $a^2+b^2+2c=3$.

95.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x,y)=\begin{pmatrix}x-3y & -2y\\ 4y & x+3y\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=0$.
b)Demonstraţi că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.
c)Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

96.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x,y)=\begin{pmatrix}x-3y & 4y\\ -2y & x+3y\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=0$.
b)Demonstraţi că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.
c)Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

97.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x^2 & x-2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X\cdot A(2)=A(3)$.

98.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x^2 & 1\\ x-2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X\cdot A(2)=A(3)$.

99.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & -2x\\ -x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=4$.
b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

100.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & -x\\ -2x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(1)) = 4$.
b)Arătaţi că $M(x) \cdot M(1) = M(4x + 1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x) \cdot M(1) \cdot M(1) = M(x + 2)$.

101.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că matricea $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a + 1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

102.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că matricea $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a + 1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

103.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.

104.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.

105.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & -2a \\ a & 2a+1 \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(a) - I_2 = a(A(1) - I_2)$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $A(m) \cdot A(2m) = A(-1)$.

106.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -2a & 2a+1 \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(a) - I_2 = a(A(1) - I_2)$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $A(m) \cdot A(2m) = A(-1)$.

107.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 1-a \\ 3-3a & 1+2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Arătaţi că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = -aI_2$, pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că $\det(A(a^2) - aA(a)) \leq 0$, pentru orice număr real a.

108.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 3-3a \\ 1-a & 1+2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Arătaţi că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = -aI_2$, pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că $\det(A(a^2) - aA(a)) \leq 0$, pentru orice număr real a.

109.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2x-1 & x-1\\ 2x+1 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(2)\big)=4$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$.

110.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2x-1 & 2x+1\\ x-1 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(2)\big)=4$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(1)\cdot B(0)=aA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot A=(B(0)-3I_2)\cdot A$.

111.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}4x-3 & x+4\\ 2x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=1$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(B(x)-xA)=x$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.

112.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}4x-3 & 2x\\ x+4 & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=1$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(B(x)-xA)=x$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.

113.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}4a-1 & a-3\\ a+1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big)=7$.

b)Arătaţi că $B(2)-B(0)\cdot B(1)=4A$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a)-aA$ **nu** este inversalilă.

114.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}4a-1 & a+1\\ a-3 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big)=7$.

b)Arătaţi că $B(2)-B(1)\cdot B(0)=4A$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a)-aA$ **nu** este inversalilă.

115.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & x-4\\ x-2 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(5)\big)=12$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $A\cdot\big(B(4)-B(2)\big)=aA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B(x)\cdot A-4xI_2)=0$.

116.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & x-2\\ x-4 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(5)\big)=12$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\big(B(4)-B(2)\big)\cdot A=aA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=0$.

117.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-4 & 3-x\\ x-3 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A = 1$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.

118.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x-4 & x-3 \\ 3-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 1$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.

119.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 2-2x & -x \\ x & 2+2x \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m) = \frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

120.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 2-2x & x \\ -x & 2+2x \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m) = \frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.

121.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A = 2$.
b)Arătaţi că matricea $B = \frac{1}{2}(I_2 - A)$ este inversa matricei A.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2) \cdot X = 2A$.

122.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A = 2$.
b)Arătaţi că matricea $B = \frac{1}{2}(I_2 - A)$ este inversa matricei A.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2) \cdot X = 2A$.

123.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 1+4x & -x \\ 3x & 1-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.

124.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 1+4x & 3x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.

125.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 3x+1 & 6x \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 8$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-1) \cdot A(1) - 3I_2 = A(x)$.

c)Demonstraţi că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 12$, pentru orice număr real nenul x.

126.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}3x+1 & 0\\ 6x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=8$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-1)\cdot A(1)-3I_2=A(x)$.

c)Demonstraţi că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 12$, pentru orice număr real nenul x.

127.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a-3\\ -a & 2a+2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot\left(6I_2-A(2)-A(-2)\right)=xI_2$.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.

128.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ a-3 & 2a+2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot\left(6I_2-A(2)-A(-2)\right)=xI_2$.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.

129.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+y & 1\\ 4xy & x+y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(1,2))=1$.

b)Arătaţi că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2)=4A(y,0)$.

130.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+y & 4xy\\ 1 & x+y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(1,2))=1$.

b)Arătaţi că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2)=4A(y,0)$.

131.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x-3 & 2x\\ -1-x & x+3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=6$.

b)Arătaţi că matricea $B=3I_2-A(0)$ este inversa matricei $A(0)$.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $6X-3A(0)\cdot X=A(1)$.

132.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x-3 & -1-x\\ 2x & x+3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=6$.

b)Arătaţi că matricea $B=3I_2-A(0)$ este inversa matricei $A(0)$.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $6X-2A(0)\cdot X=A(1)$.

Legi de compoziţie,grupuri

Fie M o mulţime nevidă.O funcţie $\varphi:M\times M\to M$, $(x,y)\to\varphi(x,y)$,se numeşte lege de compoziţie pe M.
Notăm $\varphi=\circ,*,\oplus,+,\cdot,\odot,\Delta,\perp,\top,\cup,\cap$, etc
Notăm $\varphi(x,y)=x\circ y,x*y,x\oplus y,x+y,x\cdot y,x\odot y,x\Delta y,x\perp y,x\top y,x\cup y,x\cap y$, etc
Fie M o mulţime nevidă şi $*:M\times M\to M,(x,y)\to x*y$
$*$ este asociativă $\Leftrightarrow(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in M$
$*$ este comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x,\forall x,y,\in M$
$*$ admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in M$
$x\in M$ este simetrizabil în raport cu $*\Leftrightarrow\exists x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$
$(x')'=x$, $(ab)'=ba$, $(abc)'=cba$
Cuplul $(M,*)$ se numeşte grup dacă au loc axiomele :
G_1) $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in M$,axioma asociativităţii
G_2) $\exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in M$,axioma elementului neutru
G_3) $\forall x\in M,\exists x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$,axioma elementelor simetrizabile
Grupul $(M,*)$ se numeşte grup abelian dacă are loc şi axioma
G_4) $x*y=y*x,\forall x,y,\in M$,axioma comutativităţii

Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Fie $a\in\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N},n\geq1$,din teoreama împărţirii cu rest obţinem $a=nq+r,0\leq r<n$,unde $q,r\in\mathbb{Z}$ sunt unice
Notăm $r=a\,mod\,n$
$\widehat{a\oplus b}=(a+b)\,mod\,n$, $a\,\widehat{\odot}\,b=(a+b)\,mod\,n\ \forall a,b\in\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$
$\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a\oplus b}$, $\hat{a}\cdot\hat{b}=a\,\widehat{\odot}\,b\ \forall\,\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$
$-\hat{a}=\widehat{n-a}$
$\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow(a,n)=1$, $U(\mathbb{Z}_n)=\{\hat{a}|(a,n)=1\}$
Dacă p e număr prim $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_p)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\dots,\widehat{p-1}\}=\mathbb{Z}_n\setminus\{\hat{0}\}$

Polinoame,rădăcini ale polinoamelor

Fie $K\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim, $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\in K$.
$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0$ este polinom cu coeficienţi în K, $f\in K[X]$.
$a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\in K$ se numesc coeficienţii polinomului f.
Dacă $a_n\neq0$ atunci $gradf=n$.
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,$f:K\to K$ se numeşte funcţie polinomială.
Pentru $\alpha\in K$, $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0$ se numeşte valoarea polinomului f în punctul α.
α este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0$.

Teorema împărţirii cu rest

Pentru polinoamele $f,g\in K[X],g\neq0$,există şi sunt unice polinoamele $c,r\in K[X]$ astfel încât $f=g\cdot c+r$ şi $gradr<gradg$.
În acest caz avem c=câtul,r=restul.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$ şi $\alpha\in\mathbb{Z}$.Dacă α este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$,$a_n\neq0$şi $\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\beta\neq0,(\alpha,\beta)=1$.Dacă $\frac{\alpha}{\beta}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$ şi $\beta|a_n$.

Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Q}[X]$ şi $a,b,d\in\mathbb{Q}d>0,\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$. Atunci: $a+b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow a-b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f,şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ şi $a,b\in\mathbb{R},b\neq0$. Atunci:
$a+bi$este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow a-bi$ este rădăcină a lui f, şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.

Divizibilitatea polinoamelor,teorema restului,teorema lui Bezout

Fie $f,g\in K[X]$ două polinoame,$K\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim.
$f:g\Leftrightarrow\exists h\in K[X]$ astfel încât $f=gh\Leftrightarrow$restul împărţirii lui f la g este polinomul nul$(g\neq0)$
$f:g\Leftrightarrow$toate rădăcinile lui g sunt şi rădăcini ale lui f ,cu cel puţin acelaţi ordin de multiplicitate ca la g

Teorema restului

Restul împărţirii lui f la $X-\alpha$ este egal cu $r=f(\alpha)$
Restul împărţirii lui f la $X+\alpha$ este egal cu $r=f(-\alpha)$

Teorema lui Bezout

$f:X-\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=0$, $f:X+\alpha\Leftrightarrow f(-\alpha)=0$

Relaţiile lui Viete

Pentru ecuaţia $ax^2+bx+c=0$,cu soluţiile x_1,x_2 ,sau polinomul $f=aX^2+bX+c$,cu rădăcinile x_1,x_2,avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s_1^2-2s_2$
$f=aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
polinomul $g=X^2-s_1X+s_2$ are rădăcinile x_1,x_2
ecuaţia $x^2-s_1x+s_2=0$ are soluţiile x_1,x_2
Pentru ecuaţia $ax^3+bx^2+cx+d=0$,cu soluţiile x_1,x_2,x_3 ,sau polinomul
$f=aX^3+bX^2+cX+d$,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3, avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}\\ s_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=s_1^2-2s_2$
$f=aX^3+bX^2+cX+d=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$,
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
polinomul $g=X^3-s_1X^2+s_2X-s_3$ are rădăcinile x_1,x_2,x_3
ecuaţia $x^3-s_1x^2+s_2x-s_3=0$ are soluţiile x_1,x_2,x_3
Pentru ecuaţia $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$,cu soluţiile x_1,x_2,x_3,x_4 ,sau polinomul
$f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4, avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a}\\ s_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a}\\ s_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$

$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = s_1^2 - 2s_2$
$f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$,
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$
polinomul $g = X^4 - s_1X^3 + s_2x^2 - s_3X + s_4$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4
ecuaţia $x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4 = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3, x_4

Subiectul II2 (prelucrări bacalaureat)

1.Pe mulţimea $G=(-5,5)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{25x+25y}{25+xy}$.

a)Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
b)Determinaţi $x \in G$, pentru care $x*x=5$.
c)Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to G$, $f(x)=\frac{5(x-1)}{x+1}$.Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y \in (0,+\infty)$.

2.Pe mulţimea $G=(-4,4)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{16x+16y}{16+xy}$.

a)Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
b)Determinaţi $x \in G$, pentru care $x*x=2$.
c)Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to G$, $f(x)=\frac{4(x-1)}{x+1}$.Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y \in (0,+\infty)$.

3.Pe mulţimea numerelor reale se defineţte legea de compoziţie asociativă $x*y=7x+7y-xy-42$.
a)Arătaţi că $x*y=-(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x \geq x$.
c)Calculaţi $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

4.Pe mulţimea numerelor reale se defineţte legea de compoziţie asociativă $x*y=4x+4y-xy-12$.
a)Arătaţi că $x*y=-(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x \geq x$.
c)Calculaţi $(-1)*2*(-3)*4*\ldots*(-2021)*2022$.

5.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y=7xy-7x-7y+8$.
a)Arătaţi că $x \circ y=7(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x \circ x \leq 64$.
c)Calculaţi $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2021^n$, pentru orice număr natural nenul n.

6.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y=6xy-6x-6y+7$.
a)Arătaţi că $x \circ y=6(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x \circ x \leq 25$.
c)Calculaţi $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2022^n$, pentru orice număr natural nenul n.

7.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4xy-4(x+y)+5$.
a)Demonstraţi că $x*y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<17$
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-\frac{59}{5}$.

8.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=7xy-7(x+y)+8$.
a)Demonstraţi că $x*y=7(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<50$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-\frac{219}{5}$.

9.Se consideră polinomul $f=4X^3-8X-m$,unde m este un număr real.

a)Pentru m=-4,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2-X+1.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{4}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
10.Se consideră polinomul $f=2X^3-6X+m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
11.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X-m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=3,arătaţi că $f(-3)=0$.
b)Arătaţi că, dacă polinomul f se divide cu $X-1$ polinomul f se divide cu X^2+4X+3.
c)Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=11$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
12.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-X+m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=3,arătaţi că $f(3)=0$.
b)Arătaţi că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$ polinomul f se divide cu X^2-4X+3.
c)Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
13.Se consideră polinomul $f=-2X^3+4X^2+8X-m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=10, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{3}$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.
14.Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-8X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=10, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{3}$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.
15.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=9xy+x+y$.
a)Arătaţi că $x\circ y=9\left(x+\frac{1}{9}\right)\left(y+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x\circ x=7$.
c)Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x+1$.Demonstraţi că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.
16.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.
a)Arătaţi că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x\circ x=3$.
c)Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$.Demonstraţi că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.
17.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{2\log_4 y}$.
a)Arătaţi că $2\circ 16=16$.
b)Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 4=36$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$'' este comutativă.

18.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{3\log_3 y}$.
a)Arătaţi că $3\circ 3=27$.
b)Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=125$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$" este comutativă.
19.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+7x+7y+42$.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $e=-6$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$".
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2019)=2019\circ(-7)$.
20.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-6x-6y+42$.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$".
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ 6$.
21.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-X+2$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=-2$,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu $X-2$,atunci restul împărţirii lui f la $X-3$ este egal cu 8.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{5}{2}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
22.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-X-3$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=3$,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu $X+3$,atunci restul împărţirii lui f la $X+2$ este egal cu 3.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=-\frac{10}{3}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
23.Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+2X-1$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)-f(-1)=6$,pentru orice număr real a.
b)Pentru $a=-2$,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-X+2.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2x_3-3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
24.Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+3X-1$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)-f(-1)=8$,pentru orice număr real a.
b)Pentru $a=2$,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2x_3-1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
25.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+25x+25y-120$.
a)Arătaţi că $x*y=-5(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x,pentru care $(x*x)*x=30$.
26.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-2xy+4x+4y-6$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-2)(y-2)+2$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x,pentru care $(x*x)*x=-2$.
27.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy-8x-8y+17$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x-2)(y-2)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $N=2017\circ 2018$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care $a\circ b=25$.

28.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy+4x+4y+5$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x+1)(y+1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care $a\circ b=25$.
29.Se consideră polinomul $f=X^3+6X^2+mX+6$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$,ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.
30. Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+X-5$.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Calculaţi $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$.
d)Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=0$.
31.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=2xy+3x+3y+3$.
a)Calculaţi $1*2$.
b)Arătaţi că $x*y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=23$.
32. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=2xy+x+y$.
a)Calculaţi $1*2$.
b)Arătaţi că $x*y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=0$.
33.Se consideră polinomul $f=X^3-mX+3$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=3$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2+X-3$ este egal cu 0.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-9$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
34.Se consideră polinomul $f=X^3-mX+4$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=2$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2+X-4$ este egal cu 0.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-12$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
35.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.
a)Arătaţi că $(-4)\circ 4=4$.
b)Arătaţi că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$,pentru orice nemere reale x şi y.
c)Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2020}$.
36.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=4xy-12x-12y+39$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 3=3$.
b)Arătaţi că $x\circ y=4(x-3)(y-3)+3$,pentru orice nemere reale x şi y.

c)Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2019}$.

37.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-8x-8y+72$.

a)Arătaţi că $(-8)*8=8$.

b)Arătaţi că $x*y=(x-8)(y-8)+8$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $1*2*3*\ldots*2020$.

38.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+7x+7y+42$.

a)Arătaţi că $(-7)*7=-7$.

b)Arătaţi că $x*y=(x+7)(y+7)-7$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $(-2019)*(-2018)*(-2017)*\ldots*(-1)$.

39. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-5x-5y-30$.

a)Arătaţi că $(-5)*5=-5$.

b)Arătaţi că $x*y=-(x+5)(y+5)-5$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+3)*(3x-2)=-5$.

40. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-4x-4y-20$.

a)Arătaţi că $(-4)*4=-4$.

b)Arătaţi că $x*y=-(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+1)*(2x-1)=-8$.

41. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4xy+12x+12y+33$.

a)Arătaţi că $3*(-3)=-3$.

b)Arătaţi că $x*y=4(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

42. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy-6x-6y+14$.

a)Arătaţi că $2*(-2)=2$.

b)Arătaţi că $x*y=3(x-2)(y-2)+2$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

43. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3(x+y-2)-xy$.

a)Calculaţi $1*3$.

b)Arătaţi că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

44. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=2(x+y-1)-xy$.

a)Calculaţi $2*3$.

b)Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

45.Se consideră polinomul $f=X^3-9X^2+mX-24$, unde m este număr real.

a)Calculaţi $f(0)$.

b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{3}{8}$,ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

46.Se consideră polinomul $f=X^3-12X^2+mX-40$, unde m este număr real.

a)Calculaţi $f(0)$.

b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{3}{10}$, ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

47.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 2xy-5x-5y+15$.

a)Calculaţi $2 \circ 4$.

b)Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 3$.

48.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 2xy-x-y+1$.

a)Calculaţi $1 \circ 3$.

b)Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 5$.

49.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = xy-5(x+y-6)$.

a)Calculaţi $5*6$.

b)Arătaţi că $x*y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $1*2*3*...*2020$.

50.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = xy-10(x+y-11)$.

a)Calculaţi $1*10$.

b)Arătaţi că $x*y = (x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $1*2*3*...*2019$.

51. Se consideră polinomul $f = X^3-9X^2-mX-24$, unde m este număr real.

a)Calculaţi $f(0)$.

b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1} = \frac{3}{8}$,ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

52.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = xy-5(x+y-6)$.

a)Calculaţi $5*6$.

b)Arătaţi că $x*y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $1*2*3*...*2015$.

53. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = xy+4(x+y+3)$.

a)Calculaţi $(-4)*(-5)$.

b)Arătaţi că $x*y = (x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $(-1)*(-2)*(-3)*...*(-2015)$.

d)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=12$.

e) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(\log_2 x)*(\log_4 x) = -4$.

54. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = xy+5(x+y+4)$.

a)Calculaţi $(-5)*(-6)$.

b)Arătaţi că $x*y = (x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Calculaţi $(-2015)*(-2014)*(-2013)*...*2014*2015$.

55.Se consideră inelul$(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$,unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

a)Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{3}x-\hat{2} = \hat{4}$.

b)Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f:$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$,$f(x) = x^2 - x$.
c)Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii H=$\{x^9 | x \in \mathbb{Z}_6\}$.
56.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3 + 2X + a$,unde $a \in \mathbb{R}$.
a)Pentru $a = -3$,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că $(3 - x_1)(3 - x_2)(3 - x_3) = 2$.
c)Pentru $a \neq 0$,determinaţi un polinom de grad trei,având coeficienţi reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.
57.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$.
a)Calculaţi $3*2$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x = \sqrt{12}$.
c)Arătaţi că numărul $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{1 \text{ de } 7 \text{ ori}}$ este întreg.
58.Se consideră inelul$(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$,unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.
a)Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{3}x + \hat{4} = \hat{1}$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f:$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$,$f(x) = x - x^3$.
c)Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii H=$\{x^{10} | x \in \mathbb{Z}_6\}$.
59. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = xy-3(x + y - 4)$.
a)Calculaţi $3*4$.
b)Arătaţi că $x*y = (x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1*2*3*...*2014$.
60. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy-4x-4y+4$.
a)Calculaţi $2 * 3$.
b)Arătaţi că $x*y=5\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(y - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = 9$.
61. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y=3xy-5x-5y+10$.
a)Calculaţi $\frac{4}{3} \circ \frac{5}{3}$.
b)Arătaţi că $x \circ y=3\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = \frac{41}{3}$.
d)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
62.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+3x+3y+6$.
a)Arătaţi că $0 * (-3) = -3$.
b)Arătaţi că $x*y=(x + 3)(y + 3) - 3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = 5$.
63. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = ax+y+1$,unde $a \in \mathbb{R}$.
a)Pentru $a = 1$ calculaţi $2015 \circ 2016$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care legea de compoziţie „ $\circ$ ” este asociativă.
c)Pentru $a=-1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x \circ 4^x = 1$.
64.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+3x+3y-6$.
a)Arătaţi că $(-3) * 3 = 3$.
b)Arătaţi că $x*y=-(x - 3)(y - 3) + 3$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+3)*(2x-1)=5$.
65. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-3x-3y-12$.
a)Arătaţi că $3*(-3)=-3$.
b)Arătaţi că $x*y=-(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+3)*(2x-1)=5$.
66.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4xy+12x+12y+33$.
a)Arătaţi că $3*(-3)=-3$.
b)Arătaţi că $x*y=4(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.
67.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=4xy+4x+4y+3$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x şi y.
b)Aflaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $a\circ b=3$.
c)Calculaţi $(-2016)\circ(-2015)\circ(-2014)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2014\circ 2015$.
68. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+3$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=3$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2+X-3$ este egal cu 0.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-9$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
69. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.
a)Arătaţi că $(-4)\circ 4=4$.
b)Arătaţi că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2016}$.
70. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+7x+7y+42$.
a)Arătaţi că $7*(-7)=-7$.
b)Arătaţi că $x*y=(x+7)(y+7)-7$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $(-1)*(-2)*(-3)*..*(-2016)$.
71. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy-3x-3y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=3(x-1)(y-1)+1$ pentru orice numere reale x şi y.
b)Aflaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $a\circ b=7$.
c)Calculaţi $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2014\circ 2015\circ 2016$.
72.Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=mX^3+mX^2+X+1$,unde m este un număr real ,nenul.
a)Arătaţi că f este divizibil cu X+1,pentru orice număr real,nenul m.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m ştiind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.
73. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=5$ calculaţi $f(1)$.
b)Aflaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-3$ este egal cu 3.
c)Pentru m=9, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
74. Se consideră polinomul $f=X^3-X-a$,unde a este număr întreg.
a)Pentru $a=2$, calculaţi $f(2)$.
b)Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Arătaţi că,dacă polinomul f are o rădăcină întreagă,atunci a este multiplu de 6.

75. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2+9}$.

a)Calculaţi $3*3$.

b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{45}$.

c)Arătaţi că numărul $\sqrt{20}*\sqrt{20}$ este număr întreg.

76.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X-a$,unde $a\in\mathbb{R}$.

a)Pentru $a=2$,arătaţi că $f(1)=0$.

b)Determinaţi numărul real a, ştiind că $(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=3$.

c)Pentru $a\neq 0$,determinaţi un polinom de grad trei,având coeficienţi reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

77.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+mX+8$,unde m este un număr real.

a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=12$, pentru orice număr real m.

b)Pentru $m=-4$,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul X^2-4.

c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-8\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$.

78.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy+12x+12y+44$.

a)Arătaţi că $x\circ y=3(x+4)(y+4)-4$,pentru orice numere reale x şi y.

b) Arătaţi că „$\circ$ ” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x\circ x\circ x=x$.

79.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{5\log_5 y}$.

a)Arătaţi că $5\circ 5=3125$.

b)Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 5=243$.

c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$'' este comutativă.

80.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+9x+9y+72$.

a)Arătaţi că $x\circ y=(x+9)(y+9)-9$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Arătaţi că $e=-8$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2020)=2020\circ(-8)$.

81.Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-105$, unde m este număr real.

a)Pentru $m=120$, arătaţi că $f(1)=1$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

82.Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2-mX-105$, unde m este număr real.

a)Pentru $m=-120$, arătaţi că $f(1)=1$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(x_2-x_1)+x_2(x_3-x_2)+x_3(x_1-x_3)=0$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

83.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+4}{x^2+y^2+4}$.

a)Arătaţi că $0*1=1$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.

c)Demonstraţi că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

84.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+5}{x^2+y^2+5}$.

a)Arătaţi că $0*1=1$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.

c)Demonstraţi că $x*(-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

85.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= x+\sqrt[3]{y}-4$.

a)Arătaţi că $1\circ 27=0$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x^6 = 8$.

86.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= x+\sqrt[3]{y}+2$.

a)Arătaţi că $0\circ(-8)=$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x^6 = 8$.

87.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y= x\sqrt{1+2y}+y\sqrt{1+2x}$.

a)Arătaţi că $4*4=24$.

b)Demostraţi că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\epsilon M$.

c)Determinaţi $x\epsilon M$ pentru care $4*(2x^2+2x)=24$.

88.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y= x\sqrt{2y+1}+y\sqrt{2x+1}$.

a)Arătaţi că $4*4=24$.

b)Demostraţi că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\epsilon M$.

c)Determinaţi $x\epsilon M$ pentru care $(2x^2+2x)*4=24$.

89. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= 5x^2-8xy+3y^2$.

a)Arătaţi că $1\circ 2=1$.

b)Demonstraţi că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $3^x\circ 5^x = 0$.

90. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= 3x^2-8xy+5y^2$.

a)Arătaţi că $2\circ 1=1$.

b)Demonstraţi că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $5^x\circ 3^x = 0$.

91.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y= x^2+y^2+x+y+1$.

a)Arătaţi că $(-1)*(-1)=1$.

b)Demonstraţi că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 5$.

92.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y= x^2+y^2-x-y+1$.

a)Arătaţi că $1*1=1$.

b)Demonstraţi că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 5$.

93.Pe mulţimea $M=[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}$.

a)Arătaţi că $1\circ 0=1$.

b)Determinaţi $x\epsilon M$ pentru care $(-x)\circ(-x)=0$.

c)Demonstraţi că $\sqrt{1-x^2}\circ x= 1$, pentru orice $x\epsilon[0,1]$.

94.Pe mulţimea $M=[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

a)Arătaţi că $1\circ 0=1$.

b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $(-x)\circ(-x)=0$.
c)Demonstraţi că $\sqrt{1-x^2}\circ x=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.
95.Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=7^{xy}-(1-x-y)$.
a)Arătaţi că $0\circ 3=3$.
b)Arătaţi că $x\circ\frac{1}{x}\geq 8$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.
c)Demonstraţi că, dacă m şi n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural par.
96.Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=6^{xy}-(1-x-y)$.
a)Arătaţi că $0\circ 2=2$.
b)Arătaţi că $x\circ\frac{1}{x}\geq 7$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.
c)Demonstraţi că, dacă m şi n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.
97. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{5}(x+y-1)+5$.
a)Arătaţi că $\sqrt{5}\circ 0=\sqrt{5}$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{5}\right)\circ\left(x+\sqrt{5}\right)=x$.
c)Determinaţi numerele raţionale al căror simetric în raport cu legea de compoziţie „$\circ$” este număr raţional.
98. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{7}(x+y-1)+7$.
a)Arătaţi că $\sqrt{7}\circ 0=\sqrt{7}$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{7}\right)\circ\left(x+\sqrt{7}\right)=x$.
c)Determinaţi numerele raţionale al căror simetric în raport cu legea de compoziţie „$\circ$” este număr raţional.
99.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5xy-15x-15y+48$.
a)Arătaţi că $2\circ 0=18$.
b)Demonstraţi că $x\circ y=5(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.
100.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5xy+15x+15y+42$.
a)Arătaţi că $(-2)\circ 0=12$.
b)Demonstraţi că $x\circ y=5(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.
101.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(3x-2)(3y-2)+1$.
a)Arătaţi că $1*2=5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1-\frac{1}{m}\right)=1$.
102.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(2x-1)(2y-1)+2$.
a)Arătaţi că $1*2=5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=3$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1-\frac{1}{m}\right)=2$.
103.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=6(xy+1)-5(x+y)$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=3$.
b)Arătaţi că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\leq 4$.
104.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=7(xy+1)-6(x+y)$.

a)Arătaţi că $1\circ 2=3$.
b)Arătaţi că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\leq 4$.
105.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y+8$.
a)Arătaţi că $0\circ 4=4$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x=4x$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $x\circ a=x+3a$, pentru orice număr real x.
106.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y+10$.
a)Arătaţi că $0\circ 4=6$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x=5x$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $x\circ a=x+4a$, pentru orice număr real x.
107.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4x^2-5xy+y^2$.
a)Arătaţi că $2\circ 0=16$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(2x)=-2$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi, $n<m$, pentru care $m\circ n=4$.
108.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-5xy+4y^2$.
a)Arătaţi că $0\circ 2=16$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-2$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi, $m<n$, pentru care $m\circ n=4$.
109.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-mX-4$, unde m este un număr real.
a)Pentru $m=0$, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
110.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+mX-4$, unde m este un număr real.
a)Pentru $m=0$, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
111.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+3X+6$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=6$, arătaţi că $f(-1)=8$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $X+2$ este egal cu 7.
112.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X+4$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=4$, arătaţi că $f(-1)=5$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $X+3$ este egal cu -11.
113.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-4x-3y+12$.
a)Arătaţi că $4*4=0$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $12*x=x$.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale x pentru care $(x*4)*x\geq 4$.

114.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-3x-4y+12$.
a)Arătaţi că $3*3=0$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*12=x$.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale x pentru care $x*(3*x)\geq 3$.
115.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x(x-6)+y(y-6)$.
a)Arătaţi că $7\circ 7=14$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $6\circ x=x^2+6$.
c)Arătaţi că $x\circ y\geq -18$, pentru orice numere reale x şi y.
116.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x(x-8)+y(y-8)$.
a)Arătaţi că $9\circ 9=18$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $8\circ x=x^2+8$.
c)Arătaţi că $x\circ y\geq -32$, pentru orice numere reale x şi y.
117.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)(6-x-y)$.
a)Arătaţi că $0*5=5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*3=0$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+7)*(n-7)$ este natural.
118.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)(7-x-y)$.
a)Arătaţi că $0*6=6$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*4=0$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+6)*(n-6)$ este natural.
119.Se consideră polinomul $f=X^3+4X^2+4X+a$, unde a este număr real.
a)Pentru $a=1$, arătaţi că $f(-1)=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $2x_1+2x_2+2x_3+x_1x_2x_3=2$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $a=16$,determinaţi rădăcinile polinomului f.
120.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2-4X+a$, unde a este număr real.
a)Pentru $a=1$, arătaţi că $f(-1)=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $2x_1+2x_2+2x_3-x_1x_2x_3=2$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $a=16$,determinaţi rădăcinile polinomului f.
121.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=y+x+\sqrt{yx}$.
a)Arătaţi că $4*1=7$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $(9x)*x=x^2$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $2^{x+2}*2^x=14^x$.
122.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-\sqrt{xy}$.
a)Arătaţi că $4*1=3$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $(9x)*x=x^2$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $2^{x+2}*2^x=6^x$.
123.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{6}(x+1)(y+1)-1$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=0$.
b)Arătaţi că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\leq n$, pentru care $m\circ n=5$.
124.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{7}(x+1)(y+1)-1$.
a)Arătaţi că $1\circ 13=3$.

b)Arătaţi că e=6 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \leq n$, pentru care $m \circ n=6$.
125.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y=x^2-xy-4x+5y+4$.
a)Arătaţi că $1 \circ 1=5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x \circ (5x)=4$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m \circ n=m$.
126.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y=x^2-xy-5x+6y+5$.
a)Arătaţi că $1 \circ 1=6$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x \circ (6x)=5$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m \circ n=m$.
127.Se consideră polinomul $f=X^3-aX+6+a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=7$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
128.Se consideră polinomul $f=X^3-aX+5+a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=3$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
129.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=6-\frac{x+y}{2}+xy$.
a)Arătaţi că $2*6=14$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*2=2x$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale,pentru care $(m-n)*(m+n)=m^2$.
130.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3-\frac{x+y}{2}+xy$.
a)Arătaţi că $2*4=8$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*1=x$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale,pentru care $(m-n)*(m+n)=m^2$.
131.Se consideră polinomul $f=X^3+4X^2+mX+16$, unde m este număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(-4)=0$.
b)Pentru m=3,determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X+1$.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.
132.Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+mX+25$, unde m este număr real.
a)Pentru m=5,arătaţi că $f(-5)=0$.
b)Pentru m=4,determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X+1$.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.

Tabel de derivate

$c' = 0$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)' = 2x$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^3)' = 3x^2$	$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$
$(x^4)' = 4x^3$	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^{-x})' = -e^{-x}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Reguli de derivare

$(f+g)' = f' + g'$ $(f-g)' = f' - g'$ $(\alpha f)' = \alpha f'$ $(fg)' = f'g + fg'$

$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Derivate

1.Calculaţi $f'(x)$ pentru următoarele funcţii:

$f(x) = 2016$, $f(x) = 6\sqrt{2}$, $f(x) = \operatorname{tg} 4$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^{100}$, $f(x) = x^{2015}$, $f(x) = x^9$, $f(x) = x^{900}$,
$f(x) = x^{2017}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = \frac{1}{x^8}$, $f(x) = \frac{1}{x^{2014}}$, $f(x) = \log_4 x$, $f(x) = \log_5 x$, $f(x) = \log_{0,3} x$,
$f(x) = 5^x$, $f(x) = 6^x$, $f(x) = 2014^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$,
$f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f(x) = \log_3(5x) + \log_3\frac{1}{5}$, $f(x) = \log_6(4x^2) - \log_6(4x)$,
$f(x) = \log_2(3x^2) + \log_2\frac{1}{3x}$, $f(x) = 5^x$, $f(x) = 2016^x$, $f(x) = 5^{2x}$, $f(x) = e^{3x}$, $f(x) = x^3 + 3^x$,
$f(x) = x^3 + 4x + 1$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$, $f(x) = 3x - x^5$,
$f(x) = 2 - 3x + x^2 - 5x^3$, $f(x) = 6x - x^4$, $f(x) = x + 3\sqrt{x}$, $f(x) = x^4 + \sin x + \cos x$,
$f(x) = \cos x - \sin x$, $f(x) = x - \cos x + \sin x$, $f(x) = x^2 + 5\sqrt{x}$, $f(x) = x - 3\sqrt{x}$,
$f(x) = 5x^3 + \ln x$, $f(x) = 5^x + 2^x - x$, $f(x) = 3^x + 4^x - x^2$, $f(x) = 4\cos x + 3\sin x - x$,
$f(x) = 5\sin x - 6\cos x + \sqrt{2}$, $f(x) = x^4 + \log_4 x + 2^x$, $f(x) = x^3 + \log_3 x - \sin x$,
$f(x) = x^4 + \log_4 x + \cos x$, $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3} + \operatorname{tg} x$, $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3^2 + \operatorname{ctg} x$,
$f(x) = (x-2)^2 + (x+2)^2$, $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3} + \log_{0,6} x$, $f(x) = \log_4 x^4 + \log_3 x^6$,
$f(x) = 3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$, $f(x) = 4\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x$, $f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}x$, $f(x) = 3^{x+1} + 2^{x-1}$,
$f(x) = 5\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x + 3^x$, $f(x) = 1^x + 2^x + e^x + 3^x$, $f(x) = \log_5 x^5 - \log_{\frac{1}{2}} x^3$,
$f(x) = 5^{x+1} + 3^{x-1}$, $f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$, $f(x) = 3^x + x^3 + \sqrt[3]{x} + \log_3 x$,
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 10$, $f(x) = (1-3x)(1+6x)$, $f(x) = \sin 2x$, $f(x) = (1+x)\ln x$,
$f(x) = \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\ln x$, $f(x) = (2\sin x + 3)(1 - 5\cos x)$, $f(x) = (1-3x^2)(1-2\sin x)$,
$f(x) = \left(-\frac{3}{x} + 4\right)(2\ln x - 3)$, $f(x) = (1+x)(2+\ln x)(3\sin x - 5)$, $f(x) = 3x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x$,
$f(x) = x\cos x - 5x\ln x + 3\sin x - x^2 + 2x$, $f(x) = \left(3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)\sin x + 5\sin x \ln x - x^3 + 4x + 5$,
$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 6$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, $f(x) = x\ln x$, $f(x) = x\sin x$,
$f(x) = x\cos x$, $f(x) = x^2\sin x$, $f(x) = \sqrt{x}\sin x + 5\cos x - \frac{3}{x} + 9$, $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin x$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(1+2x+3x^2), f(x)=\frac{x+1}{x-1}, f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}, f(x)=\frac{x+1}{x+2}, f(x)=\frac{x}{x^2+1},$
$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}, f(x)=\frac{x^3-2x}{x^2+x+1}, f(x)=\frac{1-x^3}{1+x^3}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, f(x)=\frac{\ln x+x}{\ln x-x},$
$f(x)=\frac{\ln x+x^2}{\ln x-x^2}, f(x)=\frac{3\sin x}{3\cos x-5}, f(x)=\frac{-\sin x+3\cos x}{\sin x+4}, f(x)=\frac{2\sin x-5\cos x}{3\sin x+4}, f(x)=\frac{5x+3}{3-5x}, f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4},$
$f(x)=(5x+6)\ln x, f(x)=(5x-6)e^x, f(x)=xe^x\ln x, f(x)=x^2\cdot\sin x\cdot\ln x,$
$f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\cos x, f(x)=\frac{\cos x+3}{\cos x-3}, f(x)=\frac{x+e^x}{x-e^x}, f(x)=2x^3+4x+6, f(x)=\frac{1}{x}-x,$
$f(x)=2x^3+3x^2+5, f(x)=x-\frac{1}{x}, f(x)=x^4-2x^2+1, f(x)=2x^3-6x+1,$
$f(x)=x^3-3x+1, f(x)=\frac{x-2}{x+2}, f(x)=x+\frac{4}{x-2}, f(x)=\frac{3x}{x^2+1}, f(x)=\ln x-\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x-1}{x-2},$
$f(x)=(x-1)e^x, f(x)=x^2-\ln x, f(x)=x^2-x, f(x)=x^3-3x+7, f(x)=e^x-x, f(x)=\sqrt{x}-1,$
$f(x)=\frac{x+1}{x}, f(x)=xe^x, f(x)=(x+2)^3, f(x)=x+10-\frac{11}{x}, f(x)=x\ln x,$
$f(x)=2x^3-4x+6, f(x)=\frac{1}{x}+x, f(x)=2x^3-3x^2+5, f(x)=x+\frac{1}{x}, f(x)=x^4+2x^2+1,$
$f(x)=2x^3+6x+1, f(x)=x^3+3x+1, f(x)=\frac{x+2}{x-2}, f(x)=x-\frac{4}{x-2}, f(x)=\frac{3x}{x^2-1},$
$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x+1}{x+2}, f(x)=(x+1)e^x, f(x)=x^2+\ln x, f(x)=x^2+x,$
$f(x)=x^3+3x+7, f(x)=e^x+x, f(x)=\sqrt{x}+1, f(x)=\frac{x-1}{x}, f(x)=2xe^x, f(x)=(x+3)^3,$
$f(x)=x-10+\frac{11}{x}, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x^3+x^2-x+1, f(x)=x^3-3x,$
$f(x)=-x^3+3x+2, f(x)=x^3-12x, f(x)=\frac{x+1}{x}, f(x)=\frac{1}{x}, f(x)=x^3-x^2+x+1,$
$f(x)=x^3+3x, f(x)=-x^3-3x+2, f(x)=-x^3+12x, f(x)=\frac{x-1}{x}, f(x)=-\frac{1}{x},$
$f(x)=e^x-x-1, f(x)=3e^x+x^2, f(x)=e^x-\ln x+x, f(x)=x^4-8x^2+16,$
$f(x)=(x+1)e^x, f(x)=xe^x-e^x+1, f(x)=\frac{x^2}{x-1}, f(x)=\frac{x+\ln x}{x}, f(x)=x\ln x-x+1,$
$f(x)=\frac{x}{x^2+1}, f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}, f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}, f(x)=\frac{1}{x}+\ln x, f(x)=\ln(x+1)-\ln x,$
$f(x)=e^x(x^2-6x+9), f(x)=\frac{2}{x}+\ln x, f(x)=x\ln x, f(x)=x-\ln x, f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1},$
$f(x)=x+\ln x, f(x)=\sqrt{x}-\ln x, f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}, f(x)=\frac{x+1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}, f(x)=-\frac{4}{x^2+1},$
$f(x)=e^x-\frac{1}{x}, f(x)=\ln x+e^x, f(x)=x^3+x^2+x+3^x, f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}, f(x)=e^x-x,$
$f(x)=x^2e^x, f(x)=x^2+\frac{2}{x}, f(x)=\frac{e^x}{1+x}, f(x)=\sqrt{x^2+3}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}, f(x)=\sqrt{x^2+4},$
$f(x)=e^x+x-1, f(x)=3e^x-x^2, f(x)=e^x+\ln x-x, f(x)=x^4+8x^2-16,$
$f(x)=(x-1)e^x, f(x)=xe^x+e^x+1, f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=\frac{x-\ln x}{x}, f(x)=x\ln x+x-1,$
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}, f(x)=\frac{e^{-x}}{x+2}, f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-3}, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x, f(x)=\ln(x+1)+\ln x,$
$f(x)=e^x(x^2+6x+9), f(x)=\frac{2}{x}-\ln x, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+1},$
$f(x)=x-\ln x, f(x)=\sqrt{x}+\ln x, f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-2}, f(x)=\frac{x-1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}, f(x)=-\frac{4}{x^2-1},$
$f(x)=e^x+\frac{1}{x}, f(x)=\ln x-e^x, f(x)=x^3-x^2+x-3^x, f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^2}, f(x)=e^x+x,$
$f(x)=x^3e^x, f(x)=x^2-\frac{2}{x}, f(x)=\frac{e^x}{1-x}, f(x)=\sqrt{x^2-3}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=\sqrt{x^2-4},$
$f(x)=x^4-5x^2+3, f(x)=4x^3-7x+2, f(x)=x^3+3x+2, f(x)=x^3-3x^2+1,$
$f(x)=\frac{x-3}{x+3}, f(x)=x+\frac{5}{x-3}, f(x)=\frac{6x}{x^2+1}, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x, f(x)=\ln x-x+\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x-2}{x-3},$

