Cuprins

Cuprins.... 1
Cuvânt înainte.... 3
Mulţimi de numere.... 4
Formule de calcul prescurtat.... 4
Progresii aritmetice.... 4
Progresii geometrice.... 5
Funcţii.... 5
Funcţia de gradul întâi.... 6
Funcţia de gradul doi.... 6
Vectori în plan.... 8
Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic.... 8
Relaţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic.... 9
Elemente de trigonometrie.... 9
Arii,teorema sinusului,teorema cosinusului.... 10
Funcţii trigonometrice inverse 11
Puteri,radicali,ecuaţii exponenţiale,ecuaţii iraţionale.... 11
Logaritmi,ecuaţii logaritmice.... 12
Ecuaţii trigonometrice.... 13
Metode de numărare.... 13
Matematici financiare,probabilităţi.... 13
Elemente de geometrie analitică.... 14
Subiectul I.... 15
Matrice ,determinanţi,sisteme de ecuaţii liniare,inversa unei matrice.... 43
Subiectul II1.... 46
Legi de compoziţie,grupuri.... 67
Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.... 67
Polinoame,rădăcini ale polinoamelor.... 67
Divizibilitatea polinoamelor,teorema restului,teorema lui Bezout.... 68
Relaţiile lui Viete.... 68
Ecuaţii reciproce de grad trei.... 69
Subiectul II2.... 69
Limite de şiruri 84
Tabel de derivate.... 84
Reguli de derivare.... 84
Derivate de ordin 1 şi2.... 84
Derivarea funcţiilor compuse.... 89
Tabel de derivate funcţii compuse.... 89
Derivate funcţii compuse.... 89
Limitele unor funcţii.... 89
Continuitate.... 90
Asimptote.... 90
Derivata unei funcţii într-un punct,ecuaţia tangentei,derivata de ordin doi.... 91
Regula lui l'Hospital.... 91
Rolul derivatei de ordin 1 şi 2 în studiul funcţiilor.... 91
Subiectul III1.... 92

Tabel de integrale nedefinite.....108
Integrala nedefinită,primitive.....108
Proprietăţi pentru integrala nedefinită.....108
Primitive.....108
Integrala definită,proprietăţi pentru integrala definită.....110
Integrale definite.....110
Inegalităţi integrale.....111
Metoda integrării prin părţi.....111
Integrale prin părţi.....111
Metoda schimbării de variabilă.....111
Integrale prin schimbare de variabilă.....111
Arii,volume.....111
Subiectul III2.....112
Teste oficiale.....130
Teste propuse.....211
Bibliografie 361

Cuvânt înainte

Culegerea se adresează elevilor din clasele 9,10,11,12, M1,care vor să se pregătească pentru susţinerea examenului de Bacalaureat.
Culegerea conţine elemente de teorie,exerciţii recapitulative precum şi teste.
La Subiectul I avem 804 exerciţii din clasele a 9-a şi a 10-a,la Subiectul II 1 avem 130 exerciţii de algebră clasa a 11-a, la Subiectul II 2 avem 130 exerciţii de algebră clasa a 12-a, la Subiectul III 1 avem 130 exerciţii de analiză matematică clasa a 11-a iar la Subiectul III 2 avem 130 exerciţii de analiză matematică clasa a 12-a.
Culegerea conţine 81 de teste oficiale şi 151 de teste propuse.
Testele propuse,precum şi exerciţiile recapitulative sunt asemănătoare celor întâlnite în subiectele oficiale,modelele oficiale şi în simulările oficiale din anii anteriori.
Culegerea conţine capitole dedicate noţiunilor de derivată,integrala nedefinită şi definită.
Culegerea nu conţine răspunsuri.
Recomand începerea pregătirii pentru Bacalaureat cu parcurgerea culegerii în ordinea crescătoare a paginilor până la testele oficiale.Testele oficiale au fiecare corespondent la testele propuse,de exemplu Testul K oficial este asemănător cu Testul K propus , $K\epsilon\{1,2,\dots,81\}$,din această cauză ,dacă culegerea e utilizată la clasă se recomandă ca unul dintre teste să se rezolve în clasă iar corespondentul său se dă temă.
Vă doresc spor la treabă,dacă utilizaţi culegerea şi mult succes la examenul de Bacalaureat.
Dacă observaţi erori le puteţi anunţa la 0744491758.
Autorul

Mulţimi de numere

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ este mulţimea numerelor naturale

$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$este mulţimea numerelor întregi

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}|m,n\epsilon\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$este mulţimea numerelor raţionale

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x|x$ este fracţie zecimală infinită neperiodică$\}$este mulţimea numerelor iraţionale

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ este mulţimea numerelor reale

Pentru $x\epsilon\mathbb{R}$ şi $n\epsilon\mathbb{Z}$ definim $[x]=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1\Leftrightarrow x\epsilon[n,n+1)$ şi $\{x\}=x-[x]$.

$[x]=$partea întreagă a lui x,$\{x\}=$partea fracţionară a lui x .

$x=[x]+\{x\}$.

Ex.$[6,73]=6$ $[-6,73]=-7$

$|x|=\begin{cases}x, \text{dacă } x\geq 0\\ -x, \text{dacă } x<0\end{cases}$ $|x|=$modulul lui x,valoarea absolută a lui x

Ex.$|-9|=9$ $|9|=9$

$\mathbb{C}=\{z=a+bi|a,b\epsilon\mathbb{R},i^2=-1\}$ este mulţimea numerelor complexe

Fie $a,b\epsilon\mathbb{R}$ şi $z=a+bi$, definim $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, numit modulul numărului complex z,

iar $\bar{z}=a-bi$ se numeşte conjugatul numărului complex $z=a+bi$,$Re(z)=a$,$Im(z)=b$

Ex.Pentru $z=6+4i$ atunci $|z|=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

Pentru $z=6+4i\Longrightarrow\bar{z}=6-4i$,pentru $z=5-3i\Longrightarrow\bar{z}=5+3i$

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$

$z=a+bi\epsilon\mathbb{R}\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z=\bar{z}$

Fie $z_1=a+bi$ şi $z_2=c+di$ atunci

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$

$z_1=z_2\Leftrightarrow a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$

$i^2=-1,i^3=-i,i^4=1,i^5=i,i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1\ ,\ i^{4n+3}=-i$

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=i^n(1+i-1-i)=0$

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$

$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3+\cdots+b^{2n})$

Progresii aritmetice

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$se numeşte progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=a_{n-1}+r,\forall n\geq 2$,unde $r\epsilon\mathbb{R}$ se numeşte raţia progresiei.

$a_2=a_1+r,a_3=a_2+r=a_1+2r,a_4=a_3+r=a_1+3r$

Ex. a_n:2;6;10;14;18;22;...este o progresie aritmetică cu $a_1 = 2$ şi $r = a_2 - a_1$=6−2=4.
$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = r, \forall n \geq 2$.
$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Longrightarrow S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$
$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$.
x,y,z sunt în progresie aritmetică$\Leftrightarrow y = \frac{x+z}{2}$.
x,y,z sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + r \\ z = y + r. \end{cases}$
x,y,z sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + r \\ z = x + 2r. \end{cases}$
x,y,z sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - r \\ z = y + r. \end{cases}$

Progresii geometrice

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = b_{n-1} \cdot q, n \geq 2$,unde q≠0 se numeşte raţia progresiei,$b_1 \neq 0$.
$b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$.
Ex.b_n:3;6;12;24;...este o progresie geometrică cu $b_1 = 3$ şi q=$\frac{b_2}{b_1}$=$\frac{6}{3}$=2.
$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2$, q≠0, $b_1 \neq 0$.
$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică$\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$, q≠0, $b_1 \neq 0$.
$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică$\Longrightarrow S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} =$
$= \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$,pentru q≠1 şi $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = nb_1$,pentru $b_1 = 1$.
$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}$,pentru a≠1
$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$,pentru a≠1
x,y,z sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow y^2 = xz$.
x,y,z sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = yq. \end{cases}$
x,y,z sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = xq^2. \end{cases}$
x,y,z sunt în progresie geometrică$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{q} \\ z = yq. \end{cases}$

Funcţii

Graficul ,imaginea unei funcţii

Fie funcţia f:D→C
$G_f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ este graficul funcţiei f
$\mathcal{G}_f = \{M(x, f(x)) | x \in D\}$ este imaginea geometrică a graficului funcţiei f
$\mathcal{G}_f$:y=f(x) e ecuaţia reprezentării geometrice a graficului funcţiei f
$M(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$ şi $\alpha \in D$
Imf ={f(x)|x∈D}={y∈C|∃x∈D pentru care $f(x) = y$} este imaginea funcţiei f,mulţimea valorilor funcţiei f

Intersecţia cu axele,intersecţia graficelor a două funcţi

$\mathcal{G}_f \cap Ox \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = 0,\ \mathcal{G}_f \cap Oy \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Oy: x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y=f(0), \begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ \mathcal{G}_g: y = g(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = g(x)$

Monotonia funcţiilor

Pentru $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$,definim $R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, numit raport de variaţie al funcţiei f

f este strict crescătoare $\Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$

f este strict crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) > 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$

f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) < 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este crescătoare $\Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

f este crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

f este descrescătoare $\Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in D, \text{cu } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

f este descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \leq 0, \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

Compunerea funcţiilor

Dacă f:D→C şi g:E→D definim f∘g:E→C şi $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

Ex.Pentru f,g:ℝ→ℝ,$f(x) = 3x + 2$ şi $g(x) = 4x - 5$ avem

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 3g(x) + 2 = 3(4x - 5) + 2 = 12x - 15 + 2 = 12x - 13$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 4f(x) - 5 = 4(3x + 2) - 5 = 12x + 8 - 5 = 12x + 3$

$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 3f(x) + 2 = 3(3x + 2) + 2 = 9x + 6 + 2 = 9x + 8$

$(f \circ g)(0) = f\big(g(0)\big) = f(-5) = -15 + 2 = -13$

$(f \circ f)(0) = f\big(f(0)\big) = f(2) = 6 + 2 = 8$

Funcţia de gradul întâi

Funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = ax + b$,unde a,b∈ℝ,a≠0 se numeşte funcţie de gradul întâi.

$\mathcal{G}_f \cap Ox = \left\{A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$ $\mathcal{G}_f \cap Oy = \{B(0, b)\}$

a>0⇔f este strict crescătoare ⇒f este crescătoare

a<0⇔f este strict descrescătoare ⇒f este descrescătoare

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	−semn a	0	semn a

Ex.Pentru f:ℝ→ℝ,$f(x) = 3x - 6$ avem

$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \{A(2,0)\}$

$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Oy: x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y=f(0)=-6 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap Oy = \{B(0,-6)\}$

Dacă, în plus g:ℝ→ℝ,$g(x) = 5x + 8$ determinaţi $\mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_g$.

$\begin{Bmatrix} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ \mathcal{G}_g: y = g(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x-6=5x+8 \Leftrightarrow 3x-5x=8+6 \Leftrightarrow -2x=14 \Leftrightarrow x=-7 \Rightarrow$

$f(-7) = -27 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_g = \{C(-7, -27)\}$

Funcţia de gradul doi

Funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = ax^2 + bx + c$,unde a,b,c∈ℝ,a≠0 se numeşte funcţie de gradul doi.

$\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ este forma canonică a funcţiei de gradul doi

Graficul funcţiei de gradul doi este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi care are axa de simetrie d:$x=-\frac{b}{2a}$.

Pentru a>0

f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[-\frac{b}{2a},+\infty)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punctul de minim a lui f

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ este minimul,valoarea minimă a lui f

Imf=$\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$ este imaginea funcţiei f

$\mathcal{G}_f\cap Oy=\{C(0,c)\}$

Pentru a<0

f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[-\frac{b}{2a},+\infty)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punctul de maxim a lui f

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ este maximul,valoarea maximă a lui f

Imf=$(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$ este imaginea funcţiei f

Cazul 1 $\Delta<0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}\notin\mathbb{R}, x_1\neq x_2\Leftrightarrow\mathcal{G}_f\cap Ox=\emptyset$,parabola nu intersectează pe Ox

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	semn a		

Cazul 2 $\Delta=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\in\mathbb{R}, x_1=x_2\Leftrightarrow\mathcal{G}_f\cap Ox=\{D(x_1,0)\}$,parabola intersectează pe Ox într-un singur punct ,parabola e tangentă la Ox

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	semn a		0	semn a	

Cazul 3 $\Delta>0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2\Leftrightarrow\mathcal{G}_f\cap Ox=\{A(x_1,0),B(x_2,0)\}$,parabola intersectează pe Ox în două puncte

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	semn a		0	$-$semn a	0	semna	

$\mathcal{G}_f$ e deasupra de Ox $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow$parabola e deasupra de Ox$\Leftrightarrow ax^2+bx+c>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\mathcal{G}_f$ e sub Ox $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow$parabola e sub Ox$\Leftrightarrow ax^2+bx+c<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$, $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a<0\end{cases}$

Vectori în plan

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Dacă ABCD este paralelogram,atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Pentru $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}=(a,b),\vec{u}=c\vec{i}+d\vec{j}=(c,d)$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$ avem

$\vec{v}=\vec{u}\Leftrightarrow(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$

$\vec{v}+\vec{u}=(a+c)\vec{i}+(b+d)\vec{j}=(a+c,b+d)$

$\vec{v}-\vec{u}=(a-c)\vec{i}+(b-d)\vec{j}=(a-c,b-d)$

$\alpha\vec{v}=(\alpha a)\vec{i}+(\alpha b)\vec{j}=(\alpha a,\alpha b)$

$\vec{v},\vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\vec{v},\vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ astfel ca $\vec{v}=\alpha\vec{u}$

$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\varphi$ este produsul scalar al vectorilor $\vec{v},\vec{u}$,unde $\varphi\in[0^\circ,180^\circ]$ este măsura unghiului dintre vectorii $\vec{v},\vec{u}$

$\vec{v}\cdot\vec{u}=ac+bd$ este expresia analitică a produsului scalar

$\cos\varphi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$

Pentru $\vec{u}\neq\vec{0}$ şi $\vec{v}\neq\vec{0}$ avem $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{r}_A$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului A

$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$

Pentru $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),M(x_M,y_M),G(x_G,y_G)$ şi $O(0,0)$avem

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

$|\overrightarrow{AB}|=AB=d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$\vec{r}_A=\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O,y_A-y_O)=(x_A,y_A)$

M este mijlocul lui [AB] $\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B}{2}$

G este centrul de greutate al triunghiului ABC $\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$

A,B,C coliniare $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ colniari

A,B,C coliniare,în această ordine $\Leftrightarrow AB+BC=AC$

$AB\parallel CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ coliniari

ABCD paralelogram $\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow(x_D-x_C,y_D-y_C)=(x_A-x_B,y_A-y_B)$

ABCD paralelogram $\Leftrightarrow$[AC], [BD] au acelaşi mijloc $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}\\ \frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$

Vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}$ sunt vectori opuşi, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$,unde $\vec{0}$ este vectorul nul

$sim_BA=C\Leftrightarrow B$ este mijlocul lui [AC] .

Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Fie ΔABC ,$m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$,$AD\perp BC,D\in BC$

T Pitagora $\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$

T catetei$\Rightarrow\begin{cases}AB^2 = BD \cdot BC\\ AC^2 = CD \cdot BC\end{cases}$

T înălţimii$\Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ şi $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ $\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

Dacă M este mijlocul lui [BC]$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = BM = MC$=R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC

$\left.\begin{matrix}m(\sphericalangle A) = 90^\circ\\ m(\sphericalangle B) = 60^\circ\\ m(\sphericalangle C) = 30^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$

Reciproca T Pitagora în ΔABC,dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ e dreptunghic în A,adică $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$

Relaţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic

Fie ΔABC ,$m(\sphericalangle A) = 90^\circ$,$m(\sphericalangle B) = x^\circ$,$m(\sphericalangle C) = 90^\circ - x^\circ$,BC=a,AB=c,AC=b

$\sin x^\circ = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \cos C = \cos(90^\circ - x^\circ) \Rightarrow \sin x^\circ = \cos(90^\circ - x^\circ)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\cos x^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \sin C = \sin(90^\circ - x^\circ) \Rightarrow \cos x^\circ = \sin(90^\circ - x^\circ)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$tg\, x^\circ = tg B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = ctg C = ctg(90^\circ - x^\circ) \Rightarrow tg x^\circ = ctg(90^\circ - x^\circ)$, $ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg x$

$ctg\, x^\circ = ctg B = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = tg C = tg(90^\circ - x^\circ) \Rightarrow ctg x^\circ = tg(90^\circ - x^\circ)$, $tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctg x$

$\sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = 1$

$tg\, x^\circ = \frac{\sin x^\circ}{\cos x^\circ}$ $ctg\, x^\circ = \frac{\cos x^\circ}{\sin x^\circ}$ $tg\, x^\circ = \frac{1}{ctg\, x^\circ}$ $ctg\, x^\circ = \frac{1}{tg\, x^\circ}$

x	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
sinx	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
ctgx	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Elemente de trigonometrie

Fie sistemul cartezian xOy,cercul $\mathcal{C}(O, r = 1)$,pe care considerăm un sens pozitiv de parcurgere,sens invers acelor de ceasornic,numit sens trigonometric

Fie $M(x_M, y_M) \in \mathcal{C}(O, r = 1)$,$\varphi \in \mathbb{R}$,astfel ca $m(\sphericalangle xOM) = \varphi$,atunci prin definiţie avem

$\begin{cases}\cos\varphi = x_M\\ \sin\varphi = y_M\end{cases}$

$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$,pentru $\cos\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

$ctg\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,pentru $\sin\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Paritate,imparitate

$\sin(-x)=-\sin x, \cos(-x)=\cos x, tg(-x)=-tgx, ctg(-x)=-ctgx$

Periodicitate $\pi=180°, \frac{\pi}{2}=90°$

$\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \cos(x+2\pi)=\cos x,\ tg(x+\pi)=tgx,\ ctg(x+\pi)=ctgx$

$\sin(x+2k\pi)=\sin x,\ \cos(x+2k\pi)=\cos x,\ tg(x+k\pi)=tgx,\ ctg(x+k\pi)=ctgx, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\sin(x°+360°)=\sin x°, \cos(x°+360°)=\cos x°, tg(x°+180°)=tgx°, ctg(x°+180°)=ctgx°$

$\sin(x°+360°k)=\sin x°, \cos(x°+360°k)=\cos x°, \forall k\in\mathbb{Z}$

$tg(x°+180°k)=tgx°, ctg(x°+180°k)=ctgx°, \forall k\in\mathbb{Z}$

Formule

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin^2 x°+\cos^2 x°=1$

$\sin x°=\cos(90°-x°),\ \cos x°=\sin(90°-x°), tgx°=ctg(90°-x°), ctgx°=ctg(90°-x°)$

$tg\,x°=\frac{1}{ctg\,x°}$ $ctg\,x°=\frac{1}{tg\,x°}$

Reducerea la primul cadran

$\sin(180°-x°)=\sin x°, \sin x°=\sin(180°-x°)$

$\cos(180°-x°)=-\cos x°, \cos x°=-\cos(180°-x°)$

$\sin(\pi-x)=\sin x, \sin x=\sin(\pi-x)$

$\cos(\pi-x)=-\cos x, \cos x=-\cos(\pi-x)$

$\sin(x°-180°)=-\sin x°, \sin(x-\pi)=-\sin x$

$\cos(x°-180°)=-\cos x°, \cos(x-\pi)=-\cos x$

$\sin(360°-x°)=-\sin x°, \sin(2\pi-x)=-\sin x$

$\cos(360°-x°)=\cos x°, \cos(2\pi-x)=\cos x$

Alte formule

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$, $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$, $\cos 2a=2\cos^2 a-1$, $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$, $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$, $tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2 a}$

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$,

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

Arii,teorema sinusului,teorema cosinusului

Fie ΔABC, $BC=a, AB=c, AC=b, AM\perp MC, BN\perp AC, CP\perp AB, M\in BC, N\in AC, P\in AB, AM=h_a, BN=h_b, CP=h_c$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC

Fie $p=\frac{a+b+c}{2}$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=rp$, unde r este raza cercului înscris în ΔABC

T cosinusului $\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$ T. sinusului $\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

Dacă ΔABC este echilateral cu latura $AB=a$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ şi $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ este înălţimea sa.

Funcţii trigonometrice inverse

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsinx	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x, \forall x\in[-1,1]$, $\arcsin(\sin x)=x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin x)=x, \forall x\in[-1,1]$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccosx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x, \forall x\in[-1,1]$, $\arccos(\cos x)=x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\arccos x)=x, \forall x\in[-1,1]$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctgx	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arcctgx	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

Puteri,radicali,ecuaţii exponenţiale,ecuaţii iraţionale

Puteri

$a^0=1$ pentru $a\neq 0$, $a^1=a$, $a^2=a\cdot a$, $a^3=a\cdot a\cdot a$, $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factori}}$

$a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $a^x:a^y=a^{x-y}$, $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$, $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$, $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$

$(-a)^2=a^2$, $(-a)^3=-a^3$, $(-a)^{2n}=a^{2n}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$

Ecuaţii exponenţiale

Pentru $a>0, a\neq 1$, avem $a^{f(x)}=a^b\Leftrightarrow f(x)=b$, $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $a^{f(x)}=b, b>0\Leftrightarrow f(x)=\log_a b$

Ex. $5^{3x+4}=25\Leftrightarrow 5^{3x+4}=5^2\Leftrightarrow 3x+4=2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

$4^x=\frac{1}{8}\Leftrightarrow(2^2)^x=\frac{1}{2^3}\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{-3}\Leftrightarrow 2x=-3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

Radicali de ordin 2

Pentru $a\geq 0$ definim $\sqrt{a}=b$, unde $b\geq 0$ şi $b^2=a$.

Proprietăţi

$\sqrt{a}\geq 0$, $\sqrt{a}=0\Leftrightarrow a=0$, $\sqrt{a}>0\Leftrightarrow a>0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases}$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$, $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$

Pentru $a\geq 0$, avem $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

Pentru a<0,avem $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$

Fie a,b≥0 ,atunci a<b⇔$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Pentru $\sqrt{f(x)}$ avem c.e. $f(x) \geq 0$.

Ecuaţii iraţionale

$\sqrt{f(x)} = b$ c.e. $f(x) \geq 0$

Pentru b≥0 avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^2$ etc.

Pentru b<0 avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \big(g(x)\big)^2$ etc.

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

Radicali de ordin 3

Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim $\sqrt[3]{a} = b$,unde $b \in \mathbb{R}$ şi $b^3 = a$.

$\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$, $\sqrt[3]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\sqrt[3]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$,

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^n = \sqrt[3]{a^n}$, $\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$

a<b⇔$\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

Pentru $\sqrt[3]{f(x)}$ avem c.e. $f(x) \in \mathbb{R}$

Ecuaţii iraţionale

$\sqrt[3]{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^3$ etc

$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \big(g(x)\big)^3$

$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Logaritmi,ecuaţii logaritmice

Logaritmi

Fie a>0,a≠1,b>0, avem $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Ex. $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$, $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$, $5^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$

$a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$, $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^2 = 2$, $\log_a a^3 = 3$, $\log_a a^n = n$, $y = \log_a a^y$

$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B)$, $\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$, $n \cdot \log_a A = \log_a A^n$,

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a \sqrt{x} = \frac{\log_a x}{2}$, $\log_a \sqrt[3]{x} = \frac{\log_a x}{3}$

Pentru $\log_a f(x)$ avem c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Ecuaţii logaritmice

$\log_a f(x) = b$ c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a a^b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ etc.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

$\log_a f(x) = g(x)$ c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ etc.

Ecuaţii trigonometrice

Pentru $a\in[-1,1]$ avem $\sin x=a\Leftrightarrow x\in\{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in[-1,1]$ avem $\cos x=a\Leftrightarrow x\in\{2k\pi \pm \arccos a | k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in\mathbb{R}$ avem $\operatorname{tg} x=a\Leftrightarrow x\in\{\operatorname{arctg} a + k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

Pentru $a\in\mathbb{R}$ avem $\operatorname{ctg} x=a\Leftrightarrow x\in\{\operatorname{arctg} a + k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

Metode de numărare

Fie $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$,$\operatorname{card} A=n$ şi $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$, numită mulţimea părţilor lui A,mulţimea submulţimilor mulţimii A

$\operatorname{card} A=n\Leftrightarrow \operatorname{card} \mathcal{P}(A)=2^n$

Numărul de submulţimi ordonate de n elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $P_n = n!$.

$0!=1,\ 1!=1\ ,\ 2!=1\cdot 2=2\ ,\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720$

Pentru $n\geq 1$ avem $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n$

$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n\cdot (n+1)=n!\cdot (n+1)$

$(n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n\cdot (n+1)\cdot (n+2)=n!\cdot (n+1)\cdot (n+2)=(n+1)!\cdot (n+2)$

Numărul de submulţimi ordonate de k elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}=(n-k+1)\cdot (n-k+2)\cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n.$

Numărul de submulţimi de k elemente ale lui A (ale unei mulţimi cu n elemente) este egal cu $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}$.

$C_n^k = C_n^{n-k}\ ,\ C_n^0 = C_n^n = 1\ ,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n\ ,\ C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\ ,\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n\ ,\ C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}$,

unde $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$,$k\in\{0,1,2,3,\dots,n\}$

$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + (-1)^n C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k =$

$= \sum_{k=0}^n T_{k+1}$,unde $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$,$k\in\{0,1,2,3,\dots,n\}$

Numărul de funcţii $f:A\to B$ este egal cu $(\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A}$.

Matematici financiare,probabilităţi

Procente

$\frac{a}{b}$ din $c = \frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}$, $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$p\% = \frac{p}{100}$, $p\%$ din $c = \frac{p}{100}$ din $c = \frac{p}{100}\cdot c = \frac{p\cdot c}{100}$

$p\%$ din $x=r \Leftrightarrow \frac{p}{100}\cdot x = r \Leftrightarrow x = r\cdot\frac{100}{p} \Leftrightarrow x = \frac{100r}{p}$

Taxa pe valoare adăugată

$P_v = P_p + TVA$, $TVA = p\%$ din P_p , $TVA = P_v - P_p$

Probabilităţi

$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Ex.Determinaţi probabilitatea ca alegând,la întâmplare un număr din mulţimea numerelor de două cifre ,acesta să fie pătrat perfect.

$A=\{10,11,12,\dots,99\}=\{\overline{ab}|a\in\{1,2,3,\dots,9\},b\in\{0,1,2,\dots,9\}\}\Rightarrow cardA=99-9=9\cdot 10=90=$numărul cazurilor posibile

$B=\{x\in A|x \text{ este pătrat perfect}\}=\{16,25,36,49,64,81\}=\{4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2\}\Rightarrow cardB=9-3=6=$
$=$numărul cazurilor favorabile

$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

Elemente de geometrie analitică

Se consideră sistemul cartezian xOy

Panta unei drepte

Fie dreapta d,$m(\sphericalangle d,Ox)=\alpha\in[0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $m_d=tg\alpha$=panta dreptei d

Dacă d:$y=mx+n\Rightarrow m_d=m$

Dacă d:$ax+by+c=0\Leftrightarrow by=-ax-c\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a}\Rightarrow m_d=-\frac{a}{b}$

Dacă $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$=panta dreptei AB

Ecuaţia unei drepte care trece prin două puncte

$AB:\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}$, $AB:y-y_B=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot(x-x_B)$, $AB:\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}=0$

Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct şi are o pantă dată

Dacă se ştie panta dreptei d, m_d şi $A(x_A,y_A)\in d\Rightarrow d:y-y_A=m_d(x-x_A)$

Fie $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C)$

Coliniaritate

A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$

Aria triunghiului ABC

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $A(x_A,y_A)$ şi d:$ax+by+c=0\Rightarrow d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Condiţia ca un punct să aparţină unei drepte

$A(x_A,y_A)\in d:ax+by+c=0\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$

Condiţii de paralelism,perpendicularitate

Fie $d_1:y=m_1x+n_1$ şi $d_2:y=m_2x+n_2$, atunci

$d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow m_1=m_2$, $\quad d_1\perp d_2\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$

Subiectul I (prelucrări bacalaureat)

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}|n-3\leq 2\}$ este egală cu 15.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 4.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+7}=\sqrt{1-x}$.

4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 7 elemente ale unei mulţimi cu exact 10 elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$,$B(2,-2)$ şi $C(10,8)$.Determinaţi lungimea segmentului AD, unde punctul D este mijlocul segmentului BC.

6.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2023\pi=0$.

7.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}|n+1\leq 6\}$ este egală cu 15.

8.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 4.

9.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+5}=\sqrt{7-x}$.

10.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 9 elemente ale unei mulţimi cu exact 11 elemente.

11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$,$B(-1,3)$ şi $C(7,9)$.Determinaţi lungimea segmentului BD, unde punctul D este mijlocul segmentului AC.

12.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2017\pi=0$.

13.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=1$ şi $b_2=4$.

14.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+9=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.

15.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3)+\log_2(x-3)=4$.

16.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

17.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

18.Se consideră triunghiul ABC cu AB=2 , AC=$6\sqrt{3}$ şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

19.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=1$ şi $b_2=5$.

20.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+mx+9=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.

21.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$.

22.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.

23.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,8)$ şi $B(8,2)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

24.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$3\sqrt{3}$, AC=6 şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

25.Arătaţi că numărul $n=(5-i\sqrt{3})(5+i\sqrt{3})$ este întreg, unde $i^2=-1$.

26.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+a$.

27.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2021^x + 2021^{-x} = 2$.
28.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară.
29.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-4)$ şi$B(3,-3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
30.Arătaţi că $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.
31.Arătaţi că numărul $n=\left(3-i\sqrt{5}\right)\left(3+i\sqrt{5}\right)$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
32.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x-a$.
33.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2022^x + 2022^{-x} = 2$.
34.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor impară.
35.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ şi$B(5,-5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
36.Arătaţi că $\sin(a-b)\sin(a+b) = (\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.
37.Se consideră numărele complexe $z_1=3-i$ şi $z_2 = 7-3i$.Arătaţi că $3z_1 - z_2 = 2$.
38.Derminaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(a+2) = 24$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x-6$.
39.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 9^x - 9^{x+1} + 63 = 0$.
40.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1) \leq 56$.
41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,9)$,$B(7,1)$ şi $C(6,m)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
42.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AB=3 şi aria triunghiului ABC este egală cu 6.
43.Se consideră numărele complexe $z_1=3-i$ şi $z_2 = 8-2i$.Arătaţi că $2z_1 - z_2 = -2$.
44.Derminaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(a+3) = 35$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x-5$.
45.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.
46.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1) \geq 20$.
47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,3)$,$B(-1,5)$ şi $C(m,4)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
48.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AC=6 şi aria triunghiului ABC este egală cu 24.
49.Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
50.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1} + \frac{x_2^2-1}{x_2} = \frac{3}{2}$.
51.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{12-x} - x = 0$.
52.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{\log_4 n \,|\, n\in\mathbb{N}^*, n \leq 70\}$, acesta să fie număr natural
53.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,4)$ şi $P(4,2)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.
54.Se consideră triunghiul ABC cu $AC=6\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A) = 45°$ şi $m(\sphericalangle B) = 30°$.Determinaţi lungimea laturii BC.

55.Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{7}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
56.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+4=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{15}{4}$.
57.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{20-x}-x=0$.
58.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{\log_2 n\,|n\in\mathbb{N}^*, n\leq 70\}$, acesta să fie număr natural
59.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ şi $P(4,4)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.
60.Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$.Determinaţi lungimea laturii BC.
61.Calculaţi modulul numărului complex $z=(3+i)(2-3i)-2(1-i)$.
62.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m-3)x+m(m+1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
63.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\log_5 x-\log_x 5=4$.
64.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 46 submulţimi cu cel mult două elemente.
65.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii AC şi punctul N mijlocul segmentului BM. Demonstraţi că $2\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.
66.Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, ştiind că 3+7cosx=cos2x.
67.Calculaţi modulul numărului complex $z=(3-i)(2+3i)-2(1+i)$.
68.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+3)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
69.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6\log_6 x-\log_x 6=5$.
70.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 37 submulţimi cu cel mult două elemente.
71.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii AB şi punctul N mijlocul segmentului CM.Demonstraţi că $2\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AN}=\vec{0}$.
72.Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, ştiind că 4+9cosx=cos2x.
73.Arătaţi că numărul $n=\left|1-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|$ este natural.
74.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=9-x$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=1-9x$.Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale inecuaţia $f(x)\leq g(x)$.
75.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}\cdot 2^x=108$.
76.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
77.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$,$B(1,2)$ şi $C(1,4)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
78.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că BC=4,$B=\frac{\pi}{6}$ şi $C=\frac{\pi}{3}$.
79.Arătaţi că numărul $n=\left|1-\sqrt{6}\right|+\left|3-\sqrt{6}\right|$ este natural.
80.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=13-x$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=1-13x$.Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale inecuaţia $f(x)\geq g(x)$.
81.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 2^{x+2}=144$.
82.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma folosind doar cifre pare.

83.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-2)$,$B(3,1)$ şi $C(6,1)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.

84.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că $AC=4$,$A=\frac{\pi}{3}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

85.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $2\bar{z}-z=2+9i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

86.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f se află pe axa Ox.

87.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(3x-2)}=\frac{1}{2}$.

88.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele distincte două câte două şi impare.

89.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-3,2)$ şi dreapta d de ecuaţie $y=x+4$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

90.Arătaţi că $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

91.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $3\bar{z}-z=6-8i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

92.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+9$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f se află pe axa Ox.