$f(x)=\frac{x+1}{x+2}, f(x)=(x-2)e^x, f(x)=(x+1)e^x, f(x)=x^2+\ln x, f(x)=x^2-3x,$
$f(x)=x^2+x, f(x)=x^4-x^3, f(x)=x^3+3x-5, f(x)=e^x+x, f(x)=\sqrt{x}+1, f(x)=\frac{x+2}{x},$
$f(x)=\frac{x-2}{x}, f(x)=xe^x, f(x)=(x+3)^2, f(x)=(x-2)^3, f(x)=x+11-\frac{6}{x}, f(x)=x^4\ln x,$
$f(x)=\sqrt{x}+4\ln x, f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}, f(x)=\frac{x-2}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}, f(x)=e^x+\frac{1}{x}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}+x,$
$f(x)=\ln x+e^x, f(x)=x^3-x^2+x-3^x, f(x)=\frac{x+3}{(x-1)^2}, f(x)=e^x-2x, f(x)=x^3e^x, f(x)=x^2+\frac{3}{x},$
$f(x)=\frac{e^x}{x+2}, f(x)=\sqrt{x^2+5}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=2x^3-3x^2+5,$
$f(x)=2x+\frac{1}{x}, f(x)=x^4-6x^2+9, f(x)=4x^3-7x+2, f(x)=x^3-6x+3, f(x)=x+\frac{5}{x-3},$
$f(x)=\frac{x-4}{x+4}, f(x)=\ln x-\frac{3}{x}, f(x)=\frac{4x}{x^2+1}, f(x)=(x-2)e^x, f(x)=\frac{x+2}{x+1}, f(x)=e^x(x+2),$
$f(x)=x^4e^x, f(x)=x^{2016}e^x, f(x)=x^3-\ln x, f(x)=x^2-x+3, f(x)=e^x-x^2+3x,$
$f(x)=x^3-3x+6, f(x)=\frac{x+2}{x}, f(x)=\sqrt{x}-4, f(x)=x\sqrt{x}, f(x)=(x+4)^3, f(x)=(x+5)^3,$
$f(x)=x^{2017}e^x, f(x)=x^5\ln x, f(x)=(x+2)\ln x, f(x)=x+11-\frac{12}{x}, f(x)=x-\frac{1}{x},$
$f(x)=x+\frac{1}{x}, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}, f(x)=x\operatorname{tg}x, f(x)=e^x\ln x, f(x)=\frac{e^x}{\ln x}, f(x)=\frac{e^x}{x^2},$
$f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=e^x-e^{-x}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f(x)=x+e^{-x}, f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1,$
$f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}, f(x)=e^x+x^2, f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}, f(x)=e^x(2x^2+4x+5), f(x)=-x^2+x,$
$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}, f(x)=x-2\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x+1}, f(x)=\frac{\ln x}{x}, f(x)=e^{-x}-1, f(x)=-e^{-x},$
$f(x)=e^x-1, f(x)=\frac{e^x}{x^2}, f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, f(x)=\frac{e^x}{x+2}, f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1},$
$f(x)=x-e\ln x, f(x)=(x^2-2x+1)e^x, f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x, f(x)=e^x-x, f(x)=e^x-x-1,$
$f(x)=\frac{\ln x}{x}, f(x)=\ln x+7, f(x)=x-\ln x, f(x)=x^2+e^x, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x-\frac{1}{e^x},$
$f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}, f(x)=(x^2+2x+3)e^x, f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, f(x)=(x^2-3x-3)e^x, f(x)=\frac{x-\ln x}{x+\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x)=\ln x-x+1, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}, f(x)=\frac{2x-1}{x-1}, f(x)=x^{2008}+2008^x,$
$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x)=x^2+e^x, f(x)=(x-1)e^x, f(x)=xe^x, f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}, f(x)=x-2\ln x,$
$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}, f(x)=(x-2)\ln x, f(x)=1+\sqrt{x}, f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f(x)=\sqrt{x}+x, f(x)=x\sqrt[3]{x},$
$f(x)=x^4-6x^2+18x+12, f(x)=(x^2-1)\ln x, f(x)=x\ln x, f(x)=3^x+1, f(x)=e^x-x-1,$
$f(x)=e^x-1, f(x)=e^x-ex-1, f(x)=x-\ln x, f(x)=\frac{x+1}{x-1}, f(x)=2x^3-15x^2+24x-1,$
$f(x)=2^x-x\ln 2, f(x)=\frac{x+1}{x-3}, f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}, f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2}, f(x)=\frac{2x+3}{x+2},$
$f(x)=x+\frac{3}{2}, f(x)=x^3-3x^2+4, f(x)=x^3-5x^2+8x-4, f(x)=x^3+3x, f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2},$
$f(x)=x+\sqrt{x}, f(x)=\ln x+8, f(x)=\frac{3}{x}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}, f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2}, f(x)=(x-1)(x-2),$
$f(x)=\frac{1}{x^2+1}, f(x)=\frac{x+1}{e^x}, f(x)=(x-3)\ln x, f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, f(x)=2^x+3^x, f(x)=x+1+\frac{1}{x-1},$
$f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}, f(x)=(x-3)\sqrt{x}, f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+1}{x}, f(x)=\frac{\ln x}{x^4},$
$f(x)=x\ln x-x, f(x)=x^3-3x+1, f(x)=2x^3-3x^2+1, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x,$
$f(x)=x^2-x-\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x}, f(x)=(x^2+1)e^x-1, f(x)=xe^x, f(x)=\frac{x^2}{x-1}, f(x)=\frac{x^3}{\ln x},$

$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x)=\frac{e^x}{x-1}, f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}, f(x)=\frac{x^2+1}{x}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2}, f(x)=x^3-3x^2+4,$
$f(x)=x^3-5x^2+8x-4, f(x)=x^3+3x, f(x)=\ln x+\frac{x^2}{x}, f(x)=x+\sqrt{x}, f(x)=x^3+\frac{3}{x},$
$f(x)=(x-1)(x-2), f(x)=(x-3)\ln x, f(x)=x^{2016}+2016x, f(x)=2016^x-x^{2016},$
$f(x)=\frac{x^2}{x-1}, f(x)=e^x+e^{-x}, f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}, f(x)=x-e^{-x}, f(x)=x^{2017}+2017(x-1)-1,$
$f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-2}, f(x)=e^x-x^2, f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}, f(x)=e^x(2x^2-4x+5), f(x)=x^2-x,$
$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x-1}, f(x)=\frac{\ln x}{-x}, f(x)=e^{-x}+1, f(x)=-e^{-x}+x,$
$f(x)=e^x+1, f(x)=\frac{-e^x}{x^2}, f(x)=(x+5)^2+(x-5)^2, f(x)=\frac{-\ln x}{x^2}, f(x)=\frac{e^x}{x-2}, f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1},$
$f(x)=x+e\ln x, f(x)=(x^2+2x+1)e^x, f(x)=\frac{x^4}{4}+\ln x, f(x)=e^x+x, f(x)=e^x-x+1,$
$f(x)=\frac{\ln x}{e^x}, f(x)=\ln x-7, f(x)=x+\ln x, f(x)=x^2-e^x, f(x)=x^{2018}\ln x, f(x)=x+\frac{1}{e^x},$
$f(x)=1-\frac{2e^x}{x-e^x}, f(x)=(x^2-2x+3)e^x, f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, f(x)=(x^2+3x-3)e^x, f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}, f(x)=\ln x+x+1, f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}, f(x)=\frac{2x+1}{x+1}, f(x)=x^{2017}-2017^x,$
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x)=x^2-e^x, f(x)=(x+1)e^x, f(x)=3x-xe^x, f(x)=\frac{x^2-3}{x+1}, f(x)=x+2\ln x,$
$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}, f(x)=(x+2)\ln x, f(x)=1-\sqrt{x}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, f(x)=\sqrt{x}-x, f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x},$
$f(x)=x^4+6x^2-18x+12, f(x)=(x^2+1)\ln x, f(x)=x^5\ln x, f(x)=x4^x, f(x)=e^x+x-1,$
$f(x)=e^x+1, f(x)=e^x+ex+1, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{x-1}{x+1}, f(x)=2x^3+15x^2-24x-1,$
$f(x)=2^x+x\ln 2, f(x)=\frac{x-1}{x+3}, f(x)=e^x-\frac{x-1}{x}, f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, f(x)=\frac{2x}{1-x^2}, f(x)=\frac{2x-3}{x-2},$
$f(x)=x-\frac{3}{x}, f(x)=x^3+3x^2+4, f(x)=x^3+5x^2-8x-4, f(x)=x^3-3x, f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2},$
$f(x)=x-\sqrt{x}, f(x)=\ln x-8, f(x)=-\frac{3}{x}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2}, f(x)=(x+1)(x-2),$
$f(x)=\frac{1}{x^2-1}, f(x)=\frac{x-1}{e^x}, f(x)=(x+3)\ln x, f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, f(x)=2^x-3^x, f(x)=x-1+\frac{1}{x+1},$
$f(x)=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}, f(x)=(x+3)\sqrt{x}, f(x)=3^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2-1}{x}, f(x)=\frac{\ln x}{x^7},$
$f(x)=x\ln x+x, f(x)=x^3+3x+1, f(x)=2x^3+3x^2+1, f(x)=2\sqrt{x}+\ln x,$
$f(x)=x^2+x-\ln x, f(x)=\frac{e^x}{-x}, f(x)=(x^2-1)e^x-1, f(x)=2xe^x, f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=\frac{-x^3}{\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x)=\frac{e^x}{x+1}, f(x)=x-2+3\sqrt[3]{x}, f(x)=\frac{x^2-1}{x}, f(x)=\frac{2x}{1-x^2}, f(x)=x^3+3x^2-4,$
$f(x)=x^3+5x^2-8x-4, f(x)=x^3-3x, f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}, f(x)=x-\sqrt{x}, f(x)=x^3-\frac{3}{x},$
$f(x)=(x-1)(x+2), f(x)=(x+3)\ln x, f(x)=x^{2016}-2016x, f(x)=2016^x+x^{2016},$
$f(x)=x+2\ln x+2017, f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}, f(x)=(x+2016)e^x, f(x)=(3x+2)e^x,$
$f(x)=x^2+\ln x+2016, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x, f(x)=7^x-4^x+2^x, f(x)=x^2-8x+8\ln x+2-8\ln 2,$
$f(x)=x^3e^{-x}, f(x)=e^x(x^2+4x+4), f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\ln x, f(x)=6x^2-\ln x, f(x)=x-\text{arctg}x, f(x)=4x^2-\sqrt{x}, f(x)=$
$e^x-x-13, f(x)=\frac{x^2+16x+64}{e^x}, f(x)=3x-\ln x^e, f(x)=\ln x+\frac{2(x-1)}{x}, f(x)=3\ln x-x^2-3x,$
$f(x)=2-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x}{x+2}+\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+4}, f(x)=(x-2)e^x+2, f(x)=\frac{x+2}{x^2+3}, f(x)=\frac{e^x}{x-7}.$

2.Calculaţi $f''(x)$ pentru următoarele funcţii:

$f(x)=x^3+3x$, $f(x)=x^2e^x$, $f(x)=\cos x-\sin x$, $f(x)=x+\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{x}-x$, $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$,

$f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$, $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$, $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $f(x)=x^3\ln x$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=3x^2+6x$, $f(x)=x^3+5x$,

$f(x)=e^x-x$, $f(x)=2x+\ln x$, $f(x)=x^2\ln x$, $f(x)=x^3e^x$, $f(x)=(2x+1)\ln x$,

$f(x)=(x^2+1)\ln x$, $f(x)=\cos^2 x$, $f(x)=\sin^3 x$, $f(x)=\cos^4 x$, $f(x)=x\cos x+\sin x$, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$,

$f(x)=x\sin x-\cos x$, $f(x)=x^3\sqrt{x}$, $f(x)=x\operatorname{ctg} x$, $f(x)=x\sin x$, $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$,

$f(x)=(x^2+x+1)e^x$, $f(x)=e^x\sin x$, $f(x)=e^x\cos x$, $f(x)=x^3+x^2+x+1$,

$f(x)=x^4+3x^2+2$, $f(x)=3\sin x+4\cos x$, $f(x)=3\sqrt{x}+5x$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$, $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$,

$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x}$, $f(x)=x^4\ln x$, $f(x)=5x^2+2x+3$, $f(x)=3x+\ln x$, $f(x)=(x^2+x+1)\ln x$,

$f(x)=(x^2+x+1)e^x$, $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=(x^2+x)\ln x$, $f(x)=x^5e^x$,

$f(x)=x^{10}+x^5$, $f(x)=\sin^6 x$, $f(x)=\cos^5 x$, $f(x)=x^3\sin x$, $f(x)=x^2\sin^3 x$, $f(x)=x^3\cos^2 x$,

$f(x)=e^x\ln x$, $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $f(x)=x^2(\sin x-\cos x)$, $f(x)=x^5+3x^4-5x^2+2$,

$f(x)=4\sin x+3\cos x$, $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$, $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-3}$, $f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$, $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x+1}$, $f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$,

$f(x)=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$, $f(x)=\frac{x+7}{x+6}$, $f(x)=(x+2)e^x$, $f(x)=(3x-2)e^x$, $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

Derivarea funcţiilor compuse

$\big((f\circ g)(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$, $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

Tabel de derivate funcţii compuse

$(u^2)'=2u\cdot u'$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(u^3)'=3u^2\cdot u'$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^4)'=4u^3\cdot u'$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^5)'=5u^4\cdot u'$	$\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^6)'=6u^5\cdot u'$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$	$(e^{-u})'=-e^{-u}\cdot u'$	$(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	

Derivate funcţii compuse

3.Calculaţi derivatele următoarelor funcţii:

$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+3)$,

$f(x)=\ln(x-2)+1-e^x$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$,

$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$, $f(x)=\ln(x-3)+\ln(x+3)$, , $f(x)=e^x+\ln x^3+2$,

$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $f(x)=\ln\frac{x+4}{x-4}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x+3}$,

$f(x)=\ln(x+1)-x$, $f(x)=x+1-\ln(x+2)$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$,

$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$, $f(x)=e^{x^2+2x+1}$, $f(x)=e^{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sin(x^2+3x)$,

$f(x)=\sin(x^2-2x)$, $f(x)=\cos(x^2+3x)$, $f(x)=\cos(x^2-2x)$, $f(x)=\operatorname{tg}(x^2+3x)$,

$f(x)=\operatorname{tg}(x^2-2x)$, $f(x)=\operatorname{ctg}(x^2+3x)$, $f(x)=\operatorname{ctg}(x^2-2x)$, $f(x)=\arcsin(3x)$,

$f(x)=\arcsin(2x)$,$f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$,$f(x)=(x^2+x+1)^6$,
$f(x)=(x^2-x+1)^8$,$f(x)=(3x+4)^7$, $f(x)=(3x-4)^7$,$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$,
$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$,$f(x)=e^{x^3}$,$f(x)=\sin e^x$,$f(x)=\cos e^x$,$f(x)=\operatorname{tg} e^x$,$f(x)=\operatorname{ctg} e^x$,$f(x)=\frac{1}{x-3}+\ln\frac{x-2}{x}$,
$f(x)=\sqrt{x^4-x^2+4}$, $f(x)=4-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$, $f(x)=x^4e^{-x}$, $f(x)=x-\ln(x^2+x+2)$,
$f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+2$, $f(x)=2x^3+3x^2+6x-6\ln(x-1)$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+49}+x\right)$,
$f(x)=x\ln(x+3)$, $f(x)=x^2-4\sqrt{x^2-2}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4x+4}$, $f(x)=2-2x+2\ln(x+1)$.

Limitele unor funcţii

Funcţiile cu nume se numesc funcţii elementare,o să numim funcţii elementare şi operaţiile cu aceste funcţii cu nume.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie elementară şi $a\in D\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{c}{\infty}=0$

Pentru $x_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}.$$

Pentru calculul unor limite de funcţii utilizăm şi regula lui l'Hospital, pe care o expunem pe pagina următoare.

Continuitate

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,$a\in\mathbb{R}$,a punct de acumulare pentru D

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=f(a)$

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,$a\in\mathbb{R}$,a punct izolat pentru $D\Rightarrow$f continuă în a.

Dacă o funcţie continuă nu se anulează pe un interval atunci ea păstrează semn constant pe acel interval.

Fie I interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $f(x)\neq 0\forall x\in I\Rightarrow f(x)>0\forall x\in I$ sau $f(x)<0\forall x\in I$.

Fie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $\varphi(a)\varphi(b)<0$ atunci există cel puţin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Fie $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\varphi(x)\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}\varphi(x)<0$ atunci există cel puţin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Asimptote

Asimptote verticale

Fie funcţia f:D→ℝ,a∈ℝ,a punct de acumulare pentru D

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\in\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la stânga la $\mathcal{G}_f$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\in\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la dreapta la $\mathcal{G}_f$

Dacă dreapta d:x=a este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta atunci spunem că d:x=a este asimptotă verticală bilaterală la $\mathcal{G}_f$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$

Asiptote orizontale

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$d:y=k este asimptotă orizontală spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$d:y=k este asimptotă orizontală spre $-\infty$

Asimptote oblice

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R}\Rightarrow$d:y=mx+n asimptotă oblică spre $+\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R}\Rightarrow$d:y=mx+n asimptotă oblică spre $-\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Derivată unei funcţii într-un punct,ecuaţia tangentei,derivata de ordin doi

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Ex.Fie $f(x)=x^3-2x$, calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

$f'(x)=3x^2-2$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-2=1$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)$, $f''(x)=\big(f'(x)\big)'$

Dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,iar panta tangentei este $m=f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0)\in\{\pm\infty\}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ este $x=x_0$

Regula lui l'Hospital

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rolul derivatei de ordin 1 şi 2 în studiul funcţiilor

Fie M un interval şi f o funcţie

dacă $f'(x)>0$ $\forall x\in M\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe M

dacă $f'(x)\geq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este crescătoare pe M

dacă $f'(x)<0$ $\forall x\in M\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe M

dacă $f'(x)\leq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este descrescătoare pe M

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
f(x)	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ f(x_0)\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow$

$\Rightarrow x_0$ este punct de minim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare minimă locală a lui f

Pentru

x	x_0
f′(x)	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
f(x)	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ $f(x_0)$ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘

$\Rightarrow x_0$ este punct de maxim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare maximă locală a lui f

Fie M un interval şi f o funcţie

dacă $f''(x) \geq 0$ $\forall x \epsilon M \Leftrightarrow$ f este convexă pe M

dacă $f''(x) \leq 0$ $\forall x \epsilon M \Leftrightarrow$ f este concavă pe M

Pentru

x	x_0
f′′(x)	− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + +
f(x)	concavă $f(x_0)$ convexă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune a lui f

Pentru

x	x_0
f′′(x)	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
f(x)	convexă $f(x_0)$ concavă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune al lui f

Subiectul III1 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 - 4x + 4\ln(x+1)$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-4x}{x+1}, x\epsilon(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\ln(1+\sin x) \leq \sin x$, pentru orice $x\epsilon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 - 5x + 5\ln(x+1)$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-5x}{x+1}, x\epsilon(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\ln(1+\sin x) \leq \sin x$, pentru orice $x\epsilon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

3.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+12x+36}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x+4)(x+6)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $0 \leq (x+6)(y+6) \leq 4e^{\frac{x+y+8}{2}}$, pentru orice $x,y\epsilon[-6,+\infty)$.

4.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+10x+25}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x+3)(x+5)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $0 \leq (x+5)(y+5) \leq 4e^{\frac{x+y+6}{2}}$, pentru orice $x,y\epsilon[-5,+\infty)$.

5.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln x^{2e}-2x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2e-2x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu Ox.

c)Demonstraţi că ecuaţia $x^{2e}=e^{2x}$ are exact o soluţie în $(0,+\infty)$.

6.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-\ln x^{2e}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x-2e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu Ox.

c)Demonstraţi că ecuaţia $e^{2x}=x^{2e}$ are exact o soluţie în $(0,+\infty)$.

7.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln x-\frac{4(x-1)}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{3}\cdot x$.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

8.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln x-\frac{5(x-1)}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-5}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{4}\cdot x$.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

9. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

10. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=4-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

11. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+4}{x+5}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+5)^2}$,$x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi imaginea funcţiei f.

12. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x}{x+2}+\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+4}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x+3)^2}+\frac{2}{(x+4)^2}$,$x\in(-2,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
13.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-1)e^x+4$.
a) Arătaţi că $f'(x)=xe^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
14.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-1)e^x-1$.
a) Arătaţi că $f'(x)=xe^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
15.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+2}{x^2+5}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+5)}{(x^2+5)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$.
16.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{x^2+15}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(3-x)(x+5)}{(x^2+15)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(\sqrt{2})<f(\sqrt[3]{3})$.
17.Se consideră funcţia f:$(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x}{x-4}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x-5)}{(x-4)^2}$,$x\in(4,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^{x-5}-x+4\geq 0$,pentru orice $x\in(4,+\infty)$.
18.Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$,$x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^{x-4}-x+3\geq 0$,pentru orice $x\in(3,+\infty)$.
19. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x^2-10x+25)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2-8x+15)$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că $(x-5)^2\leq 4e^{3-x}$,pentru orice $x\in(-\infty,5]$.
20. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x^2+6x+9)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2+8x+15)$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că $(x+3)^2\leq 4e^{-5-x}$,pentru orice $x\in(-\infty,-3]$.
21.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{4}{x}+\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{4}{x}+\ln x \geq 1+\ln 4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

22.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{5}{x}+\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-5}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{5}{x}+\ln x \geq 1+\ln 5$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+2019}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+2018)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(-\infty,-2017]$.

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-2017}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x-2018)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $[2019,+\infty)$.

25.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul fucţiei f.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$.

26.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-3x+9}{x-3}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-6)}{(x-1)^2}, x\in(3,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=4,situat pe graficul fucţiei f.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$.

27.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-6\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)\geq 2$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

28.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-81\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-3)(x^2+3x+9)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)\geq 27\ln\frac{e}{27}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

29. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^4\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x) = x^3(4\ln x + 1), x\in(0,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $1+4ef(x) \geq 0$,pentru orice număr real x,$x\in(0,+\infty)$.
30. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x^2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2x(2\ln x + 1), x\in(0,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $1+ef(x) \geq 0$,pentru orice număr real $x,x\in(0,+\infty)$.
31.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3^x - x\ln 3 - 1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
c)Demonstraţi că $3^x \geq x\ln 3 + 1$,pentru orice număr real x.
32.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 10^x - x\ln 10 - 1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $10^x \geq x\ln 10 + 1$,pentru orice număr real x.
33.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5e^x + x^2$.
a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 5$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
34.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 6e^x + x^2$.
a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 6$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
35.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - \ln x + 4x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e + 3$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
36.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - \ln x + 6x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e + 5$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
37.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^4 - 32x^2 + 40$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x-4)(x+4), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+2}$.

c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
38.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 18x^2 + 27$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x-3)(x+3)$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+3}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
39.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x+4)e^x$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-5,+\infty)$.
40.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x+3)e^x$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este concavă pe $(-\infty,-4]$.
41.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x - e^x + 5$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
42.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x - e^x + 7$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
43.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x - x + 5$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to e} f(x) = 5$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \ln x$,$x\epsilon(0,+\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x\epsilon(0,\infty)$.
44.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x - x + 7$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to e} f(x) = 7$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \ln x$,$x\epsilon(0,+\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x) \geq 6$, pentru orice $x\epsilon(0,\infty)$.
45. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+36}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(6-x)(6+x)}{(x^2+36)^2}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 6$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
46. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+16}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{(x^2+16)^2}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 4$ situat pe graficul funcţiei f.

c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

47.Se consideră funcţia $f:(-\infty,4)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-4}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(3-x)e^{-x}}{(x-4)^2}$, $x\in(-\infty,4)$.

c)Arătaţi că $f(x)\leq -\frac{1}{e^3}$ pentru orice $x\in(-\infty,4)$.

48.Se consideră funcţia $f:(-\infty,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-5}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4-x)e^{-x}}{(x-5)^2}$, $x\in(-\infty,5)$.

c)Arătaţi că $f(x)\leq -\frac{1}{e^4}$ pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

49.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

50.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

51.Se consideră funcţia $f:(-\infty,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-3}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2-x)e^{-x}}{(x-3)^2}$, $x\in(-\infty,3)$.

c)Arătaţi că $f(x)\leq -\frac{1}{e^2}$ pentru orice $x\in(-\infty,3)$.

52.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

53.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctulde abscisă x=e, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)\geq 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

54. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x+1)$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-1,+\infty)$.

b)Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\big((x+1)f(x)\big)$.
55.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-8x+16)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2-6x+8)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b)Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2(f'(x)+e^x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
56.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3e}{x}+\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-3e}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $(0,6e)$.
57. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\cdot\ln x$.
a)Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$.
c)Demonstraţi că funcţia g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
58. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x\ln x$.
a)Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.
59.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.
a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstaţi că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
d)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=e$,situat pe graficul funcţiei f.
60. Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$,$x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
61.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=3$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstaţi că funcţia f este convexă pe $(0,+\infty)$.
62. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=3 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)-16}{x-4}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
63.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+2$.

a)Arătaţi că $\lim_{x\to e} f(x) = 2$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \ln x$,$x\in(0,+\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
64. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=2 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-9}{x-3}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
65.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - xe^x + 2$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
66. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_o = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
67. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x+3)e^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-4,+\infty)$.
d)Arătaţi că funcţia f este concavă pe $(-\infty,-4]$.
68. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^x - 2e^x + 3$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
69. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + 2x$.
a)Arătaţi că $\lim_{x\to e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = e^e - \frac{1}{e} + 2$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=e,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
70. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+3}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
71.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x - x - 1$.
a)Arătaţi că $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e - 1$.
b)Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul$[0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $x + 1 \leq e^x$,pentru orice număr real x.
72.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4e^x + x^2$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=4$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $[0,+\infty)$.
d)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
73.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-81\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x^3-27)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 27(1-\ln 27)$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
74. Se consideră funcţia f:$(-\infty,3)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$,$x\in(-\infty,3)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(-\pi)<\frac{4}{3}$.
75. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-1)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq -1$, pentru orice număr real x.
76. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(2-x)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=(1-x)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x)\leq 1$, pentru orice număr real x.
77. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{mx^2+4x-9m}{x-3}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=3 este asimptotă verticală la graficul funcţiei f,pentru orice număr real m.
b)Determinaţi numărul real m pentru care dreapta de ecuaţie y=4 e asimptotă orizontală la graficul funcţiei g:$(1,\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=\frac{f(x)}{x}$.
c) Pentru m=1 ,calculaţi $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-23}{x-4}$.
78. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5e^x+x^2$.
a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=5$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
79.Se consideră funcţia f:$(-\infty,4)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}$,$x\in(-\infty,4)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=−6,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(e)<2$.
80.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-3\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-3}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $3\ln x-3\ln 3\leq x-3$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
81.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-8$.
a)Arătaţi că $f'(0)=0$.
b)Demonstraţi că oricare două tangente la graficul funcţiei f sunt concurente.
c)Demonstraţi că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
82.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-13$.
a)Arătaţi că $f'(0)=0$.
b)Demonstraţi că oricare două tangente la graficul funcţiei f sunt concurente.
c)Demonstraţi că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
83.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2+2x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a,ecuaţia $f(x)=a$ are cel puţin o soluţie.
84.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2-2x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a,ecuaţia $f(x)=a$ are cel puţin o soluţie.
85. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x^2-4}-x^2+3$.
a) Arătaţi că $f'(x)=2x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}-1\right)$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+f(x)-3}{x}$.
c)Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.
86. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-4}-3$.
a) Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)-3}{x}$.
c)Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.
87. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln(2+x)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\ln(2+x)+\frac{x}{2+x}$, $x\in(-2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă .
c)Se consideră funcţia $g:(-2,-1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2+x)^x$.Demonstraţi că, dacă $x_1,x_2\in(-2,-1]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
88. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln(x+2)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă .
c)Se consideră funcţia $g:(-2,-1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+2)^x$.Demonstraţi că, dacă $x_1,x_2\in(-2,-1]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
89.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}-1, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2-4(x^2+1)+5}-\sqrt{4x^2-2x+5}\leq(x-1)^2$, pentru orice număr real x.

90.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=−2,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2+4(x^2+1)+5}-\sqrt{4x^2-8x+5}\leq(x+1)^2$, pentru orice număr real x.

91. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x-\frac{1}{2}\ln(x-3)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x-5)(2x-7)}{2(x-3)}$,$x\in(3,+\infty)$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x-f(x)}{x}$.

c)Demonstraţi că $x^2-6x+\frac{35}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x-6)$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$.

92. Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-4x-\frac{1}{2}\ln(x-2)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x-3)(2x-5)}{2(x-2)}$,$x\in(2,+\infty)$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-f(x)}{x}$.

c)Demonstraţi că $x^2-4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x-4)$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

93. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+x\ln x-4$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\ln x+1$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

94. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+x\ln x-5$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\ln x+1$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

95. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln x^3-x^3$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(1-x)(x^2+x+1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $x^3\leq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

96.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3\ln x-x^3$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(1-x)(x^2+x+1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $x^3\leq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

97.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,$f(x)=3x\left(1-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)\right)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(n,f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{3}{5}x+1$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

98.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,$f(x)=4x\left(1-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)\right)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(n,f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{4}{5}x+1$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

99.Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+3}{x-3}+\ln(x-3)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-5x-6}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{x^2+3}{x-3}+\ln(x-3)\geq 13+\ln 3$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$.

100.Se consideră funcţia f:$(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+4}{x-4}+\ln(x-4)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-7x-8}{(x-4)^2}$, $x\in(4,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=5, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{x^2+4}{x-4}+\ln(x-4)\geq 17+\ln 4$, pentru orice $x\in(4,+\infty)$.

101. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2-3+\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+3}=2$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

102. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2+3+\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+3}=2$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

103. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2+x+6-5\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

c)Demonstraţi că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

104. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2+x+7-5\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.
c)Demonstraţi că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
105.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+4x-4)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2+6x)$ $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
c)Demonstraţi că $e^{x+6}(x^2+3x-3)\leq 8$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.
106.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+5x-5)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2+7x)$ $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
c)Demonstraţi că $e^{x+7}(x^2+2x-2)\leq 9$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.
107.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2+\frac{4x-4}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$ $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $|f(x)-f(y)|\leq 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.
108.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=6+\frac{4x-4}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$ $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $|f(x)-f(y)|\leq 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.
109. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4x^2}{x^2+x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+f(x^2)\geq\frac{68}{9}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
110. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{5x^2}{x^2+x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{5x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+f(x^2)\geq\frac{85}{9}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
111.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+\frac{6-x}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+x-12}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\ln x-f(x)\big)=0$.
c)Arătaţi că $\ln 27\leq 9f(x)-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
112.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+\frac{3-x}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\ln x-f(x)\big)=0$.
c)Arătaţi că $\ln 16\leq 4f(x)-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
113.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4x}{x^2+x+4}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(4-x^2)}{(x^2+x+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)-f(4-x)\leq 2$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$.

114.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{5x}{x^2+x+4}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(4-x^2)}{(x^2+x+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)-f(4-x)\leq \frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$.

115.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-5$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

116.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-6$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

117. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-4\ln(x+3)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+5x-7}{x+3}$, $x\in(-3,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $x^2-x\geq 4\ln\frac{x+3}{4}$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.

118. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-5\ln(x+4)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+7x-9}{x+4}$, $x\in(-4,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $x^2-x\geq 5\ln\frac{x+4}{5}$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$.

119.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-15}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+3)(5-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-6e^3\leq f(x)\leq e^4$, pentru orice $x\in[-4,5]$.

120.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-24}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+4)(6-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-8e^4\leq f(x)\leq e^5$, pentru orice $x\in[-3,4]$.

121.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+10}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-3x^2-x+10}{(x^2+x+10)^2\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a,f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.

122.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+14}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-3x^2-x+14}{(x^2+x+14)^2\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a,f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.

123. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-3x-3+\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+3x+2}{\ln x}=3$.

c)Demonstraţi că $f(x)+f(y)\le-\frac{37}{4}$, pentru orice $x\in(0,1]$ şi $y\in[1,2]$.

124. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-3x-4+\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+3x+3}{\ln x}=3$.

c)Demonstraţi că $f(x)+f(y)\le-\frac{45}{4}$, pentru orice $x\in(0,1]$ şi $y\in[1,2]$.

125.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-4)\sqrt{x}+\frac{15}{\sqrt{x}}$..

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x^2-4x-15}{2x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{x-3}=\frac{7}{3}$.

c)Determinaţi imaginea funcţiei f.

126.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-5)\sqrt{x}+\frac{24}{\sqrt{x}}$..

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x^2-5x-24}{2x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{x-4}=\frac{19}{8}$.

c)Determinaţi imaginea funcţiei f.

127.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(2x^2-x)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(2x-1)(x+2)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3x}{f(x)+2x}=-4$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=a, situat pe graficul funcţiei f, are panta egală cu 0.

128.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(2x^2+x)$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(2x+3)(x-1)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{f(x)+x}=2$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=a, situat pe graficul funcţiei f, are panta egală cu 0.

129. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-2\leq f(x)-f(y)\leq 2$, pentru orice $x,y\in[-1,1]$.

130. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+10x-5}{x^2+5}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{10(x+5)(1-x)}{(x^2+5)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-3\leq f(x)-f(y)\leq 3$, pentru orice $x,y\in[-5,1]$.

131. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+5x+3}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este concavă.

132. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+6x+4}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este concavă.

Tabel de integrale nedefinite

$\int dx = \int 1\,dx = x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctgx + C$
$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$	$\int sinx\,dx = -cosx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int cosx\,dx = sinx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tgx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int tgx\,dx = -\ln\|cosx\| + C$	$\int ctgx\,dx = \ln\|sinx\| + C$	$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$

Integrala nedefinită,primitive

Fie f,F:I→ℝ două funcţii şi I un interval.