93.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(3x+4)}=\frac{1}{2}$.

94.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele distincte două câte două şi pare.

95.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,3)$ şi dreapta d de ecuaţie $y=x+3$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

96.Arătaţi că $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$, pentru orice număr real x.

97.Se consideră numărul complex $z=3-2i$.Arătaţi că $z^2-6z+13=0$.

98.Derminaţi numerele reale a şi b,pentru care graficele funcţiilor $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x-a$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=-bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

99.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(6x+7)=1+\log_5(x+4)$.

100.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele pare.

101.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$,$B(4,2)$ şi $C(1,6)$.Determinaţi lungimea segmentului CM, ştiind că M este simetricul punctului A faţă de punctul B.

102.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că $AB=6$,$AC=12$ şi $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

103.Se consideră numărul complex $z=2-3i$.Arătaţi că $z^2-4z+13=0$.

104.Derminaţi numerele reale a şi b,pentru care graficele funcţiilor $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x+a$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=bx+4$ se intersectează în punctul $M(3,12)$.

105.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(7x+8)=1+\log_6(x+5)$.

106.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele impare.

107.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$,$B(5,2)$ şi $C(4,6)$.Determinaţi lungimea segmentului CM, ştiind că M este simetricul punctului A faţă de punctul B .

108.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că $AB=10$,$AC=12$ şi $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

109.Arătaţi că numărul $n=\log_6\left(\sqrt{15}-3\right)+\log_6\left(\sqrt{15}+3\right)$ este natural.

110.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+8x+10$.

111.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+5)^3=(5-x)^3$.
112.Calculaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{0,2,4,5,6\}$.
113.Punctele M,N şi P verifică relaţia $2\overrightarrow{MN}+7\overrightarrow{NP}=\vec{0}$.Calculaţi lungimea segmentului MP,ştiind că MN=3.
114.Arătaţi că $\sin x+\sin(\pi+x)+\sin(\pi-x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real.
115.Arătaţi că numărul $n=\log_4(\sqrt{13}+3)+\log_4(\sqrt{13}-3)$ este natural.
116.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+7x+3$.
117.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+6)^3=(6-x)^3$.
118.Calculaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{0,1,5,3,7\}$.
119.Punctele M,N şi P verifică relaţia $3\overrightarrow{MN}+8\overrightarrow{NP}=\vec{0}$.Calculaţi lungimea segmentului MP,ştiind că MN=5.
120.Arătaţi că $\sin(2\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(\pi-x)+\sin(2\pi+x)=0$, pentru orice număr real.
121.Calculaţi partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{27}+\sqrt{10}$.
122.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că $(f\circ f)(x)=f(x+3)$, pentru orice număr real x.
123.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{3}{5}\right)^{4x+1}\leq\left(\frac{3}{5}\right)^{5x+3}$.
124.Determinaţi numărul de submulţimi cu cel puţin două elemente ale mulţimii $A=\{0,1,2,\dots,9\}$.
125.Se consideră triunghiului MNP cu MN=6,MP=8 şi $m(\sphericalangle M)=90°$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
126.Determinaţi numărul real x, ştiind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-2=0$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
127.Calculaţi partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{216}+\sqrt{7}$.
128.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că $(f\circ f)(x)=f(x-2)$, pentru orice număr real x.
129.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{4}{5}\right)^{6x+2}\leq\left(\frac{4}{5}\right)^{5x+6}$.
130.Determinaţi numărul de submulţimi cu cel mult patru elemente ale mulţimii $A=\{0,1,2,\dots,9\}$.
131.Se consideră triunghiului MNP cu MN=12,MP=16 şi $m(\sphericalangle M)=90°$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
132.Determinaţi numărul real x, ştiind că $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x-2=0$ şi $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.
133.Arătaţi că $(5-3i)^2+(5+3i)^2=32$,unde $i^2=-1$.
134.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-8x+15$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
135.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x-2}=x+2$.
136.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 7.
137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(2,3)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că punctul A este mijlocul segmentului BM.
138.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=6,BC=3 şi $m(\sphericalangle BAD)=30°$.
139.Arătaţi că $(6-5i)^2+(6+5i)^2=22$,unde $i^2=-1$.

140.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+6x+8$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
141.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-3x-4}=x-4$.
142.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 12.
143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$ şi $B(1,2)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
144.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=6,BC=$3\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle ABC)=45°$.
145.Se consideră numerele complexe $z_1=2-3i$ şi $z_2=1-2i$.Arătaţi că $2z_1-3z_2=1$.
146.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+3mx+2=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1+x_2+x_1x_2+1=0$.
147.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8(x+6)+\log_8(x-6)=2$.
148.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
149.Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
150.Arătaţi că $\sin 2x+(\sin x-\cos x)^2=1$,pentru orice număr real x.
151.Se consideră numerele complexe $z_1=2+4i$ şi $z_2=1+3i$.Arătaţi că $3z_1-4z_2=2$.
152.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-5mx+3=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1+x_2+x_1x_2+2=0$.
153.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_{12}(x+3)+\log_{12}(x-3)=2$.
154.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
155.Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari.
156.Arătaţi că $\sin 2x-(\sin x+\cos x)^2=-1$,pentru orice număr real x.
157.Se consideră numerele complexe $z_1=5-2i$ şi $z_2=3+3i$.Arătaţi că $3z_1+2z_2=21$.
158.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=-x+1$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=x^2+x+2$.Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
159.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+3}=3\cdot 3^{-3x}$.
160.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 2 şi cu 5.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$,$B(4,2)$ şi $C(0,m)$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
162.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC,ştiind că AB=8,AC=4 şi A=$\frac{\pi}{3}$.
163.Se consideră numerele complexe $z_1=6+3i$ şi $z_2=5+4i$.Arătaţi că $4z_1-3z_2=9$.
164.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x+1$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=x^2-3x+5$.Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
165.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+4}=3\cdot 3^{4x}$.
166.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 7.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$,$B(2,4)$ şi $C(m,3)$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
168.Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC,ştiind că AB=$4\sqrt{3}$,BC=8 şi B=$\frac{\pi}{6}$.
169.Se consideră numărul complex z=3+i.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\bar{z}=16$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
170.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(2,m)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$f(x)=x^2+3x-4$.

171.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_3 x)(2-\log_3 x)=0$.

172.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra unităţilor strict mai mică decât cifra zecilor.

173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2), B(1,4) şi C(0,3).Determinaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

174.Arătaţi că $(1+\text{ctg}^2x)\sin^2x-(1+\text{tg}^2x)\cos^2x=0$,pentru orice $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

175.Se consideră numărul complex z=2−i.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\bar{z}=9$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

176.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul A(1, m) aparţine graficului funcţiei f:ℝ⟶ℝ, $f(x)=x^2-2x+3$.

177.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_2 x)(3-\log_2 x)=0$.

178.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra zecilor mai mică sau egală decât cifra unităţilor.

179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1), B(3,3) şi C(1,5).Determinaţi lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

180.Arătaţi că $(1-\text{tg}^2x)\cos^2x+(1-\text{ctg}^2x)\sin^2x=0$,pentru orice $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

181.Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul (−6,6).

182.Se consideră funcţia f:ℝ⟶ℝ,$f(x)=x^2-4$.Calculaţi $(f\circ f)(2)$.

183.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+2}=x-3$.

184.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,100},acesta să fie multiplu de 22.

185.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(3,3) şi N(5,3).Determinaţi coordonatele punctului P,situat pe axa Ox,astfel încât PM=PN.

186.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $BC=6\sqrt{2}$ şi $A=\frac{\pi}{4}$.

187.Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul [−5,5].

188.Se consideră funcţia f:ℝ⟶ℝ,$f(x)=x^2-1$.Calculaţi $(f\circ f)(-1)$.

189.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4}=x-2$.

190.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,100},acesta să fie multiplu de 12.

191.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,2) şi N(2,4).Determinaţi coordonatele punctului P,situat pe axa Oy,astfel încât PM=PN.

192.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $AC=6\sqrt{3}$ şi $B=\frac{\pi}{3}$.

193.Se consideră numerele complexe $z_1=2-3i$ şi $z_2=4+6i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2+2z_1+z_2$ este real.

194.Calculaţi $(f\circ g)(0)$, unde f:ℝ⟶ℝ,$f(x)=2x+1$ şi g:ℝ⟶ℝ,$g(x)=x^2-x+1$.

195.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-16)=\log_3(6x-21)$.

196.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 9.

197.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x+2017 şi punctul A(3,2). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

198.Arătaţi că $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x=0$,pentru orice număr real x.

199.Se consideră numerele complexe $z_1=3+2i$ şi $z_2=9-6i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2+3z_1+z_2$ este real.

200.Calculaţi $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},f(x)=3x-4$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},g(x)=x^2+5x+2$.
201.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+9)=\log_4(5x+5)$.
202.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 6.
203.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=-2x+2017$ şi punctul $A(1,2)$.Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
204.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x=1$,pentru orice număr real x.
205.Arătaţi că $\frac{3+i}{3-i}+\frac{3-i}{3+i}=\frac{8}{5}$,unde $i^2=-1$.
206.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(2m-3)x+m^2-3m+2=0$.Arătaţi că $(x_1-x_2)^2=1$,pentru orice număr real m.
207.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-8}=4-x$.
208.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.
209.Se consideră triunghiului ABC şi punctele M,N şi P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstraţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.
210.Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\sin2x=\sqrt{3}\cos x$ şi $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
211.Arătaţi că $\frac{4+i}{4-i}+\frac{4-i}{4+i}=\frac{30}{17}$,unde $i^2=-1$.
212.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(2m+5)x+m^2+5m+4=0$.Arătaţi că $(x_1-x_2)^2=9$,pentru orice număr real m.
213.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-4}=6-x$.
214.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre divizibile cu 2.
215.Se consideră triunghiului ABC şi punctele M,N şi P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstraţi că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}$.
216.Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\sin2x=\sqrt{2}\cos x$ şi $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
217.Se consideră numărul complex $z=3-i$.Calculaţi $z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
218.Determinaţi numărul real m,ştiind că axa Ox este tangentă graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+3)x+m^2-m+4$.
219.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4\log_x 6+\log_6(6x)=6$.
220.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 13.
221.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii AB şi punctul N mijlocul medianei CM.Demonstraţi că $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.
222.Arătaţi că,dacă $(\sin x-3\cos y)^2+(\cos x+3\sin y)^2=10$ şi $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.
223.Se consideră numărul complex $z=4+i$.Calculaţi $z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
224.Determinaţi numărul real m,ştiind că axa Ox este tangentă graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m-1)x+m^2+m+2$.
225.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_x 4+\log_4(4x)=4$.
226.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 12.
227.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii BC şi punctul N mijlocul medianei AM. Demonstraţi că $\overrightarrow{CN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

228.Arătaţi că,dacă $(\sin x + 4\cos y)^2 + (\cos x - 4\sin y)^2 = 17$ şi $x,y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.

229.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2020$ şi raţia r=−2.

230.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(-1,3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4m$.

231.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6} = 8^{3x-4}$.

232.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să nu conţină cifra 4.

233.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$ şi $B(-4,5)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

234.Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{2}{3}$,arătaţi că $\sin 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$.

235.Determinaţi al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2018$ şi raţia r=1.

236.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(-2,6)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - m$.

237.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{4x-6} = 27^{5x-8}$.

238.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să conţină cifra 3.

239.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ şi $B(3,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

240.Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{2}{5}$,arătaţi că $\sin 2x = \frac{4\sqrt{21}}{25}$.

241. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 25,1021 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

242.Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + m$ este tangentă axei Ox.

243.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3} = 27$.

244.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{64}\}$,acesta să fie număr raţional.

245.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(2,-1)$ şi $C(2,-3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.

246.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle B) = 45°$ şi $AC=3\sqrt{2}$.

247. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 4,1010 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

248.Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + m$ este tangentă axei Ox.

249.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16$.

250.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{81}\}$,acesta să fie număr raţional.

251.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$,$B(3,-2)$ şi $C(-3,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC.

252.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle C) = 30°$ şi AB=4.

253. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 5,1012 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

254.Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+8x+m$ este tangentă axei Ox.

255.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-4}=32$.

256.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{20}\}$,acesta să fie număr raţional.

257.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$,$B(-3,2)$ şi $C(3,-4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.

258.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle A)=60°$ şi BC=$4\sqrt{3}$.

259.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}-3\right)^2+\left(\sqrt{5}+3\right)^2=28$.

260.Caculaţi produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x+3$.

261.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2-9x+9)=\log_4 1$.

262.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 5,6,8 şi 9.

263.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-3)$ şi $B(2,1)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.

264.Arătaţi că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=0$,pentru orice număr real x.

265.Arătaţi că $\left(\sqrt{3}+3\right)^2+\left(\sqrt{3}-3\right)^2=24$.

266.Calculaţi produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x-2$.

267.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2+7x+10)=\log_5 4$.

268.Determinaţi câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 4,2,3 şi 6.

269.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ şi $B(1,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.

270.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$,pentru orice număr real x.

271.Determinaţi al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=1$ şi $a_2=3$.

272.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

273.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{x-2}=2^{2-x}$.

274.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mare sau egal cu 30.

275.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu -1.

276.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=10,AC=10 şi BC=12,Arătaţi că sinC=$\frac{4}{5}$.

277.Determinaţi al şaselea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=2$ şi $a_2=4$.

278.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5$.

279.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{x-3}=5^{3-x}$.

280.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 50.

281.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,-3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 4.

282.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=13,AC=13 şi BC=24,Arătaţi că sinB=$\frac{5}{13}$.

283.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele $6,-3x$ şi x^2+3 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
284.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m$ este tangentă axei Ox.
285.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}=64^x$.
286.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel puţin două elemente.
287.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0),B(1,0)$ şi $C(1,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este perpendiculară pe mediana din A a triunghiului ABC.
288.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $C=\frac{3\pi}{4}$ şi $AB=3\sqrt{2}$.
289.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele $3,2x$ şi x^2+1 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
290.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x+m$ este tangentă axei Ox.
291.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21}=125^x$.
292.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
293.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0),B(2,0)$ şi $C(2,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
294.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $B=\frac{5\pi}{6}$ şi $AC=3$.
295.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a+b)(i-1)=(a-b+1)(i+1)$,unde $i^2=-1$.
296.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x^2-2mx+2$,are valoarea minimă egală cu -6.
297.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 x=\log_x 5$.
298.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre divizori ai lui 24.
299.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,a),B(0,-6)$ şi $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că AB+BC=AC.
300.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin a\right)^2=2$.
301.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a+b)(i+2)=(a-b+1)(i-2)$,unde $i^2=-1$.
302.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+mx-1$,are valoarea minimă egală cu -10.
303.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7 x=\log_x 7$.
304.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre multiplii de 3.
305.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a),B(-3,-3)$ şi $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că BA+AC=BC.
306.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2=2$.
307.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1=2$ şi $a_2=-5$.
308.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x) = 2a - x$.
309.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{5-x} = 2^{2x+3}$.
310.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 3.
311.În reperul cartezian xOy se consideră punctul M(1,2).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 3.
312.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 şi BC=13.Arătaţi că sinB= $\frac{12}{13}$.
313.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 4$ şi $a_2 = 6$.
314.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3, -5)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - 2x$.
315.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{4-x} = 5^{2x-4}$.
316.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
317.În reperul cartezian xOy se consideră punctul M(3,1).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu -2.
318.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 şi BC=13.Arătaţi că tgC= $\frac{5}{12}$.
319.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_2 = 6$.
320.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,6)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - 2x$.
321.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{5-x} = 9^{2x+3}$.
322.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 2.
323.În reperul cartezian xOy se consideră punctul M(2,2).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 4.
324.Se consideră triunghiul ABC cu AB=6,AC=10 şi BC=8.Arătaţi că ctgC= $\frac{4}{3}$.
325.Arătaţi că $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 8$.
326.Calculaţi produsul f(1)f(2)f(3)f(4),unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 2$.
327.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 - 2x + 2) = 0$.
328.Determinaţi câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 3,4 şi 5.
329.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1) şi B(3,2).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
330.Arătaţi că $\sin(\pi - 2x) + \sin(\pi + 2x) = 0$,pentru orice număr real x.
331.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2 + \left(\sqrt{5}-2\right)^2 = 18$.
332.Calculaţi produsul f(1)f(2)f(3)f(4)f(5),unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 4$.
333.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2 - 5x + 5) = 0$.
334.Determinaţi câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 4,5 şi 6.
335.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3) şi B(3,4).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
336.Arătaţi că $\sin(2\pi - x) + \sin(2\pi + x) = 0$,pentru orice număr real x.
337.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 4i$ şi $z_2 = 2 - 4i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
338.Calculaţi $(f \circ g)(2)$,unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - 2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x) = 2x$.
339.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x - 729 = 0$.

340.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 9.
341.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=3x+1 şi punctul A(6,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
342.Arătaţi că $\cos(\pi - x)\cos x - \sin(\pi - x)\sin x = -1$,pentru orice număr real x.
343.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 - 3i$ şi $z_2 = 1 + 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
344.Calculaţi $(f \circ g)(-1)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = -3x$.
345.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 256 = 0$.
346.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 6.
347.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x−1 şi punctul A(2,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
348.Arătaţi că $\sin(2\pi - x)\sin x - \cos(2\pi - x)\cos x = -1$,pentru orice număr real x.
349.Se consideră numărul complex z=2+i.Calculaţi $(z - 2)^2$.
350.Arătaţi că $3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 5$,ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 5x + 2 = 0$.
351.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.
352.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 18.
353.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=3x−4 şi punctul A(1,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
354.Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că AC=12 şi $B=\frac{\pi}{6}$.
355.Se consideră numărul complex z=2+2i.Calculaţi $(z - 2)^2$.
356.Arătaţi că $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 4$,ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 6x + 4 = 0$.
357.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.
358.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 16.
359.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x+3 şi punctul A(2,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
360.Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că $AB=16\sqrt{3}$ şi $C=\frac{\pi}{3}$.
361.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{3+4i}{4-3i}$.
362.Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - a$ are graficul tangent axei Ox.
363.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x} + 4 \cdot 9^x - 405 = 0$.
364.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7,8},aceasta să aibă un singur element număr par.
365.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(3,4) şi N(5,2).Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
366.Arătaţi că $\big(\sin x - \sin(2\pi - x)\big)^2 + \big(\cos x - \cos(\pi - x)\big)^2 = 4$, pentru orice număr real x.
367.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{2-3i}{3+2i}$.
368.Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + a$ are graficul tangent axei Ox.
369.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x} + 5 \cdot 4^x - 96 = 0$.
370.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9},aceasta să aibă un singur element număr impar.
371.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,5)$ şi $N(4,1)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
372.Arătaţi că $(\sin x + 2\sin(\pi - x))^2 + (\cos x + 2\cos(2\pi - x))^2 = 9$, pentru orice număr real x.
373.Se consideră numărul complex z=2+2i.Calculaţi z^2.
374.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 3x + 6$ nu intersectează axa Ox.
375.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3x - 4) = \log_3(x + 2)$.
376.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie impar.
377.În triunghiul ABC punctele M,N şi P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi,respectiv,AC.Arătaţi că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
378.Ştiind că tga=$\sqrt{5}$ şi a$\in\mathbb{R}$,arătaţi că $\frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
379.Se consideră numărul complex z=2+i.Calculaţi z^2.
380.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = -x^2 + 4x - 6$ nu intersectează axa Ox.
381.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(3x - 3) = \log_5(x + 1)$.
382.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie impar.
383.În triunghiul ABC punctele M,N şi P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi,respectiv,AC.Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.
384.Ştiind că tga=$\sqrt{3}$ şi a$\in\mathbb{R}$,arătaţi că $\frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} = -2 - \sqrt{3}$.
385.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=3-2i+i^2$.
386.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ şi g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = 3x - 6$.
387.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-x} = 2^{2x}$.
388.Determinaţi câte numere naturale pare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,4 şi 3.
389.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC} = (m-1)\vec{i} + 4\vec{j}$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
390.Se consideră triunghiul ABC cu AC=BC=3 şi $AB=3\sqrt{2}$.Determinaţi cosB.
391.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=2+3i+4i^2$.
392.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ şi g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = 3x + 5$.
393.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-2x} = 5^{3x}$.
394.Determinaţi câte numere naturale impare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,2 şi 3.
395.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} - 4\vec{j}$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
396.Se consideră triunghiul ABC cu AB=BC=3 şi $AC=3\sqrt{2}$.Determinaţi cosA.
397.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 3,6 şi x+7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
398.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x + 3$ este situată deasupra axei Ox.
399.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 16} = 3$.
400.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 5.

401.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,5)$ şi $B(2,3)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

402.Ştiind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$, calculaţi sin2x.

403.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 2,6 şi x+8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

404.Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+x-4$ este situată sub axa Ox.

405.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-3}=5$.

406.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 8.

407.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,6)$ şi $B(1,2)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

408.Ştiind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculaţi sin2x.

409.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=3$ şi $a_2=6$.

410.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+2$.

411.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(5^x-1)(5^x-5)=0$.

412.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conţină cifra 2.

413.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AC=3.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$.

414.Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că A= $\frac{\pi}{2}$ şi AC=6.

415.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=4$ şi $a_2=8$.

416.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+4$.

417.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(4^x-1)(4^x-4)=0$.

418.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conţină cifra 4.

419.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu BC=5.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

420.Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că B= $\frac{\pi}{2}$ şi AB=8.

421.Arătaţi că $4(2+3i)+2(1-6i)=10$.

422.Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+4$ este tangentă la axa Ox.

423.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+1}=3^{2x}$.

424.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,4 şi 5.

425.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1), B(-3,-1)$ şi $C(3,1)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.

426.Arătaţi că $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{3}=0$.

427.Arătaţi că $3(5+4i)+2(3-6i)=21$.

428.Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă la axa Ox.

429.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+9}=2^{-6x}$.

430.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5,7şi 9.

431.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3), B(-5,-3)$ şi $C(5,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.

432.Arătaţi că $\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}=0$.

433.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{2+i}{2-i}$.

434.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+6x-10$.
435.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-9)=\log_2(8x-21)$.
436.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 200.
437.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-6\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
438.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC,ştiind că BC=6,C=$\frac{\pi}{4}$ şi B=$\frac{7\pi}{12}$.
439.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că a+ib este conjugatul numărului complex z=$\frac{2-i}{2+i}$.
440.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x+8$.
441.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-4)=\log_5(5x-10)$.
442.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 110.
443.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CB}=2\vec{i}-5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
444.Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC,ştiind că AB=8,A=$\frac{\pi}{6}$ şi C=$\frac{7\pi}{12}$.
445.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $\frac{2+i}{2-i}=a+ib$ şi $i^2=-1$.
446.Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-8x+12$.
447.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{\frac{x+2}{2}}+2^{x+1}=24$.
448.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu conţină cifra 5.
449.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,4)$ şi $C(1,-3)$.Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin A la BC.
450.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{2+\sin x}{\sin x}=\frac{2+\cos x}{\cos x}$.
451.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $\frac{2-i}{2+i}=a+ib$ şi $i^2=-1$.
452.Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+8x+15$.
453.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{\frac{x+2}{2}}-2^{x+1}=16$.
454.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conţină cifra 7.
455.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-3,-4)$ şi $C(-1,3)$.Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin B la AC.
456.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{2-\sin x}{\sin x}=\frac{2-\cos x}{\cos x}$.
457.Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_1=1$ şi $b_4=125$.
458.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=x^2-4x+6$.
459.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+2}=25^{1-x}$.
460.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie cub perfect.

461.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

462.Calculaţi sinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=5,BC=4 şi sinA=$\frac{4}{5}$.

463.Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 64$.

464.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 4x - 6$.

465.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+3} = 9^{3-x}$.

466.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu fie cub perfect.

467.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CB} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

468.Calculaţi sinusul unghiului B al triunghiului ABC în care BC=4,AC=5 şi sinA=$\frac{4}{5}$.

469.Arătaţi că numărul $a=2(3-3i)+3(5+2i)$ este real.

470.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 6x - 3$.Calculaţi $f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$.

471.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3x) = \log_3(2 + x)$.

472.După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 3300 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

473.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ sunt coliniari.

474.Determinaţi $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,ştiind că $\frac{5\sin x+\cos x}{\sin x} = 6$.

475.Arătaţi că numărul $a=4(3-2i)+2(5+4i)$ este real.

476.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 4x + 1$.Calculaţi $f(1) + f(2) + \cdots + f(20)$.

477.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(4x) = \log_4(3 + x)$.

478.După o scumpire cu 20% preţul unui produs este 2400 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

479.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - (a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

480.Determinaţi $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,ştiind că $\frac{\sin x+3\cos x}{\cos x} = 4$.

481.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1,3x+3 şi 11 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

482.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

483.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+16} = x + 4$.

484.Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,ştiind că a,bϵ{4,5,6,7} şi a≠b.

485.În dreptunghiul ABCD,cu AB=12 şi BC=9,se consideră vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$,unde $\{O\} = AC \cap BD$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

486.Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=8,BC=12 şi sinC=$\frac{3}{5}$.

487.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1,2x+3 şi 9 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

488.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$.

489.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+25} = x + 5$.

490.Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,ştiind că a,bϵ{2,3,5,6} şi a≠b.

491.În dreptunghiul ABCD,cu AB=8 şi BC=6,se consideră vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC}$,unde $\{O\} = AC \cap BD$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

492.Calculaţi sinusul unghiului B al triunghiului ABC în care BC=6,AC=10 şi sinA= $\frac{3}{5}$.

493.Arătaţi că numărul n=$\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$ este natural.

494.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+9$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

495.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3-x^2)=\log_3 2x$.

496. Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulţimile mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7},aceasta să aibă cel mult două elemente.

497.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{2i}+6\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+2\vec{j}$.Determinaţi lungimea segmentului [AC].

498.Se consideră numerele reale a şi b astfel încât a+b= $\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că 2cosb=$\sqrt{2}$cosa+$\sqrt{2}$sina.

499.Arătaţi că numărul n=$\left(\sqrt{5}-2\right)^2+4\sqrt{5}$ este natural.

500.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+9$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

501.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(4-x^2)=\log_2 3x$.

502. Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulţimile mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7,8},aceasta să aibă cel mult un element.

503.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AC}=\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CB}=4\vec{i}+6\vec{j}$.Determinaţi lungimea segmentului [AB].

504.Se consideră numerele reale a şi b astfel încât a+b= $\frac{\pi}{6}$.Arătaţi că 2cosb=$\sqrt{3}$cosa+sina.

505.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 40.Determinaţi a_2.

506.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+8x+16$.Arătaţi că $(f\circ f)(-4)=16$.

507.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x-3)=5-\log_3(x+15)$.

508.Dterminaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {0,1,2,3,4,5,6,7,8}.

509.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB şi punctual E mijlocul segmentului CD.Arătaţi că $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

510.Se consideră triunghiul ABC cu AC=$2\sqrt{3}$, A= $\frac{\pi}{4}$ şi C= $\frac{5\pi}{12}$.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

511.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 50.Determinaţi a_2.

512.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+16$.Arătaţi că $(f\circ f)(4)=16$.

513.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-5)=5-\log_2(x+9)$.

514.Dterminaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

515.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB şi punctual E mijlocul segmentului CD. Arătaţi că $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

516.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$6\sqrt{3}$, A= $\frac{5\pi}{12}$ şi B= $\frac{\pi}{4}$.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

517.Arătaţi că numărul a=$8-3\sqrt{7}+\frac{1}{8-3\sqrt{7}}$ este natural.

518.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=f(4)+4$.

519.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x^2}=9\cdot 3^x$.

520.Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ are exact 28 submulţimi cu două elemente.
521.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$,$N(0,6)$ şi $A(3,a)$,unde a este număr real.Ştiind că AM=AN, arătaţi că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .
522.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care 6cosx−5=5cos2x.Calculaţi cosx.
523.Arătaţi că numărul $a=8+3\sqrt{7}+\frac{1}{8+3\sqrt{7}}$ este natural.
524.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=f(2)+4$.
525.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x^2}=3\cdot 9^x$.
526.Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ are exact 45 submulţimi cu două elemente.
527.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$,$N(5,0)$ şi $A(a,4)$,unde a este număr real.Ştiind că AM=AN, arătaţi că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .
528.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care 4cosx−3=3cos2x.Calculaţi cosx.
529.Arătaţi că numărul $n=\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
530.Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.
531.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^x+7^{-x}=2$.
532.Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conţin pe 1.
533.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-6,6)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.
534.Triunghiul ABC este dreptunghic în A şi sinC=cosC.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.
535.Arătaţi că numărul $n=\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(2-i\sqrt{3}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
536.Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(x)+f(1-x)=9$, pentru orice număr real x.
537.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $11^x+11^{-x}=2$.
538.Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conţin pe 1.
539.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(6,-6)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.
540.Triunghiul ABC este dreptunghic în B şi cosA=sinA.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.
541.Se consideră numărul complex z=−2−i.Arătaţi că $z^2+4z+5=0$.
542.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(0,6)$ aparţine graficului funcţiei f.
543.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3+3x}$.
544.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra sutelor egală cu 4 şi cifra unităţilor egală cu 3.
545.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$,$B(5,4)$ şi $C(a,6)$, unde a este un număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.
546.Măsurile unghiurilor A,B şi C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.Demonstraţi că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.
547.Se consideră numărul complex z=−2+i.Arătaţi că $z^2+4z+5=0$.

548.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(0,5)$ aparţine graficului funcţiei f.

549.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3+5x}$.

550.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 3 şi cifra unităţilor egală cu 2.

551.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$,$B(2,4)$ şi $C(6,a)$, unde a este un număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

552.Măsurile unghiurilor B,A şi C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.Demonstraţi că măsura unghiului A este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

553.Arătaţi că numărul $N=\log_2 1\,8-2\log_2 3+\log_2 8$ este natural.

554.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+5$.Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=5 intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte.

555.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{5x-1}$.

556.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 28 submulţimi cu două elemente.

557.Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N şi P mijloacele segmentelor AC,AM, respectiv CM. Arătaţi că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$.

558.Determinaţi $x\in(0,\pi)$,ştiind că $\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x=0$.

559.Arătaţi că numărul $N=\log_2 24-2\log_2 3+\log_2 6$ este natural.

560.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+4$.Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=4 intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte.

561.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-8}=\sqrt{6x-1}$.

562.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 21 submulţimi cu două elemente.

563.Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N şi P mijloacele segmentelor BC,BM, respectiv CM. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$.

564.Determinaţi $x\in(0,\pi)$,ştiind că $\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0$.

565.Calculaţi modulul numărului complex $z=(3-2i)(3+2i)-(9-3i)$.

566.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=4x+20$ .Calculaţi $(g\circ f)(2)$.

567.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-4}=\frac{1}{125}$.

568.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.

569.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=8,BC=2 şi măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

570.Se consideră triunghiul ABC cu AB=20,AC=12 şi BC=16.Arătaţi că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

571.Calculaţi modulul numărului complex $z=(2-3i)(2+3i)-(9-3i)$.

572.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$ .Calculaţi $(g\circ f)(3)$.

573.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-5}=\frac{1}{64}$.

574.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.

575.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=2,BC=8 şi măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.
576.Se consideră triunghiul ABC cu AB=12,AC=20 şi BC=16.Arătaţi că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.
577.Arătaţi că $(2-i)^2-2(2-2i)+1=0$, unde $i^2=-1$.
578.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-3$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul M(1,4) aparţine graficului funcţiei f.
579.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+3)=\log_4 x+\log_4(x+3)$.
580.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5 şi cu 4.
581.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,0) ,N(4,3) şi P(0,3). Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul P şi este paralelă cu dreapta MN.
582.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A.Arătaţi că $tgC=\frac{1}{tgB}$.
583.Arătaţi că $(2+i)^2-2(2+2i)+1=0$, unde $i^2=-1$.
584.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul M(1,4) aparţine graficului funcţiei f.
585.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+4)=\log_4 x+\log_4(x+4)$.
586.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4 şi cu 5.
587.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(4,3) ,N(1,0) şi P(0,3). Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul P şi este paralelă cu dreapta MN.
588.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A.Arătaţi că $tgB=\frac{1}{tgC}$.
589.Calculaţi media aritmetică a numerelor reale $a=2020-\sqrt{2}$ şi $b=2020+\sqrt{2}$.
590.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+1$ .Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f.
591.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(\sqrt{x}+3)+\log_2(\sqrt{x}-3)=2$.
592.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 128 submulţimi.
593.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,0),N(6,2) şi P(4,2).Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
594.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care sin2C·cosC=sinC.Arătaţi că $C=\frac{\pi}{4}$.
595.Calculaţi media aritmetică a numerelor reale $a=2023-\sqrt{3}$ şi $b=2023+\sqrt{3}$.
596.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+1$ .Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f.
597.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(\sqrt{x}+5)+\log_5(\sqrt{x}-5)=2$.
598.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 64 submulţimi.
599.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(6,0),N(8,6) şi P(4,6).Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
600.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care 2sin2B·cosB=3sinB. Arătaţi că $B=\frac{\pi}{6}$.
601.Arătaţi că numerele $10+5\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ şi $2-\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
602.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.
603.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+3}=3^x+26$.

604.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 2.
605.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii BC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele MD şi AC sunt paralele.
606.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=6 şi măsurile unghiurilor A şi B sunt de 60° , respectiv 30°.
607.Arătaţi că numerele $10-5\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ şi $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
608.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+2$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.
609.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+3}=5^x+124$.
610.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 5.
611.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii BC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele MD şi AB sunt paralele.
612.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=5 şi măsurile unghiurilor A şi B sunt de 30° , respectiv 60°.
613.Arătaţi că $3(1-2i)+2i(3-i)=5$, unde $i^2=-1$.
614.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=3+a^2$.
615.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x^2+3)=2$.
616.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele pare şi distincte.
617.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3),B(5,1) şi C(2,4).Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
618.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât BC=15 şi sinC=2sinB.Arătaţi că lngimea laturii AC este egală cu $3\sqrt{5}$.
619.Arătaţi că $3(1+2i)-2i(3+i)=5$, unde $i^2=-1$.
620.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-1$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=3+a^2$.
621.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x^2+3)=2$.
622.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele impare şi distincte.
623.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,0),B(2,6) şi C(6,2).Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
624.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât BC=15 şi sinB=2sinC.Arătaţi că lngimea laturii AB este egală cu $3\sqrt{5}$.
625.Arătaţi că $8-3\sqrt{3}+3\left(\sqrt{3}-1\right)=5$.
626.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=5x+m, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=6$.
627.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\cdot3^{2x}+9^x=6$.
628.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 8.
629.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=6x−5 şi punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A aparţine dreptei d.

630.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=8 şi cosB=0.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 32.
631.Arătaţi că $9-7\sqrt{7}+7\left(\sqrt{7}-1\right)=2$.
632.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=3x+m, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=8$.
633.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4\cdot 3^{2x}+9^{x}=5$.
634.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 9.
635.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x−4 şi punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A aparţine dreptei d.
636.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=10 şi cosB=0.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 50.
637.Arătaţi că $3i(4-i)-12i=3$, unde $i^2=-1$.
638.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=f(-2)$.
639.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{x-2}=25^{x}$.
640.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 5.
641.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3) şi B(−1,1).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$.
642.Se consideră expresia $E(x)=2ctgx\cdot\sin\frac{2x}{3}-\sin 2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
643.Arătaţi că $3i(3-i)-9i=3$, unde $i^2=-1$.
644.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(-2)=f(2)$.
645.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{x-1}=25^{x}$.
646.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 6.
647.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) şi B(1, −1).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$.
648.Se consideră expresia $E(x)=2tgx\cdot\sin\frac{2x}{3}-\sin 2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
649.Arătaţi că $(3+i)^2-i(6-i)=7$, unde $i^2=-1$.
650.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.
651.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x+1}+3\cdot 6^{x}=54$.
652.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 6.
653.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,0),B(−2,2) şi C(a, 3a), unde a este număr real nenul.Arătaţi că dreptele AB şi OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.
654.Se consideră expresia $E(x)=4\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{x}{3}+\sin x$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.
655.Arătaţi că $(2+i)^2-i(4-i)=2$, unde $i^2=-1$.
656.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.
657.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $6^{x+1}-3\cdot 6^{x}=108$.

658.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 5.
659.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$,$B(2,-2)$ şi $C(3a,a)$, unde a este număr real nenul.Arătaţi că dreptele AB şi OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.
660.Se consideră expresia $E(x)=4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}+\sin x$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.
661.Se consideră numărul complex $z=4-i$.Arătaţi că $z(z+2i)=17$.
662.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.Arătaţi că $f(2x)-2f(x)=-1$,pentru orice număr real x.
663.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+3x-3}=x$.
664.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, numărul n+7 să fie multiplu de 10.
665.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$ şi $B(5,6)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
666.Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 25.Arătaţi că BC=10 .
667.Se consideră numărul complex $z=4+i$.Arătaţi că $z(z-2i)=17$.
668.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=6x+1$.Arătaţi că $f(2x)-2f(x)=-1$,pentru orice număr real x.
669.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+2x-2}=x$.
670.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, numărul n+4 să fie multiplu de 10.
671.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$ şi $B(6,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
672.Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 16.Arătaţi că BC=8 .
673.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=4$ şi $a_5=24$.
674.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m,-2)$ aparţine graficului funcţiei f.
675.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-1}=4\cdot 2^{x+2}$.
676.Se consideră mulţimea A={0,1,2,3,4,5,6}.Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii A, care au cel mult două elemente.
677.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,5)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$.
678.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=12 şi înălţimea AD=6.Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $4\sqrt{3}$.
679.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=5$ şi $a_5=25$.
680.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+6$.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m,-2)$ aparţine graficului funcţiei f.
681.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x-1}=9\cdot 3^{x+2}$.
682.Se consideră mulţimea A={0,1,2,3,4,5}.Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii A, care au cel mult două elemente.
683.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ şi $B(5,5)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$.
684.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=12 şi înălţimea AD=6.Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $4\sqrt{3}$.
685.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=4$ şi $a_2=10$.

686.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2+m)=2-m$.
687.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2-3x+6)=\lg 6$.
688.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+3}$ să fie natural.
689.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1),B(0,4) şi C(a, 6), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OA şi BC sunt paralele.
690.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghiul în A, cu AB=9 şi B=$\frac{\pi}{6}$. Arătaţi că AC=$3\sqrt{3}$.
691.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=3$ şi $a_2=11$.
692.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2+m)=2-m$.
693.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2-4x+5)=\lg 5$.
694.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+4}$ să fie natural.
695.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3),B(4,0) şi C(6, a), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OA şi BC sunt paralele.
696.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghiul în A, cu AC=9 şi C=$\frac{\pi}{6}$. Arătaţi că AB=$3\sqrt{3}$.
697.Arătaţi că 3lg100+lg5+lg2=7.
698.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,f(x)=x−5. Determinaţi numărul real a pentru care $f(4a)+f(a)=0$.
699.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^3\cdot 5^{4x}=5^x$.
700.Determinaţi câte submulţimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulţimea A={1,2,3,4,6,8}.
701.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,4) şi B(0,4). Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
702.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 32 şi C=$\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că AC=8 .
703.Arătaţi că 3lg100+lg2+lg5=7.
704.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x−5.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(4a)=0$.
705.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{4x}\cdot 5^3=5^x$.
706.Determinaţi câte submulţimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulţimea A={2,3,4,6,8,9}.
707.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,1) şi B(4,0). Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
708.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 32 şi B=$\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că AB=8 .
709.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2=12$ şi $a_3=16$.
710.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.Arătaţi că $(f\circ f)(4)=10$.
711.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2+3x+1}=\sqrt[3]{1-x}$.
712.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,4,5,7,9}.
713.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(1,3) .Determinaţi coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}$.

714.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=16 şi $AB=\frac{BC}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $32\sqrt{3}$.
715.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2 = 14$ şi $a_3 = 18$.
716.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.Arătaţi că $(f\circ f)(3) = 11$.
717.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 + 4x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
718.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,3,6,7,9}.
719.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(3,1) .Determinaţi coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$.
720.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=16 şi $AC=\frac{BC}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $32\sqrt{3}$.
721.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 20$ şi $b_3 = 40$.
722.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 4$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x) = x + 4$Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
723.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \cdot 3^5 = 3^{x+2}$.
724.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n-1}$ să fie număr natural impar.
725.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2),B(3,6) şi C(a, 4), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele AC şi OB sunt paralele.
726.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 50 şi $BC=AC\sqrt{2}$. Arătaţi că AB=10.
727.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 30$ şi $b_3 = 60$.
728.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
729.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \cdot 3^6 = 3^{x+3}$.
730.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+2}$ să fie număr natural par.
731.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2),B(6,3) şi C(4, a), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele AC şi OB sunt paralele.
732.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 50 şi $BC=AB\sqrt{2}$. Arătaţi că AC=10.
733.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ şi $z_2 = 6 + i$. Arătaţi că $6z_1 + iz_2 = 5$.
734.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x+6.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(a) = 18$.
735.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2 - 6x + 5} = x$.
736.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 6^2.
737.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,3),B(5,0),C(6,1) şi D(a, b), unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele AC şi BD au acelaşi mijloc.
738.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=3 şi tgB=3.Arătaţi că $BC=3\sqrt{10}$.
739.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ şi $z_2 = 7 + i$. Arătaţi că $7z_1 + iz_2 = 6$.
740.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x+7.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(a) = 21$.
741.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = x$.

742.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 4^3.
743.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,0),B(0,5),C(1,6) şi D(a, b), unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele AC şi BD au acelaşi mijloc.
744.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=3 şi tgC=3.Arătaţi că BC=$3\sqrt{10}$.
745.Arătaţi că $4(5-6i)+6i(4+2i)=8$, unde $i^2=-1$.
746.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(g\circ f)(1)=1$.
747.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(4x-x^2)=\log_2(2+x)$.
748.Se consideră mulţimea A={3,5,7,8,9}.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
749.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,2) şi B(6,8).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
750.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi raza cercului circumscris egală cu 6. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $18\sqrt{3}$.
751.Arătaţi că $4(4-5i)+5i(4+2i)=6$, unde $i^2=-1$.
752.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(g\circ f)(1)=1$.
753.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(7x-x^2)=\log_2(5+x)$.
754.Se consideră mulţimea A={2,3,5,7,9}.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
755.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,0) şi B(8,6).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
756.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi raza cercului circumscris egală cu 6. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $18\sqrt{3}$.
757.Arătaţi că $2(\log_3 6-\log_3 2)+\log_3 9=4$.
758.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x−8.Determinaţi numărul real m pentru care $f(4+m)=4-m$.
759.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^x\cdot 3^{3-x}=3^9$.
760.Se consider mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8}.Determinaţi câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulţimea A, sunt divizibile cu 5.
761.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3) ,B(4,2) şi C(6,4). Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC.
762.Se consideră expresia $E(x)=\cos\frac{x}{2}-\left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2\cdot tgx$,unde $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.
763.Arătaţi că $2(\log_4 8-\log_4 2)+\log_4 16=4$.
764.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x−10.Determinaţi numărul real m pentru care $f(5+m)=5-m$.
765.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x\cdot 2^{3-x}=2^9$.
766.Se consider mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7}.Determinaţi câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulţimea A, sunt divizibile cu 5.
767.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1) ,B(2,4) şi C(4,6). Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC.
768.Se consideră expresia $E(x)=\left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2\cdot tgx-\cos\frac{x}{2}$,unde $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

769.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 15$.
770.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - 2ax - 1$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(0) = 5$.
771.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x^2 - 6x + 5) = 2\log_2 x$.
772.Se consideră mulţimea A={2,3,4,8}.Determinaţi câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
773.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(4,8) şi B(3,5).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.
774.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=8 şi tgB=$\frac{1}{2}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\sqrt{20}$.
775.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 7$ şi $a_3 = 35$.
776.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 2ax - 1$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(0) = 4$.
777.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x^2 - 7x + 6) = 2\log_2 x$.
778.Se consideră mulţimea A={2,5,6,8}.Determinaţi câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
779.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(8,4) şi B(5,3).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.
780.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=8 şi tgC=$\frac{1}{2}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\sqrt{20}$.
781.Arătaţi că $4i(3 + i) + 5(1 - 2i) = 1$.
782.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=3x+7.Determinaţi numărul real a pentru care $a+f(a + 1) + f(a - 1) = 0$.
783.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(7x - 10) = \log_2 x$.
784.Se consideră mulţimea A={4,8,12, … ,60}.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 6.
785.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$,$B(0, a)$ şi $C(b, 2)$ unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$.
786.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=12 şi C=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $24\sqrt{3}$.
787.Arătaţi că $4i(2 + i) + 2(3 - 4i) = 2$.
788.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=3x−7.Determinaţi numărul real a pentru care $a+f(a - 1) + f(a + 1) = 0$.
789.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(5x - 6) = \log_2 x$.
790.Se consideră mulţimea A={3,6,9, … ,60}.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 6.
791.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$,$B(a, 0)$ şi $C(2, b)$ unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$.
792.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=12 şi B=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $24\sqrt{3}$.
793.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$.

794.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax-4$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(2)=2$.
795.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(6-x)+\log_6 x=\log_6(5+x)$.
796.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={2,4,5,6,8}.
797.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(3,3)$ şi $C(7,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AC.
798.Se consideră expresia $E(x)=\sin x+3\operatorname{tg}\frac{x}{3}-2\cos\frac{x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
799.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, în care $b_1=2$ şi $b_2=12$.
800.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax-1$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(2)=2$.
801.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6 x+\log_6(6-x)=\log_6(5+x)$.
802.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={2,4,6,7,8}.
803.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(3,3)$ şi $C(4,7)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AC.
804.Se consideră expresia $E(x)=3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+\sin x-2\cos\frac{x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Matrice ,determinanţi,sisteme de ecuaţii liniare,inversa unei matrice

Matrice patratice de ordin doi

Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ şi $\alpha\in\mathbb{C}$

$\det A=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$, $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$A+B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x&b+y\\c+z&d+t\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-x&b-y\\c-z&d-t\end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\\alpha c&\alpha d\end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+bz&ay+bt\\cx+dz&cy+dt\end{pmatrix}$

Sisteme liniare de două ecuaţii cu două necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ sistemul admite soluţie unică

$d_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$, $d_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$, $\begin{cases}x=\frac{d_x}{d}\\y=\frac{d_y}{d}\end{cases}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow\det A\neq0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d=d$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot c=-c$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot b=-b$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a=a$

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci $A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Matrice patratice de ordin trei

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+dhc+bfg-(gec+afh+bdi)$, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+t \\ g+p & h+r & i+s \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ d-u & e-v & f-t \\ g-p & h-r & i-s \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{pmatrix}$

$A \cdot B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bu+cp & ay+bv+cr & az+bt+cs \\ dx+eu+fp & dy+ev+fr & dz+et+fs \\ gx+hu+ip & gy+hv+ir & gz+ht+is \end{pmatrix}$

Sisteme liniare de trei ecuaţii cu trei necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Sistemul admite soluţie unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23}) \neq 0$ sistemul admite soluţie unică

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-(b_3a_{22}a_{13}+b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{12}a_{33})$

$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-(a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_1a_{33}+a_{11}b_3a_{23})$

$d_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}a_{31}b_2-(a_{31}a_{22}b_1+a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{12}b_3)$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \\ z=\frac{d_z}{d} \end{cases}$

Dacă d=detA=0 şi avem un minor de ordin doi nenul ,de exemplu $d_p=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$

Pentru $d_c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}\neq 0$ sistemul este incompatibil,adică nu admite soluţii

Pentru $d_c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=0$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat,adică admite mai multe soluţii, atunci $z=\alpha\in\mathbb{C}$ este necunoscută secundară şi se rezolvă sistemul de tip Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1-a_{13}\alpha \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2-a_{23}\alpha \end{cases}$

Avem soluţiile $\begin{cases} x=\frac{d_x}{d_p} \\ y=\frac{d_y}{d_p} \\ z=\alpha \end{cases}$,unde $\alpha\in\mathbb{C}$ şi $d_x=\begin{vmatrix} b_1-a_{13}\alpha & a_{12} \\ b_2-a_{23}\alpha & a_{22} \end{vmatrix}$, $d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}\alpha \\ a_{21} & -a_{23}\alpha \end{vmatrix}$

Sisteme liniare omogene de trei ecuaţii cu trei necunoscute

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Sistemul admite soluţie unică $\Leftrightarrow$detA$\neq$0

Sistemele omogene sunt compatibile,adică au tot timpul solutie,solutia banală x=y=z=0

Dacă d=detA$\neq$0,atunci sistemul este de tip Cramer,sistemul admite soluţia unică x=y=z=0

Dacă d=detA=0,atunci sistemul este compatibil nedeterminat,adică are mai multe soluţii

Dacă avem un minor de ordin doi nenul, atunci sistemul este compatibil simplu nedeterminat,de exemplu ,dacă $d_p=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$,atunci $z=\alpha\in\mathbb{C}$ este necunoscută secundară şi se rezolvă sistemul de tip Cramer $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=-a_{13}\alpha \\ a_{21}x+a_{22}y=-a_{23}\alpha \end{cases}$

Avem soluţiile $\begin{cases} x=\frac{d_x}{d_p} \\ y=\frac{d_y}{d_p} \\ z=\alpha \end{cases}$,unde $\alpha\in\mathbb{C}$ şi $d_x=\begin{vmatrix} -a_{13}\alpha & a_{12} \\ -a_{23}\alpha & a_{22} \end{vmatrix}$, $d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}\alpha \\ a_{21} & -a_{23}\alpha \end{vmatrix}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow$detA$\neq$0

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot A^*$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Rangul unei matrice pătratice de ordin 3

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$rangA=3\Leftrightarrow detA\neq 0$

$rangA=2\Leftrightarrow detA=0$ şi există un minor de ordin doi nenul,de exemplu $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$ sau $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}\neq 0$ sau .... $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$

Subiectul II1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&1&0\\0&a&0\\0&1&a+2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=9$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+2)A(0)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot\ldots\cdot A(2020)=\frac{n!}{2}\cdot A(0)$.

2.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&0\\1&a&1\\0&0&a+2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=9$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+2)A(0)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot\ldots\cdot A(2021)=\frac{n!}{2}\cdot A(0)$.

3.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&a\\-a&-1&1\\1&a&1\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+az=1\\-ax-y+z=1\\x+ay+z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=0$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a))=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0 şi z_0 numere întregi.

4.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&-a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+az=1\\-x-ay+z=1\\ax+y+z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=0$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a))=a(a-1)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0 şi z_0 numere întregi.

5.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}-2a & 0 & 2a\\ 0 & 4 & 0\\ 2a & 0 & -2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=4A(-ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Demonstraţi că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot \ldots \cdot A(\log_{31} 32)$ are toate elementele numere întregi.

6.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 0 & -2a\\ 0 & 4 & 0\\ -2a & 0 & 2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=4A(ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Demonstraţi că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot \ldots \cdot A(\log_{63} 64)$ are toate elementele numere întregi.

7.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \ln(a+2) & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(ab+2a+2b+2)$, pentru orice numere reale a şi b , a>0,b>0.

c)Determinaţi numărul real a,a>0, ştiind că $A(a)A(a)A(a)=A(25)$.

8.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ln(a+2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=3$.

b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(ab+2a+2b+2)$, pentru orice numere reale a şi b , a>0,b>0.

c)Determinaţi numărul real a,a>0, ştiind că $A(a)A(a)A(a)=A(62)$.

9.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}m & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}mx+y+3z=4\\ x+2y+4z=5\\ -x+my-z=-2\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=3$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru m=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

10.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}m & 1 & 3\\ -1 & m & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}mx+y+3z=4\\ -x+my-z=-2\\ x+2y+4z=5\end{cases}$,unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=3$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru m=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

11.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\\ x+y+z=1\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

b)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii este incompatibil

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

12.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x + ay + 4z = 3 \\ x + 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a)) = a(a-3)$, pentru orice număr real a.

b)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii este incompatibil

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

13.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-3} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(3)) = 1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(x+y-3)$, pentru orice numere x şi y.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3) \cdot \ldots \cdot A(20) = A(m^2 + m + 133)$.

14.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-3} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(3)) = 1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(x+y-3)$, pentru orice numere x şi y.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3) \cdot \ldots \cdot A(20) = A(m^2 + m + 133)$.

15.Se consideră matricea $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 1 \\ 2m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2my + z = 0 \\ 2mx + y + z = -1 \\ x + y + 2mz = 1 \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0)) = -2$.

b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m)) = 0$.

c)Pentru m=−1, demonstraţi că, dacă (a, b, c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

16.Se consideră matricea $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 1 & 2m & 1 \\ 2m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2my + z = 0 \\ x + y + 2mz = 1 \\ 2mx + y + z = -1 \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0)) = -2$.

b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m)) = 0$.

c)Pentru m=−1, demonstraţi că, dacă (a, b, c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

17.Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ (a+1)x + y + z = 0, \\ x - y - az = 1 \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(-1)) = 0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(M(a)) = 0$.

c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0)şi $2x_0 - y_0 z_0 = 0$.

18.Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-z=2 \\ (a+1)x-y-z=0, \\ x+y+az=1 \end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(M(-1))=0$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.
c)Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0)și $2x_0-y_0z_0=0$.

19.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ x & y & 1 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A(2,3))=12$.
b)Demonstrați că $\det(A(n^2,n))\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

20.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 1 & y & y \\ x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A(3,2))=12$.
b)Demonstrați că $\det(A(n^2,n))\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

21.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 6x-3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 6x-3 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
b)Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.

22.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 4x-2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4x-2 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
b)Demonstrați că $A(1-x)+A(x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x pentru care $A(1-x)\cdot A(x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.

23.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=-1$.
b)Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=-xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y și z.
c)Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.

24.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z) = xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n) - A(n) + I_3)$ este pătratul unui număr natural.

25.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -3$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 54$.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3) \cdot X = A(1)$.

26.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.

27.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 2(1-x) \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)A(-x)) \leq 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că,dacă numerele naturale m şi n verifică relaţia $A(m)A(n) = A(3)$,atunci m+n=4.

28.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-2x & 0 & 2x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-2x) & 0 & 4x-1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)A(-x)) \leq 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că,dacă numerele naturale m şi n verifică relaţia $A(m)A(n) = A(4)$,atunci m+n=3.

29.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+3y+az=0, \\ -2x-3y+2z=0 \end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(11)) = 0$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.
c)Demonstraţi că,dacă sistemul are soluţia (x_0, y_0, z_0),cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $x_0 - y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 - 3z_0)$.

30.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+y+az=0, \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(9)) = 0$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.
c)Demonstraţi că,dacă sistemul are soluţia (x_0, y_0, z_0),cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $x_0 - y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

31.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3^x & 9^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x))=(3^x-1)(3^x+x-x\cdot 3^x)$,pentru orice număr real x.

c)Arătaţi că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & \frac{3}{2}(3^{2017}-1) & \frac{9}{8}(9^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

32.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 8^x\\ 1 & x & 3x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x))=(2^x-1)(4^x+2^x+2x-x\cdot 4^x-x\cdot 2^x)$,pentru orice număr real x.

c)Arătaţi că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2018)=\begin{pmatrix}2018 & 2018 & 2018\\ 2018 & 2(2^{2018}-1) & \frac{8}{7}(8^{2018}-1)\\ 2018 & 2019\cdot 1009 & 2019\cdot 3027\end{pmatrix}$.

33.Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ 6 & 0 & 0\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.

a)Calculaţi $\det(A(3))$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p)=3B(1)$.

34.Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.

a)Calculaţi $\det(A(4))$.

b)Demonstraţi că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p)=-B(-7)$.

35.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 4\\ 1 & 4 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+4z=3\\ x+4y+az=3\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-4)$,pentru orice număr real a.

b)Determinaţi numerele reale m pentru care $A(m)A(3-m)=A(3-m)A(m)$.

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

36.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & -3\\ 1 & -3 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay-3z=-2\\ x-3y+az=-2\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=(a-5)(a+3)$,pentru orice număr real a.

b)Determinaţi numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

37.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a & 1\\ a & 3 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}3x+ay+z=1\\ ax+3y-z=-1\\ x+y-4z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(3))=0$.

b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -3$ şi $a\neq 3$.

c)Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

38.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & -a & 1\\ -a & 2 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x-ay+z=1\\ -ax+2y-z=-1\\ x+y-3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-12$.

b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -2$ şi $a\neq 2$.

c)Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

39. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -3a & 9a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-3ay+9a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y+3az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(-1))=2^5$.

b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq -\frac{1}{9}$ şi $a\neq \frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numerele reale a,pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

40. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & -1 & 1\\ 4a^2 & 1 & -2a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=6\\ 2ax-y+z=-1\\ 4a^2x+y-2az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=15$.

b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq -\frac{1}{2}$ şi $a\neq \frac{1}{6}$.

c)Determinaţi numerele reale a,pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

41.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2-x\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real a,$a\neq -1$,ştiind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

42.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3x & 1 & 0\\ 9x^2+3x & 6x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real a,$a\neq 0$,ştiind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)=A\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

43.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 2 & 2\\ 2 & -m & 2\\ 2 & 2 & -m\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-mx+2y+2z=-2\\ 2x-my+2z=-2\\ 2x+2y-mz=m\end{cases}$,
unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=16$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq-2$ şi $m\neq4$.
c)Pentru m=4,determinaţi soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care
$x_0+2y_0+4z_0=17$.

44.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+mz=-m\\ x+my+z=-1\\ mx+y+z=-1\end{cases}$, unde m
este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq1$ şi $m\neq-2$.
c)Pentru m=−2,determinaţi soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care
$x_0-2y_0+3z_0=11$.

45.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(10))=1024$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A(-x^2-2)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2014)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2015.

46.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(5))=3125$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(2x)\cdot A(3x)=A(x^2+4)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2021.

47.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 2 & m\\ m & m & 2\\ 2 & m & 2\end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

48.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2m\\ 2m & 2m & 2\\ 2 & 2m & 2\end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $A(0)\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

49.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & 0 & -2x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=0$.

b)Arătaţi că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x)=A(9)$.

50.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 3x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=3$.

b)Arătaţi că $A(x)A(y)=A(2xy+x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x)=A(13)$.

51.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 4x & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big)=-3$.

b)Arătaţi că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+1)B(2x)=B(x^2+2x+1)$.

52.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(B(0)\big)=1$.

b)Arătaţi că $B(2x)+B(2y)=2B(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+1)B(3x)=B(x^2+3x+1)$.

53.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0 & 3x & 0\\ 3x & 0 & 3x\\ 0 & 3x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că detA=0.

b)Arătaţi că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=9B(x)$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B(x^2+x-18)$.

54.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0 & -x & 0\\ -x & 0 & -x\\ 0 & -x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că detA=0.

b)Arătaţi că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(-x)$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B(x^2+x-2)$.

55.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a+1 & a+2\\ 2 & a+3 & a+4\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det\big(A(a)\big)$.

b)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $2A(n^2)-A(n)=A(15)$.

c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$A(2017)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

56.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & a & a+2\\ 1 & a+2 & a+4\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(a))$.

b)Determinaţi numărul natural n,știind că $2A(n^2)-A(n)=A(45)$.

c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\epsilon\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2018)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

57.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

b)Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.

c)Arătaţi că $\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))\geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.

58.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ x & 0 & 0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

b)Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.

c)Arătaţi că $\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))\geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.

59.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 4\\ 1 & 4 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-9$.

b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m))=0$.

c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2 & 6 & 6\\ 6 & 17 & 13\\ 6 & 13 & 17\end{pmatrix}$.

60.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m))=0$.

c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -4\\ 1 & -4 & 4\end{pmatrix}$.

61.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 3x^2-3x & 6x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+8)=A(x)\cdot A(2x)\cdot A(3x)$.

62.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 5x^2+5x\\ 0 & 1 & 10x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+3)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

63.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 2x+1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+2xy)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq-\frac{1}{2}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

64.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2x & 3x+1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+3xy)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq-\frac{1}{3}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

65. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a & a\\ a & 3 & 3\\ a & a & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=27$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ştiind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}8\\ 16\\ 12\end{pmatrix}$.

66. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}-2 & a & a\\ a & -2 & -2\\ a & a & -2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-8$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ştiind că $A(-1)\cdot X=\begin{pmatrix}9\\ 9\\ 6\end{pmatrix}$.

67.Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 3^n-1 & 1\end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
c)Determinaţi numerele naturale p şi q ştiind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

68.Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5^n & 5^n-1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
c)Determinaţi numerele naturale p şi q ştiind că $A(2p)\cdot A(2q)=A(pq+2)$.

69.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & 1 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -x\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$,pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.

c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

70.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$.

a)Arătaţi că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$,pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.

c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

71.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a)) = (a+4)(a-2)^2$,pentru orice număr real a.

b)Calculaţi inversa matricei $A(-2)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c)Determinaţi perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 90.

72.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a)) = -(a+4)(a-2)^2$,pentru orice număr real a.

b)Calculaţi inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c)Determinaţi perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 105.

73.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det(A(2))$.

b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)) = -2 \cdot 51^2 \cdot 101^3$.

74.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 3 & m & m \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & m \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det(A(3))$.

b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(-m) \cdot A(m) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 9 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

c)Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)) = -3 \cdot 51^2 \cdot 101^3$.

75.Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $D(2,3) = -2$.

b)Verificaţi dacă $D(a, b) = (a-1)(b-1)(a-b)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n, n^2)$, unde n este un număr natural nenul.Determinaţi numărul natural n,n≥3,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

76.Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $D(3,2) = 2$.

b)Verificaţi dacă $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(a - b)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n^2, n)$, unde n este un număr natural nenul.Determinaţi numărul natural n,n≥3,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

77.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det(A(0))$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $8A(a) - (A(a))^2 = 7I_3$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(1)$.

78.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det(A(0))$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $(A(a))^2 - 5A(a) = -4I_3$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(3)$.

79.Se notează cu $D(x, y)$ determinantul matricei $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi $D(-1,3)$.

b)Determinaţi numărul q pentru care matricea $A(3, q)$ are rangul egal cu 2.

c)Arătaţi că există cel puţin o pereche (x, y)de numere reale,cu x≠y,pentru care $D(x, y) = D(y, x)$.

80.Se notează cu $D(x, y)$ determinantul matricei $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & x & y \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi $D(-1,3)$.

b)Determinaţi numărul q pentru care matricea $A(3, q)$ are rangul egal cu 2.

c)Arătaţi că există cel puţin o pereche (x, y)de numere reale,cu x≠y,pentru care $D(x, y) = D(y, x)$.

81.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a & 4 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ x - y + az = 1 \\ ax + 4y + z = 6 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

82.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 4 & a & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + 4y + z = 6 \\ 2x + ay + z = 4 \\ -x + y + az = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

83.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2a-5 & a & a-2 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} (2-a)x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 2 - a \\ (2a-5)x + ay + (a-2)z = -4 \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -3$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a)) = (a-1)(3-a)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.

c)Determinaţi numărul natural a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

84.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2-a \\ a & a-2 & 2a-5 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} x + ay + (2-a)z = 1 \\ ax + (a-2)y + (2a-5)z = -4 \\ ax + y + z = 2 - a \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -3$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a)) = (a-1)(3-a)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.

c)Determinaţi numărul natural a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0) şi x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

85.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & a+1 & a \\ a^2+3 & a^2+2 & a^2+1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.

b)Demonstraţi că pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă .

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

86.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ a^2+2 & a^2+1 & a^2+3 \\ a+1 & a & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.

b)Demonstraţi că pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă .

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

87.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in (0, +\infty)$.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.

b)Demonstraţi că $A(y)A(x) = A(x)A(y)$, pentru orice $x,y \in (0, +\infty)$.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(3) \cdot A(2) \cdot A(1) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

88.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln x + 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in (0, +\infty)$.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Demonstraţi că $A(y)A(x) = A(x)A(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(3)\cdot A(2)\cdot A(1)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

89.Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ c & a & b\\ ab & bc & ac\end{pmatrix}$ unde a,b şi c sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(0,1,2)) = 2$.
b)Demonstraţi că $\det(A(a,b,c)) = (b-a)(a-c)(b-c)$, pentru orice numere reale a,b şi c.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere naturale, cu p<m<n, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,n şi p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

90.Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ b & a & c\\ ac & bc & ab\end{pmatrix}$ unde a,b şi c sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(0,2,1)) = 2$.
b)Demonstraţi că $\det(A(a,b,c)) = (a-b)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a,b şi c.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere naturale, cu n<m<p, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,n şi p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

91.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ a & 1 & 2\\ 2a-1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii
$\begin{cases}2x+y-3z=2\\ ax+y+2z=1\\ (2a-1)x+2y-z=a\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(4)) = 5$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.
c)Pentru a=3, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuaţii pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.

92.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ a & 1 & -2\\ 2a-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii
$\begin{cases}2x+y+3z=2\\ ax+y-2z=1\\ (2a-1)x+2y+z=a\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(4)) = -5$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.
c)Pentru a=3, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuaţii pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.

93.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(a) = \begin{pmatrix}2-a & 0 & -3a\\ 0 & 2 & 0\\ a & 0 & 2+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 8$.
b)Determinaţi matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ştiind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n)) > 0$.

94.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}2-a&0&a\\0&2&0\\-3a&0&2+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

b)Determinaţi matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ştiind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

95.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&1+\log_3 a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea A(a) este inversabilă.

c)Demonstraţi că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei A(a).

96.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\1+\log_3 a&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstraţi că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea A(a) este inversabilă.

c)Demonstraţi că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei A(a).

97.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&i&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ şi $A(z)=aI_3-bB$, unde z=a+ib, cu a şi b numere reale şi $i^2=-1$.

a)Arătaţi că $\det B=i$.

b)Demonstraţi că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care

$A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

98.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ şi $A(z)=aI_3-bB$, unde z=a+ib, cu a şi b numere reale şi $i^2=-1$.

a)Arătaţi că $\det B=i$.

b)Demonstraţi că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care

$A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

99.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}1-x&-x&0\\x&1+x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Arătaţi că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

100.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1-x&x&0\\-x&1+x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Arătaţi că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

101.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2x&1&0\\x^2&-x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.

102.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&-2x&x^2\\0&1&-x\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.

103.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&x&1-x\\1&1-x&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-2$.

b)Arătaţi că $A(x-1)-A(1)\cdot A(x)=-2I_3$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real x pentru care$\cdot A(x)\cdot A(1)\cdot A(1)=3A(1)+2I_3$.