F se numeşte primitivă a lui f $\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ este derivabilă} \\ F' = f, (F'(x) = f(x), \forall x \epsilon I) \end{cases}$

$\int f(x)\,dx = \{F(x) | F \text{ este primitivă a lui f}\}$ se numeşte mulţimea primitivelor funcţiei f

$\mathcal{C} = \{k: I \to \mathbb{R} | k(x) = k, \forall x \epsilon I\}$se numeşte mulţimea funcţiilor constante

Dacă F este o primitivă a lui f atunci $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathcal{C}$

$\int f''(x)\,dx = f'(x) + \mathcal{C}$

Proprietăţi pentru integrala nedefinită

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\qquad$ $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Primitive

1.Calculaţi următoarele integrale nedefinite:

$\int dx$, $\int \frac{5}{4}\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{x^6}\,dx$, $\int (3x+1)^2\,dx$, $\int x(2-x)^2\,dx$, $\int \sqrt[4]{x}\,dx$, $\int \sqrt[5]{x}\,dx$,

$\int \left(-3x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}\right)dx$, $\int \frac{4x^3-5x+6}{x^5}\,dx$, $\int x\left(3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}\right)dx$, $\int \frac{4x-1}{x^5}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right)dx$,

$\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+36}\,dx$, $\int \frac{1}{25-x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2+9} - \frac{3}{9-x^2}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-4)(x^2-5)}{x}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+6}\,dx$,

$\int \frac{(x^2-1)(3x+2)}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int (-3sinx + 4cosx)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int (ctgx + 3tgx)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$,

$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$, $\int (3^x + 4^{x+1} + 5^{x+2})\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

$\int \frac{dx}{6+5x^2}$, $\int \frac{dx}{6-5x^2}$, $\int \frac{dx}{5x^2-6}$, $\int (3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2)\,dx$, $\int (x^2 - 3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{5}{x}\right)dx$,

$\int \left(5x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 12x^4 \cdot \sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$, $\int \frac{10}{25x^2-9}\,dx$, $\int \frac{8}{16x^2+1}\,dx$,

$\int \frac{25}{5x^2+125}\,dx$, $\int (6^x ln6 - 5^x ln25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-45}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int (x^8 - 5)\,dx$,

$\int (5sinx + 6cosx)\,dx$, $\int \left(4\sin^2 x - \sqrt[3]{-64\cos^2 x}\right)dx$, $\int 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$, $\int 10\cos^2\frac{x}{2}\,dx$,

$\int 10\sin^2 x\,dx$, $\int (6x^5 - 3x^4 + 2x - 9)\,dx$, $\int (7x^2 - 4x + 2)\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-49}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-49}}\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+49}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+49}}\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$,

$\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int 9^x\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-64}\,dx$,

$\int x^{14}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-64}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+64}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+64}}\,dx$, $\int x^{15}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+81}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-81}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}\,dx$, $\int 8^x\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^{17}\,dx$, $\int 17^x\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-7}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+10}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-10}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{10-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$, $\int x^6\,dx$, $\int 9x^8\,dx$, $\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$, $\int \sqrt[6]{x^5}\,dx$, $\int x^{-\frac{7}{2}}\,dx$, $\int 13x\sqrt[5]{x^4}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, $\int e^x\,dx$, $\int 6^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{1}{25+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{(x-5)(x+5)}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}\,dx$, $\int \frac{1}{(5-x)(5+x)}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-6}\,dx$, $\int \frac{1}{6-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2+6}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}\,dx$, $\int (2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x - 3)\,dx$, $\int (\sin x + x)\,dx$,

$\int \frac{4x^4-3x^3+x^2+3x+2}{x^3}\,dx$, $\int \left(\frac{2}{6+x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (2\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int \left(3e^x - \frac{4}{x} + 3\cdot 5^x\right)dx$,

$\int \left(\frac{6}{25x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int \left(x^3\cdot\sqrt[3]{x} + 3x\cdot\sqrt{x^5}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-25}+5}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$,

$\int (3x^6 - 5x^4 + 2x^3 + 3x - 2)\,dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3-x^2+2x+3}{x^2}\,dx$, $\int \left(\frac{3}{7+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx$, $\int (1 - \sin x)\,dx$,

$\int (2\cos x + 3\sin x)\,dx$, $\int \left(3\cdot e^x - \frac{2}{x} + 4\cdot 3^x\right)dx$, $\int \left(\frac{6}{16x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\right)dx$, $\int (x + tgx)\,dx$,

$\int \left(x^2\cdot\sqrt[3]{x} + 2x\cdot\sqrt{x^3}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}+4}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\,dx$, $\int (6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 2)\,dx$,

$\int (x^2 - 3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^5} - \frac{6}{x}\right)dx$, $\int \left(9x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 31x^5\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{20}{4x^2-9}\,dx$, $\int \frac{3}{9x^2+1}\,dx$, $\int \frac{10}{5x^2+125}\,dx$, $\int (7^x\cdot\ln 7 - 5^x\cdot\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{7x^2+28}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int (5\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin x - 3\cos x)\,dx$, $\int \left(5\sin^2 x - \sqrt[3]{-125}\cos^2 x\right)dx$,

$\int e^x\left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int 3^x\left(3^{-x} + 3^{-x}\cdot x^3 + 6 + 5^x + \frac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{6x^5+x^2-x+1}{x^3}\,dx$, $\int \frac{4x^3-x^4}{\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \left(\frac{1}{5+x^2} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2-6} + \frac{3}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$, $\int \left(\frac{5}{x^2-4} - \frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$,

$\int \left(\frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}-\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3)\,dx$,

$\int \left(3x^2 - 6x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^3 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^3}\right)dx$, $\int \left(5\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[4]{x} + 4x - 2\sqrt{x}\right)dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$,

$\int (x^5 - 3x^2 + 2x - 6)\,dx$, $\int \left(5x^2 - 7x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$, $\int \left(3x\sqrt{x} - 4x\sqrt[3]{x^2}\right)dx$,

$\int \left(6\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x} + 3x^2 - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\,dx$, $\int (x^2 - 3e^x)\,dx$, $\int (x^5 + 2e^x)\,dx$,

$\int \left(6^x - \frac{1}{x^3} + e^x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{(x^2-4)^2}{x^4}\,dx$, $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^5}\,dx$, $\int \left(4x^2\sqrt{x} - 3x^4\sqrt[3]{x^5}\right)dx$,

$\int \frac{\cos^3 x+4}{\cos^2 x}\,dx$, $\int (x^2 - 3x + 5 + 2e^x)\,dx$, $\int (x^6 - 8x^2 + 3x + 7 + 3e^x)\,dx$, $\int \left(\frac{3-2x}{x}\right)^2 dx$,

$\int \left(7^x - \frac{1}{x^4} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{(x-2)^3}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+2)^3}{x^4}dx$, $\int \left(-\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{xe^x-5x}{x}dx$, $\int \frac{x\cdot 7^x-7x}{x}dx$, $\int e^x\left(4+\frac{5e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,

$\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x}dx$, $\int\left(x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}\right)dx$, $\int\left(4x-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$, $\int\left(3x+\frac{5}{x^2}\right)dx$, $\int\left(5x-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx$,

$\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x}dx$, $\int \frac{x-5}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$, $\int\left(x^2\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int 7^x\left(3-4^x+\frac{7^{-x}}{x^5}-\frac{7^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(2-3^x+4^{-x}\cdot x^5+\frac{4^{-x}}{x^5}+\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,$\int(6x^4-5x^3+4x^2-5x+2)\,dx$,$\int(x^2-3x)^3\,dx$,

$\int(3x^4+6x^3-5x^2+4x-1)\,dx$,$\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x}\right)dx$,$\int\left(9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$,

$\int\left(5x^3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x}\right)dx$,$\int(x^2+2x)^3dx$,$\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-32x^5\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$, $\int\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}-14x^5\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx$,

$\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,$\int \frac{15}{25x^2-9}dx$,$\int \frac{1}{9x^2+1}dx$,$\int \frac{15}{25x^2+9}dx$,$\int \frac{1}{16x^2-1}dx$,$\int \frac{20}{16x^2-25}dx$,$\int \frac{27}{9x^2+1}dx$,$\int \frac{8}{4x^2+64}dx$,

$\int(6^x\ln 6-5^x\ln 25)\,dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$,$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6x^2+54}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6x^2-54}}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+64}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-100}}dx$,$\int \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2+28}}dx$,$\int(5\sin x+3\cos x)\,dx$,$\int\left(3\sin^2 x-\sqrt[3]{-27}\cos^2 x\right)dx$,

$\int\left(4\cos^2 x-\sqrt[3]{-64}\sin^2 x\right)dx$,$\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$,$\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx$,$\int 4\sin^2\frac{x}{2}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$,

$\int \frac{6x^5+3x^4+2x^3-5x^2+3x-4}{x^3}dx$,$\int \frac{6x^3-x^5}{\sqrt{x}}dx$,$\int \frac{x\sqrt[4]{x}+3x^2\cdot\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}dx$,$\int\left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$,$\int \frac{(x-1)^4}{x^3}dx$,

$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}dx$,$\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{9-x^4}}dx$,$\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$,$\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$,$\int\left(7^x\ln\sqrt[3]{49}-\ln 5\cdot 25^x\right)dx$.

Integrala definită,proprietăţi pentru integrala definită

Fie f:[a, b] → ℝ o funcţie continuă şi F:[a, b] → ℝ o primitivă a sa , atunci

$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$ se numeşte integrala definită a funcţiei f .

$\int_a^b f'(x)\,dx=f(x)|_a^b=f(b)-f(a)$

$\int_a^b f''(x)\,dx=f'(x)|_a^b=f'(b)-f'(a)$

$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$,

$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$

Integrale definite

1.Calculaţi următoarele integrale definite:

a)$\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_1^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+1)\,dx$, $\int_1^2(x+2)\,dx$,$\int_{-1}^1(x^3+3x)\,dx$, $\int_0^1(4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$,

$\int_0^1 x\,dx$,$\int_0^{2014}dx$, $\int_0^2 x^2\,dx$,$\int_0^1\frac{-2x^2}{x^2+1}dx$, $\int_2^3(x+1)dx$, $\int_1^2 x\,dx$, $\int_0^1(3x+1)\,dx$, $\int_1^2 2x\,dx$,

$\int_1^2(2x+3)\,dx$, $\int_0^1 x^3\,dx$, $\int_0^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+4)\,dx$, $\int_1^2(x-2)\,dx$,$\int_{-1}^1(x^3-3x)\,dx$,

$\int_0^1(4x^3-3x^2+2x-1)\,dx$, $\int_0^1 4x\,dx$, $\int_1^{2016}dx$, $\int_0^1 x^{2016}\,dx$,$\int_2^3\frac{-2x^2}{x^2-1}dx$, $\int_2^3(x-1)dx$, $\int_2^3 x\,dx$,

$\int_0^1(3x-4)\,dx$, $\int_1^2 5x\,dx$, $\int_1^2(2x-3)\,dx$.

b) $\int_1^2 xe^x dx$, $\int_1^2 \ln x\,dx$,$\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, $\int_0^1\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$, $\int_2^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x+1)e^x\,dx$,

$\int_0^1(3x+1)e^x\,dx$, $\int_0^1(x^2e^x-2x)\,dx$, $\int_0^1 xe^x dx$, $\int_1^e \ln x\,dx$,$\int_e^{e^2} x^3\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} x^2\ln x\,dx$, $\int_1^2\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$,

$\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1(3x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1(x^2e^x+2x)\,dx$,

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx, \int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx, \int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx, \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx, \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx, \int_2^4 \frac{1}{x+1}dx, \int_2^3 \frac{x^3-1}{x^2-1}dx, \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx,$
$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1}dx, \int_2^3 \frac{x^3-3x}{x^2-1}dx, \int_2^3 \left(x^2+\frac{x}{x-1}\right)dx, \int_0^1 \frac{1}{x-2}dx, \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx, \int_2^4 \frac{1}{x-1}dx, \int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx, \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx.$

Inegalităţi integrale

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $m\leq f(x)\leq M\ \forall x\in[a,b]$ atunci

$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue şi $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Metoda integrării prin părţi

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Metoda schimbării de variabilă

$\int_a^b \big((f\circ g)(x)\big)g'(x)dx = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{dacă f este impară } (f(x)=-f(x)\forall x\in[-a,a]) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{dacă f este pară } \big(f(-x)=f(x)\big) \end{cases}$

Arii,volume

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci aria subgraficului funcţiei f sau aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este

$\mathcal{A}_{r_f} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă $\forall x\in[a,b]$ atunci aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este $\mathcal{A}=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei f este $\mathcal{V}_{C_f} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Subiectul III2 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+5}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 f(x)e^x\,dx = 10$.

b)Demostraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $[-5,+\infty)$.

c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $6-8e^{-n}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+6}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 f(x)e^x\,dx = 12$.

b)Demostraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $[-6,+\infty)$.

c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $7-10e^{-n}$.

3. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{x+3}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+3)f(x)\,dx = 4$.

b)Arătaţi că funcţia $F:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-27\ln(x+3)$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real a, a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei

$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuaţii x=1 şi x= a^2 are aria egală cu ln13.

4. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx=4$.

b)Arătaţi că funcţia $F:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+16x-64\ln(x+4)$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real a, a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a^2 are aria egală cu ln17.

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)(x+3)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=-18$.

b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=3 şi x=4.

c)Determinaţi numărul real a, a>4, ştiind că $\int_4^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx=\ln 13$.

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-4)(x+4)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=-39$.

b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=4 şi x=5.

c)Determinaţi numărul real a, a>5, ştiind că $\int_5^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx=\ln 17$.

7.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=18$.

b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1.

c)Demonstraţi că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$

8.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=21$.

b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1.

c)Demonstraţi că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$

9. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+\frac{1}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx=46$.

b)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)e^{x^3}\,dx$.

c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

10. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+\frac{1}{x+3}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+3)f(x)\,dx=36$.

b)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+3}\right)e^{x^3}\,dx$.

c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

11. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 + 2x + 2 + 3\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - 3\ln x)\,dx = 12$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{3e^2+4e}{2}$.

c) Determinaţi numărul real a,a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu $a^3 + a^2 + 2a - 3$.

12. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 + 2\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - 2\ln x)\,dx = 11$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{3e^2+4e-3}{2}$.

c) Determinaţi numărul real a,a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu $a^3 + a^2 + 2a - 1$.

13. Se consideră funcţia f:$[4,+\infty) \to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x-4}$.

a)Arătaţi că $\int_4^5 f(x)\sqrt{x-4}\,dx = \frac{7}{3}$.

b)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to\mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(x+4)}{x+4}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_5^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-4}}dt}{x^2}$.

14. Se consideră funcţia f:$[5,+\infty) \to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x-5}$.

a)Arătaţi că $\int_5^6 f(x)\sqrt{x-5}\,dx = \frac{17}{6}$.

b)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to\mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(x+5)}{x+5}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_6^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-5}}dt}{x^2}$.

15. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = (x-1)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $2e^n$.

16. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = (x+2)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\,dx = 18$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $4e^n$.

17.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sin x$.

a)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{2}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei

$g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

18.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

a)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf(x)\,dx=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{2}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

19. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}5x^2-6x+1, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

a)Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(\frac{14}{3}-\sqrt{e}\right)$.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} f^2(x)\,dx=\frac{19}{3}$.

20. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+2, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

a)Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+4}} f^2(x)\,dx=21$.

21. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-2}{2x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 2xf(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=3$.

c)Demonstraţi că $2\int_1^n\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

22. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=2$.

c)Demonstraţi că $\int_1^n\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{2}{f(x)}\,dx=\frac{4}{3}$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f,ştiind că $F(1)=\frac{\pi}{2}+2$.

c)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $\int_0^n xf(x)\,dx=\ln 5$.

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,dx=36$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f,ştiind că $F(3)=\frac{\pi}{12}+3$.

c)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $\int_0^n xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 25$.

25. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+3x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 3x)\,dx = e - 1$.

b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$.

c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + a^3$.

26. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 4x$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - 4x)\,dx = e(e - 1)$.

b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$.

c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + \frac{4a^3}{3}$.

27.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

a)Calculaţi $\int_1^2 (x^2 + 2x + 2)f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=2 are aria egală cu ln5.

c)Demonstraţi că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

28.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$.

a)Calculaţi $\int_1^3 (x^2 + x + 2)f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=3 are aria egală cu ln7.

c)Demonstraţi că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx = 0$.

29. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 3)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = -\frac{5}{2}$.

b)Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x + a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq -\frac{11}{20}$.

30. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 4)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = -\frac{7}{2}$.

b)Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x + a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq -\frac{4}{5}$.

31.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + 4x - 6)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Calculaţi $\int_1^3 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

c)Arătaţi că $\int_{2019}^{2020} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{2}$.

32.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 7$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 7)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

c)Arătaţi că $\int_{2016}^{2018} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{3}$.

33.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{2}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^5 \left(f(x)-\frac{2}{x}\right)dx = 12$.

b)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{2}{x}\right)e^x\,dx = 2e^3$.

c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 24+2lna.

34.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x+\frac{3}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx = 4$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right)e^x\,dx = e^2$.

c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 12+3lna.

35.Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{5}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{3}{2}+4\ln\frac{3}{2}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

36.Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+3}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{7}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{5}{2}+9\ln\frac{4}{3}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

37.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+3}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x)=x+3\ln x+2020$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu $\frac{3}{2}$.

38.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+4}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x)=x+4\ln x+2018$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu 2 .

39.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\,dx = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln 2$.

c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)-x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu $\frac{1}{2}\cdot\ln 10$.

40.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+4x}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(x^2+1)f(x)\,dx=0$.

b) Arătaţi că $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\ln 2$.

c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu $\frac{3}{2}\cdot\ln 5$.

41.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+7x+12}$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{2020}(x+3)(x+4)f(x)\,dx=2020$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{91}{720}$.

c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\ln\frac{16}{15}$.

42.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{2018}(x+2)(x+3)f(x)\,dx=2018$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{35}{288}$.

c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\ln\frac{6}{5}$.

43. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}$.

a)Arătaţi că $\int_{0}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)dx=\ln\frac{4}{3}$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-3,\infty)$.

c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu ln2 , pentru orice număr natural nenul n.

44. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

a)Arătaţi că $\int_{0}^{8}\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 3$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-4,\infty)$.

c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu $\ln\frac{7}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.

45.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_{1}^{2}(x+4)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

b)Arătaţi că $\int_{1}^{e^3}\left(f(x)+(x+4)f'(x)\right)dx=3$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

46.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x+2}$.

a)Arătaţi că $\int_{1}^{3}(x+2)f(x)\,dx=3\ln 3-2$.

b)Arătaţi că $\int_{1}^{e}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[3,4]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

47.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+1$.

a)Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{3}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\frac{7e^4-3}{16}$.

c)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

48.Se consinderă funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+2$.

a)Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\frac{9e^4-7}{16}$.

c)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

49.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+2}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (x+2)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \big(f(x)+(x+2)f'(x)\big)\,dx=1$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

50. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^e f^2(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x^4 f(x)\,dx=\frac{4e^5+1}{25}$.

c)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e^2$.

51.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x+\frac{2}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^4 \left(f(x)-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{15}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{2}{x}\right)e^x\,dx=2e^3$.

c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 4+2lna.

52. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-4x+7$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+4x-7)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

c)Arătaţi că $\int_{2015}^{2016} \frac{1}{f(x)}dx\le\frac{1}{3}$.

d) Calculaţi $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)}dx$.

53. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$.

a)Calculaţi $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx$.

b)Calculaţi $\int_1^e (x+3)f(x)\ln x\,dx$.

c)Arătaţi că $F(e-3)=\frac{e^2-12e+5}{2}$,unde $F:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(-2)=-12$.

54. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+3}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_{2013}^{2014} \big(f(x) + (x+3)f'(x)\big)\,dx = 1$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

55.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{5}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{3}{2} + 4\ln\frac{3}{2}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

56. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = x + 3\ln x + 2016$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = (f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu $\frac{3}{2}$.

57.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+2}$.

a)Calculaţi $\int_1^2 (x+2)f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 2x^2 f(x)\,dx + \int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x) = f(x)$.

58.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2-9}$.

a)Arătaţi că $\int_4^5 (x-3)f(x)\,dx = \ln\frac{8}{7}$.

b)Calculaţi $\int_4^5 (x^3-27)f(x)\,dx$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 4$ şi $x = 5$,este egală cu $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$.

59.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $\int_{-2}^2 (x^2+4)f(x)\,dx = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu ln3.

60.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(-1) = 2$.

c)Arătaţi că pentru orice număr real nenul a are loc relaţia:

$\int_0^a f(x)\,dx - \frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx = a^4 - 1$.

61.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

b)Calculaţi $\int_0^{\sqrt{3}} xf'(x)\,dx$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{f(x)}$.

62.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x(x+2)(x-2)$.

a)Arătaţi că $\int_3^4 \frac{f(x)}{x(x-2)}\,dx = \frac{11}{2}$.

b)Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(2) = -2$.

c)Arătaţi că $\int_{e^2}^{e^3} \frac{f(x)\ln x}{x^2-4}\,dx = \frac{5e^6-3e^4}{4}$.

63. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}$.

a)Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

b)Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 4$.

64. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x+\frac{1}{x+2}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}$.

b)Calculaţi $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c)Determinaţi numărul real a>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln\frac{a^2+2a}{2}$.

65.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$.

a) Arătaţi că $\int_0^{2016}(x+1)(x+3)f(x)\,dx = 2016$.

b)Arătaţi că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cdot f'(x)\,dx = -\frac{1736}{11025}$.

c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln 2$.

66. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x) = (x-n)e^x$.

a)Calculaţi $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

b)Arătaţi că funcţia f_{2015} este o primitivă a funcţiei f_{2014} .

c)Demonstraţi că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \le \frac{5-9n}{6}$, pentru orice număr natural nenul n,folosind eventual inegalitatea $e^x \ge x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

67.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+3}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{7}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{5}{2}+9\ln\frac{4}{3}$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

68. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x+\frac{3}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right)e^x\,dx=e^2$.

c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 4+3lna.

69. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+5x+9)f(x)\,dx=24$.

b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 are aria egală cu $\ln\frac{23}{15}$.

c)Demonstraţi că $\int_{-2}^3 f'(x)f(x)\,dx=0$.

70. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(4x-1)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=1$.

b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(4x-m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Aflaţi numărul real nenul a,ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx=4a$.

71. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{4x^2+1}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=6$.

b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x)=2x^2+\ln x+2018$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2]\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)$ este mai mare decât 45π.

72. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x+1$.

a)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(0)=2$.

b)Calculaţi $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

73. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x+12$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+6x-12)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

c)Arătaţi că $\int_{2016}^{2017} \frac{1}{f(x)}dx\le\frac{1}{3}$.

74. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-\frac{1}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)e^x\,dx=e^2$.

c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 12−lna.

75. Se consideră funcţia f:$(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=-\frac{3}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\frac{5}{2}-4\ln 2$.

c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=-f(x)$.

76. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+3}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx=10$.

b)Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x+3\ln x+2017$ este o primitivă a funcţiei f.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu $\frac{3}{2}$.

77. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+7x}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\,dx=0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+3\ln 2$.

c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu ln27.

78. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.

a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(-1)=1$.

c)Arătaţi că pentru orice număr real nenul a are loc relaţia:

$\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^6-1$.

79.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^{2018}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4 x^{2018}f(x)\,dx=e^2(e-1)(e+1)$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul$(0,2018]$.

c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=4 are aria mai mare sau egală cu $\frac{e^2(e-1)(e+1)}{2^{4036}}$.

80.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_1^4 (x^2+1)f(x)\,dx=3$.

b)Demonstraţi că $\int_0^{\sqrt{3}} x^2f(x)\,dx=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

c)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $\int_n^{n+2} 2xf(x)\,dx=\ln\frac{13}{5}$.

81.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{36}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{36}{x}\right)dx=4$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 are aria egală cu $\ln\frac{52}{37}$.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x)-\frac{36}{x}\right)\text{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}+a}{2}$.

82.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{25}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{25}{x}\right)dx=4$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=5 are aria egală cu $\ln\frac{25}{13}$.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x)-\frac{25}{x}\right)\text{arctgx}\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}+a}{2}$.

83. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x+2x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-xe^x)\,dx=1$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+6}{2}$.

c)Se consideră F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care F(1)=0.Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{4-3e}{3}$.

84. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x+xe^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-xe^x)\,dx=\frac{3}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+9}{2}$.

c)Se consideră F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care F(1)=0.Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=1-e$.

85. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+6}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+2x+6)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+6}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

c)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+13}{4}$.

86. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+8}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+2x+8)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+8}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

c)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+17}{4}$.

87. Se consideră funcţia f:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$f(x)=1-x^7$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{7}{8}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 x^6\left(f(x)\right)^7 dx=\frac{1}{56}$.

c)Demonstraţi că $\int_0^1 \left(f(x)\right)^{n+1} dx\le\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.

88. Se consideră funcţia f:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$f(x)=1-x^9$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{10}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 x^8\left(f(x)\right)^9 dx=\frac{1}{90}$.

c)Demonstraţi că $\int_0^1 \left(f(x)\right)^{n+1} dx\le\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.

89.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \left(4-f^2(x)\right)dx=4\pi$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $2\left(\sqrt{17}-4\right)$.

c)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx=\ln\left(\frac{\sqrt{34}-\sqrt{17}-\sqrt{2}-1}{4}\right)$.

90.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+25}}$.

a)Arătaţi că$\int_0^5 \left(4-f^2(x)\right)dx=5\pi$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $2\left(\sqrt{26}-5\right)$.

c)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx = \ln\left(\frac{\sqrt{1066}+4\sqrt{26}-\sqrt{41}-4}{25}\right)$.

91. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3+\frac{2}{x^2+1}$. aici

a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx = 42$.

b)Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 8+\ln 5$.

c)Demostraţi că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

92. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=4+\frac{2}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx = 18$.

b)Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 4+\ln 5$.

c)Demostraţi că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

93. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{29}{6}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Se consideră funcţia g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}+2\ln\frac{a+\sqrt{5}}{2}$.

94. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x^2+5}+\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{35}{6}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Se consideră funcţia g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{6}}{2}+5\ln\frac{a+\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

95. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=-xe^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x}dx = -8$.

b)Arătaţi că $\int_{-2}^2 (f(x)-e^x)\,dx = -\frac{2(e^4+1)}{e^2}$.

c)Demonstraţi că $\int_{-1-2a}^{-1+2a} f(x)\,dx \leq \frac{4a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

96. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x}dx = 8$.

b)Arătaţi că $\int_{-2}^2 (f(x)+e^x)\,dx = \frac{2(e^4+1)}{e^2}$.

c)Demonstraţi că $\int_{-1-2a}^{-1+2a} f(x)\,dx \geq -\frac{4a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

97.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x^5}-\frac{4\ln x}{x^5}$ şi funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^4}$, o primitivă a lui f.

a)Arătaţi că $\int_1^e x^4\left(f(x)+\frac{4\ln x}{x^5}\right)dx = 1$.

b)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}} x\cdot f(x^2+1)\,dx = -\frac{7\ln 2}{256}$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x^3 \cdot F(x)\,dx = \frac{a^2-1}{2}$.

98.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x^6}-\frac{5\ln x}{x^6}$ şi funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^5}$, o primitivă a lui f.

a)Arătaţi că $\int_1^e x^5\left(f(x)+\frac{5\ln x}{x^6}\right)dx = 1$.

b)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}} x\cdot f(x^2+1)\,dx = -\frac{15\ln 2}{1024}$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x^4 \cdot F(x)\,dx = \frac{a^2-1}{2}$.

99. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+6}{6x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx = 14$.

b)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{6}{6x^2+1}\right)dx=\frac{\ln 5}{6}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+6}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx = m(e^2-1)$.

100. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+7}{6x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx = 16$.

b)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{7}{6x^2+1}\right)dx=\frac{\ln 5}{6}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+7}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx = m(e^2-1)$.

101. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x(e^x+3x^2)$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+3x^2}\,dx = 8$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-3x^3)\,dx = 1$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx = \frac{e^4-e}{2}+a$.

102. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x(e^x+5x^2)$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+5x^2}\,dx = 8$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-5x^3)\,dx = 1$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx = \frac{e^4-e}{2}+a$.

103. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(5-4x)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = 3$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx = e^2-9$.

c)Determinaţi $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx = \frac{3}{25}$.

104. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(4-3x)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \frac{5}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx = e^2-7$.

c)Determinaţi $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx = \frac{15}{96}$.

105.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{6}{x}+2x^3$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{6}{x}\right)dx = \frac{15}{2}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

c)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{24\sqrt{3}}$.

106.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+\frac{6}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{6}{x}\right)dx=\frac{15}{2}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

c)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{24\sqrt{3}}$.

107. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-2\ln x)\,dx=7$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-3x^2)\,dx=\frac{e^2+1}{2}$.

c)Demonstraţi că $\int_1^{\sqrt{e}}f(x)F''(x)\,dx=\frac{(3e+1)(3e+7)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f.

108. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=6x^2+4\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-4\ln x)\,dx=14$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-6x^2)\,dx=e^2+1$.

c)Demonstraţi că $\int_1^{\sqrt{e}}f(x)F''(x)\,dx=\frac{(6e-4)(6e+8)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f.

109. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-3)^2$.

a)Arătaţi că $\int_5^7\frac{f(x)}{(x-3)^2}dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_4^5\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.

c)Arătaţi că $\int_0^1\frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2-5}{4}$.

110. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-4)^2$.

a)Arătaţi că $\int_5^7\frac{f(x)}{(x-4)^2}dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_5^6\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.

c)Arătaţi că $\int_0^1\frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2+1}{4}$.

111. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=5x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=30$.

b)Arătaţi că $\int_1^6(f(x)-5x)\,dx=2$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{-2}^1\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=15(a-2\ln 2)$.

112. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=6x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=36$.

b)Arătaţi că $\int_1^6(f(x)-6x)\,dx=2$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{-2}^1\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18(a-2\ln 2)$.

113. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+5}{x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1+4\ln 2$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2-1)e^x f(x)\,dx=e(e+a)$.

114. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+6}{x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=14$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1+5\ln 2$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2-1)e^x f(x)\,dx=e(e+a)$.

115. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (x^2+1)f(x)\,dx=20$.

b)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\,dx=\frac{5}{2}\cdot\ln 2$.

c)Determinaţi $m\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=\frac{375}{32}$.

116. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2+1)f(x)\,dx=9$.

b)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\,dx=3\ln 2$.

c)Determinaţi $m\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=\frac{81}{4}$.

117. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+1$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-5x)\,dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^2)^2}\,dx=\frac{1}{6}$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $5\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

118. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x+1$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-6x)\,dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^2)^2}\,dx=\frac{1}{7}$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $6\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

119. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=4x+\frac{2\ln x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_2^3 \left(f(x)-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=10$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x)-4x)\,dx=1$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^{e^2} \left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af(e^2)$.

120. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=10x+\frac{2\ln x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_2^3 \left(f(x)-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=25$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x)-10x)\,dx=1$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^{e^2} \left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af(e^2)$.

121. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+5x+5$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x)-5x-5)\,dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}dx=\frac{1}{50}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx=\frac{e^2+m}{4}$.

122. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+4x+4$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x)-4x-4)\,dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}dx=\frac{1}{32}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx=\frac{e^2+m}{4}$.

123. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx=0$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)\,dx=-\frac{4}{3}$.

c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia graficul funcţiei g:$[4,5]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\ln(4e^3)$.

124. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx=-2$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)\,dx=-\frac{10}{3}$.

c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia graficul funcţiei g:$[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{5}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $5\pi\ln(2e^2)$.

125. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^2+4x)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{25}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x}dx=e^2(6e-5)$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_3^4 \frac{xf(x)}{f(x-1)}dx=ae(5+3\ln 2-\ln 3)$.

126. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^2+3x)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{5}{6}$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=e(4e-3)$.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_3^4 \frac{(x-1)f(x)}{f(x-1)}dx=ae(5+2\ln 3-\ln 5)$.

127. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(4x^2+8x)\sqrt{x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{16}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_3^8 \frac{x^2+2x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.

c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2.

128. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(5x^2+10x)\sqrt{x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{20}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_3^{24} \frac{x^2+2x}{f(x)}dx=\frac{3}{5}$.

c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3.

129. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=15x^2-1+\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=34$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x)-15x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)+1}{\sqrt{x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 este egală cu 182+mln2.

130. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=5x^2-5+\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\frac{20}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x)-5x^2+5)\,dx=\frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)+5}{\sqrt{x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 este egală cu 58+mln2.

131. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^2+3+e^x$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-4x^2)\,dx=e+2$.

b)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{x}{f(x)-e^x}dx=\frac{\ln 13}{8}$.

c)Se consideră $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)-2x^4$. Ştiind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{4-e}{2}$, arătaţi că $G(1)=3$.

132. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x^2+2+e^x$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-5x^2)\,dx=e+1$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 \frac{x}{f(x)-e^x}dx=\frac{\ln 11}{10}$.

c)Se consideră $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)-5x^4$. Ştiind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{1-e}{2}$, arătaţi că $G(1)=1$.

Teste oficiale

Testul 1 (Examen de bacalaureat naţional 2026, sesiunea II, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că $i(6-i)+3(3-2i)=10$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{3x-2}=7^{-x}\cdot 49$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={2,3,4,5,8,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(5,2),B(7,4) şi C, astfel încât A este mijlocul segmentului BC. Determinaţi lungimea segmentului OC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=2 şi BC=4.Arătaţi că AD=$\sqrt{3}$, unde AD este înălţime a triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & -1-x\\ 3x & x+4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=18$.
b)Arătaţi că matricea $B=4I_2-A(1)$ este inversa matricei A(1).
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $12X-3A(1)\cdot X=A(5)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX+4$, unde m este număr real.
a)Pentru m=2,arătaţi că $f(-2)=0$.
b)Pentru m=1,determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+1.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+4+e^x$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-3x^2)\,dx=e+3$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \frac{x}{f(x)-e^x}\,dx=\frac{\ln 2}{3}$.
c)Se consideră $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)-3x^4$. Ştiind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{1-e}{2}$, arătaţi că $G(1)=2$.

Testul 2 (Examen de bacalaureat naţional 2026, sesiunea II)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 - 3i$ şi $z_2 = 1 - 2i$. Arătaţi că $iz_1 + z_2 = 4$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a + 2) = a + f(a)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x} = \sqrt{x^2 - x + 2}$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 > 100$.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(8,2)$ şi $C(1,9)$.Determinaţi distanţa dintre punctul C şi mijlocul segmentului AB.

6.Se consideră triunghiul ABC, cu AC=9 şi $B=\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $3\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & xy \\ 4 & x+y \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(1,2)) = 1$.

b)Arătaţi că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2) = 4A(y,0)$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=5-\frac{x+y}{2}+xy$.

a)Arătaţi că $1*3=6$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*5=2x$.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale,pentru care $(m-n)*(m+n) = m^2$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+8x-2}{x^2+2}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{8(x+1)(2-x)}{(x^2+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-2 \le f(x) - f(y) \le 2$, pentru orice $x,y\in[-4,0]$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 5x^2 - 3 + \ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)\,dx = \frac{26}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x) - 5x^2 + 3)\,dx = \frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+3}{\sqrt{x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 este egală cu 58+mln2.

Testul 3 (Examen de bacalaureat naţional 2026, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(4{,}9-3{,}4):3+2{,}5=3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-21$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(-3a,a)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(1+2x-x^2)=\log_7(3-x)$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar de 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(2,0)$ şi $C(4,2)$. Arătaţi că triunghiul ADC este isoscel, unde D este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $tgB=\frac{1}{3}$ şi aria egală cu 24.Arătaţi că AC=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}2a+2&-a\\a-3&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot(6I_2-A(2)-A(-2))=xI_2$.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-aX+2+a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=3$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(2x^2-3x)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(2x+3)(x-1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{f(x)+x}=2$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=a, situat pe graficul funcţiei f, are panta egală cu 0.
2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(2x^2+4x)\sqrt{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=36$.
b)Arătaţi că $\int_3^8\frac{x^2+2x}{f(x)}dx=1$.
c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{4\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4.

Testul 4 (Examen de bacalaureat naţional 2026, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})+3(1-2\sqrt{2})=7$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-10$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(2a)=f(a)-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x^2-6x+5}=x\sqrt{3}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel mult egală cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(1,5)$ şi $C(6,0)$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
6.Se consideră expresia $E(x)=\cos x\cdot\sin 3x-\sin 2x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & 0\\ 4x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=A(x)$.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-xy-x+2y+1$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=2$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(2x)=1$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$..
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{5x-5}=\frac{1}{2}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{5}{6}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(2e-1)$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_2^4\frac{xf(x)}{f(x-1)}dx=ae(5+\ln 3)$.

Testul 5 (Examenul de bacalaureat naţional 2026, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_4 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_3 = 14$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax + 3$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $f(0) + (f\circ f)(0) = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x - 4\cdot 5^{x-2} = 105$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{1,2,3,9\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$şi $B(5,4)$ şi dreapta d de ecuaţie $2x+ay=0$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care mijlocul segmentului AB aparţine dreptei d.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=12$ şi $C=\frac{\pi}{6}$. Punctul M aparţine segmentului AC astfel încât $3AM=AC$.Arătaţi că $BM=4\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(a+b) - A(a)\cdot A(b) = abA(1)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numere reale a pentru care $2A(2a) - A(a)\cdot A(a) - A(1)\cdot A(2a-1) = 2A(1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{6}(x-5)(y-5)+5$, cu elementul neutru $e=11$.
a)Arătaţi că $7\circ 8=6$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(6x-1)=10$.
c)Determinaţi numerele naturale n, $n\neq 5$, ale căror simetrice în raport cu legea de compoziţie „$\circ$” sunt numere naturale pare.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}-1+4\ln(x+3)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+3)}{x^2(x+3)}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4\ln(x+3)-f(x)}{\ln x} = 1$.
c)Demonstraţi că $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\geq 4\ln\frac{x+3}{x^2+3}$, pentru orice $x\in(0,1]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x^2+4x)e^{-x}$.
a) Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x\,dx = 27$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x+4}dx = -1$.
c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x^2)}{x^2}$. Demonstraţi că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g este concavă.

Testul 6 (Examen de bacalaureat naţional 2026, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 - 3i$ şi $z_2 = 1 - 2i$. Arătaţi că $z_1 + 3iz_2 = 10$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$.Determinaţi numărului real a pentru care $f(a) = 3a + g(3)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2 + 4) = \log_4 x + \log_4 5$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,8)$, $B(0,4)$ şi $C(a, b)$, unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele OA şi BC au acelaşi mijloc.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $C=\frac{\pi}{6}$. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu 4.Arătaţi că AB=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1-x & x-5 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(6))=10$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $A(3) \cdot A(3) = aI_2$.
c)Demonstraţi că numărul $N=\det(A(m) \cdot A(2) - A(m-1))$ este natural, pentru orice număr întreg m.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 - 2X + 2$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 2$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1x_2x_3(1 + x_1 + x_2 + x_3) = 4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X+1, determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul $X^2 - 2$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = e^x(x^2 + x - 1)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x^2 + 3x), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3}$.
c)Arătaţi că $e^{x+3}(x^2 + x - 1) \leq 5$, pentru orice $x\in(-\infty, 0]$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)= x + \sqrt{2x^2 + 1}$.
a)Arătaţi că $\int_3^5 \left(f(x) - \sqrt{2x^2 + 1}\right) dx = 8$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{x}{(f(x)-x)^2} dx = \frac{\ln 3}{4}$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[0,2] \to \mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$ în jurul axei Ox este egal cu $\frac{a\pi}{3}$.

Testul 7 (Examen de bacalaureat naţional 2025, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 5$ şi $a_3 = 35$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = f(0)\cdot f(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{3x - 6}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 100$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,5)$ şi C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC.Determinaţi coordonatele punctului C.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=AC şi aria egală cu 18. Arătaţi că $BC=6\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & 3x \\ -x & 1 + 4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $xA(y) - A(xy) = (x - 1)I_2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(1)\cdot A(x - 1) = xA(x)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{4}(x + 1)(y + 1) - 1$.
a)Arătaţi că $1\circ 5=2$.
b)Arătaţi că e=3 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale, cu $m\leq n$, pentru care $m\circ n=3$.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x - 1 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x\in(0, +\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x}{\ln x} = 3$.
c)Demonstraţi că $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$, pentru orice $x\in(0, 1]$ şi $y\in[1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx = 4$.
b)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{8}{3}$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia graficul funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\ln(4e)$.

Testul 8(Examen de bacalaureat naţional 2025, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 4$ şi $a_2 = 15$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2) = 2a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2 + x)$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,5,7,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,5) , B(8,4) şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO=AC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=4 şi cosB=$\frac{2}{3}$. Arătaţi că BC=6.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A = 2$.
b)Arătaţi că matricea $B=\frac{1}{2}(I_2 - A)$ este inversa matricei A.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2)\cdot X = 2A$.
2.Pe mulţimea $M=[0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-\sqrt{xy}$.
a)Arătaţi că $1 * 4=3$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $x*(9x)=x^2$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $2^x * 2^{x+2} = 6^x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+2}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-3x^2-x+2}{(x^2+x+2)^2\sqrt{x}}$, $x\in(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi $a\in(0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a, f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x + 3$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - 3x - 3)\,dx = 4$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}\,dx = \frac{1}{18}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx = \frac{e^2+m}{4}$.

Testul 9 (Examen de bacalaureat național 2025, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătați că $2\cdot(1,1+0,3)-1,8=1$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+x-1}$.
4.Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>10$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=10 și $\sin B=\frac{2}{5}$. Arătați că AC=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x & x\\ -x & 2-2x\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=1$.
b)Arătați că $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=16I_2$.
c)Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+a$, unde a este număr real.
a)Pentru a=1, arătați că $f(-1)=0$.
b)Determinați numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru a=9, determinați rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-8}{e^x}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $-4e^2\le f(x)\le e^3$, pentru orice $x\in[-3,4]$.
2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=6x+\frac{2\ln x}{x}$.
a)Arătați că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=15$.
b)Arătați că $\int_1^e(f(x)-6x)\,dx=1$.
c)Determinați numărul real a pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af(e^2)$.

Testul 10(Examenul de bacalaureat naţional 2025, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2i(6-i)+3(1-4i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+5$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(a)=2a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4x-4}=x\sqrt{2}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră numărul 2^n să fie divizibil cu 16.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1)şi B(2,4).Arătaţi că triunghiul OAB este dreptunghic în A.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin x+2\cos 2x+2\sin^2\frac{x}{2}$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=4$.
b)Arătaţi că $A(-1)\cdot A(x)=A(-2x-1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale, cu m<n, pentru care $A(-1)\cdot\big(A(m)+A(n)\big)=2A(-4)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x\cdot 3^y+y3^x$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=15$.
b)Arătaţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numărul real nenul x pentru care $x\circ(3x)=(2x)\circ(2x)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^2+3x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x^2+x)}{(x^2+3x+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
c)Demonstraţi că $f(x)-f(y)\le\frac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x şi y, cu $x\le 0\le y$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=4x+1+3x\ln x$.
a) Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-3x\ln x)\,dx=7$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\left(\frac{f(x)-4x-1}{x}\right)dx=3$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_2^4\frac{f(x)-1}{x^2\ln x}dx=a\ln 2$.

Testul 11 (Examen de bacalaureat național 2025, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3 = 19$ și $a_4 = 25$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real.Determinați numărului real a, știind că $f(2) = 8$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2-x} - \frac{1}{625} \cdot 25^x = 0$.
4.Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea A={1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$.Determinați lungimea segmentului DE, unde punctele D și E sunt mijloacele segmentelor OA, respectiv BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2-2a & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că detA=2.
b)Determinați numărul real x pentru care $M(2) \cdot A = xM(1)$.
c)Determinați numerele reale a pentru care $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = (a+2)I_2$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y=(x-6)(y-6)+6$.
a)Arătați că $9 \circ 8 = 12$.
b)Arătați că e=7 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
c)Determinați numerele reale nenule x pentru care $x \circ \frac{6}{x} = 6x$.

Subiectul III
1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = (x^2-5)\sqrt{x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x \epsilon (0,+\infty)$.
b)Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$.
c)Arătați că $f(x+2) - f(x) \leq 26$, pentru orice $x \epsilon (0,2]$
2.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x)= x^2 + 4\ln x$.
a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4\ln x)\,dx = \frac{7}{3}$.
b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-x^2}{x}\,dx = 2$.
c)Determinați numărul real m pentru care $\int_1^2 \left(f(x)f''(x) + \left(f'(x)\right)^2\right)dx = m\left(f(2) - f(1)\right)$.

Testul 12 (Examen de bacalaureat naţional 2024, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2-5i+i(5-3i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=15$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x+1}=7^x\cdot 7^2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin una dintre cifre egală cu 1.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ şi $B(4,2)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=5 şi $BC=5\sqrt{5}$. Arătaţi că $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & x-3\\ 3-x & x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A=1$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)(4-x-y)$.
a)Arătaţi că $0*3=3$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*1=0$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+5)*(n-5)$ este natural.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $x^2-x\geq 2\ln\frac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+1$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-3x)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^2)^2}\,dx=\frac{1}{4}$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

Testul 13 (Examen de bacalaureat naţional 2024, sesiunea I, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\cdot(1,2+0,1)+0,4=3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8(x^2-5x+5)=\log_8 x$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{1,3,4,6,8\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$, $B(4,2)$ şi C, mijlocul segmentului OA. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=8$ şi $C=\frac{\pi}{4}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x-2&x-2\\x-4&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(5)\big)=12$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\big(B(4)-B(2)\big)\cdot A=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x(x-2)+y(y-2)$.
a)Arătaţi că $3\circ 3=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $2\circ x=x^2+2$.
c)Arătaţi că $x\circ y\geq -2$, pentru orice numere reale x şi y.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-3$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2+1)f(x)\,dx=6$.
b)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\,dx=2\ln 2$.
c)Determinaţi $m\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=6$.

Testul 14 (Examen de bacalaureat naţional 2024, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 8$ şi $a_3 = 12$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$. Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(9 - x^2) = \log_6 5$.
4.Se consideră mulţimea $A=\{0,1,2, \dots ,9\}$. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $\sqrt{2n+1}$ să aparţină mulţimii A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(4,4)$ şi $C(5,2)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
6.Se consideră expresia $E(x) = 2\sin x \cdot \cos\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$ .Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(B(1)) = 7$.
b)Arătaţi că $B(2) - B(0)\cdot B(1) = 4A$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a) - aA$ **nu** este inversalilă.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy - 2x - 3y + 6$.
a)Arătaţi că $2 * 2=0$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*6=x$.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale x pentru care $x*(2 * x) \geq 2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(4-x^2)}{(x^2+x+4)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) - f(4 - x) \leq 1$, pentru orice $x\in[4, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x + 1)f(x)\,dx = 8$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + 2\ln 2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2 - 1)e^x f(x)\,dx = e(e + a)$.

Testul 15 (Examen de bacalaureat naţional 2024, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^{x-1}=10^{-2x}\cdot 10^{2}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cu cifre din mulţimea A= {1,2,3,4,5,6}, au ambele cifre pare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,6) şi B(6,0).Determinaţi distanţa dintre punctele B şi M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi aria egală cu 24. Arătaţi că AB=8.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A=1$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(B(x)-xA)=x$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-2X-4$, unde m este număr real.
a)Pentru m=6, arătaţi că $f(1)=1$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul X−2 este egal cu 8.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{3-x}{x^2}+\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+x-6}{x^3}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0$.
c)Arătaţi că $4f(x)-1\geq\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18$.
b)Arătaţi că $\int_1^6(f(x)-3x)\,dx=2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=9(a-2\ln 2)$.

Testul 16(Examenul de bacalaureat național 2024, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 1 + i$. Arătați că $z_1 + iz_2 = 2$.
2.Se consideră funcțiile f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = 5 - x$ și g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a + 1)$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x - x^2) = 1$.
4.Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr par, se pot forma cu elementele mulțimii A={1,2,3,4,5,6,7}.
5.În reperul cartezian xOy se cosideră punctele A(0,3),B(2,0) și C.Știind că punctul B este mijlocul segmentului OC, determinați distanța dintre punctele A și C.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B = \frac{\pi}{6}$ și mediana AM=4.Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3x-3 \\ 1-x & 3x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
b)Determinați numărul real m pentru care $A(2) \cdot A(0) + A(5) = mI_2$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x) - A(0) \cdot A(1-x)) = 3$.
2.Pe mulțimea M=$(0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x+y+1-\sqrt{xy+1}$.
a)Arătați că $1 \circ 8 = 7$.
b)Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ \frac{3}{x} = x$.
c)Determinați numerele natural nenul n pentru care $(n \circ (n+2)) \circ (n+4) > \frac{n^2}{2}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=(x^3 + 2x^2)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = x(x^2 + 5x + 4)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}} \leq x^2(x+2) \leq \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in [-4,0]$
2. Se consideră funcția f:$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$.
a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1}\right) dx = 7$.
b)Arătați că $\int_1^5 (3x^2 - f(x))\, dx = 2\ln 3$.
c)Se consideră funcția g:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x} - 1)$. Arătați că $\int_1^4 (a + bg(x))g'(x)\, dx = 4a$, pentru orice numere reale a și b.

Testul 17 (Examen de bacalaureat național 2024, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătați că $0,5+10\cdot(1-0,75)=3$.
2.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ .Arătați că $f(m)+g(-m)=m$, pentru orice număr real m.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{5x}$.
4.Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizor al lui 30.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în B.
6.Se consideră $E(x)=3\cos^2x-\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x$, unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & -2x\\ 1 & x-6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(6))=12$.
b)Determinați numărul real a pentru care $A(4)\cdot A(4)=aA(4)$.
c)Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m<n$, pentru care $\det(A(m)+A(n))=0$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-xy)$.
a)Arătați că $1*3=3$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*2=-x^2$.
c)Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m}*m=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-2}{x}-3\ln x$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+3\ln x}{x+1}=1$.
c)Demonstrați că $\frac{x^2+x-2}{x}\le 3\ln x$, pentru orice $x\in(0,2]$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+x+1$.
a)Arătați că $\int_0^2(f(x)-x^3)\,dx=4$.
b)Arătați că $\int_0^1\frac{x^2}{f(x)-x}\,dx=\frac{\ln 2}{3}$.
c)Determinați $a\in(-\infty,0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)dx=1-a^3e^{-a}$.

Testul 18(Examen de bacalaureat naţional 2023, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3-4i+i(4-i)=4$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4-2x$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-2x+6)=\log_5 6$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(a,0)$ şi $C(0,b)$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=AC=10 şi BC=16. Arătaţi că AD=6, unde AD este înălţime în triunghiul ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&2x+1\\x-1&2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(B(2))=4$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX-3$, unde m este un număr real.
a)Pentru m=0, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X+1.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x^2}{x^2+x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+f(x^2)\geq\frac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-1)^2$.
a)Arătaţi că $\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}dx=20$.
b)Arătaţi că $\int_2^3\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.
c)Arătaţi că $\int_0^1\frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2-5}{4}$.

Testul 19 (Examen de bacalaureat naţional 2023, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5x-3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.
4.Determinaţi câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,0) , B(0,2),C(3,3) şi M, mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele MO şi MC au lungimi egale.
6.Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 2-2a\\ 1-a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=1$.
b)Arătaţi că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(a^2)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.
a)Arătaţi că $0\circ 2=12$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere întregi, m<n, pentru care $m\circ n=3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$ $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $|f(x)-f(y)|\leq 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x^2+4\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-4\ln x)\,dx=7$.
b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-3x^2)\,dx=e^2+1$.
c)Demonstraţi că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)\,dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f.

Testul 20 (Examen de bacalaureat național 2023, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătați că $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=2$.
2.Se consideră funcția f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+1$.Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+4)=\log_4(6x-4)$.
4.Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$.Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 și tgC=$\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & a\\ -3a & 3a+1\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(2))=5$.
b)Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.
c)Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.
a)Arătați că $0\circ 3=1$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.
c)Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcția f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x^2+2x-2)$.
a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+4x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
c)Demonstrați că $e^{x+4}(x^2+2x-2)\le 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.
2. Se consideră funcția f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.
a)Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.
b)Demonstrați că orice primitivă G:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
c)Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Testul 21 (Examenul de bacalaureat naţional 2023, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2(1+i)-i(2-i)=1$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+10$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(2a,a)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2+2}=2x$.
4.Dterminaţi câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ şi BC=24. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D.Determinaţi lungimea segmentului CD.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.
a)Arătaţi că $1*2=8$.
b)Arătaţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$,pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x$.
a) Arătaţi că $\int_3^5(f(x)-x^3)\,dx=8$.
b)Arătaţi că $\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}\,dx=\frac{\ln 5}{3}$.
c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătaţi că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g este concavă.

Testul 22 (Examen de bacalaureat naţional 2023, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 şi $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$, unde a este un număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=32$.

4.Determinaţi numărul de submulţimi ordonate , cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulţimii M={0,1,2,3,4}.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ şi $B(2,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul B şi este perpendiculară pe dreapta AB.

6.Arătaţi că $(tgx+1)(ctgx-1)=2ctg2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & a+1\\ 1 & a & -1\\ 2 & -a & 4\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax+y+(a+1)z=a\\ x+ay-z=4\\ 2x-ay+4z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-9$.

b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Arătaţi că, dacă sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.

a)Pentru m=6, arătaţi că $f(-1)=0$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=x^2+2$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\cdot\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 3(f(x)-x\ln x)\,dx=7$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x^3}dx=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria mai mare decât 1.

Testul 23 (Examen de bacalaureat naţional 2022, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că media aritmetică a numerelor $a=20-\sqrt{21}$ şi $b=22+\sqrt{21}$ este egală cu 21.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3-x$.Arătaţi că $f(a)+g(a)=2$, pentru orice număr real a.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{7x-6}=x$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ şi $B(6,6)$.Arătaţi că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC=4$ şi măsura unghiului B este egală cu 60°. Arătaţi că înălţimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x\\ x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.
b)Arătaţi că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=3$.
b)Arătaţi că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\leq 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.
c)Demonstraţi că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3-2x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.
c)Determinaţi $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\frac{2}{9}$.

Testul 24(Examen de bacalaureat naţional 2022, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_2 = 6$ şi $a_3 = 12$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 5$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(1,4)$.Determinaţi coordonatele punctului C,astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că matricea $C(a) = B(a)\cdot B(1) - B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(2x-1)(2y-1)+1$.
a)Arătaţi că $1*2=4$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right) = 1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4} = 2$.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x(e^x + 2x^2)$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+2x^2}\,dx = 8$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 2x^3)\,dx = 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx = \frac{e^4-e}{2} + a$.

Testul 25 (Examen de bacalaureat național 2022, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.
2.Se consideră funcția f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\frac{1}{2^{2x}}$.
4.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$,$B(0,3)$ și $C(4,0)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
6.Se consideră expresia $E(x)=tgx+\sin\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -x\\ -2x & 2x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătați că $\det\left(M(1)\right)=4$.
b)Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.
a)Arătați că $(-1)\circ 0=8$.
b)Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
2. Se consideră funcția f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+4}{6x^2+1}$.
a)Arătați că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx=10$.
b)Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{4}{6x^2+1}\right)dx=\frac{\ln 5}{6}$.
c)Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1\frac{x+4}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx=m(e^2-1)$.

Testul 26 (Examenul de bacalaureat național 2022, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = \sqrt{2}$ și $b_2 = 4$.

2.Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = mx^2 - 2x + 1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 6$.

4.Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n-60$ să aparțină mulțimii A..

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

6.Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ și AB=6. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = xI_2 + iA$, unde x este număr real și $i^2 = -1$.

a)Arătați că $detA = 1$.

b)Determinați numărul real nenul x pentru care $B(3) \cdot B(5) = 8B(x)$.

c)Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care matricea $B(m) + iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2.Pe mulțimea M=$[1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

a)Arătați că $2*5=8$.

b)Arătați că e=1este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

c)Demonstrați că $(nx)*y \geq x(n*y)$, pentru orice x,y$\in$M și orice număr natural n, n$\geq$2.

Subiectul III

1. Se consideră funcția f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$,x$\in(0, +\infty)$.

b)Determinați a$\in(0, +\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\big(a, f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.

c)Demonstrați că $\frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \geq \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$,pentru orice x$\in(1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{e^x+2x}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\, dx = e$.

b)Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\, dx = -1$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\, dx = \frac{a(e+1)}{e^2}$, unde F:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0) = 0$.

Testul 27 (Examen de bacalaureat naţional 2022, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $N=\log_2 24-\log_2 12+3$ este pătratul unui număr natural.

2.Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a,a^2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1!,2!,3!,\ldots,10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul D mijlocul segmentului BC.Arătaţi că, pentru orice puncte E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relaţia $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

6.Arătaţi că $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=3$.

b)Demonstraţi că $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}(x+y-1)+2$.

a)Arătaţi că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

c)Determinaţi numerele raţionale al căror simetric în raport cu legea de compoziţie „$\circ$” este număr raţional.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)\right)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(n,f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{5}x+1$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

.

2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ şi funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

a)Arătaţi că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

b)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f(x^2+3)\,dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Testul 28(Examen de bacalaureat naţional 2021, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4$.Calculaţi $(f\circ f)(2)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-2x+4)=1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(3,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=0$.
b)Demonstraţi că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.
c)Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.
2.Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.
a)Arătaţi că $2\circ 0=2$.
b)Arătaţi că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.
c)Demonstraţi că, dacă m şi n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f .
c)Demonstraţi că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1(f(x)+e^x)\,dx=\frac{e^2+1}{e}$.
c)Demonstraţi că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)\,dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Testul 29 (Examen de bacalaureat naţional 2021, sesiunea I, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_5 = 6$ şi $b_6 = 18$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + x - 4$.Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m) = m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{2x} = 10^{3x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulţimea $\{0,1,2,3,4\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ şi $C(0,4)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
6.Arătaţi că sin2x=1, ştiind că tgx=1 şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
c)Se consideră numerele reale a,b şi c, astfel încât $A(a)\cdot A(b) = A(c)$.Demonstraţi că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2.Pe mulţimea M=[−1,1] se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.
a)Arătaţi că $0\circ 1 = 1$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $x\circ x = 0$.
c)Demonstraţi că $x\circ\sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + x\ln x - 1$.
a) Arătaţi că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^x + x\ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{17}{6}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Testul 30(Examen de bacalaureat naţional 2021, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 7$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 7$.Calculaţi $(f \circ g)(7)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1} = x - 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifra, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$,$C(3,5)$ şi $D(5,6)$.Demonstraţi că punctele B,D şi mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
6.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(1) + A(2) - A(1)\cdot A(2) = I_2$.
c)Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n) = A(m+n)$.Arătaţi că m=n=1.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y= x^2 + y^2 + x + y$.
a)Arătaţi că $(-1)*(-1)=0$.
b)Demonstraţi că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2}\ln(x+2)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$,$x\in(-2,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{2}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx = 18$.
b)Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 4 + \ln 5$.
c)Demostraţi că $F(x+1) \geq F(x) + 1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Testul 31 (Examenul de bacalaureat naţional 2021, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=3+2i.Arătaţi că $z+\frac{13}{z}=6$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x-5$, şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x$. Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x+5}=9\cdot 3^{x+1}$.
4.Se consideră A, o mulţime cu 4 elemente.Calculaţi probabilitatea ca, alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor lui A, aceasta să aibă un număr impar de elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ şi $C(0,6)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC
6.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că AB=2,AC=$2\sqrt{3}$ şi B=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră a un număr real nenul şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Pentru a=1, determinaţi matricea X$\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.
2.Pe mulţimea M=$[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\log_2(2^x+2^y-1)$.
a)Arătaţi că $0*2021=2021$.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi x$\in$M pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$,x$\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$,pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x+3-2\ln x$.
a) Arătaţi că $\int_1^3(f(x)+2\ln x)\,dx=14$.
b)Calculaţi $\int_1^e(2x+3-f(x))\,dx$.
c)Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x^3+1)\,dx=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$.

Testul 32 (Examen de bacalaureat naţional 2021, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $\log_2 3$,$\log_2 6$ şi $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+1$.Determinaţi numărul real x pentru care $f(x)=x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|2x-1|=2x+1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară şi cifra unităţilor impară.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.În triunghiul ABC dreptunghic în A, BC=12 şi $B=\frac{\pi}{6}$.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=1$.
b)Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n, ştiind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=1$.
b)Demonstraţi că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2+2(x^2+1)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.
c)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x^2)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.

Testul 33 (Examen de bacalaureat naţional 2020, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 3$ şi $a_3 = 5$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 1$.Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n) = 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,1),N(3,3),P(4,3) şi Q(1, a),unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN şi PQ.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AB=5 şi cosB= $\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A \cdot A) = a^2b^2$, pentru orice numere reale a şi b.
b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât A·X=X·A.Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x şi t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
c)Pentru a=4 şi b=0, determinaţi matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care Y·Y=A.
2.Pe mulţimea M=$[0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y= x\sqrt{y + 1} + y\sqrt{x + 1}$.
a)Arătaţi că 3∗3=12.
b)Demostraţi că x∗0=0∗x=x, pentru orice x∈M.
c)Determinaţi x∈M pentru care $(x^2 + 2x) * 3 = 7$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\ln(x + 1)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}$,$x\in(-1, +\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă .
c)Se consideră funcţia g:$(-1, 0] \to \mathbb{R}$, $g(x)=(x + 1)^x$.Demonstraţi că, dacă $x_1,x_2\in(-1, 0]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
2. Se consideră funcţia f:$[0,1] \to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - x^3$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^2\big(f(x)\big)^3\,dx = \frac{1}{12}$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1\big(f(x)\big)^{n+1}\,dx \leq \int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 34 (Examen de bacalaureat naţional 2020, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2$ şi raţia r=3.Calculaţi a_3 .
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$.Determinaţi numerele reale x pentru care $f(x^2) = 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizor al lui 100.
5.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătaţi că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.
6.Arătaţi că $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 36$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea X·X=A(0).Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= x+\sqrt[3]{y}-2$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x^6 = 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$,$x\in(1,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+2x+2)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 5$.
c)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+3}{4}$.

Testul 35 (Examen de bacalaureat naţional 2020, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$.Demonstraţi că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$.
5.Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$.
6.Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x)) = 5$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul natural n astfel încât
$A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.
a)Arătaţi că $0*1=1$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.
c)Demonstraţi că $x*(-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a,ecuaţia $f(x) = a$ are cel puţin o soluţie.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = xe^x + x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - xe^x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.
c)Se consideră F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $F(1)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{5-3e}{3}$.

Testul 36(Examen de bacalaureat naţional 2020, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(0{,}3 \cdot 10 - 1)(0{,}3 \cdot 10 + 1) = 8$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 6x + m = 0$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{5 - x} = \sqrt{x + 10}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităţilor.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care sinx=cosx, atunci cos2x=0.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=3$.
b)Demonstraţi că $A(a,b) \cdot A(b,a) = A(-ab, a^2 + b^2)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $\det(A(m,n)) = 1$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 15X^2 + mX - 80$, unde m este număr real.
a)Pentru m=95, arătaţi că $f(1) = 1$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 - x_3) + x_3(x_3 - x_1) = 0$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 10$.
a)Arătaţi că $f'(0) = 0$.
b)Demonstraţi că oricare două tangente la graficul funcţiei f sunt concurente.
c)Demonstraţi că $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{9}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x}\right) dx = 4$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=9 are aria egală cu 2ln3.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x) - \frac{9}{x}\right) \operatorname{arctgx}\, dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Testul 37 (Examen de bacalaureat naţional 2019, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_1 = 1$ şi raţia q=5.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 4x - 5$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x} + x = 4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$, acesta să fie număr natural.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(-3,0)$ şi $C(-3,6)$.Determinaţi ecuaţia medianei din A a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1)) = 17$.
b)Demonstraţi că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale x şi y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.
2.Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$.
a)Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
b)Determinaţi $x\in G$, pentru care $x*x=\frac{8}{5}$.
c)Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$.Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x + 1)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 6$.
b)Demostraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $4-6e^{-n}$.

Testul 38(Examen de bacalaureat naţional 2019, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1+i)^2-2i=0$, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-7$ este egală cu 12.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2-10x+40)=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,100} , acesta să fie număr impar.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ şi $C(0,3)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, ştiind că ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că sin3x+ sin2x+sinx= $\sqrt{3}$,ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=5$.
b)Demonstraţi că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.
a)Arătaţi că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
c)Calculaţi $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice x,y$\in[-3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=4$.
b)Arătaţi că funcţia F: $(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Determinaţi numărul real a, a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuaţii x=1 şi $x=a^2$ are aria egală cu ln5.

Testul 39 (Examen de bacalaureat naţional 2019, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ şi raţia r=2.
2.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$ cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1} - 3\cdot 5^x = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 4x + 4 = 0$.
5.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, ştiind că triunghiul ABC este echilateral şi AB=2.
6.Arătaţi că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b) = A(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n pentru care $A(m)A(n) = A(2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.
a)Arătaţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x\circ x\leq 9$.
c)Calculaţi $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x^e$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu Ox.
c)Demonstraţi că ecuaţia $e^x = x^e$ are exact o soluţie în $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = 6$.
b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2.
c)Determinaţi numărul real a, a>2, ştiind că $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx = 3\ln 2$.

Testul 40 (Examen de bacalaureat naţional 2019, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 36 de submulţimi cu două elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ şi $C(3,0)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.
6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$$

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-5$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.
a)Demonstraţi că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie y=x.
c)Demonstraţi că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.
b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1.
c)Demonstraţi că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$.

Testul 41 (Examenul de bacalaureat naţional 2019, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z,ştiind că $3z+2\bar{z}=5+2i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f\circ f)(x)=x+3$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+3)-\log_3 x=1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(5a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Calculaţi aria triunghiului ABC, ştiind că AB=6,AC=10 şi $\cos A=\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(M(-1))$.
b)Demonstraţi că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n, ştiind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.
a)Demonstraţi că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=5\ln x-x^2-3x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
b) Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $5\ln x\leq x^2+3x-4$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+4x+5)e^x$.
a)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\int_0^1 (f(x)-x^2e^x-5e^x)\,dx$.
c)Demonstraţi că $\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx\leq\frac{2(e^2-1)}{e^3}$.

Testul 42 (Examenul de bacalaureat naţional 2019, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_3 = 11$ şi $a_4 = 13$.Primul termen al acestei progresii este egal cu:

A. -1 B. 3 C. 7 D. 11

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x^2 - 8x + m$, unde m este număr real.Dacă vârful parabolei asociate funcţiei f are coordonatele egale, atunci numărul real m este egal cu:

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

3.Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x+12} = x$ este :

A. $\{-3,4\}$ B. $\{4\}$ C. $\{-3\}$ D. $\{-4,3\}$

4.Probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{n\in\mathbb{N}^*|n\leq 120\}$, acesta să fie multiplu de 25 este egală cu:

A. $\frac{1}{30}$ B. $\frac{4}{121}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{29}{30}$

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,5)$ şi $N(4,4)$.Punctul P, situat pe axa Ox, pentru care punctele M,N şi P sunt coliniare este:

A. $P(-8,0)$ B. $P(0,8)$ C. $P(0,0)$ D. $P(8,0)$

6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 B. $\sqrt{3}\cos x$ C. $\sin x$ D. 1

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $D(1) = 5$.

b)Demonstraţi că,pentru orice număr întreg p,$p\neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6-p$.

c)Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $B(1) + B(3) = 2B(2)$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x) = B(x)\cdot A$.

c)Determinaţi numărele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x) = B(x)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{(x-4)^2}{x}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}$.

c)Demonstraţi că pentru orice număr real a, a>0, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)$ **nu** depinde de a.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{x-2}, x\in(-\infty,1) \\ \ln x + m, x\in[1,+\infty) \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Determinaţi numărul real m, pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Pentru $m\leq 0$, demonstraţi că funcţia f este surjectivă.

Testul 43 (Examen de bacalaureat naţional 2018, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2 = 4$.
2.Se consideră funcţiile f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-1)^2$ şi $g(x) = 2018 - x$.Calculaţi $g\big(f(1)\big)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x = 5^{x^2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $(a-1)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
6.Arătaţi că tgx+ctgx=$\frac{5}{2}$, ştiind că sinx= $\frac{1}{\sqrt{5}}$ şi $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix}x+2 & x\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = -7$.
b)Demonstraţi că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a,ştiind că $\big(aA(-1) + A(a)\big)A(0) = (a^2+7)I_2$.
2.Se consideră polinomul f=$4X^3 - 6X + m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=2,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx = 22$.
b)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}\,dx$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Testul 44 (Examen de bacalaureat naţional 2018, sesiunea I , subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că $1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+1$.Calculaţi $(f\circ f)(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-5x+7)=\log_2 3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(-2,1), C(4,3)$ şi $D(8,5)$.Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, ştiind că $\operatorname{tg}x=1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(X(1))=-4$.
b)Demonstraţi că $X(-a)+X(a)=X(-2018)+X(2018)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale (a, b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=2$,arătaţi că $f(2)=0$.
b)Arătaţi că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$ polinomul f se divide cu X^2-3X+2.
c)Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x+1+\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=11$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{3e^2+4e-4}{2}$.
c) Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+a-2.

Testul 45 (Examen de bacalaureat naţional 2018, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 7$ şi $a_3 = 15$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n) < 8$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 1} = x + 1$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{0,1,2,3,4\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : y = \frac{x}{2} + 2$ şi d_2:y=$(m - 3)x + 1$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare.
6.Arătaţi că, dacă $\sin 2x = \frac{1}{2}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(X(3,1)) = 0$.
b)Demonstraţi că $X(a,b)X(c,d) = X(ac + 9bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a,b,c şi d.
c)Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n)) = 1$.
2.Se consideră polinomul f=$2X^3 - 4X^2 - 7X + m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=9, arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x - 1)e^x + 1$.
a) Arătaţi că $f'(x) = xe^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
2. Se consideră funcţia f:$[2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x-2}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx = \frac{4}{3}$.
b)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}dt}{x^2}$.

Testul 46 (Examen de bacalaureat naţional 2018, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.
2.Determinaţi numărul real a, pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă x=1.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuaţie y=ax+2 şi d_2, de ecuaţie $y=\frac{x}{4}+1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
6.Arătaţi că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ şi $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(M(1)\right)=0$.
b)Demonstraţi că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=8xy+x+y.
a)Arătaţi că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care x∘x=1.
c)Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$.Demonstraţi că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$,x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu 1.

Testul 47 (Examen de bacalaureat naţional 2018, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\{n\in\mathbb{N}|n(n+2)<14\}$ este egală cu 3.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $f(0)=1$ şi $f(x+1)=f(x)+2$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x+5)^2-9>0$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu două elemente ale mulţimii $\{1,3,5,7,9\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ şi $C(-1,3)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.
6.Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, ştiind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, DE=4 şi DF=5.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că detA=2.
b)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.
c)Determinaţi inversa matricei $B=A+I_3$.
2.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.
a)Arătaţi că $2\circ 9=16$.
b)Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$'' este comutativă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^{x-2}-x+1\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$.
a)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx=1$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

Testul 48(Examenul de bacalaureat naţional 2018, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=(1-i)(2+i)+5i$.
2.Determinaţi numerele naturale n pentru care $n^2+n-12<0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+1)=2\lg(x-5)$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are 45 de submulţimi cu două elemente.
5.Se consideră dreptunghiul ABCD şi $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.Ştiind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
6.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ -2x & 1 & -2x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.
c)Ştiind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinaţi numerele naturale m şi n, $m<n$.
2.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_7$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.
a)Demonstraţi că $x*y=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_7$.
b)Demonstraţi că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.
c)Calculaţi $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2-6x+9)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3), x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$,pentru orice $x\in(-\infty,3]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
a)Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2(4-\sqrt{e})$.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

Testul 49 (Examenul de bacalaureat naţional 2018, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.

2.Ştiind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+2$, calculaţi $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\cdots+(f\circ f)(10)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+1)+3=\log_2(7x^2+9)$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{i, i^2, i^3, i^4\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,n), N(n,3)$ şi $P(2n,5)$, unde n este număr natural.Ştiind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinaţi numărul natural n.

6.Arătaţi că $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(X(-1))=12$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(X(a)-I_3)=0$.

c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4), B(3,9)$ şi $C(a,a^2)$, unde a este număr natural.Determinaţi numerele naturale a pentru care ABC este triunghi şi are aria mai mică decât 3.

2.Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Demonstraţi că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.

c)Determinaţi numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M(\sqrt{x})M(\sqrt{x+5})=M(5)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, x\in(-\infty,2)\\2^{x-1}-2, x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$,pentru orice număr real a.

b)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

c)Demonstraţi că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,3)$.

Testul 50(Examen de bacalaureat naţional 2017, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 4$ şi $a_2 = 7$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 1 = 0$.Arătaţi că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să fie multiplu de 15.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,1),B(1,1) şi C(3, a),unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$4\sqrt{3}$,AC=4 şi sinC=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.Calculaţi sinB.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = xyI_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + mX^2 + 2X - 4$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=1,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu X+2,atunci restul împărţirii lui f la X+3 este egal cu -1.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+2017}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x+2016)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $[-2015, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{4}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f,ştiind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.
c)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $\int_0^n xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

Testul 51 (Examen de bacalaureat naţional 2017, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 3 - 2i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(2, m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x-5} = 3^{-2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,20},acesta să fie multiplu de 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,5),B(1,3) şi C(m, 1), unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$,$N(2, n)$ şi $P(3,0)$.Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 4$,pentru orice număr real a.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(1, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$,$x\in(1, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x+1} = 0$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x + 2x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = e - 1$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x) - e^x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + \frac{2a^3}{3}$.

Testul 52 (Examen de bacalaureat naţional 2017, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3 = 10$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,3)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii {1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=8 şi AC=6.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2)) = -4$.
b)Demonstraţi că $A(x) + A(-x) = A(2017) + A(-2017)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\cdot\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+6x+6y+30.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că e=−5 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2017) = 2017\circ(-6)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{2}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 2xf(x)\,dx = \frac{13}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = 1$.
c)Demonstraţi că $2\int_1^n (f(x) + xf'(x))\,dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

Testul 53 (Examen de bacalaureat naţional 2017, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=1-i$.Arătaţi că $z^2+2i=0$.
2.Calculaţi $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+2017$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x-2017$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $M=\{1,2,3,\dots,100\}$,acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=x-10$.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că $AB=6, AC=4$ şi $A=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Demonstraţi că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-3xy+9x+9y-24$.
a)Arătaţi că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x,pentru care $(x*x)*x=12$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 1$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
a)Calculaţi $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
c)Demonstraţi că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Testul 54(Examenul de bacalaureat naţional 2017, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z,ştiind că $2z+\bar{z}=6+i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-5$.Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3)=1+\log_2(x+1)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele egale.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(5,5)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $C(-2,6)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$ şi $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$.Determinaţi lungimea laturii BC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $A(1)-A(0)$.
b)Arătaţi că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a))\le\det(A(x))$,pentru orice număr real x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care $a\circ b=13$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x(2\ln x+1), x\in(0,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $1+2ef(x)\ge 0$,pentru orice număr real x,$x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.
b)Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că $\int_0^1 x^3f(x)\,dx\le-\frac{1}{20}$.

Testul 55 (Examenul de bacalaureat naţional 2017, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele x+2,7 şi 2x sunt în progresie aritmetică.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 2m = 0$.Determinaţi numărul real m,m≠0,m≠1 pentru care $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x} = 125 \cdot 5^{-x}$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii M={1,2,3, … ,10}, aceasta să conţină elementul 10.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,1),B(2,3) şi C(3, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.

6.Arătaţi că $2\sqrt{2}$tgx+1=0, ştiind că sinx=$\frac{1}{3}$ şi x$\epsilon\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} & \frac{x-1}{2} \\ \frac{x-1}{2} & \frac{x+1}{2} \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(3))$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x)) \cdot \det(A(y)) = \det(A(xy))$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Demonstraţi că

$\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(n)) = n\left(\det(A(1)) + \det(A(2)) + \cdots + \det(A(n))\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

2.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi A−B.

b)Arătaţi că $(A + I_2) \cdot (B - I_2) = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Demonstraţi că, dacă X$\epsilon\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât X·A=A·X şi X·B=B·X, atunci X·Y=Y·X, pentru orice Y$\epsilon\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=$\frac{x^2+ax+6}{x+1}$, unde a este număr real.

a)Pentru a=7,calculaţi $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

b)Determinaţi numărul real a,pentru care dreapta de ecuaţie y=x+2 este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,oricare ar fi numărul real a,funcţia f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases} \frac{2mx}{2-x}, x\epsilon(-\infty, -2) \\ 2x + 4 - m, x\epsilon[-2, +\infty) \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,pentru orice număr real m.

b)Pentru m=1,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) = 0$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$.

Testul 56(Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 1-i$.Arătaţi că $z^2 = -2i$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 2016$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 2016$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,100},acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,1).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=3x−2016.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=6,AC=4 şi $A = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 4$.
b)Demonstraţi că $A(1+m) + A(1-m) = 2A(1)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea A(m) este inversabilă, pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = -3xy+9x+9y-24$.
a)Arătaţi că $x*y = -3(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x, pentru care $(x*x)*x = 12$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$,$x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq 1$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx = 6$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=3 are aria egală cu ln7 .
c)Demonstraţi că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx = 0$.

Testul 57 (Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,4)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+9)=\log_4 25$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 2.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$,arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(2^x)\cdot A(2^x)=A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=2$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1=-5$,pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$,$x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(\pi)>13$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(3x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Aflaţi numărul real nenul a,ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Testul 58(Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 4$ şi raţia q=2.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 2x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1) = \log_3 5$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4}.
5.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(1,0)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx-2$.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care AB=$\sqrt{2}$ şi $C = \frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 4X^2 + mX + 4$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.
b)Pentru m=−1,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$,$x\epsilon(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(e) < \frac{7}{2}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Testul 59 (Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea II, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_3 = 5$ şi $b_4 = 10$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f:[1,5]\to\mathbb{R}, f(x) = x - 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 12} = x + 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(1,0)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AB=6 şi $C=\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(x + y - xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale $x, x\neq 1$,pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei .
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y = 2xy-6x-6y+21$.
a)Arătaţi că $x\circ y = 2(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b) Arătaţi că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.
c)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x\circ x\circ x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x - \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $\ln x\leq x-1$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx = 1$.
b)Demonstraţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.
c)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $\int_n^{n+1} 2xf(x)\,dx = \ln 2$.

Testul 60 (Examen de bacalaureat naţional 2016, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_5 = 48$ şi $b_8 = 384$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 6$.Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x = 16 \cdot 2^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 5n + 6 = 0$.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - 4\sin 2x = 5$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(2A) = -28$.
b)Determinaţi numerele reale x şi y ştiind că $A+2B=I_2$,unde $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Dacă $A\cdot B=B\cdot A$,arătaţi că $\det B\leq 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.
a)Arătaţi că $(-1)\circ 1 = -1$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere întregi,ştiind că $a\circ b=8$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-2)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = (x-1)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -1$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 3$.
b)Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = x^2 + \ln x + 2016$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$ este mai mic decât 14π.