104.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&x&1-x\\1&1-x&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=2$.

b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

105.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\a&-1&2a\\1&-2&a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+(1-a)z=0\\ax-y+2az=0\\x-2y+az=0\end{cases}$,

unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.

c)Pentru a=-1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

106.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&-2&a\\a&-1&2\,a\\1&1&1-a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-2y+az=0\\ax-y+2az=0\\x+y+(1-a)z=0\end{cases}$,

unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.

c)Pentru a=-1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

107.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a,\\ 2x+y+2z=2\end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=8$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c)Pentru $a=-2$, arătaţi că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii.
108.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ a & a+1 & -2\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ ax+(a+1)y-2z=a,\\ x-y+az=4\end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=-8$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c)Pentru $a=-2$, arătaţi că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii.
109.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & -1 & 1\\ x & x & -x\\ x & -1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=0$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y)A(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(y)=A(x)$.
110.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & x & x\\ -1 & x & -1\\ 1 & -x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=0$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y)A(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(y)=A(x)$.
111.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & 0 & 1\\ 1 & 0 & x\\ x & x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=-3$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.
c)Arătaţi că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci şi matricea $A(-x)$ este inversabilă.
112.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & x-1 & 0\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=-3$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.
c)Arătaţi că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci şi matricea $A(-x)$ este inversabilă.
113.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x+2 & 2x\\ 0 & x & x+2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(M(1)\big)=7$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2)=M(x-1)$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care $3\det\big(M(n)\big)\le\det\big(M(3n)\big)$.

114.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(1))=7$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $M(2)\cdot M(x)=M(x-1)$.

c)Determinaţi numerele naturale n pentru care $3\det(M(n))\leq \det(M(3n))$.

115.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x)=\begin{pmatrix} 4^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(B(1))=0$.

b)Arătaţi că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

116.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x)=\begin{pmatrix} 5^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(B(1))=0$.

b)Arătaţi că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

117.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(x)=\begin{pmatrix} 3x & -x & 0 \\ 8x & -3x & 0 \\ -8 & 2 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=0$.

b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

118.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(x)=\begin{pmatrix} 2x & 3x & -3 \\ -x & -2x & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=0$.

b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

119.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2+3x & 0 & 9x \\ 0 & 2 & 0 \\ -x & 0 & 2-3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=8$.

b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=2A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x)+A(3x))\cdot A(2x)=4A(x^2)$.

120.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-5x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -25x & 0 & 2+5x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=8$.

b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=2A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x)+A(3x))\cdot A(2x)=4A(x^2)$.

121.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2a\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+2az=a+1\\ x+y-az=-1\\ x+ay=0\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(2))=4$.

b)Pentru a=1, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

c)Determinați numărul real a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și $y_0=a$.

122.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 2a\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y+2az=a+1\\ ax+y=0\\ x+y-az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(2))=-4$.

b)Pentru a=1, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

c)Determinați numărul real a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0=a$.

123.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ a & 1 & -2\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+4y+z=4\\ ax+y-2z=4\\ ay+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=3$.

b)Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a.

c)Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0\geq 1$.

124.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+4y+z=4\\ ay+z=1\\ ax+y-2z=4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=-3$.

b)Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a.

c)Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0\geq 1$.

125.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+2a & -2a & 0\\ -a & 1+a & 0\\ 0 & 0 & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(-1))=4$.

b)Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+3ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul real a pentru care $A(-1)\cdot A(a)+A(5)=2A(4)$.

126.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & 0\\ 2a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(-1))=4$.

b)Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+3ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul real a pentru care $A(-1)\cdot A(a)+A(5)=2A(4)$.

127.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & a & 2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=3$.

b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(a)=(2a+1)A(a)$, pentru orice număr real a.
c)Se consideră matricea $B(n)=A(n)-nI_3$, unde n este număr natural.Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=3nA(n)$.

128.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1&2&1\\0&1&a\\0&2&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(3)\big)=0$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(a)=(2a+1)A(a)$, pentru orice număr real a.
c)Se consideră matricea $B(n)=A(n)-nI_3$, unde n este număr natural.Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=3nA(n)$.

129.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&-2a\\2&-1&-a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$\begin{cases}2x-y-az=a\\x-ay=a\\x+ay-2az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Arătaţi că, pentru orice număr real $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0,y_0,z_0) şi $4x_0z_0=1$.

130.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&-2a\\2&-1&-a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$\begin{cases}x-ay=a\\2x-y-az=a\\x+ay-2az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=-4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Arătaţi că, pentru orice număr real $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0,y_0,z_0) şi $4x_0z_0=1$.

Legi de compoziţie,grupuri

Fie M o mulţime nevidă.O funcţie $\varphi:M\times M\to M$, $(x,y)\to\varphi(x,y)$,se numeşte lege de compoziţie pe M.
Notăm $\varphi=\circ,*,\oplus,+,\cdot,\odot,\Delta,\perp,\top,\cup,\cap$, etc
Notăm $\varphi(x,y)=x\circ y,x*y,x\oplus y,x+y,x\cdot y,x\odot y,x\Delta y,x\perp y,x\top y,x\cup y,x\cap y$, etc
Fie M o mulţime nevidă şi $*:M\times M\to M,(x,y)\to x*y$
$*$ este asociativă $\Leftrightarrow(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\epsilon M$
$*$ este comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x,\forall x,y,\epsilon M$
$*$ admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\epsilon M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\epsilon M$
$x\epsilon M$ este simetrizabil în raport cu $*\Leftrightarrow\exists x'\epsilon M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$
$(x')'=x$, $(ab)'=ba$, $(abc)'=cba$
Cuplul $(M,*)$ se numeşte grup dacă au loc axiomele :
G_1) $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\epsilon M$,axioma asociativităţii
G_2) $\exists e\epsilon M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\epsilon M$,axioma elementului neutru
G_3) $\forall x\epsilon M,\exists x'\epsilon M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$,axioma elementelor simetrizabile
Grupul $(M,*)$ se numeşte grup abelian dacă are loc şi axioma
G_4) $x*y=y*x,\forall x,y,\epsilon M$,axioma comutativităţii

Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Fie $a\epsilon\mathbb{Z}$ şi $n\epsilon\mathbb{N},n\geq1$,din teoreama împărţirii cu rest obţinem $a=nq+r,0\leq r<n$,unde $q,r\epsilon\mathbb{Z}$ sunt unice
Notăm $r=a\,mod\,n$
$\widehat{a\oplus b}=(a+b)\,mod\,n$, $\widehat{a\odot b}=(a+b)\,mod\,n\ \forall a,b\epsilon\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$
$\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a\oplus b}$, $\hat{a}\cdot\hat{b}=\widehat{a\odot b}\ \ \forall\hat{a},\hat{b}\epsilon\mathbb{Z}_n$
$-\hat{a}=\widehat{n-a}$
$\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow(a,n)=1$, $U(\mathbb{Z}_n)=\{\hat{a}|(a,n)=1\}$
Dacă p e număr prim $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_p)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\dots,\widehat{p-1}\}=\mathbb{Z}_n\setminus\{\hat{0}\}$

Polinoame,rădăcini ale polinoamelor

Fie $K\epsilon\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim, $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\epsilon K$.
$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0$ este polinom cu coeficienţi în K, $f\epsilon K[X]$.
$a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\epsilon K$ se numesc coeficienţii polinomului f.
Dacă $a_n\neq0$ atunci gradf=n.
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,$f:K\to K$ se numeşte funcţie polinomială.
Pentru $\alpha\epsilon K$, $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0$ se numeşte valoarea polinomului f în punctul α.
α este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0$.
Teorema împărţirii cu rest
Pentru polinoamele $f,g\epsilon K[X],g\neq0$,există şi sunt unice polinoamele $c,r\epsilon K[X]$ astfel încât $f=g\cdot c+r$ şi $gradr<gradg$.În acest caz avem c=câtul,r=restul.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\epsilon\mathbb{Z}[X]$ şi $\alpha\epsilon\mathbb{Z}$.Dacă α este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\epsilon\mathbb{Z}[X]$,$a_n\neq0$şi $\alpha,\beta\epsilon\mathbb{Z},\beta\neq0,(\alpha,\beta)=1$.Dacă $\frac{\alpha}{\beta}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$ şi $\beta|a_n$.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\epsilon\mathbb{Q}[X]$ şi $a,b,d\epsilon\mathbb{Q}d>0,\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$. Atunci: $a+b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui $f\Leftrightarrow a-b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f,şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.

Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ şi $a,b\in\mathbb{R},b\neq0$. Atunci:
a+bieste rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ a−bi este rădăcină a lui f, şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate.

Divizibilitatea polinoamelor,teorema restului,teorema lui Bezout

Fie $f,g\in K[X]$ două polinoame,$K\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim.
f:g$\Leftrightarrow\exists h\in K[X]$ astfel încât f=gh$\Leftrightarrow$restul împărţirii lui f la g este polinomul nul$(g\neq0)$
f:g$\Leftrightarrow$toate rădăcinile lui g sunt şi rădăcini ale lui f ,cu cel puţin acelaţi ordin de multiplicitate ca la g

Teorema restului
Restul împărţirii lui f la X−α este egal cu $r=f(\alpha)$
Restul împărţirii lui f la X+α este egal cu $r=f(-\alpha)$

Teorema lui Bezout
$f:X-\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=0$, $f:X+\alpha\Leftrightarrow f(-\alpha)=0$

Relaţiile lui Viete

Pentru ecuaţia $ax^2+bx+c=0$,cu soluţiile x_1,x_2 ,sau polinomul $f=aX^2+bX+c$,cu rădăcinile x_1,x_2,avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s_1^2-2s_2$
$f=aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
polinomul $g=X^2-s_1X+s_2$ are rădăcinile x_1,x_2 ,ecuaţia $x^2-s_1x+s_2=0$ are soluţiile x_1,x_2

Pentru ecuaţia $ax^3+bx^2+cx+d=0$,cu soluţiile x_1,x_2,x_3 ,sau polinomul $f=aX^3+bX^2+cX+d$,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3, avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}\\ s_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=s_1^2-2s_2$
$f=aX^3+bX^2+cX+d=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$,
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
polinomul $g=X^3-s_1X^2+s_2X-s_3$ are rădăcinile x_1,x_2,x_3 ,ecuaţia $x^3-s_1x^2+s_2x-s_3=0$ are soluţiile x_1,x_2,x_3

Pentru ecuaţia $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$,cu soluţiile x_1,x_2,x_3,x_4 ,sau polinomul $f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4, avem

$$\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}\\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a}\\ s_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a}\\ s_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}\end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=$
$=s_1^2-2s_2$
$f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$,
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

polinomul $g=X^4-s_1X^3+s_2x^2-s_3X+s_4$ are rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4
ecuaţia $x^4-s_1x^3+s_2x^2-s_3x+s_4=0$ are soluţiile x_1,x_2,x_3,x_4

Ecuaţii reciproce de grad trei

Pentru $a\neq0$ avem $ax^3+bx^2+bx+a=0\Leftrightarrow a(x^3+1)+bx(x+1)=0\Leftrightarrow$
$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0\Leftrightarrow(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0\Leftrightarrow$
$x+1=0$ sau $a(x^2-x+1)+bx=0$
pentru $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$
pentru $a(x^2-x+1)+bx=0\Leftrightarrow ax^2+(b-a)x+a=0$ etc.

Subiectul II2 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+3X+m-4$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(1)=0$.
b)Pentru $m=4$, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m, pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X+4-m$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(1)=0$.
b)Pentru $m=4$, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m, pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
3.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie
$x*y=(x-2021)(y-2021)+2021$.
a)Arătaţi că $x*2021=2021$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numerele reale x, ştiind că $(x*x)*x=x$.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $m*n=2022$.
4.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie
$x*y=(x-2022)(y-2022)+2022$.
a)Arătaţi că $x*2022=2022$, pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numerele reale x, ştiind că $(x*x)*x=x$.
c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $m*n=2023$.
5.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-mX-n$, unde m şi n sunt numere reale.
a)Arătaţi că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m şi n.
b)Determinaţi numerele reale m şi n , ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
c)Demonstraţi că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=1$, pentru orice numere reale m şi n, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
6.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-mX+n$, unde m şi n sunt numere reale.
a)Arătaţi că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m şi n.
b)Determinaţi numerele reale m şi n , ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
c)Demonstraţi că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=1$, pentru orice numere reale m şi n, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
7.Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-mX^2+mX+15$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(-3)=0$.
b)Pentru $m=-1$, determinaţi rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2-mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2-mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2-mx_3}{x_1x_2}$.Demonstraţi că $a\in[3,+\infty)$,pentru orice număr real m.

8.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3 - mX^2 + mX + 2$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(-2) = 0$.
b)Pentru $m=-1$, determinaţi rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2-mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2-mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2-mx_3}{x_1x_2}$.Demonstraţi că $a\in[3,+\infty)$,pentru orice număr real m.
9.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{5}xy+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{5}{4}$.
a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(y+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x* x * x = x$.
c)Demonstraţi că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziţie „$*$” să fie natural.
10.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{5}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{15}{4}$.
a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x* x * x = x$.
c)Demonstraţi că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziţie „$*$” să fie natural.
11.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+3x^2+3y^2+6}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)-3}$,pentru orice numere reale x şi y .
b)Determinaţi perechile de numere naturale a şi b, ştiind că $a\circ b=3$.
c)Demonstraţi că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{3\circ 3\circ \ldots\circ 3}_{3 \text{ de n ori}}$ **nu** este natural.
12.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\sqrt{(x^2+5)(y^2+5)-5}$,pentru orice numere reale x şi y .
b)Determinaţi perechile de numere naturale a şi b, ştiind că $a\circ b=5$.
c)Demonstraţi că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{5\circ 5\circ \ldots\circ 5}_{5 \text{ de n ori}}$ **nu** este natural.
13.Se consideră polinomul $f=X^3 - X^2 - 4X + a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = -6$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X+2.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.
14.Se consideră polinomul $f=X^3 + 3X^2 - X + a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 0$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X−1.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.
15.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3xy+2x+2y+\frac{2}{3}$.
a)Demonstraţi că $x*y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{3}$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x şi y, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{2}{3}$.

16.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy+3x+3y+\frac{6}{5}$.
a)Demonstraţi că $x*y=5\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(y+\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=0$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{5}$.
17.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\frac{1}{7}xy-(x+y)+14$.
a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{7}(x-7)(y-7)+7$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{50}{7}$.
c)Calculaţi $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.
18.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\frac{1}{9}xy-(x+y)+16$.
a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{8}(x-8)(y-8)+8$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{65}{8}$.
c)Calculaţi $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2020$.
19.Se consideră polinomul $f=-nX^n-X^2+nX+1$, unde n este număr natural,$n\geq 3$.
a)Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.
b)Arătaţi că, dacă n este număr natural impar,$n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulţimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.
20.Se consideră polinomul $f=-nX^n+X^2+nX-1$, unde n este număr natural,$n\geq 3$.
a)Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.
b)Arătaţi că, dacă n este număr natural impar,$n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulţimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.
21.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{4}x+\hat{4}y+\widehat{16}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=(x+\hat{4})(y+\hat{4})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.
b)Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_{20}$, ştiind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.
c)Daţi exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{16}\}$ pentru orice $a\circ b=\hat{0}$.
22.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{30}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{29}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{30}$.
b)Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_{30}$, ştiind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{30}$.
c)Daţi exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{30}\setminus\{\widehat{27}\}$ pentru orice $a\circ b=\hat{0}$.
23.Se consideră polinomul $f=X^4-aX^2+4$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(2)=0$.
b)Pentru a=5, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.
24.Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+6$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(3)=0$.
b)Pentru a=−7, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-6.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.
25.Se consideră polinomul $f=X^3+(m+2)X^2+(m^2+2)X+1$,unde m este număr real.

a)Arătaţi că $f(0)=1$,pentru orice număr real m.
b)Demonstraţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.
26.Se consideră polinomul $f=X^3-(m+6)X^2+(m^2+18)X-27$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=-27$,pentru orice număr real m.
b)Demonstraţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-3)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.
27.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX-1$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(-1)=0$.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-X+1.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.
28.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX-8$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(-2)=0$.
b)Pentru a=4,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.
29.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+8x+8y+56$.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+8)(y+8)-8$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $x\circ x=x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $2018^a\circ(-7)=1$.
30.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-7x-7y+56$.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x-7)(y-7)+7$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $x\circ x=x$.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $2017^a\circ 8=1$.
31.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătaţi că $x*y=5(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstraţi că,dacă a,b şi c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=24$,atunci numerele a,b şi c sunt egale.
32.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=7xy-7x-7y+8$.
a)Arătaţi că $x*y=7(x-1)(y-1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstraţi că,dacă a,b şi c sunt numere naturale nenule astfel încât $a*b*c=50$,atunci numerele a,b şi c sunt egale.
33.Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+32X+8$,unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(-1)=0$.
b)Pentru a=32,determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2+30X+4$.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in(-8,8)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
34.Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+17X+10$,unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(3)=0$.
b)Pentru a=8,determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+6X+5.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in\left(-\sqrt{34},\sqrt{34}\right)$, atunci polinomul f are o singură rădăcină reală.
35.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-6xy+18x+18y-51$.
a)Arătaţi că $x*y=3-6(x-3)(y-3)$,pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $(n*n)*n=n$.
c)Arătaţi că,dacă $a*a=b$ şi $b*b=a$,atunci $a=b=3$ sau $a=b=\frac{17}{6}$.
36.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+20x+20y-76$.
a)Arătaţi că $x*y=4-5(x-4)(y-4)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $(n*n)*n=n$.
c)Arătaţi că,dacă $a*a=b$ şi $b*b=a$,atunci $a=b=4$ sau $a=b=\frac{19}{5}$.
37.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy-3x-3y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=3(x-1)(y-1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$.Demonstraţi că $f(x\circ y)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de2016 ori a}}=3^{2015}+1$.
38.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=5(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+5$.Demonstraţi că $f(x\circ y)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de2019 ori a}}=5^{2018}-1$.
39. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+5x+5y-20$.
a) Arătaţi că $x*y=5-(x-5)(y-5)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x*x=1$.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=5$,atunci produsul numerelor m,n şi p este divizibil cu 5.
40. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy-3x-3y-6$.
a) Arătaţi că $x*y=3-(x+3)(y+3)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x*x=-12$.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=3$,atunci produsul numerelor m,n şi p este divizibil cu 3.
41. Se consideră polinomul $f=X^4-mX^2+2$,unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m,ştiind că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=3,descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
42. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+4$,unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m,ştiind că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $m=-5$,descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
43.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+6x+6y-15$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=3$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=37$.
44.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-4xy+16x+16y-60$.

a)Arătaţi că $x*y=-4(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12=4$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=80$.
45.Se consideră polinomul $f=X^3-6X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016+5a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.
46.Se consideră polinomul $f=X^3-7X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2020-7a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f are cel puţin două rădăcini întregi.
47.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-6)(y-6)+6$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $1*2*3*...*2017$.
c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că $a<b<c$ şi $a*b*c=66$.
48.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+4x+4y+12$.
a)Arătaţi că $x*y=(x+4)(y+4)-4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $(-2018)*(-2017)*(-2016)*...*2018$.
c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că $a<b<c$ şi $a*b*c=116$.
49.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+X-m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=-m$.
b)Pentru m=1,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.
50.Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=m$.
b)Pentru m=5,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=25x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.
51.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x-5)(y-5)+5$.
a)Arătaţi că $(-5)\circ 5=5$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=37$.
c)Calculaţi $1\circ 2\circ 3\circ ...\circ 2017$.
52.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x+3)(y+3)-3$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 3=-3$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=5$.
c)Calculaţi $(-1)\circ(-2)\circ(-3)\circ...\circ(-2018)$.
53.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X-m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=-m$.
b)Pentru m=1,demonstraţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

54.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+8X+m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=m$.
b)Pentru $m=-16$,demonstraţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=2$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
55.Se consideră polinomul $f=X^3-mX-3$,unde m este număr real.
a)Pentru $m=-2$,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că polinomul f este divizibil cu $X-1$.
c)Arătaţi că,pentru orice număr real strict negativ m,polinomul f are două rădăcini de module egale.
56.Se consideră polinomul $f=-X^3-mX+3$,unde m este număr real.
a)Pentru $m=2$,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.
c)Arătaţi că,pentru orice număr real strict pozitiv m,polinomul f are două rădăcini de module egale.
57.Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-4x-4y+20$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere întregi x şi y.
b)Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
c)Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_{36}$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_{36}$ sunt divizorii naturali ai lui 2016.
58.Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy+5x+5y+20$.
a)Arătaţi că $x*y=(x+5)(y+5)-5$,pentru orice numere întregi x şi y.
b)Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
c)Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_{16}$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$ sunt divizorii întregi ai lui 2015.
59. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.
a)Calculaţi $1*5$.
b)Arătaţi că $x*y=5-(x-5)(y-5)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{x de 2018 ori}}=x$.
60. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=2x+2y-xy-2$.
a)Calculaţi $1*2$.
b)Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{x de 2017 ori}}=x$.
61.Se consideră polinomul $f=X^3-2x^2-aX-3$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(3)=3(2-a)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2+X+1.
c)Pentru $a=2$,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(3^x)=0$.
62.Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+aX-4$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(2)=3(a-16)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.
c)Pentru $a=5$,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x)=0$.
63.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $1-i$ este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru $a=3$,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

64.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2-7X+a$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că $2+i$ este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru $a=15$,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-23$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
65.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-6X^2+11X+m$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(1)$.
b)Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=36$.
66.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+2X^2-5X+m$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(2)$.
b)Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-20$.
67.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+3$.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-9.
c)Arătaţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=26$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
68.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+3X-4$.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-4.
c)Arătaţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-16$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.
69.Se consideră polinomul $f=X^3+2mX^2+2mX+1$,unde m este un număr real.
a)Calculaţi $f(-1)$.
b)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=8$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
70.Se consideră polinomul $f=2X^3-mX^2-mX+2$,unde m este un număr real.
a)Calculaţi $f(-1)$.
b)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
71.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy-6x-6y+14$. Legea „$*$”este asociativă şi are element neutru.
a)Arătaţi că $x*y=3(x-2)(y-2)+2$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2016}{1007}*\frac{2017}{1007}*\frac{2018}{1007}$.
c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „$*$”.
72.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy-9x-9y+30$. Legea „$*$”este asociativă şi are element neutru.
a)Arătaţi că $x*y=3(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $\frac{1}{673}*\frac{2}{673}*\frac{3}{673}*\ldots*\frac{2019}{673}$.
c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „$*$”.
73.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-5x-5y+30$.
a)Calculaţi $4\circ 5$.
b)Arătaţi că $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{x de 2017 ori}} = 6$.

74.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$.

a)Calculaţi $5 \circ 6$.

b)Arătaţi că $x \circ y = (x-6)(y-6) + 6$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{x de 2018 ori}} = 7$.

75. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + 2X^2 - 5X - m$, unde m este număr real.

a)Pentru m=3,arătaţi că $f(3) = 27$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.

c)Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 10(x_1 + x_2 + x_3)$,arătaţi că f se divide cu X+3.

76. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + 4X^2 + X - m$, unde m este număr real.

a)Pentru m=4,arătaţi că $f(-2) = -6$.

b)Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.

c)Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3)$,arătaţi că f se divide cu X−3.

77.Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 4X - 3$,unde m este număr real.

a)Calculaţi $f(3) - f(-3)$.

b)Determinaţi restul împărţirii lui f la X+3,ştiind că restul împărţirii polinomului f la X−3 este egal cu 9.

c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -7$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

78.Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X - 4$,unde m este număr real.

a)Calculaţi $f(2) - f(-2)$.

b)Determinaţi restul împărţirii lui f la X−3,ştiind că restul împărţirii polinomului f la X+3 este egal cu 8.

c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

79.Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + 2X - m$,unde m este un număr real.

a)Determinaţi m astfel încât restul împărţirii polinomului f(X) la X−2 să fie egal cu 10.

b)Arătaţi că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg,pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

c)În cazul m=−2 determinaţi patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

80.Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 - 3X + m$,unde m este un număr real.

a)Determinaţi m astfel încât restul împărţirii polinomului f(X) la X+2 să fie egal cu 4.

b)Arătaţi că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg,pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

c)În cazul m=3 determinaţi patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

81.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - \frac{1}{3}(x + y) + \frac{4}{9}$. Legea de compoziţie este asociativă şi are elemental neutru $e = \frac{4}{3}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

c)Arătaţi că **nu** există numere întregi x şi y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

82.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-\frac{1}{4}(x+y)+\frac{5}{16}$. Legea de compoziţie este asociativă şi are elemental neutru $e=\frac{5}{4}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{16}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

c)Arătaţi că **nu** există numere întregi x şi y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

83.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\log_5(5^x+5^y)$.

a)Arătaţi că $1*1=1+\log_5 2$.

b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=2+\log_5 3$.

84.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\log_6(6^x+6^y)$.

a)Arătaţi că $2*2=2+\log_6 2$.

b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=1+\log_6 3$.

85.Pe mulţimea $A=[2,+\infty)$se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-8x^3-8y^3+128}$.

a)Arătaţi că $2*2020=2$.

b)Demonstraţi că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3-8)(y^3-8)+8}$.

c)Determinaţi $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

86.Pe mulţimea $A=[-1,+\infty)$se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^3y^3+x^3+y^3-26}$.

a)Arătaţi că $(-1)*2020=-1$.

b)Demonstraţi că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{27}(x^3+1)(y^3+1)-1}$.

c)Determinaţi $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

87. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-6(x+y)+a$, unde a este număr real.

a)Pentru $a=21$, arătaţi că $1*3=0$.

b)Pentru $a=42$,arătaţi că $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$".

c)Demonstraţi că, dacă $a\in[42,+\infty)$, atunci mulţimea $H=[6,+\infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

88. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-7(x+y)+a$, unde a este număr real.

a)Pentru $a=28$, arătaţi că $1*3=3$.

b)Pentru $a=56$,arătaţi că $e=8$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$".

c)Demonstraţi că, dacă $a\in[56,+\infty)$, atunci mulţimea $H=[7,+\infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

89.În mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+\hat{2}X^3+bX+a$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

a)Pentru a=$\hat{2}$ şi b=$\hat{1}$, arătaţi că $f(\hat{2}) + f(\hat{0}) = \hat{2}$.
b)Determinaţi perechile (a, b), cu a,b$\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu X+$\hat{2}$.
c)Arătaţi că, pentru orice a,b$\in\mathbb{Z}_3$, există x,y $\in\mathbb{Z}_3$, cu x≠y, astfel încât f(x) = f(y).
90.În mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4 + \hat{2}X^3 + aX + b$, unde a,b$\in\mathbb{Z}_3$.
a)Pentru a=$\hat{1}$ şi b=$\hat{2}$, arătaţi că $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.
b)Determinaţi perechile (a, b), cu a,b$\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu X+$\hat{2}$.
c)Arătaţi că, pentru orice a,b$\in\mathbb{Z}_3$, există x,y $\in\mathbb{Z}_3$, cu x≠y, astfel încât f(x) = f(y).
91.Pe mulţimea G=(1, +∞) se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_4 y}}$.
a)Arătaţi că 9∗4=3.
b)Arătaţi că e=16 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗” .
c)Determinaţi x∈G, ştiind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziţie „∗” .
92.Pe mulţimea G=(1, +∞) se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_5 y}}$.
a)Arătaţi că 4∗5=2.
b)Arătaţi că e=25 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗” .
c)Determinaţi x∈G, ştiind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziţie „∗” .
93.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x + y - |y - x|)$.
a)Arătaţi că 2∗0=0.
b)Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale astfel încât a≤b, atunci a∗b=a.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = -10$.
94.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
a)Arătaţi că 2∗0=0.
b)Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale astfel încât a≤b, atunci a∗b=a.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = -10$.
95.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+m(x + y) + m(m - 1)$, unde m $\in(0, +\infty)$.
a)Pentru m=1, arătaţi că 3∘3=15.
b)Demonstraţi că, dacă 2∘1=10, atunci 2∘3=18.
c)Determinaţi numărul real x, ştiind că $(-mx^2) \circ (mx^3) = -m$, pentru orice m$\in(0, +\infty)$
96.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-m(x + y) + m(m + 1)$, unde m $\in(0, +\infty)$.
a)Pentru m=1, arătaţi că 3∘3=5.
b)Demonstraţi că, dacă 2∘1=10, atunci 2∘3=6.
c)Determinaţi numărul real x, ştiind că $(-mx^2) \circ (mx^3) = m$, pentru orice m$\in(0, +\infty)$
97.În mulţimea M=[1, +∞), se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\log_4(4^{x+y} - 4^{x+1} - 4^{y+1} + 20)$.
a)Arătaţi că $x*y = \log_4\left((4^x - 4)(4^y - 4) + 4\right)$, pentru orice x,y∈M.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Arătaţi că x∗x∗x<3x, pentru orice x∈M.
98.În mulţimea M=[1, +∞), se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\log_5(5^{x+y} - 5^{x+1} - 5^{y+1} + 30)$.
a)Arătaţi că $x*y = \log_5\left((5^x - 5)(5^y - 5) + 5\right)$, pentru orice x,y∈M.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Arătaţi că x∗x∗x<3x, pentru orice x∈M.

99.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-1$.
a)Arătaţi că $3*0=2$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*(x+1)=10$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn+2$.
100.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)^2-2(x-y)+1$.
a)Arătaţi că $0*2=9$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*(x+1)=12$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn+4$.
101.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{4x}{y+4}+\frac{4y}{x+4}$.
a)Arătaţi că $1*0=1$.
b)Demonstraţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{16}{x}=x$.
102.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{5x}{y+5}+\frac{5y}{x+5}$.
a)Arătaţi că $1*0=1$.
b)Demonstraţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{25}{x}=x$.
103.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{(x+y)xy}{xy+9}$.
a)Arătaţi că $5*3=5$.
b)Arătaţi că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{9}{n}*\frac{9}{m}=(n*m)\cdot\frac{1}{4}$.
104.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+9}$.
a)Arătaţi că $3*5=5$.
b)Arătaţi că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{9}{m}*\frac{9}{n}=\frac{1}{4}\cdot(m*n)$.
105.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-16(x+y)^2+1$.
a)Arătaţi că $0*1=-15$.
b)Arătaţi că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice numărr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.
106.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-25(x+y)^2+1$.
a)Arătaţi că $0*1=-24$.
b)Arătaţi că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice numărr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.
107.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+(3^x-3)(3^y-3)$.
a)Arătaţi că $3\circ 2=150$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Demostraţi că $(-x)\circ x\leq 4$, pentru orice număr real x.
108.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+(2^x-2)(2^y-2)$.
a)Arătaţi că $3\circ 2=18$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

c)Demostraţi că $(-x)\circ x \leq 1$, pentru orice număr real x.
109.Se consideră polinomul f=$X^4+2X^3-8X^2-3mX-m$, unde m este număr real..
a)Pentru m=-2, arătaţi că $f(-1)=-13$.
b)Pentru m=0, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul raţional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1-\sqrt{3}$.
110.Se consideră polinomul f=$X^4+2X^3-8X^2+3mX+m$, unde m este număr real..
a)Pentru m=2, arătaţi că $f(-1)=-13$.
b)Pentru m=0, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul raţional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1-\sqrt{3}$.
111.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\frac{3x+3y-1}{6}+\frac{3xy}{2}$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=\frac{7}{3}$.
b)Arătaţi că $e=\frac{1}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{3}+x\right)\circ\left(\frac{1}{3}-x\right)\circ\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\cdot x^2$.
112.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\frac{3xy}{2}+\frac{3x+3y-1}{6}$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=\frac{7}{3}$.
b)Arătaţi că $e=\frac{1}{3}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{3}-x\right)\circ\left(\frac{1}{3}+x\right)\circ\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\cdot x^2$.
113.Se consideră polinomul f=$X^3+3X^2-aX-3a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(-3)=0$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=1, arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul g=X-1.
c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=7$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
114.Se consideră polinomul f=$X^3+2X^2-aX-2a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(-2)=0$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=4, arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul g=X-2.
c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=10$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
115.Se consideră polinomul f=$X^3+aX^2+X+4-a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=6$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=4, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $(x_1-x_1^2)(x_2-x_2^2)(x_3-x_3^2)=6$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
116.Se consideră polinomul f=$X^3+aX^2+X+5-a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)=7$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=5, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $(x_1-x_1^2)(x_2-x_2^2)(x_3-x_3^2)=7$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
117.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=7(x-1)(y-1)+1$.
a)Arătaţi că $1*5=1$.
b)Arătaţi că $e=\frac{8}{7}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{49}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

118.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=8(x-1)(y-1)+1$.

a)Arătaţi că $1*4=1$.

b)Arătaţi că $e=\frac{9}{8}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{64}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

119.Se consideră polinomul $f=aX^3-2X^2-aX+4$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $f(1)=2$, pentru orice număr real nenul a.

b)Pentru $a=1$, determinaţi câtul şi restul împărţiriipolinomului f la polinomul $g=x^2-2X+1$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

120.Se consideră polinomul $f=aX^3+2X^2-aX-4$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $f(1)=-2$, pentru orice număr real nenul a.

b)Pentru $a=1$, determinaţi câtul şi restul împărţiriipolinomului f la polinomul $g=x^2+2X-1$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

121.Se consideră polinomul $f=X^4-5X^3+X^2-4X+m$, unde m este număr real.

a)Pentru $m=7$, arătaţi că $f(1)=0$.

b)Determinaţi numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=4$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Pentru $m=0$, determinaţi numerele reale a pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-a$ este egal cu a.

122.Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+X^2-5X+m$, unde m este număr real.

a)Pentru $m=9$, arătaţi că $f(1)=0$.

b)Determinaţi numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=3$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Pentru $m=0$, determinaţi numerele reale a pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-a$ este egal cu a.

123.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=6-\frac{1}{2}(x-6)(y-6)$.

a)Arătaţi că $8*9=3$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $(x+2)*(x+6)=8$.

c)Determinaţi tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m<n<p$, pentru care $m*n*p=5$.

124.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=7-\frac{1}{2}(x-7)(y-7)$.

a)Arătaţi că $9*10=4$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $(x+3)*(x+7)=9$.

c)Determinaţi tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m<n<p$, pentru care $m*n*p=6$.

125.Se consideră polinomul $f=mX^4-mX^2-X+1$, unde m este număr real nenul.

a)Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

b)Determinaţi numărul real nenul m pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul

g=X+2 este egal cu 15.
c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
126.Se consideră polinomul $f=mX^4 - mX^2 + X - 1$, unde m este număr real nenul.
a)Arătaţi că f(1)=0, pentru orice număr real nenul m.
b)Determinaţi numărul real nenul m pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+2 este egal cu 9.
c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
127.Se consideră polinomul $f=X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX - 9$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Pentru a=3 şi b=0, arătaţi că $f(-1) = -6$.
b)Pentru a=b=2, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2 + 2X + 2$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.
128.Se consideră polinomul $f=X^4 - 2X^3 + aX^2 + bX - 8$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Pentru a=5 şi b=4, arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Pentru a=b=1, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2 - 2X + 2$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.
129.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 - aX - 24$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = -24$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X−3.
c)Determinaţi numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 3.
130.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + aX - 24$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = -24$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X−3.
c)Determinaţi numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 3.

Limite de şiruri

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{cn+d}=\frac{b}{\infty}=0$,pentru $c\neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(c+\frac{d}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\left(c+\frac{d}{n}\right)}=\frac{a}{c}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(d+\frac{e}{n}+\frac{f}{n^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}{d+\frac{e}{n}+\frac{f}{n^2}}=\frac{a}{d}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an+b}{\sqrt{n^2+an+b}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1}=\frac{a}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$,dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Tabel de derivate

$c'=0$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$x'=1$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)'=2x$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^3)'=3x^2$	$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{x^2+1}$
$(x^4)'=4x^3$	$(e^x)'=e^x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{arcctg}x)'=-\frac{1}{x^2+1}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(e^{-x})'=-e^{-x}$	$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	

Reguli de derivare

$(f+g)'=f'+g'$ $(f-g)'=f'-g'$ $(\alpha f)'=\alpha f'$ $(fg)'=f'g+fg'$

$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$ $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$

Derivate de ordin 1 şi 2

1.Calculaţi $f'(x)$ pentru următoarele funcţii:

$f(x)=2016$, $f(x)=6\sqrt{2}$, $f(x)=\operatorname{tg}4$, $f(x)=x^4$, $f(x)=x^{100}$, $f(x)=x^{2015}$, $f(x)=x^9$,
$f(x)=x^{900}$, $f(x)=x^{2017}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $f(x)=\frac{1}{x^8}$, $f(x)=\frac{1}{x^{2014}}$, $f(x)=\log_4 x$,
$f(x)=\log_5 x$, $f(x)=\log_{0,3} x$, $f(x)=5^x$, $f(x)=6^x$, $f(x)=2014^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^x$,
$f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=\log_3(5x)+\log_3\frac{1}{5}$, $f(x)=\log_6(4x^2)-\log_6(4x)$,
$f(x)=\log_2(3x^2)+\log_2\frac{1}{3x}$, $f(x)=5^x$, $f(x)=2016^x$, $f(x)=5^{2x}$, $f(x)=e^{3x}$, $f(x)=x^3+3^x$,
$f(x)=x^3+4x+1$, $f(x)=x^3-3x+2$, $f(x)=x^3+2x^2-5$, $f(x)=3x-x^5$,
$f(x)=2-3x+x^2-5x^3$, $f(x)=6x-x^4$, $f(x)=x+3\sqrt{x}$, $f(x)=x^4+\sin x+\cos x$,
$f(x)=\cos x-\sin x$, $f(x)=x-\cos x+\sin x$, $f(x)=x^2+5\sqrt{x}$, $f(x)=x-3\sqrt{x}$,
$f(x)=5x^3+\ln x$, $f(x)=5^x+2^x-x$, $f(x)=3^x+4^x-x^2$, $f(x)=4\cos x+3\sin x-x$,

$f(x)=5\sin x-6\cos x+\sqrt{2}$, $f(x)=x^4+\log_4 x+2^x$, $f(x)=x^3+\log_3 x-\sin x$,
$f(x)=x^4+\log_4 x+\cos x$, $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{3}+\operatorname{tg}x$, $f(x)=\sqrt[3]{x}-3^2+\operatorname{ctg}x$,
$f(x)=(x-2)^2+(x+2)^2$, $f(x)=3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}+\log_{0,6} x$, $f(x)=\log_4 x^4+\log_3 x^6$,
$f(x)=3\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$, $f(x)=4\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x$, $f(x)=x\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}x$, $f(x)=3^{x+1}+2^{x-1}$,
$f(x)=5\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x+3^x$, $f(x)=1^x+2^x+e^x+3^x$, $f(x)=\log_5 x^5-\log_{\frac{1}{2}} x^3$,
$f(x)=5^{x+1}+3^{x-1}$, $f(x)=x\sqrt{3}+3\sqrt{x}$, $f(x)=3^x+x^3+\sqrt[3]{x}+\log_3 x$,
$f(x)=3x^4-2x^3+5x+10$, $f(x)=(1-3x)(1+6x)$, $f(x)=\sin 2x$, $f(x)=(1+x)\ln x$,
$f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ln x$, $f(x)=(2\sin x+3)(1-5\cos x)$, $f(x)=(1-3x^2)(1-2\sin x)$,
$f(x)=\left(-\frac{3}{x}+4\right)(2\ln x-3)$, $f(x)=(1+x)(2+\ln x)(3\sin x-5)$, $f(x)=3x^2\cdot\ln x\cdot\sin x$,
$f(x)=x\cos x-5x\ln x+3\sin x-x^2+2x$, $f(x)=\left(3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)\sin x+5\sin x\ln x-x^3+4x+5$,
$f(x)=3x^5-2x^3+4x+6$, $f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=x\sin x$,
$f(x)=x\cos x$, $f(x)=x^2\sin x$, $f(x)=\sqrt{x}\sin x+5\cos x-\frac{3}{x}+9$, $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x$, $f(x)=\frac{1}{x+2}$,
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(1+2x+3x^2)$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$, $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$,
$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^2+x+1}$, $f(x)=\frac{1-x^3}{1+x^3}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}$, $f(x)=\frac{\ln x+x}{\ln x-x}$,
$f(x)=\frac{\ln x+x^2}{\ln x-x^2}$, $f(x)=\frac{3\sin x}{3\cos x-5}$, $f(x)=\frac{-\sin x+3\cos x}{\sin x+4}$, $f(x)=\frac{2\sin x-5\cos x}{3\sin x+4}$, $f(x)=\frac{5x+3}{3-5x}$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$,
$f(x)=(5x+6)\ln x$, $f(x)=(5x-6)e^x$, $f(x)=xe^x\ln x$, $f(x)=x^2\cdot\sin x\cdot\ln x$,
$f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\cos x$, $f(x)=\frac{\cos x+3}{\cos x-3}$, $f(x)=\frac{x+e^x}{x-e^x}$, $f(x)=2x^3+4x+6$, $f(x)=\frac{1}{x}-x$,
$f(x)=2x^3+3x^2+5$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$, $f(x)=2x^3-6x+1$,
$f(x)=x^3-3x+1$, $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$, $f(x)=x+\frac{4}{x-2}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$,
$f(x)=(x-1)e^x$, $f(x)=x^2-\ln x$, $f(x)=x^2-x$, $f(x)=x^3-3x+7$, $f(x)=e^x-x$,
$f(x)=\sqrt{x}-1$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$, $f(x)=xe^x$, $f(x)=(x+2)^3$, $f(x)=x+10-\frac{11}{x}$, $f(x)=x\ln x$,
$f(x)=2x^3-4x+6$, $f(x)=\frac{1}{x}+x$, $f(x)=2x^3-3x^2+5$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $f(x)=x^4+2x^2+1$,
$f(x)=2x^3+6x+1$, $f(x)=x^3+3x+1$, $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$, $f(x)=x-\frac{4}{x-2}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$,
$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $f(x)=(x+1)e^x$, $f(x)=x^2+\ln x$, $f(x)=x^2+x$,
$f(x)=x^3+3x+7$, $f(x)=e^x+x$, $f(x)=\sqrt{x}+1$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$, $f(x)=2xe^x$, $f(x)=(x+3)^3$,
$f(x)=x-10+\frac{11}{x}$, $f(x)=x^2\ln x$, $f(x)=x^3+x^2-x+1$, $f(x)=x^3-3x$,
$f(x)=-x^3+3x+2$, $f(x)=x^3-12x$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=x^3-x^2+x+1$,
$f(x)=x^3+3x$, $f(x)=-x^3-3x+2$, $f(x)=-x^3+12x$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$, $f(x)=-\frac{1}{x}$,
$f(x)=e^x-x-1$, $f(x)=3e^x+x^2$, $f(x)=e^x-\ln x+x$, $f(x)=x^4-8x^2+16$,
$f(x)=(x+1)e^x$, $f(x)=xe^x-e^x+1$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$, $f(x)=x\ln x-x+1$,
$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$,
$f(x)=e^x(x^2-6x+9)$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=x-\ln x$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,
$f(x)=x+\ln x$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$, $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$, $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$, $f(x)=-\frac{4}{x^2+1}$,

$f(x)=e^x-\frac{1}{x}, f(x)=\ln x+e^x, f(x)=x^3+x^2+x+3^x, f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}, f(x)=e^x-x,$
$f(x)=x^2e^x, f(x)=x^2+\frac{2}{x}, f(x)=\frac{e^x}{1+x}, f(x)=\sqrt{x^2+3}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}, f(x)=\sqrt{x^2+4},$
$f(x)=e^x+x-1, f(x)=3e^x-x^2, f(x)=e^x+\ln x-x, f(x)=x^4+8x^2-16,$
$f(x)=(x-1)e^x, f(x)=xe^x+e^x+1, f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=\frac{x-\ln x}{x}, f(x)=x\ln x+x-1,$
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}, f(x)=\frac{e^{-x}}{x+2}, f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-3}, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x, f(x)=\ln(x+1)+\ln x,$
$f(x)=e^x(x^2+6x+9), f(x)=\frac{2}{x}-\ln x, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+1},$
$f(x)=x-\ln x, f(x)=\sqrt{x}+\ln x, f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-2}, f(x)=\frac{x-1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}, f(x)=-\frac{4}{x^2-1},$
$f(x)=e^x+\frac{1}{x}, f(x)=\ln x-e^x, f(x)=x^3-x^2+x-3^x, f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^2}, f(x)=e^x+x,$
$f(x)=x^3e^x, f(x)=x^2-\frac{2}{x}, f(x)=\frac{e^x}{1-x}, f(x)=\sqrt{x^2-3}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=\sqrt{x^2-4},$
$f(x)=x^4-5x^2+3, f(x)=4x^3-7x+2, f(x)=x^3+3x+2, f(x)=x^3-3x^2+1,$
$f(x)=\frac{x-3}{x+3}, f(x)=x+\frac{5}{x-3}, f(x)=\frac{6x}{x^2+1}, f(x)=\frac{1}{x}-\ln x, f(x)=\ln x-x+\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x-2}{x-3},$
$f(x)=\frac{x+1}{x+2}, f(x)=(x-2)e^x, f(x)=(x+1)e^x, f(x)=x^2+\ln x, f(x)=x^2-3x,$
$f(x)=x^2+x, f(x)=x^4-x^3, f(x)=x^3+3x-5, f(x)=e^x+x, f(x)=\sqrt{x}+1, f(x)=\frac{x+2}{x},$
$f(x)=\frac{x-2}{x}, f(x)=xe^x, f(x)=(x+3)^2, f(x)=(x-2)^3, f(x)=x+11-\frac{6}{x}, f(x)=x^4\ln x,$
$f(x)=\sqrt{x}+4\ln x, f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}, f(x)=\frac{x-2}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}, f(x)=e^x+\frac{1}{x}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}+x,$
$f(x)=\ln x+e^x, f(x)=x^3-x^2+x-3^x, f(x)=\frac{x+3}{(x-1)^2}, f(x)=e^x-2x, f(x)=x^3e^x,$
$f(x)=x^2+\frac{3}{x}, f(x)=\frac{e^x}{x+2}, f(x)=\sqrt{x^2+5}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=2x^3-3x^2+5,$
$f(x)=2x+\frac{1}{x}, f(x)=x^4-6x^2+9, f(x)=4x^3-7x+2, f(x)=x^3-6x+3, f(x)=x+\frac{5}{x-3},$
$f(x)=\frac{x-4}{x+4}, f(x)=\ln x-\frac{3}{x}, f(x)=\frac{4x}{x^2+1}, f(x)=(x-2)e^x, f(x)=\frac{x+2}{x+1}, f(x)=e^x(x+2),$
$f(x)=x^4e^x, f(x)=x^{2016}e^x, f(x)=x^3-\ln x, f(x)=x^2-x+3, f(x)=e^x-x^2+3x,$
$f(x)=x^3-3x+6, f(x)=\frac{x+2}{x}, f(x)=\sqrt{x}-4, f(x)=x\sqrt{x}, f(x)=(x+4)^3, f(x)=(x+5)^3,$
$f(x)=x^{2017}e^x, f(x)=x^5\ln x, f(x)=(x+2)\ln x, f(x)=x+11-\frac{12}{x}, f(x)=x-\frac{1}{x},$
$f(x)=x+\frac{1}{x}, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}, f(x)=x\,tgx, f(x)=e^x\ln x, f(x)=\frac{e^x}{\ln x}, f(x)=\frac{e^x}{x^2},$
$f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=e^x-e^{-x}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f(x)=x+e^{-x}, f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1,$
$f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}, f(x)=e^x+x^2, f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}, f(x)=e^x(2x^2+4x+5), f(x)=-x^2+x,$
$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}, f(x)=x-2\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x+1}, f(x)=\frac{\ln x}{x}, f(x)=e^{-x}-1, f(x)=-e^{-x},$
$f(x)=e^x-1, f(x)=\frac{e^x}{x^2}, f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, f(x)=\frac{e^x}{x+2}, f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1},$
$f(x)=x-e\ln x, f(x)=(x^2-2x+1)e^x, f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x, f(x)=e^x-x, f(x)=e^x-x-1,$
$f(x)=\frac{\ln x}{x}, f(x)=\ln x+7, f(x)=x-\ln x, f(x)=x^2+e^x, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x-\frac{1}{e^x},$
$f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}, f(x)=(x^2+2x+3)e^x, f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, f(x)=(x^2-3x-3)e^x, f(x)=\frac{x-\ln x}{x+\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x)=\ln x-x+1, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}, f(x)=\frac{2x-1}{x-1}, f(x)=x^{2008}+2008^x,$

$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x)=x^2+e^x, f(x)=(x-1)e^x, f(x)=xe^x, f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}, f(x)=x-2\ln x,$
$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}, f(x)=(x-2)\ln x, f(x)=1+\sqrt{x}, f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f(x)=\sqrt{x}+x, f(x)=x\sqrt[3]{x},$
$f(x)=x^4-6x^2+18x+12, f(x)=(x^2-1)\ln x, f(x)=x\ln x, f(x)=3^x+1,$
$f(x)=e^x-x-1, f(x)=e^x-1, f(x)=e^x-ex-1, f(x)=x-\ln x, f(x)=\frac{x+1}{x-1},$
$f(x)=2^x-x\ln 2, f(x)=\frac{x+1}{x-3}, f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}, f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2}, f(x)=\frac{2x+3}{x+2},$
$f(x)=x+\frac{3}{2}, f(x)=x^3-3x^2+4, f(x)=x^3-5x^2+8x-4, f(x)=x^3+3x,$
$f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}, f(x)=x+\sqrt{x}, f(x)=\ln x+8, f(x)=\frac{3}{x}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}, f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2},$
$f(x)=(x-1)(x-2), f(x)=\frac{1}{x^2+1}, f(x)=\frac{x+1}{e^x}, f(x)=(x-3)\ln x, f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},$
$f(x)=2^x+3^x, f(x)=x+1+\frac{1}{x-1},$
$f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}, f(x)=(x-3)\sqrt{x}, f(x)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2+1}{x},$
$f(x)=\frac{\ln x}{x^4}, f(x)=x\ln x-x, f(x)=x^3-3x+1, f(x)=2x^3-3x^2+1, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x,$
$f(x)=x^2-x-\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x}, f(x)=(x^2+1)e^x-1, f(x)=xe^x, f(x)=\frac{x^2}{x-1}, f(x)=\frac{x^3}{\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x)=\frac{e^x}{x-1}, f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}, f(x)=\frac{x^2+1}{x}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2},$
$f(x)=x^3-3x^2+4, f(x)=x^3-5x^2+8x-4, f(x)=x^3+3x, f(x)=\ln x+\frac{x^2}{x},$
$f(x)=x+\sqrt{x}, f(x)=x^3+\frac{3}{x}, f(x)=(x-1)(x-2), f(x)=(x-3)\ln x,$
$f(x)=x^{2016}+2016x, f(x)=2016^x-x^{2016}, f(x)=\frac{x^2}{x-1}, f(x)=e^x+e^{-x}, f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}},$
$f(x)=x-e^{-x}, f(x)=x^{2017}+2017(x-1)-1,$
$f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-2}, f(x)=e^x-x^2, f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}, f(x)=e^x(2x^2-4x+5), f(x)=x^2-x,$
$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{e^x}{x-1}, f(x)=\frac{\ln x}{-x}, f(x)=e^{-x}+1, f(x)=-e^{-x}+x,$
$f(x)=e^x+1, f(x)=\frac{-e^x}{x^2}, f(x)=(x+5)^2+(x-5)^2, f(x)=\frac{-\ln x}{x^2}, f(x)=\frac{e^x}{x-2}, f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1},$
$f(x)=x+e\ln x, f(x)=(x^2+2x+1)e^x, f(x)=\frac{x^4}{4}+\ln x, f(x)=e^x+x, f(x)=e^x-x+1,$
$f(x)=\frac{\ln x}{e^x}, f(x)=\ln x-7, f(x)=x+\ln x, f(x)=x^2-e^x, f(x)=x^{2018}\ln x, f(x)=x+\frac{1}{e^x},$
$f(x)=1-\frac{2e^x}{x-e^x}, f(x)=(x^2-2x+3)e^x, f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, f(x)=(x^2+3x-3)e^x, f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}, f(x)=\ln x+x+1, f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}, f(x)=\frac{2x+1}{x+1}, f(x)=x^{2017}-2017^x,$
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x)=x^2-e^x, f(x)=(x+1)e^x, f(x)=3x-xe^x, f(x)=\frac{x^2-3}{x+1}, f(x)=x+2\ln x,$
$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}, f(x)=(x+2)\ln x, f(x)=1-\sqrt{x}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, f(x)=\sqrt{x}-x, f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x},$
$f(x)=x^4+6x^2-18x+12, f(x)=(x^2+1)\ln x, f(x)=x^5\ln x, f(x)=x4^x, f(x)=e^x+x-1,$
$f(x)=e^x+1, f(x)=e^x+ex+1, f(x)=x+2\ln x, f(x)=\frac{x-1}{x+1}, f(x)=2x^3+15x^2-24x-1,$
$f(x)=2^x+x\ln 2, f(x)=\frac{x-1}{x+3}, f(x)=e^x-\frac{x-1}{x}, f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, f(x)=\frac{2x}{1-x^2}, f(x)=\frac{2x-3}{x-2},$
$f(x)=x-\frac{3}{x}, f(x)=x^3+3x^2+4, f(x)=x^3+5x^2-8x-4, f(x)=x^3-3x, f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2},$

$f(x)=x-\sqrt{x}, f(x)=\ln x-8, f(x)=-\frac{3}{x}, f(x)=x^3-\frac{3}{x}, f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2}, f(x)=(x+1)(x-2),$
$f(x)=\frac{1}{x^2-1}, f(x)=\frac{x-1}{e^x}, f(x)=(x+3)\ln x, f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, f(x)=2^x-3^x, f(x)=x-1+\frac{1}{x+1},$
$f(x)=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}, f(x)=(x+3)\sqrt{x}, f(x)=3^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}, f(x)=\frac{x^2-1}{x}, f(x)=\frac{\ln x}{x^7},$
$f(x)=x\ln x+x, f(x)=x^3+3x+1, f(x)=2x^3+3x^2+1, f(x)=2\sqrt{x}+\ln x,$
$f(x)=x^2+x-\ln x, f(x)=\frac{e^x}{-x}, f(x)=(x^2-1)e^x-1, f(x)=2xe^x, f(x)=\frac{x^2}{x+1}, f(x)=\frac{-x^3}{\ln x},$
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x)=\frac{e^x}{x+1}, f(x)=x-2+3\sqrt[3]{x}, f(x)=\frac{x^2-1}{x}, f(x)=\frac{2x}{1-x^2}, f(x)=x^3+3x^2-4,$
$f(x)=x^3+5x^2-8x-4, f(x)=x^3-3x, f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}, f(x)=x-\sqrt{x}, f(x)=x^3-\frac{3}{x},$
$f(x)=(x-1)(x+2), f(x)=(x+3)\ln x, f(x)=x^{2016}-2016x, f(x)=2016^x+x^{2016},$
$f(x)=x+2\ln x+2017, f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}, f(x)=(x+2016)e^x, f(x)=(3x+2)e^x, f(x)=x^2+\ln x+2016,$
$f(x)=2x^3-15x^2+24x-1, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x, f(x)=7^x-4^x+2^x, f(x)=x^2-8x+8\ln x+2-8\ln 2,$
$f(x)=x^4e^{-x}, f(x)=e^x(x^2+4x+3), f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\ln x, f(x)=6x^2-\ln x, f(x)=x-\text{arctg}x, f(x)=4x^2-\sqrt{x},$
$f(x)=e^x-x-13, f(x)=\frac{x^2+16x+64}{e^x}, f(x)=3x-\ln x^e, f(x)=\ln x+\frac{2(x-1)}{x}, f(x)=3\ln x-x^2-3x,$
$f(x)=2-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x}{x+2}+\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+4}, f(x)=(x-2)e^x+2, f(x)=\frac{x+2}{x^2+3}, f(x)=\frac{e^x}{x-7}.$

2.Calculaţi $f''(x)$ pentru următoarele funcţii:
$f(x)=x^3+3x, f(x)=x^2e^x, f(x)=\cos x-\sin x, f(x)=x+\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{x}-x, f(x)=\frac{x}{x^2-1},$
$f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}, f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}, f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, f(x)=x^3\ln x, f(x)=x\ln x, f(x)=3x^2+6x,$
$f(x)=x^3+5x, f(x)=e^x-x, f(x)=2x+\ln x, f(x)=x^2\ln x, f(x)=x^3e^x, f(x)=(2x+1)\ln x,$
$f(x)=(x^2+1)\ln x, f(x)=\cos^2 x, f(x)=\sin^3 x, f(x)=\cos^4 x, f(x)=x\cos x+\sin x, f(x)=\frac{x+1}{x-2},$
$f(x)=x\sin x-\cos x, f(x)=x^3\sqrt{x}, f(x)=x\text{ctg}x, f(x)=x\sin x, f(x)=\frac{x-2}{x+1}, f(x)=\frac{x+1}{x-1},$
$f(x)=(x^2+x+1)e^x, f(x)=e^x\sin x, f(x)=e^x\cos x, f(x)=x^3+x^2+x+1,$
$f(x)=x^4+3x^2+2, f(x)=3\sin x+4\cos x, f(x)=3\sqrt{x}+5x, f(x)=\frac{x}{x+2}, f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1},$
$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x}, f(x)=x^4\ln x, f(x)=5x^2+2x+3, f(x)=3x+\ln x, f(x)=(x^2+x+1)\ln x,$
$f(x)=(x^2+x+1)e^x, f(x)=\frac{x+1}{x-3}, f(x)=\frac{x}{x+1}, f(x)=x\ln x, f(x)=(x^2+x)\ln x, f(x)=x^5e^x,$
$f(x)=x^{10}+x^5, f(x)=\sin^6 x, f(x)=\cos^5 x, f(x)=x^3\sin x, f(x)=x^2\sin^3 x, f(x)=x^3\cos^2 x,$
$f(x)=e^x\ln x, f(x)=e^x(\sin x+\cos x), f(x)=x^2(\sin x-\cos x), f(x)=x^5+3x^4-5x^2+2,$
$f(x)=4\sin x+3\cos x, f(x)=\frac{x+4}{x-4}, f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-3}, f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x}, f(x)=\frac{e^x+3}{e^x+1}, f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x},$
$f(x)=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}, f(x)=\frac{x+7}{x+6}, f(x)=(x+2)e^x, f(x)=(3x-2)e^x, f(x)=\frac{\text{tg}x}{\sin x},$
$f(x)=x^2+2x+2-2e^x, f(x)=2e^x-x^2-2x-4, f(x)=\frac{\ln x}{x-1}, f(x)=\frac{\ln x}{2-x}, f(x)=\frac{x^2-8}{e^x},$
$f(x)=\frac{x^2-15}{e^x}, f(x)=x^{2018}-2018x+2, f(x)=x^{2016}+2016x+4,$
$f(x)=-e^x+\ln x-3, f(x)=8\ln x-x^2, f(x)=x^2-32\ln x, f(x)=2e^x-x^2-2x-2,$
$f(x)=e^x+\frac{1}{3}x^3+x+1, f(x)=\frac{1}{x(x-1)}, f(x)=\frac{1}{x(x+2)}, f(x)=\frac{x+3}{x-2}, f(x)=\frac{x-2}{x+1}, f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2},$
$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}, f(x)=\frac{x+2}{e^x-x}, f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}, f(x)=\frac{x+2}{x^2+4x+5}, f(x)=\frac{x+3}{x^2+6x+10}, f(x)=\frac{xe^x}{x+4}, f(x)=\frac{xe^x}{x+2},$

$f(x)=\frac{x^2}{x-4}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $f(x)=-\frac{\ln x}{x^3}$, $f(x)=5x+e^x$, $f(x)=-3x+e^x$, $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$,
$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$, $f(x)=\frac{e^x}{3x+e^x}$, $f(x)=\frac{e^x}{4x+e^x}$, $f(x)=2\cos x+x^2$, $f(x)=-x^2-2\cos x$,
$f(x)=e^x-x+1$, $f(x)=x-e^x$.

Derivarea funcţiilor compuse

$\big((f\circ g)(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$, $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

Tabel de derivate funcţii compuse

$(u^2)'=2u\cdot u'$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(\text{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(u^3)'=3u^2\cdot u'$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	$(\text{arcsin}u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^4)'=4u^3\cdot u'$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$	$(\text{arccos}u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^5)'=5u^4\cdot u'$	$\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\text{arctg}u)'=\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^6)'=6u^5\cdot u'$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\text{arcctg}u)'=-\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$	$(e^{-u})'=-e^{-u}\cdot u'$	$(\text{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	

Derivate funcţii compuse

3.Calculaţi derivatele următoarelor funcţii:

$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+3)$,
$f(x)=\ln(x-2)+1-e^x$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$,
$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$, $f(x)=\ln(x-3)+\ln(x+3)$,, $f(x)=e^x+\ln x^3+2$,
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $f(x)=\ln\frac{x+4}{x-4}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x+3}$,
$f(x)=\ln(x+1)-x$, $f(x)=x+1-\ln(x+2)$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$,
$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$, $f(x)=e^{x^2+2x+1}$, $f(x)=e^{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sin(x^2+3x)$,
$f(x)=\sin(x^2-2x)$, $f(x)=\cos(x^2+3x)$, $f(x)=\cos(x^2-2x)$, $f(x)=\text{tg}(x^2+3x)$,
$f(x)=\text{tg}(x^2-2x)$, $f(x)=\text{ctg}(x^2+3x)$, $f(x)=\text{ctg}(x^2-2x)$, $f(x)=\arcsin(3x)$,
$f(x)=\text{arsin}(2x)$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$, $f(x)=(x^2+x+1)^6$,
$f(x)=(x^2-x+1)^8$, $f(x)=(3x+4)^7$, $f(x)=(3x-4)^7$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$,
$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$, $f(x)=e^{x^3}$, $f(x)=\sin e^x$, $f(x)=\cos e^x$, $f(x)=\text{tg}e^x$, $f(x)=\text{ctg}e^x$, $f(x)=\frac{1}{x-3}+\ln\frac{x-2}{x}$,
$f(x)=\sqrt{x^4-x^2+3}$, $f(x)=3-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$, $f(x)=x^4e^{-x}$, $f(x)=x-\ln(x^2+x+5)$,
$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-x+1$, $f(x)=2x^3+3x^2+6x-6\ln(x-1)$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+49}+x\right)$,
$f(x)=x\ln(x+3)$, $f(x)=x^2-4\sqrt{x^2-2}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4x+4}$, $f(x)=2-2x+2\ln(x+1)$.

Limitele unor funcţii

Funcţiile cu nume se numesc funcţii elementare,o să numim funcţii elementare şi operaţiile cu aceste funcţii cu nume.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie elementară şi $a\in D\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{c}{\infty}=0$

Pentru $x_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\frac{a}{c}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\frac{a}{c}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}$.

$\lim\limits_{x\to\alpha}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$,dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1}=\frac{a}{2}$.

Pentru calculul unor limite de funcţii utilizăm şi regula lui l'Hospital, pe care o expunem pe pagina următoare.

Continuitate

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,$a\epsilon\mathbb{R}$,a punct de acumulare pentru D

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=f(a)$

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,$a\epsilon\mathbb{R}$,a punct izolat pentru $D\Longrightarrow$f continuă în a.

Dacă o funcţie continuă nu se anulează pe un interval atunci ea păstrează semn constant pe acel interval.

Fie I interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $f(x)\neq 0\forall x\epsilon I\Rightarrow f(x)>0\forall x\epsilon I$ sau $f(x)<0\forall x\epsilon I$.

Fie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $\varphi(a)\varphi(b)<0$ atunci există cel puţin un $c\epsilon(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Fie $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\varphi(x)\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}\varphi(x)<0$ atunci există cel puţin un $c\epsilon(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Asimptote

Asimptote verticale

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,$a\epsilon\mathbb{R}$,a punct de acumulare pentru D

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)\epsilon\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la stânga la $\mathcal{G}_f$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\epsilon\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la dreapta la $\mathcal{G}_f$

Dacă dreapta d:x=a este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta atunci spunem că d:x=a este asimptotă verticală bilaterală la $\mathcal{G}_f$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$

Asimptote orizontale

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k\epsilon\mathbb{R}\Leftrightarrow$d:y=k este asimptotă orizontală spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\epsilon\mathbb{R}\Leftrightarrow$d:y=k este asimptotă orizontală spre $-\infty$

Asimptote oblice

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R}\Rightarrow$d:y=mx+n asimptotă oblică spre $+\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R}\Rightarrow$d:y=mx+n asimptotă oblică spre $-\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Derivată unei funcţii într-un punct,ecuaţia tangentei,derivata de ordin doi

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Ex.Fie $f(x)=x^3-2x$, calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

$f'(x)=3x^2-2$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-2=1$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)$, $f''(x)=\big(f'(x)\big)'$

Dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, iar panta tangentei este $m=f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0)\in\{\pm\infty\}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ este $x=x_0$

Regula lui l'Hospital

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rolul derivatei de ordin 1 şi 2 în studiul funcţiilor

Fie M un interval şi f o funcţie

dacă $f'(x)>0$ $\forall x\in M\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe M

dacă $f'(x)\geq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este crescătoare pe M

dacă $f'(x)<0$ $\forall x\in M\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe M

dacă $f'(x)\leq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este descrescătoare pe M

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
f(x)	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ f(x_0)\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow$

$\Rightarrow x_0$ este punct de minim local al lui f , $f(x_0)$ e valoare minimă locală a lui f

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
f(x)	$\nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ f(x_0)\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$

$\Rightarrow x_0$ este punct de maxim local al lui f , $f(x_0)$ e valoare maximă locală a lui f

Fie M un interval şi f o funcţie

dacă $f''(x)\geq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este convexă pe M

dacă $f''(x)\leq0$ $\forall x\in M\Leftrightarrow$ f este concavă pe M

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
f(x)	concavă $\quad f(x_0)\quad$ convexă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune a lui f

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	$+ + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - -$
f(x)	convexă $f(x_0)$ concavă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune al lui f

Fie M un interval şi f o funcţie
dacă $f''(x) > 0\ \forall x\epsilon M \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe M
dacă $f''(x) \geq 0\ \forall x\epsilon M \Leftrightarrow f'$ este crescătoare pe M
dacă $f''(x) < 0\ \forall x\epsilon M \Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe M
dacă $f''(x) \leq 0\ \forall x\epsilon M \Leftrightarrow f'$ este descrescătoare pe M

Subiectul III1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{3}{x+2}-\ln\frac{x}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-4}{x(x+2)^2}, x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Se consideră funcţiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ şi $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+2}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.
2.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+2}-\ln\frac{x+1}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}, x\epsilon(-1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Se consideră funcţiile $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{x+2}$ şi $h:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x+1}{x+2}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.
3. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln x-2\sqrt{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x}, x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\ln x-2\sqrt{x}\leq -2$, pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
4. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}, x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $2\sqrt{x}-\ln x\geq 2$, pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
5.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x^3(4-x)e^{-x}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că , pentru orice $a\epsilon(0{,}256e^{-4})$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
6.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^5e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x^4(5-x)e^{-x}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că , pentru orice $a\epsilon(0,5^5e^{-5})$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale.