Testul 61 (Examenul de bacalaureat naţional 2016, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $2a_{10} = a_5 + a_6 + 36$.
2.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$ cu dreapta de ecuaţie y=x−1.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_2(x^2 - 1) = 4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1), B(1,4)$ şi $C(5,1)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \text{ctg}^2 x$,pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & 2x-1 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(M(0))$.
b)Demonstraţi că $2M(x) - M(-x) = M(3x)$,pentru orice număr real x.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(n, 2n-1)$ şi $B(n^2, 2n^2-1)$, unde n este număr natural,n≥2.Demonstraţi că aria triunghiului OAB este număr natural.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=6xy−2x−2y+1.
a)Calculaţi $1 \circ \frac{1}{3}$.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Calculaţi $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \ldots \circ \frac{2016}{1008}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^4+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}$,$x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$,pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = xe^x - 2$.
a)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = 0$.
b)Calculaţi $\int_0^1 xf(x)\,dx$.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

Testul 62(Examenul de bacalaureat naţional 2016, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=i(1+i)^2$.
2.Determinaţi numerele reale m,ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+mx+1$ este intervalul $[-1,\infty)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+2^{x+1}=4-2^x$.
4.Derminaţi numărul elementelor mulţimii M={1,2,3, … ,2016} care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.
5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$.Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
6.Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$,pentru care sin2x=sinx.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2015 & 2016 & x\\ 2015^2 & 2016^2 & x^2\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2016))$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x))=(2015-x)(2016-x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x))$ are valoare minimă.
2.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$,unde a este număr real.
a)Calculaţi A·A.
b)Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$,pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi inversa matricei $M=X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\frac{mx^2+4x-m}{x-1}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=1 este asimptotă verticală la graficul funcţiei f,pentru orice număr real m.
b)Determinaţi numărul real m pentru care dreapta de ecuaţie y=3 e asimptotă orizontală la graficul funcţiei $g:(1,\infty)\to\mathbb{R},g(x)=\frac{f(x)}{x}$.
c)Pentru $m=-1$,calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+2a, x<2\\ ax+\log_2 x, x\geq 2\end{cases}$,unde a este un număr real.
a)Pentru a=0,calculaţi $f(-1)\cdot f(4)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(-1,4)$.

Testul 63(Examen de bacalaureat naţional 2015, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 1+i$.Arătaţi că $z^2 - 2i = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(3)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2015$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$.
4.Aflaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.
6.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind că$MN=12$,$MP=3$ şi $m(\sphericalangle M) = 30°$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Arătaţi că $A(a)A(b) = A(a + b) + abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 2$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2 + X - 2$ este egal cu 0.
c)Demonstraţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x - x - 1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
c)Demonstraţi că $e^x \geq x + 1$,pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 2x + 5$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 5)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.
c)Arătaţi că $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}$.

Testul 64 (Examen de bacalaureat naţional 2015, sesiunea I, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Calculaţi $(2-3i)(5+3i)$,unde $i^2=-1$.
2.Calculaţi $f(f(4))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+17)=\log_3 81$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ şi $C(2,1)$.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 9\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 3=3$.
b)Arătaţi că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$,pentru orice nemere reale x şi y.
c)Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3e^x+x^2$.
a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x\,dx=e^2$.
c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 4+lna.

Testul 65 (Examen de bacalaureat naţional 2015, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3 = 6$ şi $a_4 = 8$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=x^2 - 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 3} = x + 1$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1) şi B(0,3).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=8 şi C=$\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi B(x)=$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=-2.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x) + I_2) = 8$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.
a)Arătaţi că $(-7) * 7 = 7$.
b)Arătaţi că $x*y = (x - 7)(y - 7) + 7$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1*2*3*...*2015$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{3}{2}$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\, dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Testul 66(Examen de bacalaureat naţional 2015, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi raţia $r = 2$.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m, 0)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8}, acesta să fie divizibil cu 3.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$ şi $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det A(a) = 0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\big(A(2) + xA(3)\big) = 0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-x-y-2$.
a)Arătaţi că $(-1) * 1 = -1$.
b)Arătaţi că $x*y=-(x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x + 2) * (2x - 3) = 5$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x - 2)(x + 2)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
2.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+2}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{7}{2}$.
b)Demonstraţi că funcţia $F:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x) = x + 2\ln x + 2015$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x) = (f(x) - 1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu 1 .

Testul 67 (Examen de bacalaureat naţional 2015, sesiunea II, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ şi $z_2 = 3 - i$.Arătaţi că numărul $z_1 z_2$ este real.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(1,1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,80} acesta să fie divizibil cu 7.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,2)$ şi $B(2, a)$.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big) = 4$.
b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(1) + A(3) = aA(2)$.
c)Arătaţi că $A(x)A(y) = 2A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy+6x+6y+10$.
a)Arătaţi că $2 * (-2) = -2$.
b)Arătaţi că $x*y=3(x + 2)(y + 2) - 2$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x + 2)e^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-3,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(x^2 + 1)f(x)\,dx = 0$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.
c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu ln2.

Testul 68(Examenul de bacalaureat naţional 2015, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real care are partea întreagă -2 şi partea fracţionară 0,75.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ cu axa Ox şi, respectiv, cu axa Oy.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10} = 81$.
4.Determinaţi numărul natural n pentru care $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 64$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ şi $P(3,5)$.Arătaţi că triunghiul MNP este isoscel.
6.Calculaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC,ştiind că AB=6,AC=8 şi BC=10.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x şi a sunt numere reale.
a)Calculaţi $detA(2,0)$.
b)Arătaţi că $A(x,a) + A(x,-a) = 2x \cdot A(1,0)$,pentru orice numere reale x şi a.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $detA(x,-3) = 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 3xy+3x+3y+2$.
a)Arătaţi că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$ pentru orice numere reale x şi y.
b)Aflaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $a \circ b = 2$.
c)Calculaţi $-1 \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2014 \circ 2015$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x - e^x + 1$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(-1) = 1$.
c)Arătaţi că pentru orice număr real nenul a are loc relaţia:
$\int_0^a f(x)\,dx + \frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx = a^4 - 1$.

Testul 69(Examenul de bacalaureat naţional 2015, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Calculaţi a_{2015} ,ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2015$ şi $r = -1$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(2,-3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $\{1,2,3,\ldots,9\}$,aceasta să fie formată doar din patrate perfecte.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$, $C(1,2)$ şi $O(0,0)$.Determinaţi coordonatele punctului B,ştiind că patrulaterul OABC este paralelogram.
6.Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=$3\sqrt{3}$ şi BD=6.Calculaţi aria triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x-1 & 7-x \\ 1 & -2 & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $D(1)$.
b)Arătaţi că $D(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$,pentru orice număr real x.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(2^x - 3) = 0$.
2.Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $X(-1) + X(1) = 2X(0)$.
b)Arătaţi că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$ pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=1 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3, x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, x > -1 \end{cases}$ unde a este număr real. .
a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în x=-1.
b)Arătaţi că $f(x) + 2 \leq 0$,pentru orice x≤-1.
c)Pentru a=-1,arătaţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

Testul 70 (Examen de bacalaureat naţional 2015, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 3$ şi raţia r=2.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(-2,1)$ şi $C(-2,5)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$,ştiind că M este mijlocul lui segmentului BC.
6.Calculaţi ctga,ştiind că sina $= \frac{1}{3}$ şi a$\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(3))$.
b)Arătaţi că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.
2.În $\mathbb{Z}_5[X]$,se consideră polinomul $f=X^3 + aX$,unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi a$\in \mathbb{Z}_5$.
a)Calculaţi $f(\hat{0})$.
b)Determinaţi a$\in \mathbb{Z}_5$ ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.
c)Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$,atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, x$\in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_o = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\, dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox, şi dreptele de ecuaţii x=0,x=1 are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.

Testul 71 (Examen de bacalaureat naţional 2014, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.
2.Arătaţi că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+10=0$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}=1$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {1,2,3}.
5.Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuaţii $y=(a-1)x+1$ şi $y=2x-3$ sunt paralele.
6.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=3,AC=4 şi BC=5.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=4(x+y-3)-xy$.
a)Calculaţi $2*4$.
b)Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.
b)Arătaţi că $f'(x)=\ln x$,$x\in(0,+\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$.
a) Arătaţi că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{1}{144}$.
c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

Testul 72 (Examen de bacalaureat național 2014, sesiunea I, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 2+i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m, 1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-3$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x - 3) = 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu număr impar de elemente ale mulţimii A={1,2,3,4}.
5.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii AD.Arătaţi că $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A.Arătaţi că sinB·cosC+sinC·cosB=1.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2014I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2014I_2$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = 1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \ln 2$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-1, \infty)$.
c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu ln4 , pentru orice număr natural nenul n.

Testul 73 (Examen de bacalaureat naţional 2014, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 2+3i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2 + 5) = 1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ şi $C(0,3)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det A(1)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a) = 1$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 2xy-3x-3y+6$.
a)Calculaţi $1 \circ 2$.
b)Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-\infty,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x \in (-\infty,2)$.
c)Arătaţi că $f(x) \leq -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty,2)$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx = 1$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.

Testul 74(Examen de bacalaureat naţional 2014, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2,x+2 şi 10 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 10$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 - 2x) = 3$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} - 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt opuşi.
6.Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=4,AC=5 şi BC=6.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detB.
b)Arătaţi că AB=BA.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 1$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = xy-4(x + y - 5)$.
a)Calculaţi $4*5$.
b)Arătaţi că $x*y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1*2*3*...*2014$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$.
a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
b) Arătaţi că $f'(x) = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx = \frac{3e^4+1}{16}$.
c)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.

Testul 75 (Examenul de bacalaureat naţional 2014, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3-\sqrt{x^2+3}=x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,0)$ şi $C(2,0)$.Determinaţi aria triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Calculaţi $D(1,0)$.
b)Arătaţi că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m şi n.
2.Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.
a)Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.
c)Determinaţi numărul elementelor mulţimii $H=\{x^{10}|x\in\mathbb{Z}_6\}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.
a)Calculaţi $\int_0^1(x+1)f(x)\,dx$.
b)Calculaţi $\int_1^e(x+1)f(x)\ln x\,dx$.
c)Arătaţi că $F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$,unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=1$.

Testul 76(Examenul de bacalaureat naţional 2014, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 4,36 şi x sunt în progresie geometrică.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(x) = x$ pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{-x+2} = \sqrt{3}$.
4. Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 3 elemente ale mulţimii M={1,2,3,4}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-3)$ şi dreapta d:2x+y−5=0.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.
6.Calculaţi sin2x,ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Subiectul II

1.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(0,2)$,$B(3,5)$ şi $C(6,8)$.
a)Determinaţi ecuaţia dreptei AC.
b)Verificaţi dacă punctele A,B şi C sunt coliniare.
c)Demonstraţi că aria triunghiului AOB este egală cu aria triunghiului BOC.
2.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi 2A+2B.
b)Arătaţi că $(A - B) \cdot (B - A) = -8I_2$.
c)Determinaţi matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că A·X=X·B.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+e}$.
a) Calculaţi $\lim_{x \to e} f(x)$.
b) Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=0 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 6, x \leq 2 \\ x^2 - a, x > 2 \end{cases}$, unde a este număr real. .
a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul x=2.
b)Pentru a=8,rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$.
c)Pentru a=8,stabiliţi semnul funcţiei f.

Testul 77 (Examen de bacalaureat național 2014, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,știind că $b_2 = 1$ și $b_5 = 8$.
2.Calculați $(f \circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 7$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-3) = \log_5(x-1)$.
4.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,50},acesta să fie divizibil cu 11.
5. Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Rezolvați în mulțimea $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ecuația $2\sin x - 1 = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
a)Arătați că A·B=B·A.
b)Verificați dacă $\det(A+B) > \det A + \det B$.
c)Determinați numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pentru care $X^2 = A$,unde a și b sunt numere reale.
2.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X + a$,unde $a \in \mathbb{R}$.
a)Pentru $a = -2$,arătați că $f(1) = 0$.
b)Determinați numărul real a, știind că $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = 2$.
c)Pentru a≠0,determinați un polinom de grad trei,având coeficienți reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.
a)Calculați $f'(x), x \in (0,+\infty)$.
b)Arătați că funcția f este descrescătoare.
c)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.
2.Se consideră funcția $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$.
a)Calculați $\int_0^1 (x+2)f(x)\,dx$.
b)Arătați că $\int_{2013}^{2014} \left(f(x) + (x+2)f'(x)\right) dx = 1$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

Testul 78(Examen de bacalaureat național 2013, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $x = 2(1 + i) - 2i$ este real.
2.Calculaţi $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + \vec{j}$.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \cos\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A^2 - 6A = I_2$.
c)Aflaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$.
a)Calculaţi $2*2$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x = \sqrt{12}$.
c)Arătaţi că numărul $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Verificaţi dacă $f(x) + f''(x) = 2(f'(x) + e^x)$, pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 (x + 1)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x) = f(x)$.

Testul 79(Examen de bacalaureat naţional 2013, sesiunea I, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $\sqrt{8}-2(\sqrt{2}-3)$ este natural .
2.Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+1)=\log_2 5$.
4.După o ieftinire cu 20% preţul unui produs scade cu 200 de lei.Calculaţi preţul produsului după ieftinire.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuşi.
6.Calculaţi lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=10$.

Subiectul II

1.Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y+2z=a \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$,unde a este un număr real.
a)Determinaţi numărul real a ştiind că $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluţie a sistemului.
b)Calculaţi determinantul matricei sistemului.
c)Rezolvaţi sistemul pentru $a=-2$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$,unde a este număr întreg.
a)Pentru $a=-2$, calculaţi $f(2)$.
b)Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că,dacă polinomul f are o rădăcină întreagă,atunci a este multiplu de 6.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $(0,4)$.
2.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 (x-1)f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$.
b)Calculaţi $\int_2^3 (x^3-1)f(x)\,dx$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=3$,este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Testul 80(Examen de bacalaureat național 2013, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătați că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.
2.Calculați $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}=16$.
4.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,15},acesta să fie multiplu de 7.
5. Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ și $\overrightarrow{BC}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ .Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6.Determinați $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det\left(A(2)\right)$.
b)Arătați că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=3$ calculați $f(1)$.
b)Aflați numărul real m știind că restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.
c)Pentru m=4, arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.
a)Calculați $f'(x)$, $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
a)Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$.
b)Calculați $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,$h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

Testul 81 (Examen de bacalaureat național 2013, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătați că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.
2.Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+x+1)=\log_5(x+2)$.
4.După o ieftinire cu 10% prețul unui produs este 90 de lei.Calculați prețul produsului înaite de ieftinire.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y=x-1$ și punctul $A(2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este paralelă cu h.
6.Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=5,AC=6,BC=7.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$.
b)Determinați numărul real x pentru care $detA(x)=0$.
c)Determinați inversa matricei $A(2)$.
2.Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$,unde m este un număr real.
a)Arătați că f este divizibil cu X+1,pentru orice număr real m.
b)Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.
c)Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstați că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.
a)Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.
b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(1)=-1$.
c)Arătați că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Testul 82 (Examen de bacalaureat național 2013, sesiunea II, subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătați că numărul $x = 3(1 - i) + 3i$ este real.
2.Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$,cu axa Ox.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3} = 8$.
4.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,20},acesta să fie divizibil cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(3,0)$ și $C(2,5)$.Calculați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
6.Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC = 4, B = \frac{\pi}{6}$ și $C = \frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det M(2)$.
b)Verificați dacă $M(x) \cdot M(y) = M(2xy - x - y + 1)$,pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numărul real a astfel încât $M(a) \cdot M(x) = M(a)$,pentru orice număr real x.
2.Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy+2x+2y+2$.
a)Calculați $0 \circ (-2)$.
b)Arătați că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$,pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = 6$.

Subiectul III

1. Se consideră funcția $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
b)Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
2.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$.
a)Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.
b)Arătați că funcția $F:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x}$ este o primitivă a funcției f.
c)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 4$.

Testul 83 (Examen de bacalaureat național 2013, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Calculaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 1$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2 12$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre,produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.
5.Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.
6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3), B(0,1)$ şi $C(3,1)$.Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi suma elementelor matricei A.
b)Aflaţi numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(2n+1, n)$,$n\in\mathbb{N}$,$n\geq 2$.Determinaţi valorile numărului natural n,$n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = x+ay+1$,unde $a\in\mathbb{R}$.
a)Pentru $a = 1$ calculaţi $2011\circ 2012$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care legea de compoziţie „ $\circ$ ” este asociativă.
c)Pentru $a=-1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x \circ 2^x = 1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3}{2}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(0,+\infty)$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f_n(x) = (x+n)e^x$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
b)Arătaţi că funcţia f_{2011} este o primitivă a funcţiei f_{2012} .
c)Demonstraţi că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n,folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Teste propuse

Testul 1 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $i(6-i)+2(3-3i)=7$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-3x$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x-1}=7^{-x}\cdot 49$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={1,2,3,4,5,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,5),B(4,7) şi C, astfel încât A este mijlocul segmentului BC. Determinaţi lungimea segmentului OC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=2 şi BC=4.Arătaţi că AD=$\sqrt{3}$, unde AD este înălţime a triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x-2 & 3x\\ -1-x & x+4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=18$.
b)Arătaţi că matricea $B=4I_2-A(1)$ este inversa matricei A(1).
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $12X-3A(1)\cdot X=A(5)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+mX+9$, unde m este număr real.
a)Pentru m=3,arătaţi că $f(-3)=0$.
b)Pentru m=2,determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+1.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+4x+2}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2+5+e^x$.
a) Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-2x^2)\,dx=e+4$.
b)Arătaţi că $\int_0^5\frac{x}{f(x)-e^x}dx=\frac{\ln 11}{4}$.
c)Se consideră G:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)-2x^4$. Ştiind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{2-e}{2}$, arătaţi că $G(1)=3$.

Testul 2(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ şi $z_2 = 1 - 3i$. Arătaţi că $iz_1 + z_2 = 3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 4$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a + 3) = a + f(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x} = \sqrt{x^2 - x + 3}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 > 101$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$, $B(2,8)$ şi $C(9,1)$.Determinaţi distanţa dintre punctul C şi mijlocul segmentului AB.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=9 şi $C=\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $3\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 4 \\ xy & x+y \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,2)) = 1$.
b)Arătaţi că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2) = 4A(y,0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=5-\frac{x+y}{2}+xy$.
a)Arătaţi că $1*3=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*5=2x$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale,pentru care $(m-n)*(m+n) = m^2$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+6x-3}{x^2+3}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{6(x+1)(3-x)}{(x^2+3)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-1 \le f(x) - f(y) \le 1$, pentru orice $x,y\in[-3,0]$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 10x^2 - 2 + \ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)\,dx = \frac{64}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x) - 10x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{2}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+2}{\sqrt{x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 este egală cu 120+mln2.

Testul 3(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(4{,}7-3{,}2):3+2{,}5=3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+21$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(-3a,a)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(1+3x-x^2)=\log_7(4-x)$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu par de 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$, $B(0,2)$ şi $C(2,4)$. Arătaţi că triunghiul ADC este isoscel, unde D este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $tgC=\frac{1}{3}$ şi aria egală cu 24.Arătaţi că AB=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}2a+2&a-3\\-a&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot(6I_2-A(2)-A(-2))=xI_2$.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-aX+4+a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=5$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+3.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(2x^2+3x)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(2x+1)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+x}{f(x)-x}=2$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=a, situat pe graficul funcţiei f, are panta egală cu 0.
2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(3x^2+6x)\sqrt{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=16$.
b)Arătaţi că $\int_1^3\frac{x^2+2x}{f(x)}dx=\frac{2}{3}$.
c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{6\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3.

Testul 4(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)+2\left(1-3\sqrt{2}\right)=8$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x-11$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(2a)=f(a)-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x^2-7x+6}=x\sqrt{3}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel mult egală cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(5,1)$ şi $C(0,6)$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin3x\cdot\cos x-\sin2x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1&4x\\0&x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=A(x)$.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-xy-3x+4y+3$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=4$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(4x)=3$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-3)\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$..
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x^2-3x-6}{2x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{x-2}=\frac{9}{4}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^2+2x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{4}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(3e-2)$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_2^4\frac{xf(x)}{f(x-1)}dx=ae(7+2\ln3)$.

Testul 5(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_4 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_3 = 12$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = ax + 4$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $f(0) + (f\circ f)(0) = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x + 4\cdot 5^{x-2} = 125$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={1,4,5,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,1)şi B(4,5) şi dreapta d de ecuaţie ax+2y=0, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care mijlocul segmentului AB aparţine dreptei d.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=12 şi B=$\frac{\pi}{6}$. Punctul M aparţine segmentului AB astfel încât 3AM=AB.Arătaţi că CM=$4\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(a+b) - A(b)\cdot A(a) = abA(1)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numere reale a pentru care $2A(2a) - A(a)\cdot A(a) - A(2a-1)\cdot A(1) = 2A(1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{4}(x-3)(y-3)+3$, cu elementul neutru e=7.
a)Arătaţi că 5∘9=6.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(4x-1)=11$.
c)Determinaţi numerele naturale n, n≠3, ale căror simetrice în raport cu legea de compoziţie „∘” sunt numere naturale impare.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2}{x}-2+3\ln(x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(3x+4)}{x^2(x+2)}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3\ln(x+2)-f(x)}{\ln x} = 2$.
c)Demonstraţi că $\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\geq 3\ln\frac{x+2}{x^2+2}$, pentru orice $x\in(0,1]$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x^2+6x)e^{-x}$.
a) Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x\,dx = 36$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x+6}dx = -1$.
c)Se consideră funcţia g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x^2)}{x^2}$. Demonstraţi că orice primitivă G:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g este concavă.

Testul 6(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 4i$ şi $z_2 = 1 - 3i$. Arătaţi că $z_1 + 4iz_2 = 15$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 2$.Determinaţi numărului real a pentru care $f(a) = 4a + g(4)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2 + 9) = \log_9 x + \log_9 10$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(8,2) , B(4,0) şi C(a, b), unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele OA şi BC au acelaşi mijloc.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B=\frac{\pi}{6}$. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu 4.Arătaţi că AC=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1-x \\ 1 & x-5 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(6))=10$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $A(3) \cdot A(3) = aI_2$.
c)Demonstraţi că numărul $N=\det(A(m) \cdot A(2) - A(m-1))$ este natural, pentru orice număr întreg m.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - aX^2 - 2X + 2$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 2$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1x_2x_3(1 + x_1 + x_2 + x_3) = 4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X+1, determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul $X^2 - 2$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = e^x(x^2 + 2x - 2)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x^2 + 4x), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x+f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{4}$.
c)Arătaţi că $e^{x+4}(x^2 + 2x - 2) \leq 6$, pentru orice $x\in(-\infty, 0]$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)= x + \sqrt{6x^2 + 1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \sqrt{6x^2 + 1}\right) dx = 4$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \frac{x}{(f(x)-x)^2} dx = \frac{\ln 5}{6}$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[0,2] \to \mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$ în jurul axei Ox este egal cu $\frac{a\pi}{9}$.

Testul 7 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 5$ şi $a_3 = 25$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = f(0)\cdot f(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{4x - 7}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $4n^2 < 99$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(5,2)$ şi C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC.Determinaţi coordonatele punctului C.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=AC şi aria egală cu 32. Arătaţi că $BC=8\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & -x \\ 3x & 1 + 4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.
b)Arătaţi că $xA(y) - A(xy) = (x - 1)I_2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(1)\cdot A(x - 1) = xA(x)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{5}(x + 1)(y + 1) - 1$.
a)Arătaţi că $1\circ 9=3$.
b)Arătaţi că e=4 este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale, cu $m\leq n$, pentru care $m\circ n=4$.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x - 2 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0, +\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x+1}{\ln x} = 3$.
c)Demonstraţi că $f(x) + f(y) \leq -\frac{29}{4}$, pentru orice $x\in(0, 1]$ şi $y\in[1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx = 2$.
b)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia graficul funcţiei $g:[3,4]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\ln(4e^2)$.

Testul 8(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 3$ şi $a_2 = 14$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4x - 3$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2) = 3a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3 + x)$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,5,7,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(5,0) , B(4,8) şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO=AC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=4 şi cosC=$\frac{2}{3}$. Arătaţi că BC=6.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A = 2$.
b)Arătaţi că matricea B=$\frac{1}{2}(I_2 - A)$ este inversa matricei A.
c)Determinaţi matricea X$\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2)\cdot X = 2A$.
2.Pe mulţimea M=$[0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+\sqrt{xy}$.
a)Arătaţi că $1 * 4=7$.
b)Determinaţi x$\in$M pentru care $x*(9x)=x^2$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $2^x * 2^{x+2} = 14^x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-3x^2-x+4}{(x^2+x+4)^2\sqrt{x}}$,x$\in(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi a$\in(0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a, f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^3 + 2x + 2$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - 2x - 2)\,dx = 4$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}\,dx = \frac{1}{8}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx = \frac{e^2+m}{4}$.

Testul 9(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\cdot(0,3+1,1)-1,8=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x+6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+2x-2}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>9$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(0,2)$ şi $C(2,8)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=10 şi sinC=$\frac{2}{5}$. Arătaţi că AB=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x&-x\\x&2-2x\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Arătaţi că $A(2)\cdot A(1)+3A(-2)=16I_2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+3X+a$, unde a este număr real.
a)Pentru a=1, arătaţi că $f(-1)=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3+x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru a=9,determinaţi rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+1)(3-x)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-2e\leq f(x)\leq e^2$, pentru orice $x\in[-2,3]$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=8x+\frac{2\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{2\ln x}{x}\right)dx=20$.
b)Arătaţi că $\int_1^e(f(x)-8x)\,dx=1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af(e^2)$.

Testul 10(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3i(4-i)+2(1-6i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(a)=2a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+6x-9}=x\sqrt{2}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră numărul 2^n să fie divizibil cu 32.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$şi $B(4,2)$.Arătaţi că triunghiul OAB este dreptunghic în A.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin x+2\cos 2x+2\cos^2\frac{x}{2}$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -2x \\ -x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=4$.
b)Arătaţi că $A(-1)\cdot A(x)=A(-2x-1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale, cu m<n, pentru care $A(-1)\cdot\big(A(m)+A(n)\big)=2A(-4)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=y\cdot 3^x+x3^y$.
a)Arătaţi că $2\circ 1=15$.
b)Arătaţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi numărul real nenul x pentru care $(3x)\circ x=(2x)\circ(2x)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
c)Demonstraţi că $f(x)-f(y)\le\frac{3-e}{3}$, pentru orice numere reale x şi y, cu $x\le 0\le y$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1+4x\ln x$.
a) Arătaţi că $\int_1^3 (f(x)-4x\ln x)\,dx=14$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{f(x)-3x-1}{x}\right)dx=4$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{f(x)-1}{x^2\ln x}\,dx=a\ln 2$.

Testul 11(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3 = 18$ şi $a_4 = 23$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, unde a este număr real.Determinaţi numărului real a, ştiind că $f(2) = 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2-x} - \frac{1}{81} \cdot 9^x = 0$.
4.Determinaţi câte submulţimi cu trei elemente are mulţimea A={1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2) , B(0,2) şi C(2,8).Determinaţi lungimea segmentului DE, unde punctele D şi E sunt mijloacele segmentelor OA, respectiv BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi C=$\frac{\pi}{6}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = \begin{pmatrix} a & 2-2a \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că detA=2.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A \cdot M(2) = xM(1)$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = (a+2)I_2$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = (x-8)(y-8) + 8$.
a)Arătaţi că $11 \circ 10 = 14$.
b)Arătaţi că e=9 este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $x \circ \frac{8}{x} = 8x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = (5-x^2)\sqrt{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{5(1-x)(1+x)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x}} = -\frac{5}{2}$.
c)Arătaţi că $f(x) - f(x+2) \leq 26$, pentru orice $x \in (0,2]$
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 6\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - 6\ln x)\,dx = \frac{7}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)-x^2}{x}\,dx = 3$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^2 \left(f(x)f''(x) + \left(f'(x)\right)^2\right)dx = m\big(f(3) - f(1)\big)$.

Testul 12(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2-4i+i(4-3i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=13$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x+1}=5^x\cdot 5^2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin una dintre cifre egală cu 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$ şi $B(2,4)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=5 şi $BC=5\sqrt{5}$. Arătaţi că $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3-x\\ x-3 & x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A=1$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)(5-x-y)$.
a)Arătaţi că $0*4=4$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*2=0$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+4)*(n-4)$ este natural.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-3\ln(x+2)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $x^2-x\geq 3\ln\frac{x+2}{3}$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+1$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-4x)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^2)^2}\,dx=\frac{1}{5}$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $4\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

Testul 13(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\cdot(0,1+1,2)+0,4=3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8(x^2-6x+6)=\log_8 x$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,3,5,6,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(8,0) , B(2,4) şi C, mijlocul segmentului OA. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=8 şi $B=\frac{\pi}{4}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x-2&x-4\\x-2&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(5)\big)=12$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $A\cdot\big(B(4)-B(2)\big)=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B(x)\cdot A-4xI_2)=0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x(x-4)+y(y-4)$.
a)Arătaţi că $5\circ 5=10$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $4\circ x=x^2+4$.
c)Arătaţi că $x\circ y\geq -8$, pentru orice numere reale x şi y.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-4$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2+1)f(x)\,dx=3$.
b)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\,dx=\ln 2$.
c)Determinaţi $m\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=\frac{3}{4}$.

Testul 14(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 9$ şi $a_3 = 12$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4x - 3$. Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(16 - x^2) = \log_6 7$.
4.Se consideră mulţimea A={0,1,2, … ,9}. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $\sqrt{3n+1}$ să aparţină mulţimii A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(4,4)$ şi $C(2,5)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
6.Se consideră expresia $E(x) = 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x+\left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$ .Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(a) = \begin{pmatrix}a & a-3\\ a+1 & 4a-1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big) = 7$.
b)Arătaţi că $B(2) - B(1)\cdot B(0) = 4A$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a) - aA$ **nu** este inversalilă.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy - 3x - 2y + 6$.
a)Arătaţi că $3 * 3=0$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $6*x=x$.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale x pentru care $(x * 3) * x \geq 3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{3x}{x^2+x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{3(4-x^2)}{(x^2+x+4)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) - f(4 - x) \leq \frac{3}{2}$, pentru orice $x\in[4, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x + 1)f(x)\,dx = 10$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + 3\ln 2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2 - 1)e^x f(x)\,dx = e(e + a)$.

Testul 15(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-5$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^{x-1}=10^{-3x}\cdot 10^{3}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cu cifre din mulţimea A= {1,2,3,4,5,6}, au ambele cifre impare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(6,4) şi B(0,6).Determinaţi distanţa dintre punctele B şi M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi aria egală cu 24. Arătaţi că AC=8.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 2x\\ x+4 & 4x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A=1$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(B(x)-xA)=x$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-3X-6$, unde m este număr real.
a)Pentru m=9, arătaţi că $f(1)=1$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul X−2 este egal cu 4.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{6-x}{x^2}+\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+x-12}{x^3}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0$.
c)Arătaţi că $3f(x)-1\geq\ln 27$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=4x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=24$.
b)Arătaţi că $\int_1^6(f(x)-4x)\,dx=2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=12(a-2\ln 2)$.

Testul 16(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 - i$ şi $z_2 = 1 + i$. Arătaţi că $z_1 + iz_2 = 3$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = 2 - x$ şi g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = x + 3$ .Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a + 1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(5x - x^2) = 1$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7}.
5.În reperul cartezian xOy se cosideră punctele A(3,0),B(0,2) şi C.Ştiind că punctul B este mijlocul segmentului OC, determinaţi distanţa dintre punctele A şi C.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $C = \frac{\pi}{6}$ şi mediana AM=4.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 3x-3 & 3x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 3$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $A(2) \cdot A(0) + A(5) = mI_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x) - A(1-x) \cdot A(0)) = -24$.
2.Pe mulţimea M=$(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 1+x+y-\sqrt{1+xy}$.
a)Arătaţi că $8 \circ 1 = 7$.
b)Determinaţi x$\in$M pentru care $\frac{3}{x} \circ x = x$.
c)Determinaţi numerele natural nenul n pentru care $(n+4) \circ ((n+2) \circ n) > \frac{n^2}{2}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=(x^3 + x^2 + x - 1)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = x(x^2 + 4x + 3)e^x$, x$\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $-\frac{22}{e^{x+3}} \le x(x^2 + x + 1) - 1 \le -\frac{2}{e^{x+1}}$, pentru orice x$\in[-3,0]$
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - \frac{3}{x+1}$.
a) Arătaţi că $\int_1^4 \left(f(x) + \frac{3}{x+1}\right) dx = 21$.
b)Arătaţi că $\int_1^5 (x^2 - f(x))\, dx = 3\ln 3$.
c)Se consideră funcţia g:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x} - 1)$. Arătaţi că $\int_1^9 (a + bg(x))g'(x)\, dx = 6a$, pentru orice numere reale a şi b.

Testul 17 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $1,5+10\cdot(1-0,75)=4$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+1$ .Arătaţi că $f(-m)+g(m)=m$, pentru orice număr real m.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{6x}$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizor al lui 35.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ şi $C(0,4)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în B.
6.Se consideră $E(x)=3\cos^2x-\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2x & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(6))=12$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $A(4)\cdot A(4)=aA(4)$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu m<n, pentru care $\det(A(m)+A(n))=0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y-xy)xy$.
a)Arătaţi că $3*1=3$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $2*x=-x^2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\frac{1}{2m}=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-3}{x}-4\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+4\ln x}{x+1}=1$.
c)Demonstraţi că $\frac{x^2+2x-3}{x}\le 4\ln x$, pentru orice $x\in(0,3]$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+2x+2$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-x^3)\,dx=3$.
b)Arătaţi că $\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-2x}dx=\frac{\ln 5}{3}$.
c)Determinaţi $a\in(-\infty,0)$, ştiind că $\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)dx=2-a^3e^{-a}$

Testul 18(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4-3i+i(3-i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=9-3x$.Arătaţi că $(f\circ f)(2)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-3x+7)=\log_5 7$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7 şi cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(0,a)$ şi $C(b,0)$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=AC=10 şi BC=12. Arătaţi că AD=8, unde AD este înălţime în triunghiul ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&x-1\\2x+1&2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(2)\big)=4$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(1)\cdot B(0)=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot A=(B(0)-3I_2)\cdot A$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-mX-3$, unde m este un număr real.
a)Pentru m=0, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X+1.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x^2}{x^2+x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$,$x\in(1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+f(x^2)\geq\frac{34}{9}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-2)^2$.
a)Arătaţi că $\int_3^7\frac{f(x)}{(x-2)^2}dx=20$.
b)Arătaţi că $\int_3^4\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.
c)Arătaţi că $\int_0^1\frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2-7}{4}$.

Testul 19(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3-6\sqrt{2}+2\left(3\sqrt{2}-1\right)=1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5x+3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-1}\cdot 2^3=1$.
4.Determinaţi câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{2,3,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(2,0)$,$C(3,3)$ şi M, mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele MO şi MC au lungimi egale.
6.Se consideră $E(x)=2\sin 2x\sin x-\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}3+a & 1-a\\ 2-2a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=1$.
b)Arătaţi că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(a^2)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3x^2-4xy+y^2$.
a)Arătaţi că $2\circ 0=12$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(2x)=-1$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi, $n<m$, pentru care $m\circ n=3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3+\frac{4x-4}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$ $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $|f(x)-f(y)|\leq 1$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x^2+8\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-8\ln x)\,dx=7$.
b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-3x^2)\,dx=2e^2+2$.
c)Demonstraţi că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)\,dx=\frac{(3e+1)(3e+7)}{2}$, pentru orice primitivă F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f.

Testul 20(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=2$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+1$.Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a)=1+a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+6)=\log_4(8x-6)$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre, cu cifra unităţilor număr impar, se pot forma cu elementele mulţimii {1,2,3,4,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(−5,1) şi B(5,5).Determinaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi tgB=$\sqrt{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi A(a)=$\begin{pmatrix}1-a&-3a\\a&3a+1\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=5$.
b)Arătaţi că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy−x−y+6.
a)Arătaţi că $0\circ 3=3$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care x∘x=3x.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că x∘a=x+2a, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x^2+3x-3)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2+5x)$,x∈$\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
c)Demonstraţi că $e^{x+5}(x^2+3x-3)\le 7$, pentru orice x∈$(-\infty,0]$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{3}{x}+x^3$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă G:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
c)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Testul 21(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2(2+i)-i(2-i)=3$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+10$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(3a,a)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{6x^2+3}=3x$.
4.Dterminaţi câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(2a-1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ şi BC=24. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D.Determinaţi lungimea segmentului CD.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&0&1\\-1&x&-1\\1&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2^{xy}+x+y-1+xy$.
a)Arătaţi că $2*1=8$.
b)Arătaţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1+2x+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln y}{y}<\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$,pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $y<x$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+x^3$.
a) Arătaţi că $\int_3^5(f(x)-x^3)\,dx=8$.
b)Arătaţi că $\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}\,dx=\frac{\ln 5}{3}$.
c)Se consideră funcţia $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătaţi că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g este concavă.

Testul 22 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $5-\sqrt{24}$, 1 şi $5+2\sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax-1$, unde a este un număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=-1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}=64$.

4.Determinaţi numărul de submulţimi ordonate , cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulţimii M={0,1,2,3,4,5}.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$ şi $B(5,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul B şi este perpendiculară pe dreapta AB.

6.Arătaţi că $(ctgx-1)(tgx+1)=2ctg2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & a+1\\ 2 & -a & 4\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax+y+(a+1)z=a\\ 2x-ay+4z=-4\\ x+ay-z=4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=9$.

b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Arătaţi că, dacă sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+3X+m$, unde m este număr real.

a)Pentru m=7, arătaţi că $f(-1)=0$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=x^2+3$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2-\frac{2x+1}{2e^x\cdot\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)-2x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+xlnx$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 3(f(x)-xlnx)\,dx=14$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x^3}dx=3-\frac{2}{e}$.

c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria mai mare decât 1.

Testul 23(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că media aritmetică a numerelor a=$21-\sqrt{22}$ şi b=$23+\sqrt{22}$ este egală cu 22.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-1$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-x$.Arătaţi că $f(a)+g(a)=3$, pentru orice număr real a.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{6x-5}=x$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulţimii {1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,6) şi B(6,6).Arătaţi că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât AB=4 şi măsura unghiului C este egală cu 60°. Arătaţi că înălţimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ -x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.
b)Arătaţi că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5(xy+1)-4(x+y)$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=3$.
b)Arătaţi că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\leq 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2+x+4-5\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.
c)Demonstraţi că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(4-3x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{5}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-7$.
c)Determinaţi $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\frac{5}{32}$.

Testul 24(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_2 = 5$ şi $a_3 = 10$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 4$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^x \cdot \frac{1}{6} = 36$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 14.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(4,1)$.Determinaţi coordonatele punctului C,astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \sin\frac{3x}{2} + \sin x - \cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2-x \\ 3-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că matricea $C(a) = B(a)\cdot B(1) - B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(3x-2)(3y-2)+2$.
a)Arătaţi că $1*2=6$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=3$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right) = 2$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 1 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{4x^2+1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4} = 2$.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x(e^x + 4x^2)$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+4x^2}\,dx = 8$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 4x^3)\,dx = 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx = \frac{e^4-e}{2} + a$.

Testul 25(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2-\sqrt{2}\right)=2$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+4x$. Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x-4}=\frac{1}{2^{3x}}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 12.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(3,0)$ şi $C(0,4)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}+tgx$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -2x\\ -x & 2x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(M(1)\right)=4$.
b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5xy-10x-10y+22$.
a)Arătaţi că $1\circ 0=12$.
b)Demonstraţi că $x\circ y=5(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}+\ln(x-2)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=3, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{x^2+2}{x-2}+\ln(x-2)\geq 9+\ln 2$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+5}{6x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{5}{6x^2+1}\right)dx=\frac{\ln 5}{6}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1\frac{x+5}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx=m(e^2-1)$.