7.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+3)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
8.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+8x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+9)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
9.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln(x^2-2x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{9}{5}x+3$.
c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.
10.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x^2+2x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{5}x+2$.
c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.
11.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+2x+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
12.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
13.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x^3$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6-3\ln x}{2x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.
14.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x^4$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4-2\ln x}{x\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $3^{\sqrt{7}}<7^{\sqrt{3}}$.
15.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=32x^2-\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(8x-1)(8x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{8}{9},25\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{7}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{39}}\right)<f\left(\frac{1}{6}\right)$.

16.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=50x^2-\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(10x-1)(10x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{2}{3},17\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{9}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{73}}\right)<f\left(\frac{1}{8}\right)$.

17.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-6x^2+12x-12\ln(x+1)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{12x^3}{x+1}$,$x\in(-1,+\infty)$.

b)Demonstraţi că valoarea minimă a funcţiei f este 0.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

18.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=12\ln(x+1)-4x^3+6x^2-12x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{12x^3}{x+1}$,$x\in(-1,+\infty)$.

b)Demonstraţi că valoarea maximă a funcţiei f este 0.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{-f(x)}}{x}$.

19.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\operatorname{arctg}x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.

20.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arcctg}x-x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2-x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x+x$.

21.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=16x^2-\sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-15}{x-1}=\frac{63}{2}$.

b)Determinaţi imaginea funcţiei f.

c)Demonstraţi că $16e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{16}\geq0$, pentru orice număr real x.

22.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$.

a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)+8}{x-4}=-7$.

b)Determinaţi imaginea funcţiei f.

c)Demonstraţi că $4e^{\frac{x}{2}}-e^{2x}-3\leq0$, pentru orice număr real x.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

24. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

25.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+2x+2-2e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2(x+1-e^x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

26.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=2e^x-x^2-2x-4$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2(e^x-x-1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

27.Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+3)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}$, $x\in(-3,+\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(-3,+\infty)$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

28.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-2)+1-e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x-2}-e^x$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(2,+\infty)$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

29.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $x-1<x\ln x$,pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

30.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{2-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2-x+x\ln x}{x(2-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $x\ln x>x-2$,pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

31. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-8}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+8}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-2$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-4e^2 \leq f(x) \leq \frac{8}{e^4}$,pentru orice $x\in[-2,+\infty)$.

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-15}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+15}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-3$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-6e^3 \leq f(x) \leq \frac{10}{e^5}$,pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.

33.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}-2018x+2$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2018(x^{2017}-1)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,-2016)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte.

34.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2016}+2016x+4$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2016(x^{2015}+1)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,2020)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte.

35.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$.

a)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)^{2x}=\frac{1}{e^3}$.

c)Demonstraţi că pentru orice număr real a,$a\in(-2,-1)$,ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale distincte.

36.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

a)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)^{3x}=e^3$.

c)Demonstraţi că pentru orice număr real a,$a\in\big(1,\sqrt{2}\big)$,ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale distincte.

37.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$, $x\in(1,+\infty)$.

b)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(1,+\infty)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\cdots+f'(n)\big)=\frac{3}{2}$.

38.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$, $x\in(2,+\infty)$.

b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(2,+\infty)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f'(3)+f'(4)+f'(5)+\cdots+f'(n)\big)=-\frac{25}{12}$.

39.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+\ln x+3$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică în intervalul $(0,1)$.

40. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\ln x^3+2$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{3}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică în intervalul $(0,1)$.

41.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că,pentru orice număr real a,$a\in(-2,2)$, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie unică.

42.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că,pentru orice număr real a,$a\in(-1,1)$, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie unică.

43.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=8\ln x-x^2$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(2-x)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

44.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-32\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-4)(x+4)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

45.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x-x^2-2x-2$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2e^x-2x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

c)Demonstraţi că $f(5\sqrt{6})<f(6\sqrt{5})$.

46.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\frac{1}{3}x^3+x+1$.

a)Arătaţi că $f'(x)=e^x+x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

c)Demonstraţi că $f(-2\sqrt{3})>f(-3\sqrt{2})$.

47.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\right)^n$.

48.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+2)}$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\right)^n$.

49.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

50.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-\sqrt{x^2+2x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

51.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{5}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-5x$.

52.Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-2}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x$.

53.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2x+2)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big)^x$.

54.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-x+2)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big)^{x+1}$.

55.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+2}{e^x-x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}f(-x)$.

56.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.

57.Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln(x+1)-x$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-1,+\infty)$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+x-\ln 2}{x-1}$.

c)Demonstraţi că $x\geq\ln(x+1)$,pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

58.Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x+1-\ln(x+2)$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-2,+\infty)$.

b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1-f(x)-\ln 4}{x-2}$.

c)Demonstraţi că $\ln(x+2)\leq x+1$,pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

59.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+2}{x^2+4x+5}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{(x^2+4x+5)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale lui f.

60.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+3}{x^2+6x+10}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+2)(x+4)}{(x^2+6x+10)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale lui f.

61.Se consideră funcţia f:$(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{xe^x}{x+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x+2)^2e^x}{(x+4)^2}$,$x\in(-4,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=2$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,2)$.

62.Se consideră funcţia f:$(-\infty,-2)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{xe^x}{x+2}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$,$x\in(-\infty,-2)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=-3$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=\frac{2}{e^3}$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(-4,-3)$.

63. Se consideră funcţia f:$(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2}{x-4}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-8)}{(x-4)^2}$,$x\in(4,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=6$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

64. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$,$x\in(2,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=2$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

65. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)\leq\frac{1}{2e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

66. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=-\frac{\ln x}{x^3}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3\ln x-1}{x^4}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)\geq-\frac{1}{3e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

67.Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=5x+e^x$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)\geq 6x+1$ pentru orice număr real x.

68.Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=-3x+e^x$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $f(x)\geq -2x+1$ pentru orice număr real x.

69. Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

70. Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$.

a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

71.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcţiei f.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+4}$.

72.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=3,situat pe graficul funcţiei f.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+2}$.

73. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x}{3x+e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)e^x}{(3x+e^x)^2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+3}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

74. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x}{4x+e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+4}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

75. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2\cos x+x^2$.
a) Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 2$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

76. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=-x^2-2\cos x$.
a) Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\leq -2$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

77.Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-2,2)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-2,2)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

78.Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-2,2)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este crescătoare pe intervalul $(-2,2)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

79.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x-x+1$.
a)Calculaţi $f'(0)$.
b)Arătaţi că,pentru fiecare număr natural $n\geq 3$,ecuaţia $f(x)=n$ are exact o soluţie în intervalul $(0,+\infty)$.
c)Fie x_n unica soluţie din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuaţiei $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

80.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-e^x$.
a)Calculaţi $f'(0)$.
b)Arătaţi că,pentru fiecare număr natural $n\geq 2$,ecuaţia $f(x)=-n$ are exact o soluţie în intervalul $(0,+\infty)$.
c)Fie x_n unica soluţie din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuaţiei $f(x)=-n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$.

81.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-20x+50\ln x+75-50\ln 5$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-5)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctual de abscisă $x=5$, situat pe graficul funcţiei f.

c)Se consideră numerele reale a,b şi c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=x^2-50\ln 5+50\ln x$ şi punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcţiei $h:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, h(x)=20x-75$.Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[5,+\infty)$.

82.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2-24x+72\ln x+108-72\ln 6$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-3)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(5,5)$ şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctual de abscisă x=6, situat pe graficul funcţiei f.

c)Se consideră numerele reale a,b şi c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=x^2-72\ln 6+72\ln x$ şi punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcţiei $h:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, h(x)=24x-108$.Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[6,+\infty)$.

83.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^4-x^2+16}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+16}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{63}}{2},4\right)$ ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

84.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^4-x^2+25}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+25}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{99}}{2},5\right)$ ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

85.Se consideră funcţia $f:(5,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-5}+\ln\frac{x-1}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-9x+25}{x(x-1)(x-5)^2}$, $x\in(5,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{1}{x-5}>ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(5,+\infty)$.

86.Se consideră funcţia $f:(6,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-6}+\ln\frac{x-1}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-11x+36}{x(x-1)(x-6)^2}$, $x\in(6,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\frac{1}{x-6}>ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(6,+\infty)$.

87.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty), f(x)=12^x-4^x+3^x$.

a)Arătaţi că $f'(0)=\ln 9$.

b)Se consideră tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f. Determinaţi numărul real a pentru care $A(a,\ln(9e))$ este este situat pe această tangentă.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

88.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty), f(x)=12^x-3^x+4^x$.

a)Arătaţi că $f'(0)=\ln 16$.

b)Se consideră tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f. Determinaţi numărul real a pentru care $A(a,\ln(16e))$ este este situat pe această tangentă.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

89.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(e^x+4x+4)}{(e^x+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=x este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f are un unic punct de extrem.

90.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+5}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(e^x+5x+5)}{(e^x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=x este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f are un unic punct de extrem.

91.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)(x^2-9)+5$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2x(2x^2-13)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-5}=\frac{1}{48}$.

c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

92.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)+5$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2x(2x^2-5)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{f(x)-5}=\frac{1}{12}$.

c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

93.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie.

94.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+5}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie.

95.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4-4\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

96.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-5-4\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

97.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x-2)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x}=e^{-2}$.

c)Demonstraţi că funcţia g :$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\frac{f(x)}{e^{-x}}+2\right|$ are un singur punct de extrem.

98.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x+2)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=(1-x)^3e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^{x}}=e^{-2}$.

c)Demonstraţi că funcţia g :$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\frac{f(x)}{e^{-x}}-2\right|$ are un singur punct de extrem.

99.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-10x+40)\sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(x^2-6x+8)}{2\sqrt{x}}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f .

c) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{10}}=\frac{1}{e}$.

100.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-15x+100)\sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(x^2-3x+2)}{2\sqrt{x}}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f .

c) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{15}}=\frac{1}{e}$.

101.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4+\frac{x}{e^x-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Demonstraţi că, pentru orice $m\epsilon(3,4]$, ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică.

102.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{x}{e^x-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Demonstraţi că, pentru orice $m\epsilon(4,5]$, ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică.

103.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{e^x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(5-x)}{e^x}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=n$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.

104.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{e^x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(6-x)}{e^x}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=n$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.

105.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{4}-\ln(x^2+x+4)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-7x}{4(x^2+x+4)}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.

106.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{3}-\ln(x^2+x+3)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-5x}{3(x^2+x+3)}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.

107.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+6\ln\frac{x+2}{x-1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+x-20}{(x-1)(x+2)}$, $x\in(1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $\ln\frac{x+2}{2(x-1)}\geq\frac{2}{3}-\frac{x}{6}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

108.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+6\ln\frac{x+5}{x-3}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x-63}{(x-3)(x+5)}$, $x\in(3,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Arătaţi că $\ln\frac{x+5}{3(x-3)}\geq\frac{7}{6}-\frac{x}{6}$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$.

109.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{9e^x}{x^2+x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{9e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=+\infty$.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact trei soluţii, pentru orice $m\in(3e,9)$.

110.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{12e^x}{x^2+x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{12e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=+\infty$.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact trei soluţii, pentru orice $m\in(4e,12)$.

111.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x^3}{(x-2)^2}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(54,+\infty)$.

112.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8x^3}{(x-1)^2}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{8x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(54,+\infty)$.

113.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-6)+2x^2-8x+6$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2(x-2)(e^x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-e^x}=12$.

c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii.

114.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-4)+2x^2-4x+4$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2(x-1)(e^x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-e^x}=6$.

c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii.

115.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-12)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2e^{2x}(x^2+x-12)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
116.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-20)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2e^{2x}(x^2+x-20)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
117.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5x-5+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}=6$.
c)Determinaţi cel mai mare număr întreg m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are cel puţin o soluţie.
118.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{6x-6+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{7-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}=7$.
c)Determinaţi cel mai mare număr întreg m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are cel puţin o soluţie.
119.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1-\ln\frac{x+2}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
120.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\ln\frac{x}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
121.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+18}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x^2-16)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(7x)-f(x)\leq-\frac{14\sqrt{2}}{5}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
122.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+27}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x^2-25)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(7x)-f(x)\leq-\frac{32\sqrt{2}}{5}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
123.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x-9)\sqrt{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-9x}{f(x)}\right)^x=1$.

124.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-11)\sqrt{x^2+5}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-11x+5}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-11x}{f(x)}\right)^x=1$.

125.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+4x+1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{xe^x+3}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

126.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+5x+1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{xe^x+4}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

127.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{12x^2+1}-7\ln(12x^2+1)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{24x(\sqrt{12x^2+1}-7)}{12x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(2,+\infty)$.

128.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{5x^2+1}-9\ln(5x^2+1)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{10x(\sqrt{5x^2+1}-9)}{5x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(2,+\infty)$.

129.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-12x-7-(2x-7)e^{2x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=4(x-3)(1-e^{2x})$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=12$.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică, pentru orice număr natural $n\geq12$.

130.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-16x-9-(2x-9)e^{2x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=4(x-4)(1-e^{2x})$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=16$.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică, pentru orice număr natural $n\geq16$.

Tabel de integrale nedefinite

$\int dx = \int 1\,dx = x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctgx + C$
$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$	$\int sinx\,dx = -cosx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int cosx\,dx = sinx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tgx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int tgxdx = -\ln\|cosx\| + C$	$\int ctgx\,dx = \ln\|sinx\| + C$	$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$

Integrala nedefinită,primitive

Fie f,F:I→ℝ două funcţii şi I un interval.

F se numeşte primitivă a lui f $\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ este derivabilă} \\ F' = f, (F'(x) = f(x), \forall x \epsilon I) \end{cases}$

$\int f(x)\,dx = \{F(x) | F$ este primitivă a lui $f\}$ se numeşte mulţimea primitivelor funcţiei f

$\mathcal{C} = \{k: I \to \mathbb{R} | k(x) = k, \forall x \epsilon I\}$ se numeşte mulţimea funcţiilor constante

Dacă F este o primitivă a lui f atunci $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathcal{C}$

$\int f''(x)\,dx = f'(x) + \mathcal{C}$

Proprietăţi pentru integrala nedefinită

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\qquad$ $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Primitive

1.Calculaţi următoarele integrale nedefinite:

$\int dx$, $\int \frac{5}{4}dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{x^6}dx$, $\int (3x+1)^2\,dx$, $\int x(2-x)^2\,dx$, $\int \sqrt[4]{x}\,dx$, $\int \sqrt[5]{x}\,dx$,

$\int (-3x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x})\,dx$, $\int \frac{4x^3-5x+6}{x^5}dx$, $\int x(3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x})\,dx$, $\int \frac{4x-1}{x^5}dx$, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right)dx$,

$\int \frac{1}{x^2-25}dx$, $\int \frac{1}{x^2+36}dx$, $\int \frac{1}{25-x^2}dx$, $\int \frac{1}{x^2+4}dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2+9} - \frac{3}{9-x^2}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-4)(x^2-5)}{x}dx$, $\int \frac{1}{x^2+6}dx$,

$\int \frac{(x^2-1)(3x+2)}{\sqrt{x}}dx$, $\int (-3sinx + 4cosx)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int (ctgx + 3tgx)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx$,

$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$, $\int (3^x + 4^{x+1} + 5^{x+2})\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$, $\int \frac{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

$\int \frac{dx}{6+5x^2}$, $\int \frac{dx}{6-5x^2}$, $\int \frac{dx}{5x^2-6}$, $\int (3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2)\,dx$, $\int (x^2 - 3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{5}{x}\right)dx$,

$\int (5x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3})\,dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 12x^4 \cdot \sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$, $\int \frac{10}{25x^2-9}dx$, $\int \frac{8}{16x^2+1}dx$,

$\int \frac{25}{5x^2+125}dx$, $\int (6^x ln6 - 5^x ln25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-45}}dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int (x^8 - 5)\,dx$,

$\int (5sinx + 6cosx)\,dx$, $\int (4sin^2 x - \sqrt[3]{-64}cos^2 x)\,dx$, $\int 6sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx$, $\int 10cos^2\frac{x}{2}dx$,

$\int 10\sin^2 x\,dx$, $\int (6x^5 - 3x^4 + 2x - 9)\,dx$, $\int (7x^2 - 4x + 2)\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-49}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-49}}\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+49}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+49}}\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$,

$\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int 9^x\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-64}\,dx$,

$\int x^{14}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-64}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+64}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+64}}\,dx$, $\int x^{15}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+81}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-81}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}\,dx$, $\int 8^x\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^{17}\,dx$, $\int 17^x\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-7}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+10}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-10}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{10-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$, $\int x^6\,dx$, $\int 9x^8\,dx$, $\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$, $\int \sqrt[6]{x^5}\,dx$, $\int x^{-\frac{7}{2}}\,dx$, $\int 13x\sqrt[5]{x^4}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, $\int e^x\,dx$, $\int 6^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{1}{25+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{(x-5)(x+5)}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}\,dx$, $\int \frac{1}{(5-x)(5+x)}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-6}\,dx$, $\int \frac{1}{6-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2+6}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}\,dx$, $\int (2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x - 3)\,dx$, $\int (\sin x + x)\,dx$,

$\int \frac{4x^4-3x^3+x^2+3x+2}{x^3}\,dx$, $\int \left(\frac{2}{6+x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (2\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int \left(3e^x - \frac{4}{x} + 3\cdot 5^x\right)dx$,

$\int \left(\frac{6}{25x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int \left(x^3\cdot\sqrt[3]{x} + 3x\cdot\sqrt{x^5}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-25}+5}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$,

$\int (3x^6 - 5x^4 + 2x^3 + 3x - 2)\,dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3-x^2+2x+3}{x^2}\,dx$, $\int \left(\frac{3}{7+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx$, $\int (1 - \sin x)\,dx$,

$\int (2\cos x + 3\sin x)\,dx$, $\int \left(3\cdot e^x - \frac{2}{x} + 4\cdot 3^x\right)dx$, $\int \left(\frac{6}{16x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\right)dx$, $\int (x + \operatorname{tg} x)\,dx$,

$\int \left(x^2\cdot\sqrt[3]{x} + 2x\cdot\sqrt{x^3}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}+4}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\,dx$, $\int (6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 2)\,dx$,

$\int (x^2 - 3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^5} - \frac{6}{x}\right)dx$, $\int \left(9x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 31x^5\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{20}{4x^2-9}\,dx$, $\int \frac{3}{9x^2+1}\,dx$, $\int \frac{10}{5x^2+125}\,dx$, $\int (7^x\cdot\ln 7 - 5^x\cdot\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{7x^2+28}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int (5\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin x - 3\cos x)\,dx$, $\int \left(5\sin^2 x - \sqrt[3]{-125}\cos^2 x\right)dx$,

$\int e^x\left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int 3^x\left(3^{-x} + 3^{-x}\cdot x^3 + 6 + 5^x + \frac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{6x^5+x^2-x+1}{x^3}\,dx$, $\int \frac{4x^3-x^4}{\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \left(\frac{1}{5+x^2} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2-6} + \frac{3}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$, $\int \left(\frac{5}{x^2-4} - \frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$,

$\int \left(\frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}-\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3)\,dx$,

$\int \left(3x^2 - 6x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^3 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^3}\right)dx$, $\int \left(5\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[4]{x} + 4x - 2\sqrt{x}\right)dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$,

$\int (x^5 - 3x^2 + 2x - 6)\,dx$, $\int \left(5x^2 - 7x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$, $\int \left(3x\sqrt{x} - 4x\sqrt[3]{x^2}\right)dx$,

$\int \left(6\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x} + 3x^2 - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{\sin^3 x - 5}{\sin^2 x}\,dx$, $\int (x^2 - 3e^x)\,dx$, $\int (x^5 + 2e^x)\,dx$,

$\int \left(6^x - \frac{1}{x^3} + e^x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{(x^2-4)^2}{x^4}\,dx$, $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^5}\,dx$, $\int \left(4x^2\sqrt{x} - 3x^4\sqrt[3]{x^5}\right)dx$,

$\int \frac{\cos^3 x + 4}{\cos^2 x}\,dx$, $\int (x^2 - 3x + 5 + 2e^x)\,dx$, $\int (x^6 - 8x^2 + 3x + 7 + 3e^x)\,dx$, $\int \left(\frac{3-2x}{x}\right)^2 dx$,

$\int \left(7^x - \frac{1}{x^4} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{(x-2)^3}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+2)^3}{x^4}dx$, $\int \left(-\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{xe^x-5x}{x}dx$, $\int \frac{x\cdot 7^x-7x}{x}dx$, $\int e^x\left(4+\frac{5e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,

$\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x}dx$, $\int\left(x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}\right)dx$, $\int\left(4x-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$, $\int\left(3x+\frac{5}{x^2}\right)dx$, $\int\left(5x-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx$,

$\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x}dx$, $\int \frac{x-5}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$, $\int\left(x^2\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int 7^x\left(3-4^x+\frac{7^{-x}}{x^5}-\frac{7^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(2-3^x+4^{-x}\cdot x^5+\frac{4^{-x}}{x^5}+\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,$\int(6x^4-5x^3+4x^2-5x+2)\,dx$,$\int(x^2-3x)^3\,dx$,

$\int(3x^4+6x^3-5x^2+4x-1)\,dx$,$\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x}\right)dx$,$\int\left(9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$,

$\int\left(5x^3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x}\right)dx$,$\int(x^2+2x)^3dx$,$\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-32x^5\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$, $\int\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}-14x^5\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx$,

$\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,$\int \frac{15}{25x^2-9}dx$,$\int \frac{1}{9x^2+1}dx$,$\int \frac{15}{25x^2+9}dx$,$\int \frac{1}{16x^2-1}dx$,$\int \frac{20}{16x^2-25}dx$,$\int \frac{27}{9x^2+1}dx$,$\int \frac{8}{4x^2+64}dx$,

$\int(6^x\ln 6-5^x\ln 25)\,dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$,$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6x^2+54}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6x^2-54}}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+64}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-100}}dx$,$\int \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2+28}}dx$,$\int(5\sin x+3\cos x)\,dx$,$\int\left(3\sin^2 x-\sqrt[3]{-27}\cos^2 x\right)dx$,

$\int\left(4\cos^2 x-\sqrt[3]{-64}\sin^2 x\right)dx$,$\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$,$\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx$,$\int 4\sin^2\frac{x}{2}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$,$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$,

$\int \frac{6x^5+3x^4+2x^3-5x^2+3x-4}{x^3}dx$,$\int \frac{6x^3-x^5}{\sqrt{x}}dx$,$\int \frac{x\sqrt[4]{x}+3x^2\cdot\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}dx$,$\int\left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$,$\int \frac{(x-1)^4}{x^3}dx$,

$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}dx$,$\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{9-x^4}}dx$,$\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$,$\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$,$\int\left(7^x\ln\sqrt[3]{49}-\ln 5\cdot 25^x\right)dx$.

Integrala definită,proprietăţi pentru integrala definită

Fie f:[a, b] → ℝ o funcţie continuă şi F:[a, b] → ℝ o primitivă a sa , atunci

$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$ se numeşte integrala definită a funcţiei f .

$\int_a^b f'(x)\,dx=f(x)|_a^b=f(b)-f(a)$, $\int_a^b f''(x)\,dx=f'(x)|_a^b=f'(b)-f'(a)$

$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$,

$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$,

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$,$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

Integrale definite

2.Calculaţi următoarele integrale definite:

a)$\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_1^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+1)\,dx$, $\int_1^2(x+2)\,dx$,$\int_{-1}^1(x^3+3x)\,dx$, $\int_0^1(4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$,

$\int_0^1 x\,dx$,$\int_0^{2014}dx$, $\int_0^2 x^2\,dx$,$\int_0^1\frac{-2x^2}{x^2+1}dx$, $\int_2^3(x+1)dx$, $\int_1^2 x\,dx$, $\int_0^1(3x+1)\,dx$, $\int_1^2 2x\,dx$,

$\int_1^2(2x+3)\,dx$, $\int_0^1 x^3\,dx$, $\int_0^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+4)\,dx$, $\int_1^2(x-2)\,dx$,$\int_{-1}^1(x^3-3x)\,dx$,

$\int_0^1(4x^3-3x^2+2x-1)\,dx$, $\int_0^1 4x\,dx$, $\int_1^{2016}dx$, $\int_0^1 x^{2016}\,dx$,$\int_2^3\frac{-2x^2}{x^2-1}dx$, $\int_2^3(x-1)dx$, $\int_2^3 x\,dx$,

$\int_0^1(3x-4)\,dx$, $\int_1^2 5x\,dx$, $\int_1^2(2x-3)\,dx$.

b) $\int_1^2 xe^x dx$, $\int_1^2\ln x\,dx$,$\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, $\int_0^1\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$, $\int_2^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x+1)e^x\,dx$,

$\int_0^1(3x+1)e^x\,dx$, $\int_0^1(x^2e^x-2x)\,dx$, $\int_0^1 xe^x dx$, $\int_1^e\ln x\,dx$,$\int_e^{e^2} x^3\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} x^2\ln x\,dx$, $\int_1^2\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$,

$\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1(3x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1(x^2e^x+2x)\,dx$,

c) $\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$, $\int_0^1\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$, $\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx$, $\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$,$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$,$\int_2^4\frac{1}{x+1}dx$, $\int_2^3\frac{x^3-1}{x^2-1}dx$,$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$,

$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{x-1}dx, \int_{2}^{3}\frac{x^3-3x}{x^2-1}dx, \int_{2}^{3}\left(x^2+\frac{x}{x-1}\right)dx, \int_{0}^{1}\frac{1}{x-2}dx, \int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx, \int_{2}^{4}\frac{1}{x-1}dx, \int_{2}^{3}\frac{x^3+1}{x^2-1}dx, \int_{2}^{3}\frac{x}{x^2-1}dx.$

Inegalităţi integrale

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e integrabilă pe $[a,b]$ şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e integrabilă pe $[a,b]$ şi $m\leq f(x)\leq M\ \forall x\in[a,b]$ atunci

$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a,b]$ şi $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.

Metoda integrării prin părţi

$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Integrale prin părţi

3.Calculaţi următoarele integrale definite:

$\int_0^1(x+2)e^x\,dx, \int_0^1(x-5)e^x\,dx, \int_1^e x^2\ln^2x\,dx, \int_1^e x^4\ln^2x\,dx, \int_1^e x\ln^2x\,dx, \int_0^1 x(e^x+4x^3)\,dx,$

$\int_0^1 x(e^x+6x^2)\,dx, \int_1^e \ln^2x\,dx, \int_0^1 e^x x\,dx, \int_1^e x^3\ln x\,dx, \int_1^e x^{2017}\ln x\,dx, \int_0^1(1-x)^2e^x\,dx, \int_0^1 x^2e^x dx,$

$\int_0^1(x+1)e^x\,dx, \int_1^4 xe^x dx, \int_2^3 xe^x dx, \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx$

Metoda schimbării de variabilă

$\int_a^b\big((f\circ g)(x)\big)g'(x)dx=\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(t)\,dt$

$g(x)=t\Rightarrow g'(x)dx=dt$

pentru $x=a\Rightarrow t=g(a)$

pentru $x=b\Rightarrow t=g(b)$

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\begin{cases}0, \text{dacă f este impară } (f(-x)=-f(x),\forall x\in[-a,a])\\ 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{dacă f este pară } (f(-x)=f(x),\forall x\in[-a,a])\end{cases}$

Integrale prin schimbare de variabilă

4.Calculaţi următoarele integrale definite:

$\int_{-4}^{0}(x+4)^3\,dx, \int_{-3}^{0}(x+3)^4\,dx, \int_{-2}^{4}(x+4)^n, \int_{-1}^{1}(x+3)^n\,dx, \int_1^2\frac{1}{x+2}dx, \int_1^2\frac{x}{x+2}dx, \int_1^3\frac{1}{x+1}, \int_1^3\frac{x}{x+1}dx$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx, \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+4}}dx, \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx, \int_e^{e^4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx, \int_0^1\frac{x}{x+4}dx, \int_0^1\frac{x}{x+3}dx, \int_0^1 e^x(x+1)\,dx, \int_0^1 e^x(x-3)\,dx,$

$\int_3^9\frac{1}{x}dx, \int_4^6\frac{1}{(x-1)^2}dx, \int_3^{12}\frac{1}{x}dx, \int_1^3\frac{1}{(x+2)^2}dx, \int_4^6\frac{1}{x^2}dx, \int_1^e\frac{\ln x^2}{x^2}dx, \int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx, \int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx, \int_1^e\frac{\ln x}{x}dx,$

$\int_1^e\frac{\ln^n x}{x}dx, \int_0^1 e^{2x}dx, \int_0^1\frac{x}{x^2+25}dx, \int_0^{\sqrt{5}}\frac{x}{x^4+25}dx, \int_0^3\frac{x}{x^2+3}dx, \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+3}dx, \int_0^1\frac{x}{2+x}dx, \int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx,$

$\int_0^1\frac{x}{4+x}dx, \int_0^1\frac{x^2}{x^3+2}dx, \int_0^1\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx, \int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx,$

Arii,volume

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci aria subgraficului funcţiei f sau aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este

$\mathcal{A}_{\mathcal{G}_f}=\int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă $\forall x\in[a,b]$ atunci aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este $\mathcal{A}=\int_a^b|f(x)|\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei f este $\mathcal{V}_{C_f}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Subiectul III2 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+16}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{49}{3}$.

b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$, are aria egală cu $\frac{34\sqrt{17}-128}{3}$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^x t^4f(t)\,dt$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+25}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{76}{3}$.

b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$, are aria egală cu $\frac{52\sqrt{26}-250}{3}$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_0^x t^5f(t)\,dt$.

3. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2}{x^2+5}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+5)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă f are un singur punct de inflexiune.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

4. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2}{x^2+6}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+6)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă f are un singur punct de inflexiune.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln x)dx=7$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3x^2+f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ are aria egală cu e^2.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x)-3x^2)\,dx=0$.

6. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2+\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln x)dx=\frac{28}{3}$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4x^2+f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ are aria egală cu e^2.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x)-4x^2)\,dx=0$.

7. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{\ln x}$.

a)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

b)Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

c)Determinaţi numărul real a, a>e, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=e$ şi $x=a$ are aria egală cu 3a.

8. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{\ln x}$.

a)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

b)Calculaţi $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx$.

c)Determinaţi numărul real a, a>e, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi x=a are aria egală cu 4a.

9. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 e^x f(x)dx = 8$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−3 şi x=3 are aria egală cu $2e^3+2-\frac{4}{e^2}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{n+2}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+4)I_n=\frac{1}{e}$.

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^5 e^x f(x)dx=\frac{25}{2}$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−4 şi x=4 are aria egală cu $3e^4+2-\frac{5}{e^4}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{n+3}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+5)I_n=\frac{1}{e}$.

11. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\ln(x+1)$.

a)Calculaţi $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{7}{48}$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^5}\int_0^t f(x)\,dx$.

12. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4\ln(x+1)$.

a)Calculaţi $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\ln4}{5}-\frac{47}{300}$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^6}\int_0^t f(x)\,dx$.

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=10x-x^2$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)dx=36$.

b)Arătaţi că $\int_1^5 \frac{5-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{25}{9}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{10} f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\leq 25I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

14. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=8x-x^2$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)dx=27$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 \frac{4-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{16}{7}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^8 f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\leq 16I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

15. Se consideră funcţia f: $(-6,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5x+6}{x+6}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x+6)f(x)dx=\frac{17}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=5-24\ln\frac{7}{6}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+6)^n\big(f(x)\big)^n dx$.Demonstraţi că $I_n+5nI_{n-1}=e\cdot 11^n-6^n$,pentru orice număr natural n, n≥1.

16. Se consideră funcţia f:$(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x+5}{x+5}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x+5)f(x)dx=7$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=4-15\ln\frac{6}{5}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+5)^n\big(f(x)\big)^n dx$.Demonstraţi că $I_n+4nI_{n-1}=e\cdot 9^n-5^n$,pentru orice număr natural n, n≥1.

17. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=\frac{17}{6}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are exact două puncte de inflexiune.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

18. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=\frac{1}{6}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are exact două puncte de inflexiune.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

19. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^5}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f\big(\sqrt[5]{x}\big)dx=\frac{e-1}{e}$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe$\mathbb{R}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

20. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f\big(\sqrt[4]{x}\big)dx=\frac{e-1}{e}$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

21. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=$arcctgx.

a)Arătaţi că $\int_1^3 f(ctgx)dx=4$.

b)Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

c)Demonstraţi că $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2(n+3)}\leq(n+2)\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n+3}$, pentru orice număr natural nenul n.

22. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=$arctgx.

a)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{3}} f(tgx)dx=\frac{3}{2}$.

b)Calculaţi $\int_0^2 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

c)Demonstraţi că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+3}\leq(n+2)\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+3)}$, pentru orice număr natural nenul n.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=2-\frac{2}{e^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(e^x+1)f(x)\,dx=2e-2$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=0$.

c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria mai mică decât ln4.

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=1-\frac{1}{2^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(2^x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{\ln 2}$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=0$.

c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria mai mică decât 1.

25. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=(x+4)^n$, unde n este număr natural nenul.

a)Arătaţi că $\int_{-4}^0(x+4)^3\,dx=64$.

b)Pentru n=1, arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx=4e-3$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−1 şi x=1 are aria egală cu $\frac{98}{n+1}$.

26. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=(x+5)^n$, unde n este număr natural nenul.

a)Arătaţi că $\int_{-5}^0(x+5)^4\,dx=625$.

b)Pentru n=1, arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx=5e-4$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−2 şi x=4 are aria egală cu $\frac{702}{n+1}$.

27.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_1^e x^2\ln^n x\,dx$.

a)Arătaţi că $\int_1^e x^2\,dx=\frac{e^3-1}{3}$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$,pentru orice număr natural nenul n.

28.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^{n+2}x\,dx$.

a)Arătaţi că $\int_1^e x\ln^2 x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $2I_{n+1}+(n+3)I_n=e^2$,pentru orice număr natural nenul n.

29.Se cosideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=e^x+4x^3$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-4x^3)\,dx=e-1$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{9}{5}$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=f(x)-e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu n^3-n+1.

30.Se cosideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=e^x+6x^2$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-6x^2)\,dx=e-1$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu n^2+n+10.

31. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+2)^2}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{4}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c)Determinaţi numărul real m,m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+2)f(x)$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 are aria egală cu $1-2\ln\frac{m+1}{m}$.

32. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln 2$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c)Determinaţi numărul real m,m>0,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=3 are aria egală cu $2-\ln\frac{m+2}{m}$.

33.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3}dx$.

a)Calculaţi $\int_0^1 (x^2+2x+3)\,dx$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}+2I_n+3I_{n-1}=\frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{6}$.

34.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2017x+2}dx$.

a)Calculaţi $\int_0^1 (x^2+2017x+2)\,dx$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}+2017I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2020}$.

35.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ şi,pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

b)Demonstraţi că $I_n\le\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $(2n+1)I_n=2\sqrt{3}-4nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

36.Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ şi,pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{5}-2\right)$.

b)Demonstraţi că $I_n\le\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $(2n+1)I_n=2\sqrt{5}-8nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

37.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

a)Arătaţi că $\int_1^4 \sqrt{x}f(x)\,dx=\frac{27}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=8$.

c)Determinaţi numărul real a,a>1,ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(4\ln a+\frac{11}{2}\right)$.

38.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a)Arătaţi că $\int_2^4\sqrt{x}f(x)\,dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_{e^2}^{e^4}\left(\sqrt{x}-f(x)\right)\ln x\,dx=4e^2$.

c)Determinaţi numărul real a,a>1,ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\ln a$.

39.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+4}dx$.

a)Arătaţi că $I_0=1+4\ln\frac{4}{5}$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}+4I_n=\frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural n.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

40.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x+2}dx$.

a)Arătaţi că $I_0=1+2\ln\frac{2}{3}$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{2n+2}$,pentru orice număr natural n.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{3}$.

41.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x+1)$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx=4$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 are aria egală cu $e(2e-1)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^1(f(x)-e^x)\,dx=0$.

42.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x-3)$.

a)Arătaţi că $\int_0^6 f(x)e^{-x}\,dx=0$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=4 şi x=7 are aria egală cu $3e^7$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^0(f(x)+2e^x)\,dx=0$.

43.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$.

a)Arătaţi că $\int_3^9(x-1)f(x)\,dx=\ln 3$.

b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[4,6]\to\mathbb{R}$,$g(x)=xf(x)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)\,dx\right)=1$.

44.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x(x+2)}$.

a)Arătaţi că $\int_3^{12}(x+2)f(x)\,dx=\ln 4$.

b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,3]\to\mathbb{R}$,$g(x)=xf(x)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right)=1$.

45.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\frac{1}{9^n}\int_0^3(9-x^2)^n dx$.

a)Arătaţi că $I_1=2$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

46.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n(1+x)^n dx$.

a)Arătaţi că $I_1=\frac{2}{3}$.

b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

47.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

a)Calculaţi $\int_3^6\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{e^2-3}{4e^2}$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

48.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x^2}{2x}$.

a)Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=1-\frac{2}{e}$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

49.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=-\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^{e^3}\frac{1}{x}dx=3$.

b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=\frac{1}{e^2}$ şi $x=\frac{1}{e}$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^{2n}dx=\frac{1}{2019}$.

50.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=1$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,e]\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)$.

c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\frac{1}{2018}$.

51.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x+1)e^x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x+1}f(x)\,dx=e(e-1)$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(0)=1$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}f(x)\,dx$.Arătaţi că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$,pentru orice număr natural n,$n\geq 2$.

52.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x$.

a)Arătaţi că $\int_2^3\frac{1}{x}f(x)\,dx=e^2(e-1)$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $e - I_n = (n+1)I_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

53.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = e^x + 3x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 3x)\,dx = e - 1$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = e - \frac{1}{2}$.

c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:[0,1]→ℝ,g(x) = f(x), este egal cu $\frac{\pi}{2}(e^2 + 12e - 13)$.

54.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = e^x - x$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + x)\,dx = e - 1$.

b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = e - \frac{3}{2}$.

c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:[0,1]→ℝ,g(x) = f(x), este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2 - 4)$.

55.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}$.

a)Calculaţi $\int_0^5 f^2(x)\,dx$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe ℝ.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $nI_n = \sqrt{26} - 25(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,n≥3.

56.Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}$.

a)Calculaţi $\int_0^{\sqrt{6}} f^2(x)\,dx$.

b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe ℝ.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $nI_n = \sqrt{7} - 6(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,n≥3.

57. Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{x}{x^2+25}$.

a)Calculaţi $\int_0^5 f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{25f(x)+x^2f(x)}{x^4+25}\,dx = \frac{\pi}{40}$.

c)Calculaţi $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$.

58. Se consideră funcţia f:ℝ→ℝ,$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$.

a)Calculaţi $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3f(x)+x^2f(x)}{x^4+9}\,dx = \frac{\pi}{24}$.

c)Calculaţi $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)\,dt$.

59.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^3 \ln^n x\,dx$.

a)Arătaţi că $I_1 = \frac{3e^4+1}{16}$.

b)Arătaţi că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $4I_{n+1} + (n+1)I_n = e^4$ pentru orice număr natural nenul n.

60.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^{2017} \ln^n x\,dx$.

a)Arătaţi că $I_1 = \frac{2017e^{2018}+1}{2018^2}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $2018I_{n+1} + (n+1)I_n = e^{2018}$ pentru orice număr natural nenul n.

61.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2+x^n}\,dx$.
a)Arătaţi că $I_1 = 1 - 2\ln\frac{3}{2}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

62.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^n}\,dx$.
a)Arătaţi că $I_1 = 1 - 4\ln\frac{5}{4}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

63.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}\,dx$.
a)Arătaţi că $I_3 = \frac{1}{4}\ln 2$.
b)Arătaţi că $I_{n+4} + I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

64.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+2}\,dx$.
a)Arătaţi că $I_2 = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$.
b)Arătaţi că $I_{n+3} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

65.Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x+2}{f(x)}\,dx = \ln 5$.

66.Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 2$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{17}{6}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx = \ln 7$.

67.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2 + 2x + 4)f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - x + 2)\,dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{16}$.

68.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x^2+3x+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+3x+9)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

b)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x)-x+3)\,dx=\frac{3\pi}{\sqrt{3}}$.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{36}$.

69.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 (1-x)^{n+2}e^x\,dx$.

a)Calculaţi I_0.

b)Arătaţi că $I_{n+1}=(n+3)I_n-1$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $I_n=(n+2)!\left((e-2)-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\cdots-\frac{1}{(n+2)!}\right)$,pentru orice număr natural n.

70.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 (1-x)^{n+3}e^x\,dx$.

a)Calculaţi I_0.

b)Arătaţi că $I_{n+1}=(n+4)I_n-1$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $I_n=(n+3)!\left((e-2)-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\cdots-\frac{1}{(n+3)!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

71.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx$.

a)Calculaţi I_1.

b)Arătaţi că $I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{4}$.

72.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$.

a)Calculaţi I_1.

b)Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{2}$.

73.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^3e^{-nx^4}\,dx$.

a)Calculaţi I_0.

b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$,pentru orice număr natural n.

c)Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{4n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

74.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^4e^{-nx^5}\,dx$.

a)Calculaţi I_0.

b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$,pentru orice număr natural n.

c)Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{5n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

75.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^{n+3}e^x\,dx$.

a)Calculaţi I_1.

b)Arătaţi că $I_{n+1}+(n+4)I_n=e$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Arătaţi că $1\le(n+4)I_n\le e$,pentru orice număr natural nenul n.

76.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^{n+2}e^x\,dx$.

a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1} + (n+3)I_n = e$,pentru orice număr natural n.
c)Arătaţi că $1 \leq (n+3)I_n \leq e$,pentru orice număr natural n.
77.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_1^4 x^n e^x \, dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1 = 3e^4$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 4^{n+1}e^4 - e$, pentru orice număr natural n.
78.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_2^3 x^n e^x \, dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1 = 2e^3 - e^2$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 3^{n+1}e^3 - 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural n.
79. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \cos x$ şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=$\frac{\pi}{3}$ şi x=$\frac{\pi}{2}$.
a)Calculaţi aria suprafeţei S.
b)Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei Ox.
c)Demonstraţi că $\int_0^{2\pi} f^{3n}(kx)\, dx = \int_0^{2\pi} f^{3n}(x)\, dx$,pentru orice numere naturale n,k≥1.
80. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \sin x$ şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=$\frac{\pi}{4}$.
a)Calculaţi aria suprafeţei S.
b)Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei Ox.
c)Demonstraţi că $\int_0^{2\pi} f^{4n}(kx)\, dx = \int_0^{2\pi} f^{4n}(x)\, dx$,pentru orice numere naturale n,k≥1.
81. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+25}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+25)f(x)dx = -\frac{74}{3}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty, 0]$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_1^5 x^n f(x)\, dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\infty$.
82. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+36}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+36)f(x)dx = -\frac{107}{3}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty, 0]$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_1^6 x^n f(x)\, dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\infty$.
83. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+26}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 x \cdot \frac{1}{f(x)}\, dx = \frac{94}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{29}{26}$, unde g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2+2x+26}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_{-1}^1 x^{2n-1} f(x)\, dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
84. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+37}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{127}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{40}{37}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+37}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

85. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+64}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^3+64)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{65}{64}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

86. Se consideră funcţia $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-125}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^3+125)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{126}{125}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

87. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+9}-\frac{8}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(x^2+9)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=3-\ln 2-\frac{2\pi}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

88. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+12}-\frac{11}{x^2+12}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(x^2+12)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=2-\ln\frac{4}{3}-\frac{11\pi\sqrt{3}}{36}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

89. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2(x+5)}{\sqrt{x^2+8x+17}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+8x+17}dx=11$.

b)Arătaţi că $\int_0^1(f^2(x)-4)dx=4\ln\frac{26}{17}$.

c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\infty$.

90. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2(x+6)}{\sqrt{x^2+10x+26}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+10x+26}dx=13$.

b)Arătaţi că $\int_0^1(f^2(x)-4)dx=4\ln\frac{37}{26}$.

c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\infty$.

91. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=8x\text{arctgx}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\text{arctgx}}dx=12$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx=\frac{\pi}{a}-4\sqrt{3}$.

c)Demostraţi că $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$.

92. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=6x\text{arctgx}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\text{arctgx}}dx=9$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx=\frac{\pi}{a}-3\sqrt{3}$.

c)Demostraţi că $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$.

93. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x^2+x+4)f(x)dx=2$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

94. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+x+5}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x^2+x+5)f(x)dx=2$.

b)Arătaţi că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln\frac{11}{7}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

95. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{2x}{x^4+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^4+1)f(x)dx=\frac{23}{5}$.

b)Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.Ştiind că graficul funcţiei F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinaţi panta acestei asimptote.

c)Se consideră funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $G(0)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 xG(x)\,dx=1+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

96. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4+\frac{2x}{x^4+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^4+1)f(x)dx=\frac{29}{5}$.

b)Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.Ştiind că graficul funcţiei F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinaţi panta acestei asimptote.

c)Se consideră funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $G(0)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

97. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+2)$.

a)Arătaţi că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=10$.

b)Demonstraţi că $F(\sqrt{3})<F(2)$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\int_0^2 f(x)\,dx = m\ln 2 + 1$.

98. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)= x\ln(x-2)$.

a)Arătaţi că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-2)}\,dx = 10$.

b)Demonstraţi că $F(\sqrt{15}) < F(4)$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\int_4^6 f(x)\,dx = m\ln 2 - 7$.

99. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)= 3x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx = e^2+5$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 e^x(f(x)-3x-e^x)\,dx = 1$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx = \frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

100. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)= 4x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 \left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx = e^2+7$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 e^x(f(x)-4x-e^x)\,dx = 1$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx = \frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

101. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5-x+\sqrt{x^2+25}$.

a)Arătaţi că $\int_2^8 \big(f(x)-\sqrt{x^2+25}\big)dx = 0$.

b)Arătaţi că $\int_0^{12} \frac{x}{f(x)+x-5}\,dx = 8$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

102. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 6-x+\sqrt{x^2+36}$.

a)Arătaţi că $\int_1^{11} \big(f(x)-\sqrt{x^2+36}\big)dx = 0$.

b)Arătaţi că $\int_0^8 \frac{x}{f(x)+x-6}\,dx = 4$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

103. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+16}$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+16}}\,dx = 8$.

b)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{61}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, n≥2, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}\,dx$.Determinaţi numărul natural n, n≥2, pentru care $I_{n+2}+16I_n = \frac{3}{n-1}$.

104. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$.

a)Arătaţi că $\int_0^6 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+25}}\,dx = 18$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{11}} f(x)\,dx = \frac{91}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, n≥2, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}dx$.Determinaţi numărul natural n, n≥2, pentru care $I_{n+2} + 25I_n = \frac{3}{n-1}$.

105. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{6x}{x^3+8}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x^3+8)f(x)dx = 12$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 xf(x)\,dx = 6\ln 2$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

106. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8x}{x^3+8}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 (x^3+8)f(x)dx = 16$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 xf(x)\,dx = 8\ln 2$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

107. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+6x)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 36$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+6}dx = \frac{e-2}{e}$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right) = 3$.

108. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+8x)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 45$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+8}dx = \frac{e-2}{e}$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right) = 4$.

109. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=4x+\ln(x+1)$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \big(f(x)-\ln(x+1)\big)dx = 6$.

b)Arătaţi că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-4x}{x+1}dx = \frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că aria suprefeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $a\pi-\frac{2}{3}+\ln 2$.

110. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)+4x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 \big(f(x)-\ln(x+1)\big)dx = 6$.

b)Arătaţi că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-4x}{x+1}dx = \frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că aria suprefeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $a\pi-\frac{2}{3}+\ln 2$.

111. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+3+x\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (f(x)-x\ln x)dx = 10$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x)-x-3)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(f(x)-x\ln x-2)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

112. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+4+x\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (f(x) - x\ln x)dx = 12$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x) - x - 4)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:[1,3] → ℝ, $g(x) = \frac{1}{(f(x)-x\ln x-3)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

113. Se consideră funcţia f:ℝ → ℝ, $f(x) = \frac{4x}{3x^2+3}$.

a)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)(3x^2 + 3)dx = 10$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\ln 5$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $\frac{3e^2+9}{4}$.

114. Se consideră funcţia f:ℝ → ℝ, $f(x) = \frac{4x}{3x^2+4}$.

a)Arătaţi că $\int_3^4 f(x)(3x^2 + 4)dx = 14$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln 2$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $\frac{3e^2+11}{4}$.

115. Se consideră funcţia f:ℝ ⟶ℝ, $f(x)=x^4 + 10x^2 + 1$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) - 10x^2)dx = \frac{12}{5}$.

b)Arătaţi că $\int_1^{10} \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 10}{2}$.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \big(f(2t) - f(t)\big)\,dt\right)=10$.

116. Se consideră funcţia f:ℝ ⟶ℝ, $f(x)=x^4 + 12x^2 + 1$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) - 12x^2)dx = \frac{12}{5}$.

b)Arătaţi că $\int_1^{12} \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 12}{2}$.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \big(f(2t) - f(t)\big)\,dt\right)=12$.

117. Se consideră funcţia f:ℝ ⟶ℝ, $f(x)=\frac{x+6}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^x dx = 14$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - \frac{6}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} + 6I_n \le \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr nenul n.

118. Se consideră funcţia f:ℝ ⟶ℝ, $f(x)=\frac{x+7}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^x dx = 16$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 8 - \frac{9}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că

$I_{n+1} + 7I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr nenul n.

119. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)(x+1)^3 dx = 9$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 \sqrt{f(x)(x+1)}\, dx = 1 - \ln 2$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−1 şi x=1 este egală cu $\frac{e-1}{2(e+1)}$.

120. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$.

a)Arătaţi că $\int_3^6 f(x)(x-1)^3 dx = 63$.

b)Arătaţi că $\int_2^4 \sqrt{f(x)(x-1)}\, dx = 2 + \ln 3$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 este egală cu $\frac{e^2+e}{2(e-1)^2(e+1)^2}$.

121. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x^2 - 2 + e^{3x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x) - e^{3x})dx = 21$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 9x(f(x) - 3x^2 + 2)\, dx = 3e^3 + 1$.

c)Demonstraţi că $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{f(t)+1}{t+1} dt = \frac{3}{2}$.

122. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x^2 - 1 + e^{3x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 (f(x) - e^{3x})dx = 24$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 9x(f(x) - 3x^2 + 1)\, dx = 2e^3 + 1$.

c)Demonstraţi că $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{f(t)}{t+1} dt = \frac{3}{2}$.

123. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 3 + \ln^2 x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x)dx = 33$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-3}{x} dx = \frac{1}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3} dx$. Demonstraţi că $I_{n+2} + 3I_n \leq 2^{n-1}(e^4 - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

124. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 4 + \ln^2 x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x)dx = 34$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-4}{x} dx = \frac{1}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3} dx$. Demonstraţi că $I_{n+2} + 4I_n \leq 2^{n-1}(e^4 - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

125. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=5 + \frac{1}{x} + \frac{\ln^2 x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{\ln^2 x}{x}\right) dx = 10 + \ln 3$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) - 5 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-5}{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

126. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx=6+\ln 3$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\left(f(x)-3-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-3}{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

127. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\frac{1}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)dx=15$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+17$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţie $g:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(e^x)-4e^{3x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $\frac{1}{4}\ln\frac{5e}{e+4}$.

128. Se consideră funcţia $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\frac{1}{x+5}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+5}\right)dx=15$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+21$.

c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţie $g:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(e^x)-4e^{3x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $\frac{1}{5}\ln\frac{6e}{e+5}$.

129. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+17}}$.

a)Arătaţi că $\int_4^6 f(x)\sqrt{x^2-8x+17}dx=2$.

b)Arătaţi că $\int_3^5 f(x)\,dx=0$.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[4,5]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1-\frac{\pi}{m}\right)$.

130. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+26}}$.

a)Arătaţi că $\int_5^7 f(x)\sqrt{x^2-10x+26}dx=2$.

b)Arătaţi că $\int_4^6 f(x)\,dx=0$.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1-\frac{\pi}{m}\right)$.

Teste oficiale

Testul 1(Examenul de bacalaureat naţional 2026, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1 = 2$ şi $b_2 = 10$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = ax - 1$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(2) = 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8 x + \log_8(8 - x) = \log_8(6 + x)$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre disticte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{1,2,4,6,8\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,2)$ şi $C(4,6)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AC.
6.Se consideră expresia $E(x) = 3\text{tg}\frac{x}{3} + \sin x - 2\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -2a \\ 2 & -1 & -a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + ay - 2az = -1 \\ 2x - y - az = a \\ x - ay = a \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Arătaţi că, pentru orice număr real $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0, y_0, z_0) şi $4x_0z_0 = 1$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + X^2 + aX + 8$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 8$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 2.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2 - 4x - 3 - (2x - 3)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4(x - 1)(1 - e^{2x})$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 4$.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) + n = 0$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x^2 - 4x + 5}dx = 2$.
b)Arătaţi că $\int_1^3 f(x)\,dx = 0$.
c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1 - \frac{\pi}{m}\right)$.

Testul 2(Examenul de bacalaureat naţional 2026, sesiunea Isubiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3i(2+i)+2(2-3i)=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=2x−5.Determinaţi numărul real a pentru care $a+f(a-1)+f(a+1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(6x-8)=\log_2 x$.
4.Se consideră mulţimea A={3,6,9, … ,60}.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$,$B(a,0)$ şi $C(1,b)$ unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi B=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $6\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1&2&1\\0&-1&-a\\0&2&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(3))=0$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(a)=(2a-1)A(a)$, pentru orice număr real a.
c)Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural.Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=2n^2A(n)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX-6$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Pentru a=4 şi b=0, arătaţi că $f(-1)=0$.
b)Pentru a=b=1, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X+1$.
c)Determinaţi perechile (a,b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{2x^2+1}-3\ln(2x^2+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x(\sqrt{2x^2+1}-3)}{2x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\frac{1}{x+2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx=15$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+9$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţie g:$(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(e^x)-4e^{3x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3e}{e+2}$.

Testul 3 (Examenul de bacalaureat naţional 2026, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 6$ şi $a_3 = 30$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 2ax - 1$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(0) = 0$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x^2 - 4x + 3) = 2\log_2 x$.

4.Se consideră mulţimea A={2,4,5,6}.Determinaţi câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$ şi $B(1,3)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi tgC=$\frac{1}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\sqrt{10}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & 0 \\ 2a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 4$.

b)Arătaţi că $A(a) \cdot A(b) = A(a + b - 3ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $A(1) \cdot A(a) + A(5) = 2A(4)$.

2.Se consideră polinomul $f=mX^4 - mX^2 + X + 1$, unde m este număr real nenul.

a)Arătaţi că f(−1)=0, pentru orice număr real nenul m.

b)Determinaţi numărul real nenul m pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+2 este egal cu 11.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+2x+1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$, $x\epsilon(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=6+\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{\ln^2 x}{x}\right) dx = 12+\ln 3$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) - 6 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)-6}{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

.

Testul 4(Examen de bacalaureat naţional2026, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele x, 8 şi 2x+1 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=2x+1 şi g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x)=x+4.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=-a$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_5 x=\log_5(4x+5)$.

4.Se consideră mulţimea A={1,3,5,7,8}.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, Cu cifra zecilor impară, se pot forma cu elemente din mulţimea A.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(0,5) şi B(3,4).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, cu A=$\frac{\pi}{2}$, C=$\frac{\pi}{3}$ şi AE=2, unde E este punctul în care bisectoarea unghiului C intersectează latura AB.Arătaţi că distanţa de la punctul B la dreapta CE este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1-a\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ şi şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax-2z=4\\ x+y+(1-a)z=3\\ 2x+y-2z=5\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=2$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.

c)Pentru a=2, arătaţi că $x_0z_0+y_0\geq 0$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii, cu x_0, y_0şi z_0 numere reale.

2. Pe mulţimea M=$(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$.

a)Arătaţi că $3*5=\frac{7}{4}$.

b)Determinaţi xϵM pentru care x∗x=3.

c)Demonstraţi că $(x*x)*x>2$, pentru orice xϵM.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f(x)=x+$\ln^2 x-x\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2-x)\ln x}{x}$, x$\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

c)Determinaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are o soluţie unică.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2+\sqrt{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3\left(f(x)-\sqrt{x^2+4}\right)dx=3$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)-x^2+2}dx=1$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x F(t)\,dt=0$, unde F:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Testul 5 (Examenul de bacalaureat naţional 2026, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=2+i$.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}=9$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-4x+m$, unde m este un număr real.Determinaţi numărul real m pentru care graficele funcţiilor f şi g au exact un punct comun.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1+\log_x 2)\log_2 x=5$.

4.Se consideră A, mulţimea numerelor naturale de două cifre.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil 5.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$ şi $B(4,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta OB.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=9$ şi $AC=12$. Punctul M este mijlocul segmentului BC. Arătaţi că distanţa de la punctul C la dreapta AM este egală cu 7,2.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax+y+z=2a\\ x-y+az=-4\\ 3x+2y+z=8\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=4$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.

c)Considerăm (x_1,y_1,z_1) soluţia sistemului de ecuaţii liniare pentru $a=1$.Pentru $a=2$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuaţii liniare pentru care $x_0y_0=y_1$.

2.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{(x^2+2)(y^2+2)+m}$, unde $m\in[-4,+\infty)$

a)Pentru $m=3$, arătaţi că $0*1=3$.

b)Pentru $m=7$, determinaţi numerele reale x pentru care $x*(2x)=5$.

c)Determinaţi $m\in[-4,+\infty)$ pentru care legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{x-2}}{\sqrt{x-1}}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^{x-2}(2x-3)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x-2}}=\sqrt{e}$.

c)Determinaţi mulţimea numerelor reale m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(4x+\frac{6}{x^2}\right)\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{\ln x}dx=11$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-4x\ln x)\,dx=3$.

c)Determinaţi primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, pentru care axa Ox este tangentă la graficul funcţiei F.

.

Testul 6(Examenul de bacalaureat național 2025, sesiunea I subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătați că $2(\log_5 10 - \log_5 2) + \log_5 25 = 4$.
2.Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=x−4.Determinați numărul real m pentru care $f(2 + m) = 2 - m$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x \cdot 2^{1-x} = 2^7$.
4.Se consideră mulțimea A={1,2,3,4,5,6}.Determinați câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea A, sunt divizibile cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,1) ,B(2,0) și C(4,6). Determinați ecuația dreptei d ce trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC.
6.Se consideră expresia $E(x) = tgx \cdot \left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2 - \cos\frac{x}{2}$,unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 4 \\ ay + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 4 \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
b)Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a.
c)Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0 \geq 1$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$.
a)Arătați că $6*7 = 1$.
b)Determinați numărul real x pentru care $x*(x+4) = 6$.
c)Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu m<n<p, pentru care $m*n*p = 3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)\sqrt{x^2+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-5x}{f(x)}\right)^x = 1$.
2. Se consideră funcția f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 1 + \ln^2 x$.
a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x)dx = 31$.
b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-1}{x} dx = \frac{1}{3}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3} dx$. Demonstrați că $I_{n+2} + I_n \leq 2^{n-1}(e^4 - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 7(Examenul de bacalaureat național 2025, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătați că $3(4-5i)+5i(3+2i)=2$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+a$, unde a este număr real.Determinați numărul real a pentru care $(g\circ f)(1)=1$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(6x-x^2)=\log_2(4+x)$.
4.Se consideră mulțimea A={3,4,5,7,9}.Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,2) și B(6,4).Determinați coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=4 și raza cercului circumscris egală cu 4. Arătați că aria triunghiului ABC este egală $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 2a\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y+2az=a+1\\ ax+y=0\\ x+y-az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(2))=4$.
b)Pentru a=1, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.
c)Determinați numărul real a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0=a$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4-3X^3+X^2-2X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=3, arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=1$, unde x_1,x_2,x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=0, determinați numerele reale a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul X−a este egal cu a.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x(x^2-4)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că $f(7x)-f(x)\le 2\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-1+e^{2x}$.
a)Arătați că $\int_0^3 (f(x)-e^{2x})dx=24$.
b)Arătați că $\int_0^1 4x(f(x)-3x^2+1)\,dx=e^2+1$.
c)Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{f(t)}{t+1}dt=1$.

Testul 8(Examenul de bacalaureat naţional 2025, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ şi $z_2 = 2 + i$. Arătaţi că $2z_1 + iz_2 = 1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 2^6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$,$B(5,0)$,$C(6,3)$ şi $D(a, b)$, unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele AC şi BD au acelaşi mijloc.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=2$ şi $tgB=3$.Arătaţi că $BC=2\sqrt{10}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x & 0 & 2+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 8$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = 2A(x + y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$.
2.Se consideră polinomul $f=aX^3 + 3X^2 - aX - 6$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = -3$, pentru orice număr real nenul a.
b)Pentru $a=1$, determinaţi câtul şi restul împărţiriipolinomului f la polinomul $g=x^2 + 3X - 1$.
c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\frac{x}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x\epsilon(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)(x + 1)^3 dx = 9$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \sqrt{f(x)(x + 1)}\, dx = 1 - \ln 2$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$ este egală cu $\frac{e-1}{2(e+1)}$.

Testul 9 (Examenul de bacalaureat naţional 2025, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 20$ şi $b_3 = 100$.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \cdot 3^3 = 3^{x+2}$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$,$B(6,2)$ şi $C(4,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele AC şi OB sunt paralele.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 32 şi $BC=AB\sqrt{2}$. Arătaţi că $AC=8$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(x) = \begin{pmatrix} 2x & 3x & -3 \\ -x & -2x & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0)) = 0$.

b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(y) - xyI_3 = (x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x) - M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right) = 2M(0)$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

a)Arătaţi că $1*3=1$.

b)Arătaţi că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-2+\ln x}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = 3$.

c)Determinaţi cel mai mare număr întreg m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are cel puţin o soluţie.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^x dx = 10$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - \frac{6}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} + 4I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr nenul n.

Testul 10 (Examen de bacalaureat național 2025, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 - 3x + 5$ .Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a, 5)$ aparține graficului funcției f.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x - 5) = \log_6(x + 1) + \frac{1}{\log_x 6}$.
4.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$și $C(5, a)$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că dreptele OB și AC sunt paralele.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=6$, $BC=10$ și $\cos B=\frac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A = 1$.
b)Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x.
c)Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y + xy^2 + x + y$.
a)Arătați că $1*3=16$.
b)Determinați numerele reale nenule x pentru care $x*\frac{2}{x}=9x$.
c)Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $m*n=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)= \frac{\ln x}{x^3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{1-3\ln x}{x^4}$, $x \in (0, +\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= e^x + x^2 - 1$.
a)Arătați că $\int_1^4 (f(x) - e^x)dx = 18$.
b)Arătați că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)-x^2} dx = \ln(e + 1)$.
c)Demonstrați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)+1} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$.

Testul 11 (Examenul de bacalaureat naţional 2025, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_3 = 40$ şi $b_4 = 80$.

2.Determinaţi mulţimea numerelor reale m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 63$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, n^2 să fie număr natural de trei cifre.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,2), B(7,4) şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. Determinaţi coordonatele punctului D pentru care $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$.

6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu AB=10, înălţimea AD=8 şi distanţa de la punctul D la dreapta AC egală cu $4\sqrt{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 56.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + y - az = 1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + az = -3 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) ale sistemului de ecuaţii pentru care $y_1 = x_2$ şi $z_1 = y_2$.

2.Pe mulţimea M=$(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} - 2$.

a)Arătaţi că 1∗4=3.

b)Determinaţi x∈M pentru care x∗x=1.

c)Demonstraţi că mulţimea $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulţimii M în raport cu legea de compoziţie „∗”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-2}{x+2} + \ln\frac{x+2}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, x∈$(0, +\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi numerele naturale n pentru care ecuaţia $f(x) = n$ **nu** are soluţii.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{2x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^{2}(2x^2 + 1)f(x)dx = 3$.

b)Arătaţi că $\int_0^2 \sqrt{f(x)}\, dx = 1$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(\sqrt{e^x})} dx$.Arătaţi că $(n + 1)I_n - I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 12(Examenul de bacalaureat naţional 2024, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2 = 14$ şi $a_3 = 18$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.Arătaţi că $(f\circ f)(5) = 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,7,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ .Determinaţi coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=12 şi AB=$\frac{BC}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big) = 0$.
b)Arătaţi că $B(x)\cdot B(y) - B(x+y) = xyA$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1) - B(2x)\cdot B(1) = xA$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + X + 2 - a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = 4$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=2, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2 - 2)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4 + 6x^2 + 1$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x) - 6x^2)dx = \frac{12}{5}$.
b)Arătaţi că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 6}{2}$.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \big(f(2t) - f(t)\big)\,dt\right)=6$.

Testul 13(Examenul de bacalaureat naţional 2024, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\lg100+\lg2+\lg5=5$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(3a)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{3x}\cdot 5^2=5^x$.
4.Determinaţi câte submulţimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulţimea $A=\{1,2,4,6,8,9\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ şi $B(3,0)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 18 şi $B=\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că AB=6 .

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(1))=7$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2)=M(x-1)$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care $2\det(M(n))\le\det(M(2n))$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-aX+2a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(2)=0$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=1, arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+1.
c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=8$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-4)+x^2-2x+4$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2(x-1)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-e^x}=4$.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{3x^2+1}$.
a)Arătaţi că $\int_3^4 f(x)(3x^2+1)dx=14$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{4}{3}\ln2$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $\frac{3e^2+5}{4}$.