Testul 26(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=\sqrt{3}$ şi $b_2=9$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-4x+4$, unde m este număr real nenul. Determinaţi numărul real m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+2}-2^x-2\cdot 2^{x-1}=2$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $2n-50$ să aparţină mulţimii A..
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-1)$, $B(2,5)$ şi C, mijlocul segmentului AB. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul C şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu $120°$ şi AB=8. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $16\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real şi $i^2=-1$.
a)Arătaţi că $detA=1$.
b)Determinaţi numărul real nenul x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.
2.Pe mulţimea $M=[2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy}{2}-\sqrt{(x-2)(y-2)}$.
a)Arătaţi că $3*6=7$.
b)Arătaţi că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Demonstraţi că $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ şi orice număr natural n, $n\geq 3$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+12}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6(4-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+12)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a,f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.
c)Demonstraţi că $\frac{\sqrt{x}}{x^2+12}\geq\frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x+4x}{e^x}$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e+1$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-3$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\frac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f cu proprietatea $F(0)=0$.

Testul 27 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $N=\log_3 24-\log_3 8+8$ este pătratul unui număr natural.

2.Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a,a^2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-3x-3}=x-3$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{0!,1!,2!,3!,\dots,9!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul E mijlocul segmentului BC.Arătaţi că, pentru orice puncte D şi F astfel încât $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}$, are loc relaţia $2\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

6.Arătaţi că $(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x^2 & x-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\left(A(-1)\right)=3$.

b)Demonstraţi că $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{3}(x+y-1)+3$.

a)Arătaţi că $\sqrt{3}\circ 0=\sqrt{3}$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{3}\right)\circ\left(x+\sqrt{3}\right)=x$.

c)Determinaţi numerele raţionale al căror simetric în raport cu legea de compoziţie „$\circ$” este număr raţional.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=2x\left(1-\frac{1}{x}\ln(x^2+1)\right)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\left(n,f(n)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{2}{5}x+1$.

c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

.

2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^4}-\frac{3\ln x}{x^4}$ şi funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^3}$, o primitivă a lui f.

a)Arătaţi că $\int_1^e x^3\left(f(x)+\frac{3\ln x}{x^4}\right)dx=1$.

b)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f(x^2+3)\,dx=-\frac{13\ln 2}{1024}$.

c)Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x^2\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Testul 28(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4(3-i)+4i(1+i)=8$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-9$.Calculaţi $(f\circ f)(3)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2-4x+8)=1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(a,3)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x)=\cos3x+\cos2x+\cos x$., unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y&-2y\\4y&x-3y\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=0$.
b)Demonstraţi că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.
c)Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.
2.Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5^{xy}-(1-x-y)$.
a)Arătaţi că $2\circ0=2$.
b)Arătaţi că $x\circ\frac{1}{x}\geq6$, pentru orice $x\in A$, $x\neq0$.
c)Demonstraţi că, dacă m şi n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural par.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-\ln x^3$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f .
c)Demonstraţi că $x^3\geq3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=-2$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1(f(x)-e^x)\,dx=-\frac{e^2+1}{e}$.
c)Demonstraţi că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)\,dx\leq\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Testul 29(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_5 = 8$ şi $b_6 = 32$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x - 9$.Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m) = m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{3x} = 10^{4x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulţimea $\{0,1,2,3,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-4)$, $B(0,4)$ şi $C(4,0)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
6.Arătaţi că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, ştiind că tgx=$\sqrt{3}$ şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 3 & x-2 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
c)Se consideră numerele reale a,b şi c, astfel încât $A(a)\cdot A(b) = A(c)$.Demonstraţi că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2.Pe mulţimea M=$[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2}$.
a)Arătaţi că $0\circ 1 = 1$.
b)Determinaţi xϵM pentru care $x\circ x = 0$.
c)Demonstraţi că $x\circ\sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice x$\epsilon[0,1]$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x + x\ln x - 2$.
a) Arătaţi că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$,x$\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f .
c)Demonstraţi că $e^x + x\ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice x$\epsilon\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+3}\,dx = \frac{23}{6}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Se consideră funcţia g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ .Determinaţi a$\epsilon(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx = 1 + \frac{\ln(a+\sqrt{3})}{2}$.

Testul 30(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 3$ şi $b_2 = 6$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 8$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 8$.Calculaţi $(f \circ g)(8)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+1} = x - 1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifra, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3) > 0$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(0,-1)$,$C(5,3)$ şi $D(6,5)$.Demonstraţi că punctele B,D şi mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
6.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\cos x - \sin x)^2 = 2$.

Subiectul II aici

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & -2^a \\ 2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(1) + A(2) - A(1)\cdot A(2) = I_2$.
c)Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n) = A(m+n)$.Arătaţi că m=n=1.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = x^2 + y^2 - x - y$.
a)Arătaţi că $1 * 1 = 0$.
b)Demonstraţi că $x*y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x - \frac{1}{2}\ln(x+3)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x+5)(2x+7)}{2(x+3)}$,$x\in(-3,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x-f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că $x^2 + 6x + \frac{35}{4} \geq \frac{1}{2}\ln(2x+6)$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{2}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx = 30$.
b)Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 8 + \ln 5$.
c)Demostraţi că $F(x+1) \geq F(x) + 1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Testul 31 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=3-2i$.Arătaţi că $z+\frac{13}{z}=6$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+5$, şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x$. Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{5x+3}=9\cdot 3^{x+2}$.
4.Se consideră A, o mulţime cu 4 elemente.Calculaţi probabilitatea ca, alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor lui A, aceasta să aibă un număr par de elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(5,3)$ şi $C(6,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$ şi $C=\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră a un număr real nenul şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & x\\ 0 & a & 0\\ -4x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Pentru $a=1$, determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.
2.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\log_3(3^x+3^y-1)$.
a)Arătaţi că $0*2021=2021$.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_3 37$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+1)}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$,pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+5-2\ln x$.
a) Arătaţi că $\int_1^3(f(x)+2\ln x)\,dx=18$.
b)Calculaţi $\int_1^e(2x+5-f(x))\,dx$.
c)Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x^3+1)\,dx=\frac{2(5-2\ln 2)}{3}$.

Testul 32(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $\log_2 12$,$\log_2 6$ şi $\log_2 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x + 1$.Determinaţi numărul real x pentru care $f(x) = -x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|3x - 1| = 3x + 1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor impară şi cifra unităţilor pară.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.În triunghiul ABC dreptunghic în A, BC=12 şi C=$\frac{\pi}{6}$ .Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a \\ 4a-4 & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=1$.
b)Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b) = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n, ştiind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^4) = A(32)\cdot A(-n)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= 2x^2 - 5xy + 3y^2$.
a)Arătaţi că $2\circ 1=1$.
b)Demonstraţi că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $3^x\circ 2^x = 0$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} - 1, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 2} - \sqrt{4x^2 - 4x + 2} \le (x-1)^2$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (4 - f^2(x))\,dx = 2\pi$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $2(\sqrt{5}-2)$.
c)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Testul 33(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 5$ şi $a_3 = 7$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 2$.Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n) = 7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 16} = x - 2$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,1),N(3,3),P(3,4) şi Q(a, 1),unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN şi PQ.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AC=5 şi cosC= $\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A \cdot A) = a^2b^2$, pentru orice numere reale a şi b.
b)Se consideră matricea X$\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât A·X=X·A.Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x şi t astfel încât X=$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
c)Pentru a=0 şi b=4, determinaţi matricele Y$\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care Y·Y=A.
2.Pe mulţimea M=$[0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y= x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x}$.
a)Arătaţi că 3∗3=12.
b)Demostraţi că x∗0=0∗x=x, pentru orice x$\in$M.
c)Determinaţi x$\in$M pentru care $3 * (x^2 + 2x) = 7$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\ln(1 + x)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \ln(1 + x) + \frac{x}{1+x}$,x$\in(-1, +\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă .
c)Se consideră funcţia g:$(-1, 0] \to \mathbb{R}$, $g(x)=(1 + x)^x$.Demonstraţi că, dacă $x_1,x_2\in(-1, 0]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
2. Se consideră funcţia f:$[0,1] \to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - x^5$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^4\big(f(x)\big)^5\,dx = \frac{1}{30}$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1\big(f(x)\big)^{n+1}\,dx \leq \int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 34(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 3$ şi raţia r=2.Calculaţi a_3 .
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$.Determinaţi numerele reale x pentru care $f(x^2) = 19$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3x+3} - 2^{3x} = 7$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizor al lui 90.
5.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătaţi că $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB}$.
6.Arătaţi că $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 12 + a & 1 + a \\ a & 3 + a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 36$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12 + a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea X·X=A(0).Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= x+\sqrt[3]{y}-3$.
a)Arătaţi că $1\circ 8=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x^6 = 3$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x^2$
a) Arătaţi că $f'(x) = 2x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - 1\right)$,$x\in(1,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2 + 2x + 4)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2+2x+4}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 3$.
c)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+9}{4}$.

Testul 35(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\log_2 6+\log_2 7-\log_2 21=1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2x-1$.Demonstraţi că $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+32}=3x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2+3x+2=0$.
5.Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$, unde $\vec{u}=6\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=b\vec{i}+2\vec{j}$.
6.Se consideră expresia $E(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\sqrt{2}(\cos x+\sin x)-2$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & x-3\\ x+3 & x-2\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul natural n astfel încât
$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 8 & -7\end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+2}{x^2+y^2+2}$.
a)Arătaţi că $0*1=1$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.
c)Demonstraţi că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x\sqrt{x^2-2x+2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a,ecuaţia $f(x)=a$ are cel puţin o soluţie.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x+xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-xe^x)\,dx=\frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.
c)Se consideră F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $F(1)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{5-3e}{3}$.

Testul 36(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(0{,}3 \cdot 10 + 1)(0{,}3 \cdot 10 - 1) = 8$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + 6x - m = 0$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{6 - x} = \sqrt{x + 9}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor cu 3 mai mare decât cifra zecilor.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 1)\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care cosx=sinx, atunci cos2x=0.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=3$.
b)Demonstraţi că $A(a, b) \cdot A(b, a) = A(-ab, a^2 + b^2)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $\det(A(m, n)) = 1$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 15X^2 - mX - 80$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=-95$, arătaţi că $f(1) = 1$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + x_3(x_1 - x_3) = 0$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 9$.
a)Arătaţi că $f'(0) = 0$.
b)Demonstraţi că oricare două tangente la graficul funcţiei f sunt concurente.
c)Demonstraţi că $e^{x^3} \geq (x + 1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x)=x + \frac{4}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x}\right) dx = 4$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 are aria egală cu 2ln2.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x) - \frac{4}{x}\right) \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Testul 37(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_1 = 1$ şi raţia q=4.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - x + 1$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = 5x - 7$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia$\sqrt{3x} + x = 6$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A=$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{81}\}$, acesta să fie număr natural.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$,$B(0,-3)$ şi $C(6,-3)$.Determinaţi ecuaţia medianei din A a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\sin x(4\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 4\cos x) = 4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1)) = 17$.
b)Demonstraţi că $A(2020 - a) + A(2020 + a) = 2A(2020)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale x şi y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.
2.Pe mulţimea G=$(-3,3)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{9x+9y}{9+xy}$.
a)Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
b)Determinaţi $x\in G$, pentru care $x*x=\frac{36}{37}$.
c)Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \frac{3(x-1)}{x+1}$.Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - 3x + 3\ln(x+1)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-3x}{x+1}$,$x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\ln(1+\cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+4}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 8$.
b)Demostraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $[-4,+\infty)$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $5-8e^{-n}$.

Testul 38(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1-i)^2+2i=0$, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-9$ este egală cu 16.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2-10x+105)=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,100} , acesta să fie număr par.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(0,-2)$ şi $C(3,0)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, ştiind că ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că sin3x+ sin2x+sinx= $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=5$.
b)Demonstraţi că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=6x+6y-xy-30$.
a)Arătaţi că $x*y=-(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
c)Calculaţi $(-1)*2*(-3)*4*\ldots*(-2019)*2020$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+8x+16}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+2)(x+4)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $0\leq(x+4)(y+4)\leq 4e^{\frac{x+y+4}{2}}$, pentru orice x,y$\in[-4,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x+2)f(x)\,dx=4$.
b)Arătaţi că funcţia F: $(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln(x+2)$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Determinaţi numărul real a, a>1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuaţii x=1 şi $x=a^2$ are aria egală cu ln6.

Testul 39(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 3$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 10x + 9$ cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{x+1} - 3 \cdot 7^x = 4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 6x + 9 = 0$.
5.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, ştiind că triunghiul ABC este echilateral şi AB=2.
6.Arătaţi că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin^2(x - \pi) = 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1+4a & 2a \\ -6a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = 2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b) = A(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n pentru care $A(m)A(n) = A(2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy-3x-3y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=3(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x\circ x\leq 49$.
c)Calculaţi $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \ln x^e - x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{e-x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu Ox.
c)Demonstraţi că ecuaţia $x^e = e^x$ are exact o soluţie în $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x - 2)(x + 2)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = -3$.
b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=3.
c)Determinaţi numărul real a, a>3, ştiind că $\int_3^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx = 2\ln 2$.

Testul 40 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.

2.Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2-9x+m=0$ sunt numere reale.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=155$.

4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 21 de submulţimi cu două elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$, $B(3,-1)$ şi $C(5,2)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.

6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2a-1 & 3 & 1 \\ a & a-3 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ (2a-1)x+3y+z=1 \\ ax+(a-3)y+z=2a-1 \end{cases}$$

a)Arătaţi că $\det(A(0))=5$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $y_0^2=x_0z_0$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=6xy-6(x+y)+7$.

a)Demonstraţi că $x*y=6(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<37$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-\frac{61}{2}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{3(x-1)}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-3}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{2}\cdot x$.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=15$.

b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1.

c)Demonstraţi că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$.

Testul 41 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z,ştiind că $2z+3\bar{z}=15-2i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f\circ f)(x)=x+6$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(4x+5)-\log_5 x=1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 20.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+(5a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Calculaţi aria triunghiului ABC, ştiind că AB=10,AC=8 şi $\cos A=\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & 3-x \\ 0 & x & 0 \\ x+2 & 0 & 4-x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(M(-1))$.
b)Demonstraţi că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n, ştiind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5x+5y-5xy-4$.
a)Demonstraţi că $x*y=1-5(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=6\ln x-x^2-4x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+6)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
b) Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $6\ln x\leq x^2+4x-5$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+4x+7)e^x$.
a)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\int_0^1 (f(x)-x^2e^x-7e^x)\,dx$.
c)Demonstraţi că $\frac{3(e^2-1)}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx\leq\frac{4(e^2-1)}{e^3}$.

Testul 42 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_3 = 10$ şi $a_4 = 13$.Primul termen al acestei progresii este egal cu:

A. -1 B. 4 C. 1 D. 8

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x^2 + 8x - m$, unde m este număr real.Dacă vârful parabolei asociate funcţiei f are coordonatele egale, atunci numărul real m este egal cu:

A. 6 B. -8 C. 10 D. -12

3.Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x+20} = x$ este :

A. $\{-4,5\}$ B. $\{-5\}$ C. $\{4\}$ D. $\{4,-5\}$

4.Probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{n\in\mathbb{N}^*|n\leq 140\}$, acesta să fie multiplu de 25 este egală cu:

A. $\frac{1}{35}$ B. $\frac{5}{141}$ C. $\frac{1}{28}$ D. $\frac{25}{140}$

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,2)$ şi $N(4,4)$.Punctul P, situat pe axa Ox, pentru care punctele M,N şi P sunt coliniare este:

A. $P(-2,0)$ B. $P(0,2)$ C. $P(0,-2)$ D. $P(2,0)$

6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 B. $\sqrt{3}\cos x$ C. $\sin x$ D. 1

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3 & 3-x \end{vmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $D(1) = 5$.

b)Demonstraţi că,pentru orice număr întreg p,$p\neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6-p$.

c)Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x-1 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $B(1) + B(3) = 2B(2)$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x) = B(x)\cdot A$.

c)Determinaţi numărele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x) = B(x)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+9x}{f(x)}$.

c)Demonstraţi că pentru orice număr real a, a>0, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\big(f(x+a)-f(x)\big)$ **nu** depinde de a.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2}{x-2}, x\in(-\infty,1) \\ \ln x + m, x\in[1,+\infty) \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Determinaţi numărul real m, pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Pentru $m\leq 0$, demonstraţi că funcţia f este surjectivă.

Testul 43(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2 = 5$.
2.Se consideră funcţiile f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-2)^2$ şi $g(x) = 2019 - x$.Calculaţi $g\big(f(2)\big)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x = 3^{x^2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $(a-2)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
6.Arătaţi că tgx+ctgx=$\frac{6}{\sqrt{5}}$, ştiind că sinx= $\frac{1}{\sqrt{6}}$ şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix}x+2 & 1\\ x & -2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = -7$.
b)Demonstraţi că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a,ştiind că $\big(aA(-1) + A(a)\big)A(0) = (a^2+7)I_2$.
2.Se consideră polinomul $f=4X^3 - 8X + m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{4}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$,x$\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice x$\epsilon(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+2}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+2)f(x)\,dx = 30$.
b)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2}\right)e^{x^3}\,dx$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Testul 44(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2+i+(i-2)(2+i)-(i-3)=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+1$.Calculaţi $(f\circ f)(-1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-6x+8)=\log_2 3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale impare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4), B(-1,2), C(5,4)$ şi $D(9,6)$.Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, ştiind că $\operatorname{ctg}x=1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(X(1)\big)=-4$.
b)Demonstraţi că $X(-a)+X(a)=X(-2020)+X(2020)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale (a, b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-X-m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=2$,arătaţi că $f(-2)=0$.
b)Arătaţi că, dacă polinomul f se divide cu $X-1$ polinomul f se divide cu X^2+3X+2.
c)Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x+2+\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{3e^2+4e-2}{2}$.
c) Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+2a-3.

Testul 45(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 6$ şi $a_3 = 14$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n) < 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4} = x + 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : y = \frac{x}{2} + 3$ şi d_2:y=$(m - 5)x + 1$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare.
6.Arătaţi că, dacă sin2x= $\frac{2}{3}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{5}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & 9b \\ b & a \end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(X(3,1)) = 0$.
b)Demonstraţi că $X(a,b)X(c,d) = X(ac + 9bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a,b,c şi d.
c)Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n)) = 1$.
2.Se consideră polinomul f=$-2X^3 + 4X^2 + 7X - m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=9, arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu X+$\sqrt{2}$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x - 1)e^x + 2$.
a) Arătaţi că $f'(x) = xe^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
2. Se consideră funcţia f:$[3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x-3}$.
a)Arătaţi că $\int_3^4 f(x)\sqrt{x-3}\,dx = \frac{11}{6}$.
b)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(x+3)}{x+3}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_4^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-3}}dt}{x^2}$.

Testul 46(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{20}=0$.
2.Determinaţi numărul real a, pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă x=1.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4}=2-\sqrt{x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuaţie y=ax+3 şi d_2, de ecuaţie $y=\frac{x}{6}+1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
6.Arătaţi că $\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)=-\sin 2x$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ şi $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=0$.
b)Demonstraţi că $M(x)-M(2020)=M(-2020)-M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=6xy+x+y.
a)Arătaţi că $x\circ y=6\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(y+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care x∘x=4.
c)Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+1$.Demonstraţi că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{x^2+8}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2-x)(x+4)}{(x^2+8)^2}$,x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f\left(\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{xf(x)}{e^x}dx=\frac{14}{3}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $3e^n$.

Testul 47 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\{n\in\mathbb{N}|n(n+3)<16\}$ este egală cu 3.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $f(0)=1$ şi $f(x+1)=f(x)+3$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x+4)^2-25>0$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu două elemente ale mulţimii $\{1,3,5,7,8\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(5,2)$ şi $C(-1,4)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.
6.Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, ştiind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, DE=5 şi DF=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că detA=2.
b)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.
c)Determinaţi inversa matricei $B=A+I_3$.
2.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{3\log_2 y}$.
a)Arătaţi că $2\circ 4=64$.
b)Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 2=125$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$'' este comutativă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^{x-3}-x+2\geq 0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.
a)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-1$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

Testul 48(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=(2-i)(1+i)+6i$.
2.Determinaţi numerele naturale n pentru care $n^2+n-20<0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+3)=2\lg(x-3)$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are 36 de submulţimi cu două elemente.
5.Se consideră dreptunghiul ABCD şi $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.Ştiind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 30, determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
6.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$, atunci $tgx+ctgx=8$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2x & -2x^2 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.
c)Ştiind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinaţi numerele naturale m şi n, m<n.
2.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{11}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+\widehat{10}x+\widehat{10}y+\hat{2}$.
a)Demonstraţi că $x*y=(x+\widehat{10})(y+\widehat{10})+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{11}$.
b)Demonstraţi că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{11}$.
c)Calculaţi $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}*\hat{7}*\hat{8}*\hat{9}*\widehat{10}$.

Subiectul IIIaici

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2-4x+4)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2-2x), x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că $(x-2)^2\le 4e^{-x}$,pentru orice $x\in(-\infty,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}4x^2-5x+1, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
a)Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(\frac{13}{3}-\sqrt{e}\right)$.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+2}} f^2(x)\,dx=\frac{26}{3}$.

Testul 49(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul N=$\log_3 7+\log_3 21-2\log_3\frac{7}{9}$ este natural.

2.Ştiind că f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x) $=x+3$, calculaţi S=$(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\cdots+(f\circ f)(10)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+2)+3=\log_2(7x^2+17)$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A=$\{i,-i^2,i^3,-i^4\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M$(n,1)$,N$(3,n)$ şi P$(5,2n)$, unde n este număr natural.Ştiind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinaţi numărul natural n.

6.Arătaţi că $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=\begin{pmatrix}3&9&1\\2&4&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(X(-1))=-12$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(X(a)-I_3)=0$.

c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele A$(3,9)$,B$(2,4)$ şi C(a,a^2), unde a este număr natural.Determinaţi numerele naturale a pentru care ABC este triunghi şi are aria mai mică decât 3.

2.Se consideră matricele M(x)=$\begin{pmatrix}1-3x&-3x\\3x&1+3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Demonstraţi că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi inversa matricei M(x), unde x este număr real.

c)Determinaţi numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M(\sqrt{x})M(\sqrt{x+5})=M(5)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=$\frac{x^2+x-2}{x}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x)=$\begin{cases}x^2-ax+3a-9, x\in(-\infty,3)\\3^{x-2}-3, x\in[3,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9f(x)}{(1-3x)^2}=1$,pentru orice număr real a.

b)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

c)Demonstraţi că, pentru orice număr real a, a<4, ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,4)$.

Testul 50(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 5$ şi $a_2 = 9$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 5x + 1 = 0$.Arătaţi că $5x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3x-1} = \frac{1}{16}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre ,acesta să fie multiplu de 16.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$,$B(2,2)$ şi $C(4,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=4,AC=$4\sqrt{3}$ şi sinB=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.Calculaţi sinC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -4$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = 4xyI_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $A(2^a)A(2^{a+1})A(2^{a+2}) = A(32)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + mX^2 + 4X - 6$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=1,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu X+3,atunci restul împărţirii lui f la X+4 este egal cu -6.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{3}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+2018}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x+2017)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $[-2016, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{13}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f,ştiind că $F(2) = \frac{\pi}{8} + 2$.
c)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $\int_0^n xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

Testul 51(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 2 - 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$este real.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(3, m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{4x-6} = 4^{-2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A=$\{1,2,3,\dots,30\}$,acesta să fie multiplu de 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$,$B(2,4)$ şi $C(m, 2)$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.
6.Se consideră $E(x) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 2$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$,$N(3, n)$ şi $P(5,0)$.Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.
2.Se consideră polinomul f=$X^3 + aX^2 + X - 2$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 4$,pentru orice număr real a.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 - X + 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 + 5$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$,$x\in(2, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=3,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+2} = 0$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x + 3x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 3x)\,dx = e - 1$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x) - e^x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + a^3$.

Testul 52(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 = 14$ şi raţia r=4.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,5)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 3m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii {1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$ şi $B(4,6)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=16 şi AC=12.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x+4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-3)) = 21$.
b)Demonstraţi că $A(x) + A(-x) = A(2018) + A(-2018)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\cdot\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+5x+5y+20.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că e=−4 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2018) = 2018\circ(-5)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{x} + \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-3}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{3}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 3$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 2xf(x)\,dx = \frac{19}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = 1$.
c)Demonstraţi că $2\int_1^n (f(x) + xf'(x))\,dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

Testul 53(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=2−2i.Arătaţi că $z^2 + 8i = 0$.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde f:ℝ→ℝ,$f(x) = x - 2018$ şi g: ℝ→ℝ,$g(x) = x + 2018$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x} = 5^{x-5}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,1,2,3, … ,100},acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,2).Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie y=x−12.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=2,BC=4 şi B= $\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 3 & m-3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Demonstraţi că A(1 + m)+A(1 − m)=2A(1),pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea A(m) este inversabilă,pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∗y=−4xy+16x+16y−60.
a)Arătaţi că $x*y=-4(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „∗” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x,pentru care $(x*x)*x = 20$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^3 - 24\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$,x∈(0, +∞).
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq 8\ln\frac{e}{8}$,pentru orice x∈(0, +∞).
2.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+3}$.
a)Calculaţi $\int_1^3 (x^2 + 4x + 3)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=3 are aria egală cu ln8.
c)Demonstraţi că $\int_1^3 f'(x)f(x)\,dx = -\frac{7}{36}$.

Testul 54(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z,ştiind că $3z-\bar{z}=6+4i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=6x-3$.Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+8)=1+\log_3(x+2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele diferite.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(4,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $C(-3,5)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul ABC cu $AC=6\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ABC)=30°$ şi $m(\sphericalangle ACB)=45°$.Determinaţi lungimea laturii AB.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & x\\ 9 & 25 & x^2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $A(1)-A(0)$.
b)Arătaţi că $\det(A(x))=2(x-3)(x-5)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a))\leq\det(A(x))$,pentru orice număr real x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy-12x-12y+37$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x-3)(y-3)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b) Arătaţi că $N=2020\circ 2021$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care $a\circ b=25$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x^2(3\ln x+1)$,$x\in(0,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $1+3ef(x)\geq 0$,pentru orice număr real x,$x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-2)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{3}{2}$.
b)Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că $\int_0^1 x^3f(x)\,dx\leq-\frac{3}{10}$.

Testul 55(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele x+2,10 şi 2x sunt în progresie aritmetică.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+2(m-1)x+2m^2-2m=0$.Determinaţi numărul real m,m≠0,m≠1 pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x}=27\cdot 3^{-x}$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii M={1,2,3, … ,10}, aceasta să conţină elementul 1.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2),B(3,4) şi C(4, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.

6.Arătaţi că $\sqrt{15}$tgx+1=0, ştiind că sinx=$\frac{1}{4}$ şi x$\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\frac{x+2}{2} & \frac{x-2}{2}\\ \frac{x-2}{2} & \frac{x+2}{2}\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(2))$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x))\cdot\det(A(y))=2\det(A(xy))$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Demonstraţi că

$\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=n\left(\det(A(1))+\det(A(2))+\cdots+\det(A(n))\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

2.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 8\end{pmatrix}$,B=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a)Calculaţi A−B.

b)Arătaţi că $(A+I_2)\cdot(B-I_2)=2\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

c)Demonstraţi că, dacă X$\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât X·A=A·X şi X·B=B·X, atunci X·Y=Y·X, pentru orice Y$\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=$\frac{x^2+ax+5}{x+1}$, unde a este număr real.

a)Pentru a=6,calculaţi $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

b)Determinaţi numărul real a,pentru care dreapta de ecuaţie y=x+4 este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,oricare ar fi numărul real a,funcţia f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases}\frac{6mx}{3-x}, x\in(-\infty,-3)\\ 2x+6-3m, x\in[-3,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,pentru orice număr real m.

b)Pentru m=2,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)=0$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$.

Testul 56(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 1+i$.Arătaţi că $z^2 = 2i$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 2017$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 2017$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x} = 5^{x-9}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,50},acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(1,2).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=4x+2017.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=8,BC=10 şi $B = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-2 & -2 \\ 3 & m-3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 12$.
b)Demonstraţi că $A(2+m) + A(2-m) = 2A(2)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea A(m) este inversabilă, pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = -4xy+16x+16y-60$.
a)Arătaţi că $x*y = -4(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$ ” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x, pentru care $(x*x)*x = 36$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 24\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3(x^3-8)}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq 8\ln\frac{e}{8}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 (x^2+4x+5)f(x)\,dx = 16$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=4 are aria egală cu $\ln\frac{37}{5}$.
c)Demonstraţi că $\int_{-2}^{-1} f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Testul 57(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{7}+3\right)^2-6\sqrt{7}=16$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+10)=\log_5 46$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 2.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-8\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 3x\\ -4x & 1-6x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-4xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(3^x)\cdot A(3^x)=A(-30)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+6$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=10$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-3X+3.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1=-17$,pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+6x-15}{x-4}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+1)(x-9)}{(x-4)^2}$,$x\in(4,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(2\pi)>23$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(4x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=3$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(4x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Aflaţi numărul real nenul a,ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx=4a$.

Testul 58(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 5$ şi raţia $q = 3$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(3x + 2) = \log_5 11$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(2,3)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx-3$.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care $BC = 3\sqrt{2}$ şi $A = \frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(4)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(x)A(x) = 2A(3)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 8X^2 + mX + 8$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.
b)Pentru $m=-1$,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 32\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}, x\epsilon(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=3,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(e) > 4$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^3}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 x^3 f(x)\,dx = e(e-1)(e+1)$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $[3,+\infty)$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3 are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)(e+1)$.

Testul 59(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_5 = 5$ şi $b_6 = 20$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f:[2,4]→ℝ,f(x) = x − 1.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 21} = x + 3$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1) şi B(3,2).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AC=8 şi B= $\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 4x & 1-4x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(x + y - 3xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,x≠$\frac{1}{3}$,pentru care matricea A(x) este egală cu inversa ei .
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
x∘y = 2xy+6x+6y+15.
a)Arătaţi că $x\circ y = 2(x + 3)(y + 3) - 3$,pentru orice numere reale x şi y.
b) Arătaţi că(−1)∘(−2)∘(−3)∘(−4)=−3.
c)Determinaţi numerele reale x,pentru care x∘x∘x=x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-2}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că 2lnx≤x−2+2ln2,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2 + 4)f(x)\,dx = 3$.
b)Demonstraţi că $\int_0^2 x^2 f(x)\,dx = 2 - \frac{\pi}{2}$.
c)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $\int_n^{n+1} 2xf(x)\,dx = \ln\frac{29}{20}$.

Testul 60(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_4 = 24$ şi $b_7 = 192$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 6x + 5$.Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $81^x = 9 \cdot 27^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulţimea {1,2,3,4,5,6}, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 7n + 12 = 0$.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a+2)\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(3\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 3\cos x)^2 - 6\sin 2x = 10$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ şi B=$\begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(3A) = -234$.
b)Determinaţi numerele reale x şi y ştiind că $A+3B=I_2$.
c)Dacă $A\cdot B=B\cdot A$,arătaţi că $\det B\leq 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy+4x+4y+3$.
a)Arătaţi că $(-1)\circ 1 = -1$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere întregi,ştiind că $a\circ b=7$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-4)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = (x-3)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -e^2$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{3x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{9}{2}$.
b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x) = \frac{3x^2}{2} + \ln x + 2017$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{55\pi}{2}$.

Testul 61(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $3a_{11} = a_4 + a_5 + a_6 + 54$.
2.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = x^2 + 4x - 2$ cu dreapta de ecuaţie y=x−2.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3(x^2 - 4) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 15.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2), B(2,5)$ şi $C(6,2)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = tg^2 x$,pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & 3x-1 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(M(0))$.
b)Demonstraţi că $3M(x) - 2M(-x) = M(5x)$,pentru orice număr real x.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(n, 3n-1)$ şi $B(n^2, 3n^2-1)$, unde n este număr natural,n≥2.Demonstraţi că aria triunghiului OAB este număr natural.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=12xy+4x+4y+1.
a)Calculaţi $1 \circ \left(-\frac{1}{3}\right)$.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Calculaţi $\left(-\frac{2017}{1011}\right) \circ \left(-\frac{2016}{1011}\right) \circ \left(-\frac{2015}{1011}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{1011}\right)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^4+12}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = -\frac{3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)}{(x^4+12)^2}$,$x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-\frac{\sqrt{2}}{16} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{16}$,pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = xe^x - e^2$.
a)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = 4 - e^2$.
b)Calculaţi $\int_0^1 xf(x)\,dx$.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

Testul 62(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=i(1-i)^2$.
2.Determinaţi numerele reale m,ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+1$ este intervalul $[-1,\infty)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}-2^{x+1}=4+2^x$.
4.Derminaţi numărul elementelor mulţimii M={1,2,3, … ,2017} care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.
5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{BM}$.Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
6.Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$,pentru care $\sin 2x=\sqrt{3}\sin x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2016 & 2017 & x\\ 2016^2 & 2017^2 & x^2\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2017))$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x))=(2016-x)(2017-x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x))$ are valoare minimă.
2.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$,unde a este număr real.
a)Calculaţi A·A.
b)Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$,pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi inversa matricei $M=X(-4)\cdot X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{mx^2+4x-4m}{x-2}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=2 este asimptotă verticală la graficul funcţiei f,pentru orice număr real m.
b)Determinaţi numărul real m pentru care dreapta de ecuaţie y=4 e asimptotă orizontală la graficul funcţiei $g:(2,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$.
c)Pentru m=−2 ,calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}+3a, x<3\\ ax+\log_3 x, x\geq 3\end{cases}$,unde a este un număr real.
a)Pentru a=0,calculaţi $f(-1)\cdot f(27)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in\left(-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$,ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(-1,9)$.

Testul 63(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 1-i$.Arătaţi că $z^2 + 2i = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(4)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2016$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{x^2-6x} = 7^{4-3x}$.
4.Aflaţi numărul submulţimilor cu cinci elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,3).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=4x+6.
6.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind căMN=10,MP=6 şi $m(\sphericalangle M) = 30°$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & -a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 9$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Arătaţi că $A(a)A(b) = 3A(a+b) + abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 + mX + 2$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 2$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2 + X - 2$ este egal cu 0.
c)Demonstraţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4^x - x\ln 4 - 1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $4^x \geq x\ln 4 + 1$,pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 6x + 13$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + 6x - 13)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Calculaţi $\int_0^4 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.
c)Arătaţi că $\int_{2015}^{2016} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}$.

Testul 64(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi $(5-4i)(5+4i)$,unde $i^2=-1$.
2.Calculaţi $f\big(f(4)\big)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+24)=\log_5 49$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,a)$, $B(5,3)$ şi $C(1,2)$.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 3a & 9\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2)+A(-2)=2A(0)$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det\big(A(a)\big)=0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(3)\cdot X=A(9)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy-12x-12y+52$.
a)Arătaţi că $(-4)\circ 4=4$.
b)Arătaţi că $x\circ y=3(x-4)(y-4)+4$,pentru orice nemere reale x şi y.
c)Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2016}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4e^x+x^2$.
a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=4$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{5}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{5}{x}\right)dx=6$.
b)Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{5}{x}\right)e^x\,dx=2e^3$.
c)Determinaţi numărul real a>1,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=a are aria egală cu 4+5lna.

Testul 65(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 = 8$ şi $a_5 = 10$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=x^2 - 25$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 8} = x + 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5,6}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) şi B(0,5).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=10 şi C=$\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi B(x)=$\begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=-2.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x) + I_2) = 14$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=xy$-$8x$-$8y+72.
a)Arătaţi că $(-8) * 8 = 8$.
b)Arătaţi că $x*y = (x - 8)(y - 8) + 8$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1*2*3*...*2016$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + 2x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2e^2+3}{2}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-5, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+5}$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{11}{2}$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\, dx = -\frac{9}{2} + 25\ln\frac{6}{5}$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Testul 66(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 4$ şi raţia $r = 3$.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m, 3)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 + 9) = \log_3 18$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6, … ,15}, acesta să fie divizibil cu 4.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 2)\vec{i} + 9\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că sin2x=1,ştiind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ a-2 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2015) + A(2017) = 2A(2016)$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det A(a) = 0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\big(A(3) + xA(5)\big) = 0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-3x-3y-12$.
a)Arătaţi că $(-3) * 3 = -3$.
b)Arătaţi că $x*y=-(x + 3)(y + 3) - 3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x + 3) * (2x - 5) = 17$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 50x^2 + 100$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x - 5)(x + 5), x \in \mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+9}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+5}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 14$.
b)Demonstraţi că funcţia $F:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = x + 5\ln x + 2016$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = (f(x) - 1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu $\frac{5}{2}$.

Testul 67(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + i$ şi $z_2 = 5 - i$.Arătaţi că numărul $z_1 z_2$este real.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,3)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 6} = x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,2)$ şi $B(2, a)$.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{3} + \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 5 & x \\ x & 5 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 25$.
b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(2) + A(4) = aA(3)$.
c)Arătaţi că $A(x)A(y) = 5A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy+15x+15y+42$.
a)Arătaţi că $3 * (-3) = -3$.
b)Arătaţi că $x*y=5(x + 3)(y + 3) - 3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 5)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x + 6)e^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-7,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(x^2 + 1)f(x)\,dx = 0$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 2\ln 2$.
c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu 2ln2.

Testul 68(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real care are partea întreagă -5 şi partea fracţionară 0,57.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{5}{3}x+5$ cu axa Ox şi, respectiv, cu axa Oy.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-4}=625$.
4.Determinaţi numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=128$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2,1)$, $N(3,1)$ şi $P(3,6)$.Arătaţi că triunghiul MNP este isoscel.
6.Calculaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC,ştiind că AB=12,AC=16 şi BC=20.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & -a & -a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{pmatrix}$, unde x şi a sunt numere reale.
a)Calculaţi $detA(3,0)$.
b)Arătaţi că $A(x,a)+A(x,-a)=2x\cdot A(1,0)$,pentru orice numere reale x şi a.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $detA(x,3)=0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy-3x-3y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=3(x-1)(y-1)+1$ pentru orice numere reale x şi y.
b)Aflaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $a\circ b=4$.
c)Calculaţi $-2015\circ(-2014)\circ(-2013)\circ\ldots\circ 0\circ 1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+2$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(-1)=1$.
c)Arătaţi că pentru orice număr real nenul a are loc relaţia:
$\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^5-1$.

Testul 69(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi a_{2017} ,știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2017$ şi $r = -1$.
2.Determinaţi numărul real m,știind că punctul $A(-2,4)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m-1)x + 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 2\sqrt{2}$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $\{1,2,3,\ldots,20\}$,aceasta să fie formată doar din patrate perfecte.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$, $B(1,2)$ şi $O(0,0)$.Determinaţi coordonatele punctului C,știind că patrulaterul OABC este paralelogram.
6.Se consideră dreptunghiul ABCD cu CD=6 şi AC=10.Calculaţi aria triunghiului ABD.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 6-x \\ 2 & x-5 & 10-x \\ 1 & -4 & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $D(2)$.
b)Arătaţi că $D(x) = -(x-2)(x+2)(x+3)$,pentru orice număr real x.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(4^x - 6) = 0$.
2.Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+4a & -8a \\ 2a & 1-4a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $X(-1) + X(1) = 2X(0)$.
b)Arătaţi că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$ pentru orice numere reale a şi b.
c)Arătaţi că matricea $X(a)$ este inversabilă pentru orice număr real a.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(3,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=3 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-16}{x-4}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 3, x \leq -2 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, x > -2 \end{cases}$ unde a este număr real. .
a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în x=-2.
b)Arătaţi că $f(x) + 2 \leq 0$,pentru orice x≤-2.
c)Pentru a=-6,arătaţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,3]$.

Testul 70(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 4$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x - 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 1$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2), B(1,-2)$ şi $C(5,-2)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$,ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
6.Calculaţi ctga,ştiind că sina $= \frac{1}{5}$ şi a$\epsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(4))$.
b)Arătaţi că $A(-2016) + A(2016) = 2A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.
2.În $\mathbb{Z}_5[X]$,se consideră polinomul $f=X^3 + aX + \hat{2}$,unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi a$\epsilon\ \mathbb{Z}_5$.
a)Calculaţi $f(\hat{0})$.
b)Determinaţi a$\epsilon\ \mathbb{Z}_5$ ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{0}$.
c)Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$,atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, x$\epsilon(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_o = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$(-4, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+4}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+4}\right) dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\, dx = \frac{4}{3} - 4\ln\frac{5}{4}$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox, şi dreptele de ecuaţii x=0,x=1 are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln\frac{n^2-n+3}{4}$.

Testul 71 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=4+3(2-4i)$.
2.Arătaţi că $x_1+x_2+3x_1x_2=41$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+12=0$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x+4}=2$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{2,3,4\}$.
5.Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuaţii $y=(a-2)x+3$ şi $y=3x-4$ sunt paralele.
6.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=9,AC=12 şi BC=15.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 5 \\ 5 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(6))$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\frac{n^2(n-9)(n+11)}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=5(x+y-4)-xy$.
a)Calculaţi $3*5$.
b)Arătaţi că $x*y=5-(x-5)(y-5)$ pentru orice numere reale x şi y.
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+3$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=3$.
b)Arătaţi că $f'(x)=\ln x$,$x\in(0,+\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x)\geq 2$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+6x+8}$.
a) Arătaţi că $\int_0^{2016}(x+2)(x+4)f(x)\,dx=2016$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{4}{75}$.
c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Testul 72(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3+i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m, 3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-4$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x-4) = 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu număr par de elemente ale mulţimii A={1,2,3,4}.
5.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii DC.Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{DA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B.Arătaţi că sinA·cosC+sinC·cosA=1.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2015 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2015I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2015I_2$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 + 6X^2 + mX + 6$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = 1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 3$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \ln\frac{3}{2}$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-2, \infty)$.
c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu $\ln\frac{5}{2}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 73(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 4+3i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2 + 5) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 15.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0), B(0,4)$ şi $C(4,0)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3a+2 & 2 \\ 1-a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det A(1)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $\det A(a) = 15$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 3xy-2x-2y+2$.
a)Calculaţi $1 \circ 2$.
b)Arătaţi că $x \circ y = 3\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 6$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-\infty, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-3}$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2-x)e^{-x}}{(x-3)^2}$, $x \in (-\infty, 3)$.
c)Arătaţi că $f(x) \leq -\frac{1}{e^2}$ pentru orice $x \in (-\infty, 3)$.
2.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+3}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (x+3)f(x)\,dx = 3\ln 3 - 2$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) + (x+3)f'(x)\right)dx = 1$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.

Testul 74(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 4,x+3 şi 12 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x - 15$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2 - 6x) = 2$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-3)\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt opuşi.
6.Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=7,AC=6 şi BC=5.

Subiectul II

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ şi B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detB.
b)Arătaţi că AB=BA.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 27$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = xy-6(x + y - 7)$.
a)Calculaţi $5*6$.
b)Arătaţi că $x*y = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $1*2*3*...*2016$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-5}{x^2+5}$.
a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
b) Arătaţi că $f'(x) = \frac{20x}{(x^2+5)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.
2.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2016$.
a)Arătaţi că $\int_1^e f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{4033}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\, dx = \frac{8067e^4-8063}{16}$.
c)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.

Testul 75(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5-\sqrt{x^2+5}=x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(3,0)$ şi $C(2,0)$.Determinaţi aria triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $(\cos x+\sin x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Calculaţi $D(0,1)$.
b)Arătaţi că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m şi n.
2.Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.
a)Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-\hat{2}x$.
c)Determinaţi numărul elementelor mulţimii $H=\{x^8 | x\in\mathbb{Z}_6\}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$.
a)Calculaţi $\int_0^1(x+3)f(x)\,dx$.
b)Calculaţi $\int_1^e(x+3)f(x)\ln x\,dx$.
c)Arătaţi că $F(e-3)=\frac{e^2-12e+22}{2}$, unde $F:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(-2)=-\frac{7}{2}$.

Testul 76(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 5,20 şi x sunt în progresie geometrică.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - a$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(x) = x$ pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{-x+2} = \sqrt{5}$.
4. Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 3 elemente ale mulţimii M={1,3,5,7}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-5)$ şi dreapta d:2x+y−3=0.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.
6.Calculaţi sin2x,ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Subiectul II

1.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(2,0)$,$B(5,3)$ şi $C(8,6)$.
a)Determinaţi ecuaţia dreptei AC.
b)Verificaţi dacă punctele A,B şi C sunt coliniare.
c)Demonstraţi că aria triunghiului AOB este egală cu aria triunghiului BOC.
2.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi 2A+2B.
b)Arătaţi că $(A - B) \cdot (B - A) = -8I_2$.
c)Determinaţi matricea $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că A·X=X·B.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+2e}$.
a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to e} f(x)$.
b) Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=0 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 4, x \leq 3 \\ x^2 - a, x > 3 \end{cases}$, unde a este număr real. .
a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul x=3.
b)Pentru a=10,rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$.
c)Pentru a=10,stabiliţi semnul funcţiei f.

Testul 77 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_2 = 2$ şi $b_5 = 54$.
2.Calculaţi $(f \circ f)(0)$ pentru funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_4(x-4) = \log_4(x-2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,60},acesta să fie divizibil cu 12.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Rezolvaţi în mulţimea $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

Subiectul II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că A·B=B·A.
b)Verificaţi dacă $\det(A+B) > \det A + \det B$.
c)Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pentru care $X^2 = A$,unde a şi b sunt numere reale.
2.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3 - 4X + a$,unde $a\in\mathbb{R}$.
a)Pentru $a = 3$,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că $(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3) = 3$.
c)Pentru $a\neq 0$,determinaţi un polinom de grad trei,având coeficienţi reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+3) - \ln(x+2)$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+3}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_{2015}^{2016} \big(f(x) + (x+3)f'(x)\big)\,dx = 1$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2] \to \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

Testul 78(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $x = 5(1 + i) - 5i$ este real.
2.Calculaţi $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 9} = x + 3$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 7.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6. Se consideră expresia $E(x) = \cos x - \sin\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A^2 - 8A = 5I_2$.
c)Aflaţi inversa matricei $B=A-8I_2$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y = \sqrt{x^2 + y^2 + 16}$.
a)Calculaţi $4*4$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x = \sqrt{20}$.
c)Arătaţi că numărul $2*2*2*2$ este întreg.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 8x + 16)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x^2 - 6x + 8)$, pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Verificaţi dacă $f(x) + f''(x) = 2(f'(x) + e^x)$, pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 (x + 1)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \frac{11}{12}$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x) = f(x)$.

Testul 79(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $\sqrt{27}-3\left(\sqrt{3}-4\right)$ este natural .
2.Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+3)=\log_3 28$.
4.După o ieftinire cu 30% preţul unui produs scade cu 300 de lei.Calculaţi preţul produsului după ieftinire.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-5\vec{j}$ sunt opuşi.
6.Calculaţi lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=12$.

Subiectul II

1.Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=a \\ x-3y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$,unde a este un număr real.
a)Determinaţi numărul real a ştiind că $(x,y,z)=(3,1,-1)$ este soluţie a sistemului.
b)Calculaţi determinantul matricei sistemului.
c)Rezolvaţi sistemul pentru $a=-5$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+X+a$,unde a este număr întreg.
a)Pentru $a=2$, calculaţi $f(-2)$.
b)Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că,dacă polinomul f are o rădăcină întreagă,atunci a este multiplu de 6.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $(0,6)$.
2.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-9}$.
a)Arătaţi că $\int_4^5 (x-3)f(x)\,dx=\ln\frac{8}{7}$.
b)Calculaţi $\int_4^5 (x^3-27)f(x)\,dx$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=4$ şi $x=5$,este egală cu $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$.

Testul 80(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $3\left(\sqrt{5}+2\right)-\sqrt{45}$ este natural.
2.Calculaţi $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}=25$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,15},acesta să fie multiplu de 6.
5. Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$ .Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6.Determinaţi $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{4\sin x-3\cos x}{\cos x}=1$

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x & x\\ x & 3 & x\\ x & x & 3\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det\left(A(4)\right)$.
b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=11A(1)-20I_3$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-3X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=1$ calculaţi $f(-1)$.
b)Aflaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-3$ este egal cu 3.
c)Pentru m=9, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.
a)Calculaţi $f'(x)$, $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.
c)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.
b)Calculaţi $\int_0^2 xf'(x)\,dx$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,$h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

Testul 81 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=4(3+6i)-6(2+4i)$ este real.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+25$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+2x+9)=\log_3(2x+10)$.
4.După o ieftinire cu 20% preţul unui produs este 160 de lei.Calculaţi preţul produsului înaite de ieftinire.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuaţie $y=x-3$ şi punctul $A(3,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.
6.Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=6,AC=8,BC=7.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ x & 2 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $A(3)+A(5)=2A(4)$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $detA(x)=0$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.
2.Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-X^2+mX-m$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că f este divizibil cu $X-1$,pentru orice număr real m.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2016$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m ştiind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-\ln x^3$.
a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstaţi că $\ln x\le x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)(x-2)$.
a)Arătaţi că $\int_3^4 \frac{f(x)}{x(x-2)}dx=\frac{11}{2}$.
b)Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(2)=-2$.
c)Arătaţi că $\int_e^3 \frac{f(x)\ln x}{x^2-4}dx=\frac{18\ln 3-e^2-9}{4}$.

Testul 82(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $x = 4(1 - i) + 4i$ este real.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = x^2 + 3x + 2$,cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x-5} = 27$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40},acesta să fie divizibil cu 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2), B(0,3)$ şi $C(5,2)$.Calculaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
6.Determinaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC = 6, B = \frac{\pi}{3}$ şi $C = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 3-x & x \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi det $M(4)$.
b)Verificaţi dacă $M(x) \cdot M(y) = 3M\left(3 - x - y + \frac{2}{3}xy\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a) \cdot M(x) = 3M(a)$,pentru orice număr real x.
2.Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy+3x+3y+6$.
a)Calculaţi $0 \circ (-3)$.
b)Arătaţi că $x \circ y = (x + 3)(y + 3) - 3$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x \circ x = 24$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-6x+10}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$, pentru orice $x \in (3, +\infty)$.
b)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$.
a)Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.
b)Arătaţi că funcţia F:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{9}x^4 \cdot \sqrt{x}$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 4$.

Testul 83(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 4$ şi $a_2 = 2$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 6x - m > 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x + \log_3(x+2) = \log_3 15$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre,produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.
5.Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{6}$.
6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4), B(0,1)$ şi $C(4,1)$.Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3n+1 & n & 1 \\ 3n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi suma elementelor matricei A.
b)Aflaţi numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(3n+1, n)$,$n\in\mathbb{N}$,$n\geq 2$.Determinaţi valorile numărului natural n,$n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = x-ay-3$,unde $a\in\mathbb{R}$.
a)Pentru $a = -1$ calculaţi $2015\circ 2016$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care legea de compoziţie „ $\circ$ ” este asociativă.
c)Pentru $a=-1$ rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \circ 3^x = 9$

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{2}{3}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(0,+\infty)$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f_n(x) = (x-n)e^x$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
b)Arătaţi că funcţia f_{2016} este o primitivă a funcţiei f_{2015} .
c)Demonstraţi că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \frac{5-9n}{6}$, pentru orice număr natural nenul n,folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Testul 84(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 2$ şi raţia q=3.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = -x^2 + 2x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-1) = \log_2 5$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{0,1,2,3,4\}$.
5.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(-2,0)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx-2$.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care AB=$\sqrt{3}$ şi $C = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(x)A(x) = -2A(-3)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 4X^2 + mX - 4$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-2) + f(2) = 24$, pentru orice număr real m.
b)Pentru m=-1,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-\infty,-1)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$,$x\epsilon(-\infty,-1)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=-2,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(-e) > -\frac{7}{2}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3 x^2 f(x)\,dx = e^2(e-1)$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul$(0,2]$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=3 are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Testul 85(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{7}-3\right)^2+6\sqrt{7}=4^2$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,6)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+9)=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,20},acesta să fie divizibil cu 4.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+8\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,arătaţi că $\sin 2x=1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3x+1 & -6x\\ 2x & 1-4x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(4^x)\cdot A(4^x)=A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+X^2+aX-2$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=4$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1=-5$,pentru orice $a\in\mathbb{R}$ unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(5,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+8x-64}{x-5}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-6)(x-4)}{(x-5)^2}$,$x\in(5,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(2\pi)>20$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(3x-1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x-m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Aflaţi numărul real nenul a,ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Testul 86(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{3}+2\right)^2+\left(\sqrt{3}-2\right)^2=14$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,m+2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x-3}=5^3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 3.
5.Determinaţi numărul real a, ştiind că $\vec{u}\cdot\vec{v}=2016$,unde $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$,arătaţi că $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a)=I_2+a\cdot A$,unde a este un număr real şi $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & -6\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det(X(0))=1$.
b)Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-4ab)$,pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $X(2^x)\cdot X(2^x)=X(-2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+4$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-2)+f(2)=0$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+2$.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1=-11$,pentru orice $a\in\mathbb{R}$,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-\infty,3)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$,$x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(-\pi)<\frac{11}{3}$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(2x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(2x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Calculaţi $\int_0^1 f'(x)\cdot f''(x)\,dx$.

Testul 87(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_5 = 10$ şi $a_8 = 19$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$.Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $64^x = 8 \cdot 4^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr natural n din mulţimea {1,2,3,4,5,6}, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 6n + 5 = 0$.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(3\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 3\cos x)^2 - 6\sin 2x = 10$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(2A) = -28$.
b)Determinaţi numerele reale x şi y, ştiind că $A+2B=I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Dacă $A\cdot B=B\cdot A$,arătaţi că $\det B\leq 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = 4xy+4x+4y+3$.
a)Arătaţi că $(-1)\circ 1 = -1$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x = x$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere întregi,ştiind că $a\circ b=15$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-3)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x-2)e^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -e$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 6$.
b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x) = 2x^2 + \ln x + 2016$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este mai mic decât 46π.

Testul 88(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 2-i$.Arătaţi că $z^2 + 4i - 3 = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(2016)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2016$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2016$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x^2-4x} = 6^{4-x}$.
4.Aflaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,5).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = 3x-6$
6.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind că $MN = 8$,$MP = 4\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle M) = 45°$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3a & 9 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2016) + A(-2016) = 2A(0)$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det\big(A(a)\big) = 0$.
c)Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A(3) \cdot X = A(27)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y = 2xy-10x-10y+55$.
a)Arătaţi că $(-5) \circ 5 = 5$.
b)Arătaţi că $x\circ y = 2(x - 5)(y - 5) + 5$,pentru orice nemere reale x şi y.
c)Calculaţi $1\circ\sqrt[3]{2} \circ \sqrt[3]{3} \circ \ldots \circ \sqrt[3]{2016}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x - 3\ln x + 2x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e - 1$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-4, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{9}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{7}{2} + 16\ln 5$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1] \to \mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$.

Testul 89(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_{2015} = 2016$ şi $a_{2016} = 2017$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=x^2 - 2016$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 16} = x + 4$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) şi B(4,5).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AC=12 şi B=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ a-2 & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2015) + A(2017) = 2A(2016)$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(3) + xA(4)) = 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x \circ y = -xy+3x+3y-6$.
a)Arătaţi că $(-3) \circ 3 = 3$.
b)Arătaţi că $x \circ y = -(x-3)(y-3)+3$,pentru orice nemere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x+4) * (2x-5) = 6$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+4)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x+5)e^x$,x$\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x = 2,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-6,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(x^2+4)f(x)\,dx = 0$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 2\ln\frac{5}{4}$.
c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = f(x) - x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu $\frac{\ln 2}{2}$.

Testul 90(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_7 = 14$ şi $a_{10} = 20$.
2.Calculaţi $(f \circ g)(3)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2016$, g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = 3 - x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{6x-7} = 25^{3-x}$.
4.După o majorare cu 10% preţul unui produs este de 550 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de majorare.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,4) şi dreapta h de ecuaţie $y = 3x-4$.
Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.
6.Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC,în care AB=6,BC=7 şi AC=8.

Subiectul II

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & x+3 \\ x+3 & x \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi det $M(-3)$.
b)Verificaţi dacă $M(x) \cdot M(y) = M(2xy + 3x + 3y - 3) + 12I_2$,pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinaţi numărul real a astfel ca $M(a) \cdot M(x) = M(5a) + 12I_2$,pentru orice număr real x.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 - 5X + 3$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 3$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2 + 2X - 3$ este egal cu 0.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3=7$,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \ln x - e^x + 2x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3 - e$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este concavă pe $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{3}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_2^4 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right) dx = 6$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right) e^x dx = e^2$.
c)Determinaţi numărul real a,a>1 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = a$, are aria egală cu 24+3lna.

Testul 91(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 = 5$ şi $a_5 = 9$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x)=$9 - x^2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5} = x + 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1) şi B(0,2).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care BC=10 şi A=$\frac{\pi}{2}$.
Subiectul II

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & x-2 \\ x-2 & x \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi det $M(2)$.
b)Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(y) = 2M(xy - x - y + 2)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x) = 2M(a)$,pentru orice număr real x.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m = 4$ calculaţi $f(-2)$.
b)Aflaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la X+3 este egal cu -11.
c)Pentru m=4, arătaţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = 1$, unde unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x} + \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f .
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(8,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
b)Calculaţi $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei h:[0,1]→$\mathbb{R}$,$h(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Testul 92(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3+i$.Arătaţi că $z^2 - 6i - 8 = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 2018$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 2018$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-6x} = 4^{-x-2}$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu şase elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y = 3x-5$.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că AB=4,BC=7 şi $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$..

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-2a \\ 1-2a & 4a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2) + A(-2) = 2A(0)$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot X = A(2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = xy+6x+6y+30$.
a)Arătaţi că $(-6)*6 = -6$.
b)Arătaţi că $x*y = (x+6)(x+6)-6$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Calculaţi $(-2016)*(-2015)*\ldots*(-1)*0*1*2*\ldots*2016$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5e^x + 3x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 5e+5$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_2^4 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right)dx = 6$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right)e^x\,dx = e^2(2e-1)$.
c)Determinaţi numărul real a,a>1 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = a$, are aria egală cu $4-\ln a$.

Testul 93(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m, 3)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{x-2} = 2^{2-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie divizibil cu 2.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - 8\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,ştiind că $\cos x = -\frac{1}{2}$ şi $x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 2 & 2 \\ 2 & -m & 2 \\ 2 & 2 & -m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} -mx + 2y + 2z = -2 \\ 2x - my + 2z = -2 \\ 2x + 2y - mz = m \end{cases}$,unde m este un număr real.

a)Arătaţi că $\det A(0) = 16$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă pentru orice $m\in\mathbb{R}, m\neq -2, m\neq 4$.
c)Pentru m=0 să se rezolve sistemul.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - X^2 + aX + 4$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1) = 6$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 3X + 2$.
c)Demonstraţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -11$,pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-\infty, 1)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+6x-9}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$,$x\in(-\infty, 1)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(-\pi) > \frac{9}{2}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3x+2)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)\,dx = \frac{7}{2}$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = (3x + m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Aflaţi numărul real nenul a,ştiind că $\int_0^a f(x)\,dx = e^a + 1$.

Testul 94(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{6}-2\right)^2+4\sqrt{6}=10$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(m,-6)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+16)=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,10},acesta să fie divizibil cu 5.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}-4\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\cos x=-\frac{1}{2}$,arătaţi că $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-3x & -2x\\ 6x & 1+4x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(3^x)\cdot A(3^x)=A(15)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX+3$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(2)+f(-2)=-10$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-3X+3.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3=-4$,pentru orice $a\in\mathbb{R}$ unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-2}{e^x}$.
a) Arătaţi că $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3-x}{x-2}$,$x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\le\frac{1}{e^3}$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{4x^2-1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=6$.
b)Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x)=2x^2-\ln x+2017$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mare decât 29π.

Testul 95(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 3$ şi raţia $q=-2$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x + 12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(1-2x) = \log_6 5$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$.
5.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(-1,3)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx-4$.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care $AC=8$ şi $B = \frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-2a & 1 \\ 1 & 2-2a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(x)A(x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - X^2 + mX + 1$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.
b)Pentru $m=-1$,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=4$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(\pi) > 8$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 e^x f(x)\,dx = \frac{7}{3}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este cocavă pe intervalul $[2,+\infty)$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $\frac{7}{3e}$.

Testul 96(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3-4i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 25$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 + 4) = 3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 18.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0), B(0,-3)$ şi $C(3,0)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-3 & -2 \\ -3 & m-2 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 0$.
b)Demonstraţi că $A(3+m) + A(3-m) = 2A(3)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr $m \in \mathbb{R}\setminus\{0,5\}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = -2xy+6x+6y-15$.
a)Arătaţi că $x*y = -2(x-3)(x-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x, pentru care $(x*x)*x = 35$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = (x-4)e^x$.
a) Arătaţi că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-3}{x-4}$,$x \in \mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -e^2$,pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 16$.
b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$F(x) = 2x^2 + \ln x + 2018$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{275\pi}{6}$.

Testul 97(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3+i$.Arătaţi că $z^2 - 8 - 6i = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(2016)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2016$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2016$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x^2-8x} = 36^{2-2x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={10,20,30,40,50,60,70,80,90}, Acesta să fie multiplu de 30.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2),B$(a, 4)$ şi C(9,6).Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=7,BC=5 şi B= $\frac{\pi}{6}$.Calculaţi lungimea laturii AC.

Subiectul II

1. Se consideră matricea A(x)=$\begin{pmatrix} 2 & x^3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi det$\big(A(0)\big)$.
b)Arătaţi că $A(-2016) + A(2016) = 2A(0)$
c)Determinaţi numerele reale x pentru care detA(x)=0.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = 6(x + y - 5) - xy$.
a)Calculaţi $3*6$.
b)Arătaţi că $x*y = 6-(x - 6)(y - 6)$ pentru orice numere reale x şi y.
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x = x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{4x^2-4x+1}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x-1)(2x-7)}{(x-2)^2}$,$x\epsilon(2, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$(0, \infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{26}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x^2}\right) e^x\, dx = 2e^2 - e$.
c)Determinaţi volumul corpului de rotaţie determinat de rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2] \to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$.

Testul 98(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $x=(2+3i)^2+(2-3i)^2$este real.
2. Determinaţi numărul real m,ştiind că $M(2,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{3x+4}=5^{6-x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {0,1,2}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$,$B(1,4)$ şi $C(9,6)$.Determinaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
6.Aflaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC,dacă AC=6,BC=5 şi $C=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-2x & -5x\\ 4x & 1+10x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+8xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(2^x)\cdot A(4^x)=A(70)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+aX+10$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=10$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2-6X+10$.
c)Aflaţi valorile reale ale lui a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=15$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{4x^2+4x-8}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x(x-4)}{(x-2)^2}$,$x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x+1)\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_2^4\frac{f(x)}{\ln x}dx=8$.
b)Determinaţi numărul real m,pentru care funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,
$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+mx$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Determinaţi aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e.

Testul 99(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 2-2i$.Arătaţi că $z^2 = -8i$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2017$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x + 2017$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-4x} = 2^{x-4}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,1,2,3, … ,99},acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,1).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2016x-2017$.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că $AC=8\sqrt{3}$,BC=6 şi $C = \frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & -2 \\ 3 & m+3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 18$.
b)Demonstraţi că $A(-2+m) + A(-2-m) = 2A(-2)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea A(m) este inversabilă, pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = -2xy+4x+4y-6$.
a)Arătaţi că $x*y = -2(x-2)(y-2)+2$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x, pentru care $(x*x)*x = 6$.

Subiectul III

1.Se cosideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3\ln x - x^3$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3(1-x^3)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \le -1$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2-3x+3)f(x)\,dx = 0$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=3 are aria egală cu ln3 .
c)Demonstraţi că $\int_0^1 f'(x)f(x)\,dx = 0$.

Testul 100(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{2016}-1\right)^2+\left(\sqrt{2016}+1\right)^2=4034$.
2.Rezolvaţi ecuaţia $(f\circ g)(x)=6$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ şi $g(x)=2-3x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5}=x+1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9},acesta să fie divizibil cu 3.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=2016$,unde $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-8\vec{j}$.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=6,BC=5 şi AC=7.Determinaţi cosA.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=I_2+x\cdot B$,unde x este un număr real, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi B=$\begin{pmatrix}3&2\\-6&-4\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(4^x)\cdot A(4^x)=A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+X^2-aX-2$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1)+f(1)=2$,pentru orice număr real a.
b)Aflaţi numărul real a,pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.
c)Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1=-5$,pentru orice număr real a, unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-\infty,3)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{-x^2-2x+11}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(5-x)}{(x-3)^2}$,$x\epsilon(-\infty,3)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(3x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$.
c)Determinaţi numărul real a>0 pentru care aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a este egală cu 3a.

Testul 101(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $x=(2+3i)^2+(3-2i)^2$este real.
2.Calculaţi $(f\circ f)(1)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+7)=2$.
4.După o ieftinire cu de 10% preţul unui obiect devine 360 de lei.Aflaţi preţul obiectului înainte de ieftinire.
5.Determinaţi cosinusul unghiului determinat de vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$.
6.Dacă $\cos x=\frac{1}{3}$, calculaţi cos2x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 3\sqrt{2} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A=0$.
b)Demonstraţi că $A^2-3\sqrt{3}\cdot A=O_2$.
c)Determinaţi inversa matricei $B=A-\sqrt{3}\cdot I_2$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.
a)Calculaţi $\sqrt{6}*\sqrt{6}$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{54}$.
c)Arătaţi că numărul $2*2*2*2*2$ este întreg.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2x-11}{3-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(x-5)}{(3-x)^2}, x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(\pi)<-13$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(4x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=3$.
b)Aflaţi numărul real m ,pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(4x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că orice primitivă a lui f este concavă pe $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$.

Testul 102(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 3$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 4x - m > 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{2x-3} = 8$.
4.După o ieftinire cu de 20% preţul unui obiect devine 160 de lei.Aflaţi preţul obiectului înainte de ieftinire.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$,$B(5,0)$ şi $C(1,6)$.Determinaţi lungimea medianei din A a triunghiului ABC.
6.Determinaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC dacă $AC = 8$ şi $B = \frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(3) = 5A(1)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = 0$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 3X + m$, unde m este număr real.
a)Pentru m =5 calculaţi f(1).
b)Aflaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la X−3 este egal cu 3.
c)Pentru m=1, arătaţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = 9$, unde unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq 2\sqrt{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-2)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}\,dx = -\frac{3}{2}$.
b)Dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, este o primitivă oarecare a funcţiei f,determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei F.
c)Determinaţi aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=3 şi x=4 .

Testul 103(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_2 = 6$.
2.Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 6x + 5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = x + 2$.
4. După o scumpire cu de 10% preţul unui obiect devine 110 de lei.Aflaţi preţul obiectului înainte de scumpire.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-1)\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt egali.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x = \frac{1}{2}$,arătaţi că $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + 3y - 6z = a \\ x + 2y - 5z = 2 \\ 4x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$,unde a este un număr real.
a)Determinaţi numărul real a ştiind că $(x, y, z) = (3,2,1)$ este soluţie a sistemului.
b)Calculaţi determinantul matricei sistemului.
c)Rezolvaţi sistemul pentru $a = 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = 3xy-3x-3y+4$.
a)Arătaţi că $(-1)\circ 1 = 1$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x = x$.
c)Determinaţi două numere a şi b din $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$,pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-3)e^x$.
a) Arătaţi că$f'(x) = (x-2)e^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -e$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\pi}{8}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}$.
c)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.

Testul 104(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Să se arate că numărul $a=(5+3i)^2+(5-3i)^2$ este real.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$ şi $g(x)=2-3x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3)-\log_2(x+1)=3$.
4.Un obiect costă 4000 de lei.Determinaţi preţul obiectului după două reduceri succesive de preţ,prima de 20% iar a doua de 10%.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=2016$, unde $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{1}{2}$, arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-4x & 2x\\ -6x & 1+3x\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A\left(\frac{1}{2^x}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2^x}\right)=A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că polinomul f este divizibil cu $X-6$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=4e^x+x^2$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4e+2$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2. Se cosideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\frac{7}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=9\ln\frac{4}{3}-\frac{5}{2}$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)$.

Testul 105(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al cincelea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,dacă $b_1 = 1$ şi $b_2 = 2$.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m-1,5)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3} = x + 3$.
4. .Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,20},acesta să fie multiplu de 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A,B şi C astfel ca $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x} = \sqrt{3} - 2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2016 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2016\cdot I_2$.
c)Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matricială $A\cdot X=2016\cdot I_2$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = 2xy+3x+3y+3$.
a)Calculaţi $2\circ 3$.
b)Arătaţi că $x\circ y = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x = 23$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = -\frac{6}{(x-3)^2}$,$x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(\pi) > 7$.
2. Se consideră funcţia f:$(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+10x+24}$.
a) Arătaţi că $\int_0^{2017}(x+4)(x+6)f(x)\,dx = 2017$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx = -\frac{4}{2205}$.
c)Determinaţi numărul real a,a>0 ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=a , are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

Testul 106(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi a_{2017} ,ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2016$ şi $r = -1$.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(3,-4)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (3m+2)x + 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5} = \sqrt{10}$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii {1,2,3, …,20},aceasta să fie formată doar din patrate perfecte.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,-3)$, $C(2,3)$ şi $O(0,0)$.Determinaţi coordonatele punctului B,ştiind că patrulaterul OABC este paralelogram.
6.Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=$2\sqrt{2}$ şi BD=4.Calculaţi aria triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -5 & x-8 \\ 1 & x+3 & x+4 \\ 2 & 5 & x+8 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $D(2)$.
b)Arătaţi că $D(x) = (x-2)(x+2)(x+1)$,pentru orice număr real x.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(3^x - 5) = 0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=5xy+10x+10y+18.
a)Arătaţi că $x\circ y = 5(x+2)(y+2) - 2$ pentru orice numere reale x şi y.
b)Aflaţi numerele întregi a şi b, ştiind că a∘b=3.
c)Calculaţi $-2016\circ(-2015)\circ(-2014)\circ \ldots \circ 2015 \circ 2016$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=3 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-16}{x-4}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+12}$.
a)Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.
b)Demonstraţi că orice primitivă F a lui f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Demonstraţi că $\int_{-8}^{8} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{8} f(x)\,dx$.

Testul 107 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al şaselea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 1$ şi raţia q=2.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 6x + 3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x - 6) = \log_3 8$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cinci elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5,6}.
5.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(2,6)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = mx+2$.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care AB=$4\sqrt{3}$ şi $C = \frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2)) = -1$.
b)Demonstraţi că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul real x,ştiind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 4X^2 + mX - 4$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(-1) + f(1) = -16$, pentru orice număr real m.
b)Pentru m=1,arătaţi că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 + 1$.
c)Determinaţi numărul real m,ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 28\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}$,$x\in(4,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=5,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(2e) > 6$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{e^x}{x^{2017}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3 x^{2017} f(x)\,dx = e^2(e-1)$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe intervalul $[2017,+\infty)$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=3 are aria mai mare sau egală cu $\frac{e^2(e-1)}{3^{2017}}$.

Testul 108(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3+2i$.Arătaţi că $z^2 - 5 - 12i = 0$.
2.Calculaţi $(g \circ f)(2018)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2018$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x + 2018$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-7x} = 8^{2-2x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={0,10,20,30,40,50,60,70,80,90},Acesta să fie multiplu de 40.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$,$B(a,3)$ şi $C(5,4)$.Determinaţi numărul real a pentru care punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AC=6,BC=4 şi $C=\frac{\pi}{4}$.Calculaţi lungimea laturii AB.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 16 & x^3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Arătaţi că $A(-2016) + A(2016) = 2A(0)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det A(x)=0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y = 4(x + y - 3) - xy$.
a)Calculaţi $2*4$.
b)Arătaţi că $x*y = 4-(x - 4)(y - 4)$ pentru orice numere reale x şi y.
c) Determinaţi elementele din $\mathbb{R}$ simetrizabile în raport cu „$*$ ”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{9x^2-6x+1}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x-17)}{(x-3)^2}$,$x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Se consideră funcţia f:$(0,\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.
a)Arătaţi că $\int_2^5 \left(f(x) - \frac{2}{x^2}\right) dx = 39$.
b)Arătaţi că $\int_2^4 \left(f(x) - \frac{2}{x^2}\right) e^x dx = 2e^2(5e^2 - 1)$.
c)Determinaţi volumul corpului de rotaţie determinat de rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$.

Testul 109(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 5+5i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 25$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 + 5) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 17.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,0), B(0,6)$ şi $C(6,0)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este un număr real.Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3a-2 & 2 \\ 1+a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.
a)Calculaţi $\det A(2)$.
b)Determinaţi numărul întreg a ştiind că $\det A(a) = 6$.
c)Demonstraţi că $A(a)$ este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 6xy+4x+4y+2$.
a)Calculaţi $2 \circ (-2)$.
b)Arătaţi că $x \circ y = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi elementul neutru al legii „$*$ “.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-\infty, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-4}$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(3-x)e^{-x}}{(x-4)^2}$, $x \in (-\infty, 4)$.
c)Arătaţi că $f(x) \leq -\frac{1}{e^3}$ pentru orice $x \in (-\infty, 4)$.
2.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_e^{e^2} (x + 4)f(x)\,dx = e^2$.
b)Arătaţi că $\int_1^{e^2} \big(f(x) + (x + 4)f'(x)\big)\,dx = 2$.
c)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.

Testul 110(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_4 = 4$ şi $b_5 = 12$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:[3,8]→ℝ,f(x) = x − 5.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 32} = x + 4$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,0) şi B(1,2).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care BC=6 şi A= $\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Demonstraţi că A(x)A(y) = A(x + y + xy),pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,x≠−1,pentru care matricea A(x) este egală cu inversa ei .
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
x∘y = 3xy−12x−12y+52.
a)Arătaţi că x∘y = 3(x − 4)(y − 4) + 4,pentru orice numere reale x şi y.
b) Arătaţi că 1∘2∘3∘4∘5=4.
c)Determinaţi numerele reale x,pentru care x∘x∘x=x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:(0, +∞) → ℝ,f(x) = 3lnx − x.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3-x}{x}$,x∈(0, +∞).
b)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe intervalul (0, +∞).
c)Demonstraţi că $\ln\frac{x}{3} \leq \frac{x-3}{3}$,pentru orice x∈(0, +∞).
2.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{1}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_2^5 (x^2 + 9)f(x)\,dx = 3$.
b)Demonstraţi că $\int_0^3 x^2 f(x)\,dx = 3 - \frac{3\pi}{4}$.
c)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $\int_n^{n+1} 2xf(x)\,dx = \ln\frac{25}{18}$.

Testul 111(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=2−i.Arătaţi că $z^2 - 3 + 4i = 0$.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x + 2018$ şi g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = x - 2018$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x} = 5^{x-6}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,64},acesta să fie pătrat perfect.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(1,3).Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie y=2x−10.
6.Determinaţi aria triunghiului ABC,ştiind că BC=$6\sqrt{3}$,AC=4 şi C=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x+2 & 1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n+1, n+2)$,$N(2, n+1)$ şi $P(3,0)$.Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + X - 3$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 4$,pentru orice număr real a.
b)Pentru a=−3,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 + 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^4\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = x^3(4\ln x + 1)$,$x\in(0, +\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $1+4ef(x) \geq 0$,pentru orice număr real x,$x\epsilon(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = \frac{5}{2}$.
b)Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$F(x) = (x+a)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \geq \frac{6}{5}$.

Testul 112 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 3i$ şi $z_2 = 5 - 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$este real.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(3, m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-5} = 2^{-1}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,30},acesta să fie multiplu de 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$,$B(m, 3)$ şi $C(3,4)$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul B aparţine dreptei AC.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & x \\ 4 & 25 & x^2 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculaţi $A(2) - A(0)$.
b)Arătaţi că $\det(A(x)) = (x - 2)(x - 5)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$,pentru orice număr real x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = 16xy - 64x - 64y + 260$.
a)Arătaţi că $x\circ y = 16(x - 4)(y - 4) + 4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $N = 2017\circ 2018$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care $a\circ b = 116$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 6\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{x}$,$x\in(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq 2$,pentru orice $x\in(0, +\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+7}$.
a)Calculaţi $\int_1^2 (x^2 + 5x + 7)f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=2 are aria egală cu ln3.
c)Demonstraţi că $\int_{-\frac{5}{2}}^0 f'(x)f(x)\,dx = \frac{25}{98}$.

Testul 113(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z,ştiind că $2z+\overline{z}=9+2i$,unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-5$.Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x+22)=1+\log_5(x+2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre pare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(5,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $C(-3,5)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul ABC cu $BC=3\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ACB)=45$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30°$.Determinaţi lungimea laturii AB.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-2 & -1 \\ 2 & m-3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Demonstraţi că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+25x+25y-120$.
a)Arătaţi că $x*y=-5(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
c)Determinaţi numărul real x,pentru care $(x*x)*x=205$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$,$x\in(-2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+2}=0$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+4x$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(f(x)-4x)\,dx=e^2-1$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-e^x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx=1+\frac{4a^3}{3}$.

Testul 114(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_5 = 15$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,4)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 2m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(5,2) şi B(2,5).Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=6 şi AC=8.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2x+5 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2)) = -4$.
b)Demonstraţi că $A(x) + A(-x) = A(2017) + A(-2017)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy−3x−3y+12.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că e=4 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2017) = 2017\circ 3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{7}{x} + \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-7}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{7}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 7$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+6}{2x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 2xf(x)\,dx = \frac{25}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = 0$.
c)Demonstraţi că $2\int_1^n (f(x) + xf'(x))\,dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

Testul 115(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_4 = 24$ şi $b_7 = 192$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 6x + 5$.Determinaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $64^x = 4 \cdot 8^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulţimea {1,2,3,4,5,6}, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 6n + 5 = 0$.
5. Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(2\sin x + 3\cos x)^2 + (3\sin x + 2\cos x)^2 - 12\sin 2x = 13$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi B=$\begin{pmatrix} 0 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(3A) = -234$.
b)Determinaţi numerele reale x şi y ştiind că A+3B=I_2 ,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Dacă A·B=B·A,arătaţi că detB≤0.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=3xy+6x+6y+10.
a)Arătaţi că $(-2) \circ 2 = -2$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia x∘x=x.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere întregi,ştiind că a∘b=34.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-5)e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = (x-4)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f'(x) \geq -e^3$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 6$.
b)Demonstraţi că funcţia F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$F(x) = 2x^2 + \ln x + 2019$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,2]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$ este mai mic decât 44π.

Testul 116(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 = 16$ şi raţia r=5.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,5)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 3m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,2)$ şi $B(2,6)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=12 şi AC=5.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x+6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-3)) = 19$.
b)Demonstraţi că $A(x) + A(-x) = A(2019) + A(-2019)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale p şi q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 22 \end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+8x+8y+56.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+8)(y+8)-8$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că e=−7 este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x\circ(-2019) = 2019\circ(-8)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{x} + \ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{4}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+4}{4x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 4xf(x)\,dx = \frac{19}{3}$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1) = \frac{9}{8}$.
c)Demonstraţi că $4\int_1^n (f(x) + xf'(x))\,dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

Testul 117 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_4 = 81$ şi $b_5 = 243$.
2.Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f:$[1,6]\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + 16} = x + 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ şi $B(1,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AC=3 şi B=$\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 3x & 1-3x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(x + y - 2xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq\frac{1}{2}$,pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei .
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y = 2xy-8x-8y+36$.
a)Arătaţi că $x\circ y = 2(x - 4)(y - 4) + 4$,pentru orice numere reale x şi y.
b) Arătaţi că $1\circ 2\circ 3\circ 4\circ 5=4$.
c)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x\circ x\circ x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = x - 2\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-2}{x}$,$x\in(0, +\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
c)Demonstraţi că $2\ln x\leq x+2\ln 2-2$,pentru orice $x\in(0, +\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x^2+16}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2 + 16)f(x)\,dx = 1$.
b)Demonstraţi că $\int_0^4 x^2 f(x)\,dx = 4 - \pi$.
c)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $\int_n^{n+2} 2xf(x)\,dx = \ln\frac{8}{5}$.

Testul 118(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 8 - i$ şi $z_2 = 8 + i$.Arătaţi că numărul $z_1 z_2$este real.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 9} = x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,3)$ şi $B(3, a)$.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos x$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 6 & x \\ x & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 36$.
b)Determinaţi numărul real a ,ştiind că $A(1) + A(5) = aA(3)$.
c)Arătaţi că $A(x)A(y) = 6A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x şi y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy+9x+9y+24$.
a)Arătaţi că $3 * (-3) = -3$.
b)Arătaţi că $x*y=3(x + 3)(y + 3) - 3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 3)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x + 4)e^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este concavă pe $(-\infty, -5]$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(x^2 + 1)f(x)\,dx = 0$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 2\ln 2$.
c)Determinaţi numărul real m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = f(x) - x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0,x=m are aria egală cu $2\ln 10$.

Testul 119(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 5+5i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m, 4)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-4$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x - 5) = 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu număr impar de elemente ale mulţimii A={0,1,2,3}.
5.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii AD.Arătaţi că $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CD}$.
6.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A.Arătaţi că cosB·sinC+cosC·sinB=1.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2019 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2019I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2019I_2$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 + mX - 24$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{8}{x_1x_2} + \frac{8}{x_2x_3} + \frac{8}{x_3x_1} = 3$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+16}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{(x^2+16)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 4$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right) dx = \ln 2$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-1, \infty)$.
c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu $\ln\frac{16}{5}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 120(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 3i$ şi $z_2 = 5 - 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$este real.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $M(3, m)$ aparţină graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{5x-7} = 5^{-2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40},acesta să fie multiplu de 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,6),B(2,4) şi $C(m, 2)$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$,unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -x & -x+1 & 1 \\ 2 & -x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinaţi numărul real x,pentru care $A(x) + A(x-2) = 2A(-2)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-n, -n+1)$,$N(2, -n)$ şi P(3,0).Determinaţi numărul natural n,ştiind că punctele M,N şi P sunt coliniare.
2.Se consideră polinomul f=$X^3 + aX^2 + 2X - 2$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(2) - f(-2) = 24$,pentru orice număr real a.
b)Pentru a=1,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 - X + 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$,$x\in(2, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=3,situat pe graficul fucţiei f.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x+2} = 0$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x + 6x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 6x)\,dx = e - 1$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x) - e^x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + 2a^3$.

Testul 121(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 6$ şi raţia $r = 3$.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $A(m, 4)$,aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2 + 5) = \log_5 30$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie divizibil cu 4.
5.Determinaţi numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 3)\vec{i} + 6\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că sin2x=1,ştiind că $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ a-1 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $A(2018) + A(2020) = 2A(2019)$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\det A(a) = 0$.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\big(A(3) + xA(4)\big) = 0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-3x-3y-12$.
a)Arătaţi că $(-3) * 3 = -3$.
b)Arătaţi că $x*y=-(x + 3)(y + 3) - 3$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x + 3) * (2x - 4) = 12$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 18x^2 + 25$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x - 3)(x + 3), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+5}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
2.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+6}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{15}{2}$.
b)Demonstraţi că funcţia $F:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = x + 6\ln x + 2019$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = (f(x) - 1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu 3 .

Testul 122(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=2-i$.Arătaţi că $z^2-3+4i=0$.
2.Calculaţi $(g\circ f)(5)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x)=x+2020$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-6x}=3^{4-3x}$.
4.Aflaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6}.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,4).Determinaţi ecuaţia dreptei d,care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=5x+3.
6.Determinaţi aria triunghiului MNP,ştiind căMN=10,NP=$6\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle N)=60°$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 3\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=9$.
b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det\big(A(a)\big)=0$.
c)Arătaţi că $A(a)A(b)=3A(a+b)+abI_2$ pentru orice numere reale a şi b,unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X+m$,unde m este un număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=m$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $g=X^2+2X-3$ este egal cu 0.
c)Pentru m=−3 calculaţi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$,unde x_1, x_2şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5^x-x\ln 5-1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.
b)Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul$(-\infty,0]$.
c)Demonstraţi că $5^x\geq x\ln 5+1$,pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-8x+20$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)+8x-20)\,dx=\frac{1}{3}$.
b)Calculaţi $\int_0^4\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.
c)Arătaţi că $\int_{2019}^{2020}\frac{1}{f(x)}dx\leq\frac{1}{4}$.

Testul 123(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z = 3-2i$.Calculaţi z^2.
2.Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m, 2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-5$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(x - 7) = 2$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu număr par de elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5}.
5.În paralelogramul ABCD se notează cu M mijlocul laturii DC.Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{DA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B.Arătaţi că cosA·sinC+cosC·sinA=1.

Subiectul II

1.Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 0 & 2020 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi detA.
b)Arătaţi că $A+A\cdot A=2020I_2$.
c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2020I_2$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX - 4$, unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = 1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 88$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+25}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(5-x)(5+x)}{(x^2+25)^2}$,x$\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 4$ situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$(-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6}\right) dx = \ln\frac{5}{4}$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-2, \infty)$.
c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria mai mare sau egală cu $\ln\frac{35}{16}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 124(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_2 = 5$.
2.Se consideră funcţiile f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-2)^2$ şi $g(x) = 2021 - x$.Calculaţi $g\big(f(2)\big)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $81^x = 3^{x^2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $(a-3)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul.Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
6.Arătaţi că tgx+ctgx=$\frac{10}{3}$, ştiind că sinx= $\frac{1}{\sqrt{10}}$ şi x$\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix}x-2 & x\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = -3$.
b)Demonstraţi că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a,ştiind că $\big(aA(1) + A(a)\big)A(0) = (a^2+4)I_2$.
2.Se consideră polinomul f=$2X^3 - 6X + m$,unde m este un număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul $X^2 - X + 1$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{4}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1$.
a) Arătaţi că $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$,x$\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice x$\epsilon(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx = \frac{208}{5}$.
b)Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^4}\,dx$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 4x^3$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Testul 125(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $1-i+(i+1)(1-i)-(-i-1)=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x+9$.Calculaţi $(f\circ f)(-3)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-6x+10)=\log_3 5$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1), B(-3,2), C(2,5)$ şi $D(8,4)$.Demonstraţi că patrulaterul ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că $5\sin x+\cos x=3\sqrt{2}$, ştiind că $\operatorname{tg}x=1$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 26 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(X(1))=-25$.
b)Demonstraţi că $X(-a)+X(a)=X(-2019)+X(2019)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X-m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=-2$,arătaţi că $f(2)=0$.
b)Arătaţi că, dacă polinomul f se divide cu $X+2$ polinomul f se divide cu X^2-3X+2.
c)Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-3}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}$,$x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x+1-\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)+\ln x)\,dx=11$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3e^2+4e-6}{2}$.
c) Determinaţi numărul real a,$a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+4a-4.

Testul 126(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 6$ şi $a_3 = 10$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$.Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n) < 5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 9} = x + 3$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1 : y = \frac{x}{3} + 3$ şi d_2:y=$(m - 2)x + 1$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare.
6.Arătaţi că, dacă $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $X(a, b) = \begin{pmatrix} a & 4b \\ b & a \end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det\big(X(2,1)\big) = 0$.
b)Determinaţi că $X(a, b)X(c, d) = X(ac + 4bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a,b,c şi d.
c)Determinaţi perechile de numere întregi (m, n) pentru care $\det\big(X(m, n)\big) = 5$.
2.Se consideră polinomul $f=2X^3 - 4X^2 - 7X - m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=-9$, arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X-\sqrt{2}$.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x - 1)e^x + 1$.
a) Arătaţi că $f'(x) = xe^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt[n+1]{e} \leq \frac{n+1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.
2. Se consideră funcţia f:$[9, +\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\sqrt{x - 9}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x - 9}\,dx = -\frac{97}{6}$.
b)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(x+9)}{x+9}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_{10}^{x} f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-9}}dt}{x^2}$.

Testul 127(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)-\sqrt{80}=0$.
2.Determinaţi numărul real a, pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+4$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă x=1.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+9}=3-\sqrt{x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4,5,6}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuaţie y=ax+3 şi d_2, de ecuaţie $y=\frac{x}{6}+1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele.
6.Arătaţi că $\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)=-\sin 2x$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}-3&-2\\3&2\end{pmatrix}$ şi $M(x)=I_2+2xA$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=-1$.
b)Demonstraţi că $M(x)-M(2020)=M(-2020)-M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(-2mn)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∘y=12xy+x+y.
a)Arătaţi că $x\circ y=12\left(x+\frac{1}{12}\right)\left(y+\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{12}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care x∘x=1.
c)Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=12x+1$.Demonstraţi că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{x^2+24}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4-x)(x+6)}{(x^2+3)^2}$,x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(\sqrt{17})<f(\sqrt[3]{65})$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x+6)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=36$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $9e^n-5$.

Testul 128(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1+2i)^2-4i+3=0$, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real nenul m, ştiind că abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+4x-7$ este egală cu 8.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-12x+57)=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea M={1,2,3, … ,120} , acesta să fie număr impar.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-2,0)$ şi $C(0,1)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, ştiind că ABCD este paralelogram.
6.Arătaţi că sin3x+ sin2x+sinx $=1+\sqrt{2}$,ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}1&1\\5&5\end{pmatrix}$ şi $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=7$.
b)Demonstraţi că $M(a)M(b)=M(a+b+6ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(4)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineţte legea de compoziţie asociativă $x*y=9x+9y-xy-72$.
a)Arătaţi că $x*y=-(x-9)(y-9)+9$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
c)Calculaţi $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-6x+9}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x-5)(x-3)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $0\leq(x-3)(y-3)\leq 4e^{\frac{x+y-10}{2}}$, pentru orice x,y$\in[3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x-1}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4(x-1)f(x)\,dx=60$.
b)Arătaţi că funcţia F: $(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)$ este o primitivă a funcţiei f.
c)Determinaţi numărul real a, a>2, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuaţii x=2 şi x=a^2 are aria egală cu ln4.

Testul 129(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $b_1 = 4$ şi raţia q=2.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x + 8$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = -7x - 7$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia$\sqrt{10x} + x = 20$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A=$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{144}\}$, acesta să fie număr natural.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$,$B(1,-3)$ şi $C(5,-3)$.Determinaţi ecuaţia medianei din B a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\sin x(9\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 9\cos x) = 9$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -6 \\ 6 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1)) = 37$.
b)Demonstraţi că $A(2022 - a) + A(2022 + a) = 2A(2022)$,pentru orice număr real a.
c)Determinaţi perechile de numere reale x şi y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-18)$.
2.Pe mulţimea G=$(-6,6)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{36x+36y}{36+xy}$.
a)Arătaţi că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
b)Determinaţi $x\in G$, pentru care $x*x=\frac{18}{5}$.
c)Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \frac{6(x-1)}{x+1}$.Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - 5x + 5\ln(x+1)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-5x}{x+1}$,$x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\ln(1-\cos x) \leq -\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x+7}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 14$.
b)Demostraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe intervalul $[-7,+\infty)$.
c) Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $8-15e^{-n}$.

Testul 130(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 4$ şi raţia r=2.
2.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 8x + 15$ cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1} - 2\cdot 5^x = 3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 12x + 36 = 0$.
5.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$, ştiind că triunghiul ABC este echilateral şi AB=2.
6.Arătaţi că $\sin^2(x+\pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-3a & -6a \\ 2a & 1+4a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = 2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere naturale m şi n pentru care $A(m)A(n) = A(15)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x\circ x\leq 65$.
c)Calculaţi $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2025^n$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = 3x - \ln x^{3e}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3x-3e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu Ox.
c)Demonstraţi că ecuaţia $e^{3x} = x^{3e}$ are exact o soluţie în $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x-5)(x+5)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = -66$.
b)Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=5 şi x=6.
c)Determinaţi numărul real a, a>6, ştiind că $\int_6^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx = \ln 21$.

Testul 131(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(0{,}2\cdot 10+1)(0{,}2\cdot 10-1)=3$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-8x+m=0$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=16$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{7-x}=\sqrt{x+8}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor natural de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor cu 4 mai mare decât cifra zecilor.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care cosx=−sinx, atunci cos2x=0.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-2ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $\det(A(m,n))=1$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+15X^2-mX+80$, unde m este număr real.
a)Pentru m=95, arătaţi că $f(1)=-1$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x+10$.
a)Arătaţi că $f'(0)=0$.
b)Demonstraţi că oricare două tangente la graficul funcţiei f sunt concurente.
c)Demonstraţi că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{16}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{16}{x}\right)dx=4$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3 are aria egală cu $\ln\frac{25}{17}$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{16}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Testul 132(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-4x-4$.Demonstraţi că $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+24}=5x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-4x+3=0$.
5.Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u}=4\vec{v}$, unde $\vec{u}=8\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=b\vec{i}+3\vec{j}$.
6.Se consideră expresia $E(x)=\cos^2 x+\sin^2 x+\sqrt{2}(\cos x-\sin x)-1$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+3 & x-2\\ x+2 & x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(x))=-5$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul natural n astfel încât
$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}20 & -5\\ 13 & -2\end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+3}{x^2+y^2+3}$.
a)Arătaţi că $0*1=1$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.
c)Demonstraţi că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x\sqrt{x^2-2x+3}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-3x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a,ecuaţia $f(x)=a$ are cel puţin o soluţie.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)+xe^x)\,dx=\frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{-e^4+e+3}{2}$.
c)Se consideră F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $F(1)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{4e-1}{3}$.

Testul 133(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 3$ şi raţia r=4.Calculaţi a_3 .
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x + 1$.Determinaţi numerele reale x pentru care $f(x^2) = 19$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+3} - 3^{2x} = 26$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizor al lui 80.
5.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătaţi că $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$.
6.Arătaţi că $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & a \\ 1+a & 12+a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 36$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea X·X=A(0).Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= x+\sqrt[3]{y}+3$.
a)Arătaţi că $1\circ 27=7$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x^6 = 15$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-\infty,-1)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$,$x\in(-\infty,-1)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+10}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+2x+10)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2+2x+10}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.
c)Arătaţi că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+21}{4}$.

Testul 134(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 6$ și $a_3 = 8$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 1$.Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n) = 10$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 25} = x - 5$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii {1,2,3,4,5,6,7,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$,$N(4,4)$,$P(5,4)$ și $Q(1,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN și PQ.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AB=8 şi cosB=$\frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A \cdot A) = a^2b^2$, pentru orice numere reale a şi b.
b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât A·X=X·A.Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x şi t astfel încât $X=\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$.
c)Pentru a=−25 şi b=−16, determinaţi matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care Y·Y=A.
2.Pe mulţimea M=$[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y= x\sqrt{4y+1} + y\sqrt{4x+1}$.
a)Arătaţi că 2∗2=12.
b)Demostraţi că x∗0=0∗x=x, pentru orice x∈M.
c)Determinaţi x∈M pentru care $(x^2 + x) * 2 = 12$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x\ln(x+3)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \ln(x+3) + \frac{x}{x+3}$,$x\in(-3,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă .
c)Se consideră funcţia g:$(-3,-2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+3)^x$.Demonstraţi că, dacă $x_1,x_2\in(-3,-2]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
2. Se consideră funcţia f:$[0,1]\to\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - x^{11}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{11}{12}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 x^{10}\big(f(x)\big)^3\,dx = \frac{1}{44}$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1 \big(f(x)\big)^n\,dx \geq \int_0^1 \big(f(x)\big)^{n+1}\,dx$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 135(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $\log_3 2$,$\log_3 4$ şi $\log_3 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 3x + 4$.Determinaţi numărul real x pentru care $f(x) = x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|3x - 2| = 3x + 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor pară şi cifra zecilor impară.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$ sunt coliniari.
6.În triunghiul ABC dreptunghic în A, BC=8 şi B=$\frac{\pi}{6}$ .Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3a-2 & 9a-9 \\ 1-a & 4-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(a)\cdot A(b) = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n, ştiind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^4) = A(32)\cdot A(-n)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y= 4x^2 - 7xy + 3y^2$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=2$.
b)Demonstraţi că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $3^x\circ 4^x = 0$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x$. aici am ramas
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=−2,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2 + 4(x^2+1) + 5} - \sqrt{4x^2 + 8x + 5} \le (x-1)^2$, pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 \left(4 - f^2(x)\right) dx = 3\pi$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria egală cu $2\left(\sqrt{10} - 3\right)$.
c)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \ln\left(\sqrt{10} + 1\right)$.

Testul 136(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 3$ şi $b_2 = 9$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 5$.Calculaţi $(f \circ g)(5)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1} = 8 - x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifra, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2) > 0$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(1,1)$,$C(3,5)$ şi $D(-1,0)$.Demonstraţi că punctele B,D şi mijlocul segmentului AC sunt coliniare.
6.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 2^a + 1 & 2^a \\ -2^a & 1 - 2^a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(1) + A(2) - A(1)\cdot A(2) = I_2$.
c)Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n) = A(m+n)$.Arătaţi că m=n=1.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y = x^2 + y^2 + x + y - 1$.
a)Arătaţi că $(-1)*(-1) = -1$.
b)Demonstraţi că $x*y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2 * x^2 \leq 3$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 8x - \frac{1}{2}\ln(x+4)$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x+7)(2x+9)}{2(x+4)}$,$x\in(-4,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+8x-f(x)}{x}$.
c)Demonstraţi că $x^2 + 8x + \frac{63}{4} \geq \frac{1}{2}\ln(2x+8)$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5 + \frac{2}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (x^2+1)f(x)\,dx = 66$.
b)Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx = 20 + \ln 5$.
c)Demostraţi că $F(x) \geq F(x-1) + 1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Testul 137 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_4 = 6$ şi $b_5 = 18$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 4$.Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m) = -m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{5x} = 10^{6x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulţimea $\{0,1,2,3,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$ şi $C(-4,0)$.Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $\sin 2x=\sqrt{3}$, ştiind că $tgx=\sqrt{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2+x & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
c)Se consideră numerele reale a,b şi c, astfel încât $A(a)\cdot A(b) = A(c)$.Demonstraţi că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2.Pe mulţimea $M=[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.
a)Arătaţi că $0\circ(-1)=-1$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $(2x)\circ(2x)=0$.
c)Demonstraţi că $x\circ\sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + x\ln x + 1$.
a) Arătaţi că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^x + x\ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+6} + \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+6}\,dx = \frac{41}{6}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$.Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{7}}{2} + 3\ln\frac{a+\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

Testul 138(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(4-2i)+3i(2+i)=9$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-25$.Calculaţi $(f\circ f)(5)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-6x+12)=1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,2)$ şi $B(3,a)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctele O,A şi B sunt coliniare.
6.Se consideră $E(x)=\cos x+2\cos 2x+\cos 3x.$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x,y)=\begin{pmatrix}3y-x & 4y\\ -2y & -x-3y\end{pmatrix}$ unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(1,1))=0$.
b)Demonstraţi că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.
c)Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.
2.Pe mulţimea $A=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3^{xy}-(1-x-y)$.
a)Arătaţi că $1\circ 0=1$.
b)Arătaţi că $x\circ\frac{1}{x}\geq 4$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.
c)Demonstraţi că, dacă m şi n sunt numere naturale pare, atunci $m\circ n$ este număr natural par.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-\ln x^6$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f .
c)Demonstraţi că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=4$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\frac{e^2+1}{e}$.
c)Demonstraţi că $\int_{-2-a}^{-2+a} f(x)\,dx\geq-\frac{2a}{e^2}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Testul 139(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul N=$\log_2 24 - \log_2 3 + 6$ este pătratul unui număr natural.
2.Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x - 4} = x - 4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1!,2!,3!, … ,12!}, acesta să fie divizibil cu 9.
5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul D mijlocul segmentului AB.Arătaţi că, pentru orice puncte E şi F astfel încât $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FD}$, are loc relaţia $2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB}\right) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
6.Arătaţi că $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, pentru orice număr real x.
.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-3 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1))=5$.
b)Demonstraţi că A(x) este inversabilă, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(3) \cdot X \cdot A(3) = A(4)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru
$x \circ y = xy - \sqrt{8}(x + y - 1) + 8$.
a)Arătaţi că $\sqrt{8} \circ 0 = \sqrt{8}$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(x - \sqrt{8}\right) \circ \left(x + \sqrt{8}\right) = x$.
c)Determinaţi numerele raţionale al căror simetric în raport cu legea de compoziţie „∘” este număr raţional.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x}\ln(x^2 + 4)\right) + 2\ln 4$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$, $x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(n, f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = \frac{1}{13}x + 1$.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
.
2.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^7} - \frac{6\ln x}{x^7}$ şi funcţia $F:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\ln x}{x^6}$, o primitivă a lui f.
a)Arătaţi că $\int_1^e x^6 \left(f(x) + \frac{6\ln x}{x^7}\right) dx = 1$.
b)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}} x \cdot f(x^2 + 1)\, dx = -\frac{31\ln 2}{4096}$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x \cdot F(x)\, dx = \frac{a^2-1}{2}$.

Testul 140(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(5+\sqrt{5}\right)=20$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x$. Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-3}=\frac{1}{5^{2x}}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0),B(0,3)$ şi $C(-1,0)$.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.
6.Se consideră expresia $E(x)=2\cos\frac{x}{2}-tgx-\sin\frac{3x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(M(-1)\right)=4$, pentru orice număr real x.
b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(-1)=M(4x-1)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(-1)\cdot M(-1)=M(x+10)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=5xy+20x+20y+76$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 0=16$.
b)Demonstraţi că $x\circ y=5(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(5,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+5}{x-5}+\ln(x-5)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-9x-10}{(x-5)^2}$, $x\in(5,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=6, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{x^2+5}{x-5}+\ln(x-5)\geq 21+\ln5$, pentru orice $x\in(5,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+8}{6x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx=18$.
b)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{8}{6x^2+1}\right)dx=\frac{\ln5}{6}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1\frac{x+8}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx=m(e^2-1)$.

Testul 141 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_2 = 7$ şi $a_3 = 14$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 4$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^x \cdot \frac{1}{7} = 49$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 12.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$ şi $B(3,4)$.Determinaţi coordonatele punctului C,astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 4-x \\ 3-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că matricea $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(3x-1)(3y-1)+1$.
a)Arătaţi că $1 * 2=11$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=5$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{2}{m}\right) = 1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 1 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{6x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+9} = 3$.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x(e^x + 6x^2)$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x+6x^2}\,dx = 8$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 6x^3)\,dx = 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)\,dx = \frac{e^4-e}{2} + a$.

Testul 142 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că media aritmetică a numerelor $a=22-\sqrt{23}$ şi $b=24+\sqrt{23}$ este egală cu 23.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3-x$.Arătaţi că $f(a)+g(a)=1$, pentru orice număr real a.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{8x-7}=x$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulţimii $\{1,2,4,5\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ şi $B(4,4)$.Arătaţi că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC=8$ şi măsura unghiului B este egală cu 60°. Arătaţi că înălţimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ -x & 1-x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-1))=3$.
b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(-2)-A(1)=2I_2$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(-x)\cdot A(x)-xA(-x)=3I_2$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3(x+y)-4(xy+1)$.
a)Arătaţi că $1\circ 2=-3$.
b)Arătaţi că, dacă $a\circ 3=-4$, atunci $a\circ(-a)=0$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\geq 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+x+2-5\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.
c)Demonstraţi că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(6-5x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{7}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-11$.
c)Determinaţi $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\frac{7}{72}$.

Testul 143(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{12}-3\right)\left(\sqrt{12}+3\right)=3$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+1$.Determinaţi numerele reale a pentru care $f(a)=1-2a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+4)=\log_4(5x-2)$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-4)$ şi $B(4,4)$.Determinaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului AB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi tgB=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi A(a)=$\begin{pmatrix}1-a & a\\ -4a & 4a+1\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(2)\right)=7$.
b)Arătaţi că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(3)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y-2$.
a)Arătaţi că $0\circ 3=-5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x=-x$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că $x\circ a=x-2a$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x^2+6x-6)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(x^2+8x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
c)Demonstraţi că $e^{x+8}(x^2+2x-2)\le 10$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=20$.
b)Demonstraţi că orice primitivă G:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
c)Arătaţi că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2}{f(x)}dx=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Testul 144(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4+6\sqrt{3}-3\left(2\sqrt{3}+1\right)=1$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5x-2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+2$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}\cdot 3^3=1$.
4.Determinaţi câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={3,4,5,6,7,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(0,4)$,$C(5,5)$ şi M, mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele MO şi MC au lungimi egale.
6.Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}4+a & 3-3a\\ 1-a & 1+4a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=1$.
b)Arătaţi că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(a^2)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-6xy+5y^2$.
a)Arătaţi că $0\circ 2=20$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-3$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi, $m<n$, pentru care $m\circ n=5$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=4+\frac{8x-8}{x^2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{8(2-x)}{x^3}$ $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $|f(x)-f(y)|\leq 2$, pentru orice $x,y\in[1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x^2-4\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)+4\ln x)\,dx=7$.
b)Arătaţi că $\int_1^e x\left(3x^2-f(x)\right)dx=e^2+1$.
c)Demonstraţi că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)\,dx=\frac{(3e-5)(3e+1)}{2}$, pentru orice primitivă F:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f.

Testul 145 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3-6i+i(6-i)=4$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=16-2x$.Arătaţi că $(f\circ f)(4)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-2x+9)=\log_5 9$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(a,0)$ şi $C(0,b)$.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=BC=10 şi AC=16. Arătaţi că BD=6, unde BD este înălţime în triunghiul ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}-x+1&-2x+1\\-x-1&-2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(B(2))=-4$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(-1)=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(-x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$
2.Se consideră polinomul $f=-X^3-2X^2+mX+3$, unde m este un număr real.
a)Pentru m=0, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X+1.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{6x^2}{x^2+x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{6x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$,$x\in(1,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+f(x^2)\geq\frac{92}{9}$, pentru orice $x\in(1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-5)^2$.
a)Arătaţi că $\int_6^8\frac{f(x)}{(x-5)^2}dx=14$.
b)Arătaţi că $\int_6^7\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}$.
c)Arătaţi că $\int_0^1\frac{xf(e^x)}{e^x}dx=\frac{e^2+11}{4}$.

Testul 146(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $6-5\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\left(5-\sqrt{2}\right)=4$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^{x-3}=10^{-2x}\cdot 10^{3}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cu cifre din mulţimea A= {1,2,3,4,5,6,7}, au ambele cifre pare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,6) şi B(5,0).Determinaţi distanţa dintre punctele B şi M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi aria egală cu 27. Arătaţi că AB=9.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(2A)=4$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(xA-B(x)\right)=-x$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $B(x+2)+B(x)=2A\cdot A\cdot A$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-3X-9$, unde m este număr real.
a)Pentru m=9, arătaţi că $f(1)=-2$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că restul împărţirii lui f la polinomul $X-2$ este egal cu 5.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-3}{x^2}-\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{6-x^2-x}{x^3}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+\ln x)=0$.
c)Arătaţi că $4f(x)-1\leq\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=7x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=42$.
b)Arătaţi că $\int_1^6(f(x)-7x)\,dx=2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=21(a-2\ln 2)$.

Testul 147 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 9$ şi $a_3 = 13$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$. Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(25 - x^2) = \log_6 9$.
4.Se consideră mulţimea $A=\{0,1,2, \dots ,9\}$. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea A, numărul $\sqrt{3n + 4}$ să aparţină mulţimii A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(5,2)$ şi $C(6,3)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
6.Se consideră expresia $E(x) = 2\sin x \cdot \cos 2x + \left(\sin\frac{3x}{2}\right)^2$ .Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ şi $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(B(1)) = 7$.
b)Arătaţi că $B(0) \cdot B(1) - B(2) = 4A$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a) - aA$ **nu** este inversalilă.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy - 4x - 5y + 20$.
a)Arătaţi că $4 * 4=0$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*9=x$.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale x pentru care $(5 * x) * x \geq 5$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{6x}{x^2+x+4}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{6(4-x^2)}{(x^2+x+4)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) - f(4 - x) \leq 3$, pentru orice $x\in[4, +\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+7}{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (x + 1)f(x)\,dx = 16$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + 6\ln 2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2 - 1)e^x f(x)\,dx = e(e + a)$.

Testul 148(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\cdot(1,2+0,2)+0,2=3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x+1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-9x+9)=\log_5 x$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,3,4,6,8,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,4) , B(4,8) şi C, mijlocul segmentului OA. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=10 şi $C=\frac{\pi}{4}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x&x-2\\x-4&x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(5)\big)=12$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\big(B(4)-B(2)\big)\cdot A=aA$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x(x+2)+y(y+2)$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ(-3)=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $(-2)\circ x=x^2-2$.
c)Arătaţi că $x\circ y\geq -2$, pentru orice numere reale x şi y.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}-2\sqrt{x}-3$.
a) Arătaţi că $f'(x)=-\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3(x^2+1)f(x)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)\,dx=\frac{3}{2}\cdot\ln 2$.
c)Determinaţi $m\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^m\left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=3$.

Testul 149(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3-2i+i(2-2i)=5$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=7x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=16$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{2x+1}=6^x\cdot 6^2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin una dintre cifre egală cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,5)$ şi $B(8,2)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului OB.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=7 şi $BC=7\sqrt{7}$. Arătaţi că $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x+4 & x+1\\ -x-1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A=1$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(0)+I_2=aB(0)$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)(8-x-y)$.
a)Arătaţi că $0*9=9$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*6=0$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+3)*(n-3)$ este natural.

Subiectul III
1. Se consideră funcţia $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-6\ln(x+5)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+9x-11}{x+5}$, $x\in(-5,+\infty)$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $x^2-x\geq 6\ln\frac{x+5}{6}$, pentru orice $x\in(-5,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+7x+1$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-7x)\,dx=12$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^2)^2}\,dx=\frac{1}{8}$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $7\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

Testul 150(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\cdot(1,3+0,1)-1,8=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=6x+12$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=a\cdot f(0)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2-x+1}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3>12$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$, $B(2,0)$ şi $C(8,4)$.Determinaţi distanţa dintre punctul A şi mijlocul segmentului BC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=10 şi $\sin B=\frac{4}{5}$. Arătaţi că AC=8.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}2+2x&x\\-x&2-2x\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=-8$.
b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)+3A(-2)=16I_2$.
c)Determinaţi numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m)=\frac{1}{m}A(m)$ este inversa matricei $A(-m)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+3X+a$, unde a este număr real.
a)Pentru $a=-1$, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $3x_1+3x_2+3x_3-x_1x_2x_3=3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $a=-9$,determinaţi rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-35}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+5)(7-x)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-10e^5\le f(x)\le e^6$, pentru orice $x\in[-3,4]$.
2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=6x+\frac{4\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{4\ln x}{x}\right)dx=15$.
b)Arătaţi că $\int_1^e(f(x)-6x)\,dx=2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af(e^2)$.

Testul 151(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 14$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(2) = a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 - 5x + 4) = \log_2(4 + x)$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,5,6,7,8,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,3)$, $B(4,6)$ şi C, mijlocul segmentului OB. Arătaţi că AO=AC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=8 şi cosB=$\frac{2}{3}$. Arătaţi că BC=12.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $\det A = 3$.
b)Arătaţi că matricea B=$\frac{1}{3}(I_2 - A)$ este inversa matricei A.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2)\cdot X = 3A$.
2.Pe mulţimea M=$[0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{xy}-x-y$.
a)Arătaţi că $1 * 4=-3$.
b)Determinaţi $x\in M$ pentru care $x*(9x)=-x^2$.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $2^x*2^{x+2} = -6^x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+24}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-3x^2-x+24}{(x^2+x+24)^2\sqrt{x}}$,$x\in(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi $a\in(0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A\big(a, f(a)\big)$ este paralelă cu axa Ox.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x + 6$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - 6x - 6)\,dx = 4$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}\,dx = \frac{1}{72}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx = \frac{e^2+m}{4}$.

Testul 152 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 8$ şi $a_3 = 28$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(m) = f(0)\cdot f(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{7x - 10}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 103$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,3)$ şi C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC.Determinaţi coordonatele punctului C.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=AC şi aria egală cu 98. Arătaţi că $BC=14\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -3x \\ x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = -9$.
b)Arătaţi că $xA(-y) - A(-xy) = (x-1)I_2$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(-1)\cdot A(x+1) = -xA(x)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\frac{1}{8}(x+1)(y+1)-1$.
a)Arătaţi că $1\circ 3=0$.
b)Arătaţi că $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\leq n$, pentru care $m\circ n=7$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x - 5 + \ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x+4}{\ln x} = 3$.
c)Demonstraţi că $f(x) + f(y) \leq -\frac{53}{4}$, pentru orice $x\in(0,1]$ şi $y\in[1,2]$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx = -4$.
b)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)\,dx = -\frac{16}{3}$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia graficul funcţiei $g:[6,7]\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\ln(4e^5)$.

Testul 153(Prelucrare bacalaureat n)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)+3\left(1-3\sqrt{2}\right)=11$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x-8$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(2a)=f(a)-6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x^2-8x+7}=x\sqrt{3}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel mult egală cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$, $B(5,1)$ şi $C(3,0)$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic în C.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-\sin 3x\cdot\cos x$, unde x este număr real.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}4x+1 & 0\\ 8x & x+1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=6$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-1)\cdot A(2)-5I_2=A(x)$.
c)Demonstraţi că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 16$, pentru orice număr real nenul x.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^2-xy-6x+7y+6$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=7$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(7x)=1$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=m$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-6)\sqrt{x}+\frac{35}{\sqrt{x}}$..
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3x^2-6x-35}{2x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{x-5}=\frac{12}{5}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^2+5x)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{17}{6}$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(6e-5)$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_2^4\frac{(x-1)f(x)}{f(x-1)}dx=ae(3+\ln 3)$.

Testul 154(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(6{,}9-5{,}4):3+2{,}5=3$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-14$. Determinaţi numărul real a pentru care punctul $A(-3a,a)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(1+6x-x^2)=\log_7(7-x)$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar de 15.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(0,5)$ şi $C(4,2)$. Arătaţi că triunghiul BDC este isoscel, unde D este mijlocul segmentului AC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu tgB=$\frac{1}{5}$ şi aria egală cu 40.Arătaţi că AC=4.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a+3&a-2\\-a&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=2$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(0)\cdot\big(4I_2-A(2)-A(-2)\big)=xI_2$.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(1)=4I_2$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+aX+2-a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=3$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(3x^2-7x+5)$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x(3x+2)(x-1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-5+3x}{f(x)-5+x}=-1$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=a, situat pe graficul funcţiei f, are panta egală cu 0.
2. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=(6x^2+12x)\sqrt{x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=8$.
b)Arătaţi că $\int_3^8\frac{x^2+2x}{f(x)}dx=\frac{1}{3}$.
c)Se consideră funcţia g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2.

Testul 155 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 5i$ şi $z_2 = 1 - 3i$. Arătaţi că $iz_1 + z_2 = 6$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 7$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a + 6) = a + f(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{7x} = \sqrt{x^2 - x + 7}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 > 110$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(10,2)$ şi $C(2,9)$.Determinaţi distanţa dintre punctul C şi mijlocul segmentului AB.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AC=12 şi $B=\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $4\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,y) = \begin{pmatrix} x + 3y & xy \\ 12 & x + 3y \end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(2,1)) = 1$.
b)Arătaţi că matricea $A(x,y)$ este inversabilă, pentru orice numere reale distincte x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(x,2)\cdot A(x,2) = 12A(y,0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=9-\frac{x+y}{2}+xy$.
a)Arătaţi că $2*4=14$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*5=5x$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale,pentru care $(m-n)*(m+n) = m^2$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+12x-6}{x^2+6}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{12(x+6)(1-x)}{(x^2+6)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-3 \le f(x) - f(y) \le 3$, pentru orice $x,y\in[-6,1]$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 20x^2 - 3 + \ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)\,dx = \frac{131}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x) - 20x^2 + 3)\,dx = \frac{1}{2}$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+3}{\sqrt{x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=4 este egală cu 244+mln2.

Testul 156(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $i(10-i)+5(3-2i)=16$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{3x-2}=5^{-x}\cdot 25$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={2,3,4,7,8,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(5,3),B(7,6) şi C, astfel încât A este mijlocul segmentului BC. Determinaţi lungimea segmentului OC.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=2 şi BC=4.Arătaţi că $AD=3\sqrt{3}$, unde AD este înălţime a triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x-4 & -2-x\\ x & x+4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-8$.
b)Arătaţi că matricea $B=2I_2-A(0)$ este inversa matricei A(0).
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $4X-2A(0)\cdot X=A(2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+6X^2+mX+36$, unde m este număr real.
a)Pentru m=6,arătaţi că $f(-6)=0$.
b)Pentru m=5,determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+1.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că produsul a două dintre acestea este egal cu 1.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este concavă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^2+1+e^x$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-6x^2)\,dx=e$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \frac{x}{f(x)-e^x}\,dx=\frac{\ln 5}{6}$.
c)Se consideră $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^2)-6x^4$. Ştiind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{2-e}{2}$, arătaţi că $G(1)=1$.

Bibliografie

[1].....subiecte.edu.ro