Testul 14 (Examenul de bacalaureat naţional 2024, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 12$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 8$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(1 + m) = 1 - m$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2 - 3x + 5) = \lg 5$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n + 1}$ să fie natural.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(1,2),B(3,0) şi C(5, a), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OA şi BC sunt paralele.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghiul în A, cu AC=9 şi B=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că AB=$3\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$.

c)Arătaţi că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci şi matricea $A(-x)$ este inversabilă.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = xy + \frac{2x+2y-1}{4}$.

a)Arătaţi că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.

b)Arătaţi că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^3}{(x-1)^2}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact două soluţii, pentru orice $m \in (27, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1+x\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (f(x) - x\ln x)dx = 6$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x) - x - 1)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(f(x)-x\ln x)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Testul 15 (Examen de bacalaureat naţional 2024, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2(1-2i)+i(4+i)=1$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-a$, unde a este număr real .Determinaţi numărul real apentru care punctul $A(3,-3)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+8)=\log_2(8-2x)$.
4.Determinaţi câte numere de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,4,5}.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(4,0)$.Determinaţi coordonatele punctului C, ştiind că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.
6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu AB=5, C=$\frac{\pi}{4}$ şi înălţimea AD=4. Arătaţi că BC=7.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&-1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.
2. Pe mulţimea M=$[3,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
b)Pentru m=2, arătaţi că e=$\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Se consideră funcţia f:M→M, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru m=1, arătaţi că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice x,y∈M.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 f(x)(x^2+1)^2dx=4$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătaţi că $I_n-I_{n+4}=\frac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 16(Examenul de bacalaureat naţional 2024, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, unde a este număr real.Determinaţi numerele reale a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ şi $C(4,2)$. Determinaţi coordonatele punctului D, ştiind că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

6.Se consideră expresia $E(x)=\text{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

b)Arătaţi că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

c)Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

2.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

a)Arătaţi că $1*2=2$.

b)Arătaţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică, pentru orice număr întreg m.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^4 e^x f(x)dx=12$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2e-3}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, $n\ge 2$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{f(x^n)}dx$. Demonstraţi că $\frac{\ln 2}{n}\le I_n\le\frac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Testul 17(Examenul de bacalaureat naţional 2023, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 3$ şi $a_5 = 23$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m, -1)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5}.Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii A, care au cel mult două elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,1) şi B(4,4).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi înălţimea AD=3.Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real..
a)Pentru m=2, arătaţi că $f(1) = 3$.
b)Pentru m=0, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul raţional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3e^x}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{3e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact trei soluţii, pentru orice $m\in(e, 3)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=6x+\ln(x + 1)$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1))dx = 9$.
b)Arătaţi că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că aria suprefeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $a\pi+\ln 2$.

Testul 18(Examenul de bacalaureat naţional 2023, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=3+i$.Arătaţi că $z(z-2i)=10$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$.Arătaţi că $f(2x)-2f(x)=-1$,pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ şi $B(5,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 4.Arătaţi că $BC=4$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$,
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=8$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c)Pentru $a=-2$, arătaţi că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+(2^x-2)(2^y-2)$.
a)Arătaţi că $2\circ 3=18$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Demonstraţi că $x\circ(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x dx=18$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{e-2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=1$.

Testul 19(Examenul de bacalaureat naţional 2023, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(2-i)^2+i(4+i)=2$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$,$B(3,-2)$ şi $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul.Arătaţi că dreptele AB şi OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & -1 & 2a\\ 1 & -2 & a\\ 1 & 1 & 1-a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax-y+2az=0\\ x-2y+az=0\\ x+y+(1-a)z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Pentru $a=-1$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.
a)Arătaţi că $0*1=-3$.
b)Arătaţi că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice numărr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln(x^2+x+5)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x^3+8)f(x)dx=8$.
b)Arătaţi că $\int_1^4 xf(x)\,dx=4\ln 2$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

Testul 20 (Examen de bacalaureat național 2023, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul.Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$.
4.Se consideră mulțimile A={1,2,3,4} și F={f|f: A $\to$ A}. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\leq n$, pentru orice $n\in A$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$.Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu AB=8, măsura unghiului C este 30° și punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Determinați distanța de la punctul O la latura AB.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a & -2\\ 2a+1 & 1-a & -1\\ a+2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, și sistemul de ecuații

$$\begin{cases}3x+ay-2z=b\\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c\\ (a+2)x-2y+z=-1\end{cases}$$, unde a,b și c sunt numere reale.

a)Arătați că $\det(A(0))=5$.
b)Determinați numerele reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.
c)Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.
2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.
a)Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.
b)Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu 15X.
c)Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f nu are toate rădăcinile numere întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-(x^4-1)\operatorname{arctg}x$.
a)Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.
c)Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\geq f(x)\geq f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.
a)Arătați că $\int_0^3(1+e^{-x})f(x)dx=8+e^3$.
b)Arătați că $\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
c)Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

Testul 21 (Examenul de bacalaureat naţional 2023, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ şi $z_2 = 1 - i$.Arătaţi că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x + 1$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care graficele funcţiilor f şi g au exact un punct comun.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 9.
5.În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AC, iar punctele D şi E aparţin segmentului AB, astfel încât AD=BE.Arătaţi că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.
6.Determinaţi $x\in[0, \pi]$ pentru care $\sin 2x=1+\cos 2x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$,
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi şi $x_0 > y_0 > z_0$.
2.Pe mulţimea $M=[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy}{1+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
a)Arătaţi că $1*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $x * (-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere din mulţimea M pentru care $a*b=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-1-\ln(e^x + x^2)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x + 3}dx = 12$.
b)Arătaţi că $\int_{-2}^{1} \frac{f(x)}{x^2+1} dx = 2$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{\pi}{2}$.

Testul 22(Examenul de bacalaureat naţional 2022, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2i(3-i)-6i=2$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(-1)=f(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x-1}=9^x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(1,-1)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2tgx\cdot\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=2$.
b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.
2.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
a)Arătaţi că $1*3=3$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=\frac{1}{16}\cdot(m*n)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{e^x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=n$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{5}}f(x)\,dx=\frac{19}{3}$.
c)Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{f^2(x)}dx$.Determinaţi numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $I_{n+2}+4I_n=\frac{3}{n-1}$.

.

Testul 23(Examenul de bacalaureat naţional 2022, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=3x+m, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot 2^{2x}+4^{x}=4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=3x−2 şi punctul $A(a,a)$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A aparţine dreptei d.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=10 şi cosA=0.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.
2.Pe mulţimea M=[0, +∞) se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{2x}{y+2}+\frac{2y}{x+2}$.
a)Arătaţi că 1∗0=1.
b)Demonstraţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Determinaţi x∈M, x nenul, pentru care $x*\frac{4}{x}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2+\frac{x}{e^x-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că, pentru orice m∈(1, 2], ecuaţia f(x) = m are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.
a)Arătaţi că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.
b)Arătaţi că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 24(Examenul de bacalaureat naţional 2022, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Arătaţi că $5(1+2i)-2i(5-i)=3$, unde $i^2=-1$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x^2+1)=2$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare şi distincte.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$,$B(1,6)$ şi $C(4,2)$.Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

6.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât $BC=10$ şi $\sin B=2\sin C$.Arătaţi că lugimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.

b)Arătaţi că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

a)Arătaţi că $0*2=5$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-5x+10)\sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(x^2-3x+2)}{2\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f .

c) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\frac{1}{e}$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 e^x(f(x)-x-e^x)\,dx=1$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Testul 25 (Examen de bacalaureat naţional2022, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $6-3\sqrt{3}$,$\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+2}=5^x+24$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.

5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele MD şi AB sunt paralele.

6.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=3 şi măsurile unghiurilor A şi B sunt de 30° , respectiv 60°.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ şi $A(z)=aI_3+bB$, unde z=a+ib, cu a şi b numere reale şi $i^2=-1$.

a)Arătaţi că $\det B=i$.

b)Demonstraţi că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

2.În mulţimea M=$[1,+\infty)$, se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\log_2(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6)$.

a)Arătaţi că $x*y=\log_2\left((2^x-2)(2^y-2)+2\right)$, pentru orice x,yϵM.

b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Arătaţi că $x*x*x<3x$, pentru orice xϵM.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x+1)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=(2-x)(x^2-x+1)e^{-x}$, xϵ$\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x}=e^{-2}$.

c)Demonstraţi că funcţia g :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\frac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

a)Arătaţi că $\int_4^6\frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

b)Demonstraţi că $F(\sqrt{7})<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\int_3^5 f(x)\,dx=m(4\ln2-1)$.

Testul 26(Examenul de bacalaureat naţional 2022, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ şi $z_2 = 2 + i$.Arătaţi că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 + 4x + m$, unde m este număr real.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1+2\log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulţimea A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$,$B(3,1)$ şi $M(2,4)$.Determinaţi coordonatele punctului N, ştiind că patrulaterul ABMN este paralelogram.
6.Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A + B) + \cos C = 1$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1, \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a) = A(a) - A(0)$.
c)Demonstraţi că, dacă sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii, atunci $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 \leq 0$, pentru orice soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuaţii, cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale.
2.Pe mulţimea numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.
a)Arătaţi că $(-1) * 2 = \frac{1}{9}$.
b)Arătaţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „ $*$ ”.
c)Demonstraţi că există cel puţin trei numere complexe distincte şi nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$ are exact două soluţii.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 e^x f(x)dx = 12$.
b)Arătaţi că orice primitivă G a funcţiei g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ este convexă.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

Testul 27(Examenul de bacalaureat naţional 2021, sesiunea II)

Subiectul I

1.Calculaţi media aritmetică a numerelor reale a=$2021-\sqrt{2}$ şi b=$2021+\sqrt{2}$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$ .Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(\sqrt{x}+3)+\log_3(\sqrt{x}-3)=2$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 16 submulţimi.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(3,0),N(8,3) şi P(6,3).Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care sin2A·cosA=sinA.Arătaţi că A=$\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_2 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde aϵ$(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că, pentru orice aϵ$(0,+\infty)$, matricea A(a) este inversabilă.
c)Demonstraţi că, pentru orice aϵ$(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei A(a).
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=$xy-m(x+y)+m(m+1)$, unde m ϵ$(0,+\infty)$.
a)Pentru m=1, arătaţi că 2∘2=1.
b)Demonstraţi că, dacă 2∘1=5, atunci 2∘5=1.
c)Determinaţi numărul real x, ştiind că $(mx^3)\circ(-mx^2)=m$, pentru orice mϵ$(0,+\infty)$

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$,xϵ$(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii distincte în intervalul $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2x}{x^4+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^4+1)f(x)dx=\frac{11}{5}$.
b)Se consideră F :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.Ştiind că graficul funcţiei F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinaţi panta acestei asimptote.
c)Se consideră funcţia G :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $G(0)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

Testul 28(Examenul de bacalaureat naţional 2021, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(1,2)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+1)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 şi cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$,$N(0,1)$ şi $P(3,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul P şi este paralelă cu dreapta MN.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C.Arătaţi că $tgB=\frac{1}{tgA}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=8$.
b)Determinaţi matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ştiind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
a)Arătaţi că $2*0=2$.
b)Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=b$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x)*(x^2+1)*(-2x)=10$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x^2+x+3)f(x)dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 29 (Examenul de bacalaureat naţional 2021, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Calculaţi modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$ .Calculaţi $(g\circ f)(2)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=4,BC=6 şi măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=12,AC=16 şi BC=20.Arătaţi că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(4))=5$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.

c)Pentru a=3, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuaţii pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2.Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

a)Arătaţi că $4*3=2$.

b)Arătaţi că e=9 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$” .

c)Determinaţi $x\in G$, ştiind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

a)Arătaţi că $f'(x)=2x(2x^2-13)$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

b)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{a}-\sqrt{3}$.

c)Demostraţi că $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=0$.

Testul 30 (Examen de bacalaureat naţional 2021, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=2$ intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$.

4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 15 submulţimi cu două elemente.

5.Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N şi P mijloacele segmentelor BC,BM, respectiv CM. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

6.Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{pmatrix}$ unde a,b şi c sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det\left(A(0,1,2)\right)=2$.

b)Demonstraţi că $\det\left(A(a,b,c)\right)=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a,b şi c.

c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,n şi p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.În mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

a)Pentru $a=\hat{1}$ şi $b=\hat{2}$, arătaţi că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.

b)Determinaţi perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.

c)Arătaţi că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+2}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(e^x+2x+2)}{(e^x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 (f^2(x)-4)\,dx=4\ln 2$.

c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\infty$.

Testul 31 (Examenul de bacalaureat naţional 2021, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_2 = 2$ şi $b_4 = 4$.Determinaţi b_6.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 - 2x + m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f este situat pe dreapta y=3x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
4.Determinaţi numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
5.Segmentele AB şi A′B′ au acelaşi mijloc.Demonstraţi că $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \vec{0}$.
6.Demonstraţi că, în orice triunghi ABC, are loc relaţia AB+AC+BC=2R(sinA + sinB + sinC), unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul II

1.Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$ şi matricea

$X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(X(0,1)) = 1$.
b)Demonstraţi că, pentru orice numere reale distincte a şi b, sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Demonstraţi că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţie a sistemului de ecuaţii, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, pentru orice număr real a.
2.Pe mulţimea M=$(2, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.
a)Arătaţi că 5∗10=17.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „ ∗ ”.
c)Determinaţi x∈M pentru care x∗x∗x=x∗x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, x∈$\mathbb{R}$.
b)Demonstraţi. că tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f, este paralelă cu dreapta de ecuaţie $x-\sqrt{3}y = 0$.
c)Demostraţi că funcţia f are un singur punct de extrem.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+3}\right)$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2+3}\right) dx = \frac{\pi}{4}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă F a funcţiei f este strict crescătoare.
c)Arătaţi că, pentru orice numere reale a şi b, cu a<b, $\int_a^b f(x)F^2(x)\,dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

Testul 32(Examenul de bacalaureat naţional 2020, sesiunea II)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=2+i.Arătaţi că $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul M(0,2) aparţine graficului funcţiei f.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3 + 2x}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 şi cifra unităţilor egală cu 3.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,1),B(2,3) şi C(4, a), unde a este un număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

6.Măsurile unghiurilor A,B şi C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai Unei progresii aritmetice.Demonstraţi că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\ln x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x\in(0, +\infty)$.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = 1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0, +\infty)$.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y= xy - 4(x + y) + a$, unde a este număr real.

a)Pentru a=10, arătaţi că 1∗2=0.

b)Pentru a=20,arătaţi că e=5 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗".

c)Demonstraţi că, dacă $a\in[20, +\infty)$, atunci mulţimea $H=[4, +\infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea de compoziţie „∗" .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, $f(x)=6^x - 3^x + 2^x$.

a)Arătaţi că $f'(0) = \ln 4$.

b)Se consideră tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f. Determinaţi numărul real a pentru care $A\big(a, \ln(16e)\big)$ este este situat pe această tangentă.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2 + 3)f(x)dx = \frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 - \ln\frac{4}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 33(Examenul de bacalaureat naţional 2020, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x+5^{-x}=2$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5}.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conţin pe 1.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.
6.Triunghiul ABC este dreptunghic în A şi sinB=cosB.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
b)Demonstraţi că pentru orice număr real a , matricea A(a) este inversabilă .
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care inversa matricei A(a) are toate elementele numere întregi.
2.Pe mulţimea A=[1, +∞)se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.
a)Arătaţi că 1∗2020=1.
b)Demonstraţi că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3-1)(y^3-1)+1}$.
c)Determinaţi x∈A pentru care $x*x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre +∞ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{1}{x-2}>ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^3+1)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln 2$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$.Demonstraţi că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 34 (Examenul de bacalaureat naţional 2020, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=3+2\sqrt{2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ este natural.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x^2}=3\cdot 3^x$.

4.Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ are exact 10 submulţimi cu două elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$,$N(7,0)$ şi $A(a,3)$,unde a este număr real.Ştiind că AM=AN, arătaţi că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .

6.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x-2=2\cos 2x$.Calculaţi cosx.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=3$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.

c)Determinaţi numărul natural a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\log_2(2^x+2^y)$.

a)Arătaţi că $0*0=1$.

b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+5}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{31}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+5}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 35 (Examen de bacalaureat naţional 2020, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 30.Determinaţi a_2.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.Arătaţi că $(f\circ f)(3)=9$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.

4.Dterminaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.

5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC şi punctual E mijlocul segmentului BD. Arătaţi că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ şi $B=\frac{5\pi}{12}$.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea A(a) are rangul 2.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziţie este asociativă şi are elemental neutru $e=\frac{3}{2}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

c)Arătaţi că **nu** există numere întregi x şi y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctual de abscisă x=2, situat pe graficul funcţiei f.

c)Se consideră numerele reale a,b şi c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ şi punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcţiei $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$.Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+4)f(x)dx=-\frac{11}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Testul 36(Examenul de bacalaureat naţional 2019, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}|n-1\leq 4\}$ este egală cu 15.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 2.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 8 elemente ale unei mulţimi cu exact 10 elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$,$B(-1,3)$ şi $C(8,10)$.Determinaţi lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.
6.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2019\pi=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot\ldots\cdot A(2019)=n!\,A(0)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(1)=0$.
b)Pentru m=3, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m, pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Se consideră funcţiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ şi $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{13}{3}$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$, are aria egală cu $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3f(t)\,dt$.

Testul 37 (Examen de bacalaureat naţional2019, sesiunea I subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_2 = 3$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + mx + 7 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 = 1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 5$.

4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ şi $B(6,2)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$3\sqrt{3}$, AC=4 şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - ay - z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 0$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a)) = a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0,y_0 şi z_0 numere întregi.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x-2019)(y-2019)+2019$.

a)Arătaţi că $x*2019=2019$, pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numerele reale x, ştiind că $(x*x)*x = x$.

c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $m*n=2020$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\sqrt{x} - \ln\frac{x}{4} \geq 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+9)f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 38(Examenul de bacalaureat naţional 2019, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a, 3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor impară.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ şi$B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
6.Arătaţi că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15} 16)$ are toate elementele numere întregi.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m şi n sunt numere reale.
a)Arătaţi că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m şi n.
b)Determinaţi numerele reale m şi n , ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
c)Demonstraţi că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=1$, pentru orice numere reale m şi n, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că , pentru orice $a\in(0,4e^{-2})$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln x)dx=\frac{7}{3}$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu e^2 .
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x)-x^2)\,dx=0$.

Testul 39(Examenul de bacalaureat naţional 2019, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1=3-i$ şi $z_2=8-3i$.Arătaţi că $3z_1-z_2=1$.
2.Derminaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(a+1)=35$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 4^x-4^{x+1}+32=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1)\geq 42$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$,$B(0,6)$ şi $C(m,5)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AB=6 şi aria triunghiului ABC este egală cu 24.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a şi b , a>0,b>0.
c)Determinaţi numărul real a,a>0, ştiind că $A(a)A(a)A(a)=A(7)$.
2.Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+mX^2-mX+2$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(-2)=0$.
b)Pentru m=1, determinaţi rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$.Demonstraţi că $a\in[3,+\infty)$,pentru orice număr real m.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+4x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+5)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.
a)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.
b)Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.
c)Determinaţi numărul real a, a>e, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi x=a are aria egală cu 2a.

Testul 40 (Examen de bacalaureat naţional 2019, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}-x=0$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{\log_2 n\,|n\in\mathbb{N}^*, n\leq 20\}$, acesta să fie număr natural

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ şi $P(1,1)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.

6.Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$.Determinaţi lungimea laturii BC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\\ m & 1 & 3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2y+4z=5\\ -x+my-z=-2\\ mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=3$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru m=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

c)Demonstraţi că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziţie „$*$” să fie natural.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x^2+x+1)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-\frac{1}{7}x+2$.

c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 e^x f(x)dx=2$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Testul 41 (Examenul de bacalaureat naţional 2019, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Calculaţi modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2 x-\log_x 2=1$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 16 submulţimi cu cel mult două elemente.
5.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii BC şi punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstraţi că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
6.Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, ştiind că 1+3cosx=cos2x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii este incompatibil
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}-1$,pentru orice numere reale x şi y .
b)Determinaţi perechile de numere naturale a şi b, ştiind că a∘b=1.
c)Demonstraţi că pentru orice număr natural n, n≥2 , numărul $\underbrace{1\circ 1\circ \ldots\circ 1}_{1\text{ de n ori}}$ **nu** este natural.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.
a)Calculaţi $\int_1^2\frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)\,dx$.

Testul 42(Examenul de bacalaureat naţional 2019, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 333. Al doilea termen al acestei progresii este egal cu:

A. 30 B. 111 C. 222 D. 333

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$.Numărul $(f\circ f)\left(\frac{10}{9}\right)$ este egal cu:

A. -10 B. $-\frac{5}{3}$ C. 0 D. $\frac{10}{9}$

3.Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $2\log_2(x+1)-\log_2(x+2)=\log_{\frac{1}{3}}3$ este:

A. $\left\{-\frac{3}{2},0\right\}$ B. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ C. $\{0\}$ D. $\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$

4.Probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin o cifră pară este egală cu:

A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{13}{18}$

5.În reperul cartezian xOy se consideră triunghiul ale cărui laturi se află pe dreptele de ecuaţii $d_1: y=-2x$, $d_2: y=2x$ şi $d_3: x=2$. Perimetrul acestui triunghi este egal cu:

A. $4\left(2+\sqrt{5}\right)$ B. 24 C. $6\sqrt{5}$ D. $4\left(3+\sqrt{5}\right)$

6.Se consideră $E(x)=\sin x-\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, unde x este număr real.Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 B. $2\cos x$ C. $2\sin x$ D. 1

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} a & 2b & 1\\ a & a & b\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(0,1)$.

b)Arătaţi că $D(a,1)\geq 0$, pentru orice număr real a.

c)Demonstraţi că, dacă numerele m şi n sunt întregi impare, atunci $D(m,n)\neq 0$.

2.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$ unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(-x)+A(x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

b)Arătaţi că $\det\big(A(x)A(y)-A(2xy)\big)=0$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+A(2019)A\left(\frac{1}{4038}\right)=mI_3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b)Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=f(n)$.Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{f(n)}-1\right)$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}a+\frac{\sin x}{x}, x\in(-\infty,0)\\ \sqrt{x^2+2x}, x\in[0,+\infty)\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b)Pentru a=1, determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că, pentru orice număr real a, ecuaţia $f(x)=|a|$ are cel puţin o soluţie.

Testul 43(Examenul de bacalaureat naţional 2018, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $f(x)\geq g(x)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$,$B(1,3)$ şi $C(1,5)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că BC=4,B=$\frac{\pi}{3}$ şi C=$\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere x şi y.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A(m^2+m+17)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)-f(-1)=12$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X−2.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)dx=9$.
b)Arătaţi că $\int_1^2\frac{2-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^4 f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 44(Examenul de bacalaureat naţional 2018, sesiunea I)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $2\bar{z}-z=1-3i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f se află pe axa Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte şi impare.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ şi dreapta d de ecuaţie y=x+1. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=2$.

b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m))=0$.

c)Pentru m=−1, demonstraţi că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.

a)Demonstraţi că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, unde f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x+3)f(x)dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$.Demonstraţi că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$,pentru orice număr natural n, n≥1.

Testul 45 (Examenul de bacalaureat naţional 2018, sesiunea speciala)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=1−2i.Arătaţi că $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2.Derminaţi numerele reale a şi b,pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$ şi g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 2$ se intersectează în punctul M(2,8).
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(4x + 5) = 1 + \log_3(x + 3)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2),B(4,1) şi C(0,8).Determinaţi lungimea segmentului CM, ştiind că M este simetricul punctului A faţă de punctul B.
6.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=6,AC=10 şi $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (a+1)x - y + z = 0, \\ x + y - az = 1 \end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(-1)) = 0$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(M(a)) = 0$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0)şi $2x_0 + y_0 z_0 = 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\frac{1}{10}xy - (x + y) + 20$.
a)Demonstraţi că $x*y = \frac{1}{10}(x - 10)(y - 10) + 10$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x \leq \frac{101}{10}$.
c)Calculaţi $\log_2 1 * \log_2 2 * \log_2 3 * \ldots * \log_2 2018$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x + 1)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{6x^3}{x+1}$,$x \in (-1, +\infty)$.
b)Demonstraţi că valoarea minimă a funcţiei f este 0.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2 + x + 1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \frac{11}{6}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are exact două puncte de inflexiune.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)\, dx = 1$.

Testul 46(Examen de bacalaureat naţional2018, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\log_3(\sqrt{7}-2)+\log_3(\sqrt{7}+2)$ este natural.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=2x−1 şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, g(x)=$x^2+6x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)^3=(2-x)^3$.
4.Calculaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii {0,2,4,6,8}.
5.Punctele M,N şi P verifică relaţia $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$.Calculaţi lungimea segmentului MP,ştiind că MN=3.
6.Arătaţi că sinx+sin$(\pi-x)$+sin$(\pi+x)$ + sin$(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x & y & 1\\ 1 & x & y\\ x & 1 & y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det(A(2,3))=12$.
b)Demonstraţi că $\det(A(n^2,n))\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei B=$A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.
2.Se consideră polinomul f=nX^n+X^2-nX-1, unde n este număr natural,n≥3.
a)Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,n≥3.
b)Arătaţi că, dacă n este număr natural impar,n≥3, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătaţi că, pentru orice număr natural n, n≥5, polinomul f **nu** are rădăcini în mulţimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=arctgx−x.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{x^2}{x^2+1}$, x$\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, g(x)=arcctgx+x.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=$e^{-x^2}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\frac{e-1}{e}$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Testul 47 (Examenul de bacalaureat național 2018, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Calculaţi partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu cel puţin trei elemente ale mulţimii A={0,1,2, … ,9}.
5.Se consideră triunghiului MNP cu MN=6,MP=8 şi $m(\sphericalangle M)=90°$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
6.Determinaţi numărul real x, ştiind că tgx+ctgx+2=0 şi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\big(A(x)\big)=0$.
b)Demonstraţi că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.
2.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\big(x+\hat{3}\big)\big(y+\hat{3}\big)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.
b)Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_{20}$, ştiind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.
c)Daţi exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\backslash\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.
b)Determinaţi imaginea funcţiei f.
c)Demonstraţi că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\geq0$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=arctgx.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(tgx)dx=\frac{1}{2}$.
b)Calculaţi $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.
c)Demonstraţi că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\leq(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 48(Examenul de bacalaureat naţional 2018, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $2\,\bar{z} + iz = 4 + 5i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2x$.Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) < x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{27} = 3^3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={0,1,2,3,4,5}, aceasta să conţină numai numere pare.
5.Se consideră dreptunghiul ABCD,cu AB=8,AD=4 şi punctul M, mijlocul laturii CD.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BM}$.
6.Se consideră $E(x) = \sin\frac{2x}{3} - \cos\frac{8x}{3}$, unde x este număr real.Arătaţi că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} a^2+a & a^2-a & 1 \\ a^2-a & a^2+a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(-2)) = -32$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x) - xI_3) \geq 0$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a(a^2 + a, a^2 - a)$, unde a este număr real. Demonstraţi că pentru orice număr real nenul a, punctele P_a, P_{-a} şi O **nu** sunt coliniare.
2.Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Demonstraţi că $M(x) \cdot M(-x) = M(0)$, pentru orice număr real x.
b)Calculaţi inversa matricei M(x), $x\epsilon\mathbb{R}$.
c)Arătaţi că $\det(M(1) + M(2) + \cdots + M(n)) = 2n^2(2^n - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n)$ este descrescător.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x + \sin(x-1) + m, x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, x > 1 \end{cases}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \frac{3}{4}$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.
c)Pentru $m=-\frac{5}{4}$, demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (0,2).

Testul 49(Examen de bacalaureat naţional2017, sesiunea II subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$,unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x+8$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1) şi B(2,3).Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
6.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=6,BC=3 şi $m(\sphericalangle ABC)=30^\circ$.

Subiectul II

1.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.
2.Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(2)=0$.
b)Pentru $a=-5$, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(e^x+1)f(x)\,dx=e-1$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=0$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria mai mică decât ln2.

Testul 50(Examen de bacalaureat naţional2017, sesiunea II)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 1 + 2i$.Arătaţi că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x + 3) + \log_4(x - 3) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5.Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = -1$,pentru orice număr real m.
b)Demonstraţi că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2(e^x - x - 1), x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
a)Arătaţi că $\int_{-2}^{1} (x+2)^2 \, dx = 9$.
b)Pentru n=1, arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^x \, dx = 2e - 1$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−1 şi x=1 are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

Testul 51 (Examen de bacalaureat naţional2017, sesiunea I subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 2i$ şi $z_2 = 3 - 3i$.Arătaţi că $3z_1 + 2z_2 = 21$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = x + 1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 - x + 2$.Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+3} = 3 \cdot 3^{3x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2), B(2,4)$ şi $C(m, 0)$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC,ştiind că AB=4,AC=8 şi $A=\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 2$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)A(-x)) \leq 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că,dacă numerele naturale m şi n verifică relaţia $A(m)A(n) = A(2)$,atunci m+n=3.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 2X^2 + aX + 1$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(1) = 0$.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-2, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 2)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, $x\in(-2, +\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(-2, +\infty)$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_1^e x\ln^n x\,dx$.
a)Arătaţi că $\int_1^e x\,dx = \frac{e^2-1}{2}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $2I_{n+1} + (n + 1)I_n = e^2$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 52(Examen de bacalaureat naţional2017, sesiunea I)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=2+i.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\bar{z}=9$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităţilor.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ şi $C(0,2)$.Determinaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $(1+tg^2x)\cos^2x-(1+ctg^2x)\sin^2x=0$,pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+2z=0\\x+2y+az=0,\\-2x-y+3z=0\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(9))=0$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.
c)Demonstraţi că,dacă sistemul are soluţia (x_0,y_0,z_0),cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+7x+7y+42.
a)Arătaţi că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că x∘x=x.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $2017^a\circ(-6)=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că xlnx>x−1,pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+3x^2$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-3x^2)\,dx=e-1$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{7}{4}$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)-e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu n^2-n+1.

Testul 53 (Examen de bacalaureat naţional 2017, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $(-5,5)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2-1$. Calculaţi $(f\circ f)(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=x-3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,100\}$, acesta să fie multiplu de 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ şi $N(4,2)$. Determinaţi coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât PM=PN.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ şi $C=\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.
b)Demonstraţi că $\det\big(A(x)\big)=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.
a)Arătaţi că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstraţi că, dacă a, b şi c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b şi c sunt egale.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.
c)Determinaţi numărul real m, $m>0$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\frac{m+1}{m}$.

Testul 54(Examen de bacalaureat naţional2017, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 4 - 6i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 + x + 1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2 - 4) = \log_5(5x - 8)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=3x-2017$ şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x) + B(x)) = \det(B(x))$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p) = B(3)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + 8X + 3$,unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(1) = 0$.
b)Pentru a=6,determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + 5X + 3$.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = x^{2018} + 2018x + 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2018(x^{2017} + 1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a, 2020)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două soluţii reale distincte.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}\,dx$.
a)Calculaţi $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2)\,dx$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} = \frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,$n\geq 2$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{5}$.

Testul 55(Examenul de bacalaureat naţional 2017, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$,unde $i^2=-1$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$.Arătaţi că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-3}=5-x$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.
5.Se consideră triunghiului ABC şi punctele M,N şi P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstraţi că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.
6.Determinaţi numerele reale x,ştiind că sin2x=cosx şi $x\epsilon\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(a)\big)=(a+1)(a-3)$,pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+10x+10y-18$.
a)Arătaţi că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $(n*n)*n=n$.
c)Arătaţi că,dacă $a*a=b$ şi $b*b=a$,atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.
a)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.
c)Demonstraţi că pentru orice număr real a,$a\epsilon\big(-\sqrt{2},-1\big)$,ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale distincte.
2.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ şi,pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\big(\sqrt{2}-1\big)$.
b)Demonstraţi că $I_n\leq\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,$n\geq2$.

Testul 56(Examenul de bacalaureat naţional 2017, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=4−i.Calculaţi $z\cdot\bar{z} - z - \bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că axa Ox este tangentă graficului funcţiei f:ℝ⟶ℝ,
$f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 - m + 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\log_x 5 + \log_5(5x) = 5$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 11.
5.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii BC şi punctul N mijlocul medianei AM.Demonstraţi că $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
6.Arătaţi că,dacă $(\sin x + 3\cos y)^2 + (\cos x - 3\sin y)^2 = 10$ şi $x,y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & 2 \\ x^2+x & y^2+y & 2 \end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\Delta(0,2) = -2$.
b)Arătaţi că $\Delta(x,y) = (x-1)(y-1)(y-x)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Demonstraţi că numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2,pentru orice numere întregi m şi n.
2.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi A(0)+A(2).
b)Arătaţi că $A(a)A(b) = A(2ab - a - b + 1)$,pentru orice numere reale a şi b.
c)Arătaţi că $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot \ldots \cdot A\left(\frac{2017}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.
a)Arătaţi că $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)\right)^{2n^3}$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - x + a, x \le 0 \\ \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, x > 0 \end{cases}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul x=0.
c)Demonstraţi că,dacă $a \in (-6,-3)$,atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin două soluţii reale distincte în intervalul $(-3,-1)$.

Testul 57 (Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2016$ şi raţia r=2.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să conţină cifra 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{4}{5}$, arătaţi că $\sin 2x=\frac{24}{25}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+ay+z=1\\ ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ şi $a\neq 1$.
c)Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.
a)Arătaţi că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstraţi că $f(x\circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori a}} = 3^{2015} - 1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(1,+\infty)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \cdots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \sqrt{x}f(x)\,dx = \frac{5}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx = 4$.
c)Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

Testul 58 (Examen de bacalaureat naţional 2016, sesiunea I subiect de rezervă)

Subiectul I

1. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 24,1020 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.
4. Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{25}\}$,acesta să fie număr raţional.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$,$B(-2,-1)$ şi $C(2,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ şi $BC=2\sqrt{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.

b) Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq-1$ şi $a\neq\frac{1}{3}$.

c) Determinaţi numerele reale a,pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

a) Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$,pentru orice numere reale x şi y.

b) Determinaţi numerele reale x,pentru care $x*x=1$.

c) Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$,atunci produsul numerelor m,n şi p este divizibil cu 2.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+\ln x+1$.

a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx$.

a) Arătaţi că $I_0=1+3\ln\frac{3}{4}$.

b) Demonstraţi că $I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural n.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{4}$.

Testul 59(Examen de bacalaureat naţional2016, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
2.Caculaţi produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-6x+6)=\log_3 1$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 5,7,8 şi 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(1,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real a,$a\neq-1$,ştiind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$,unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m,ştiind că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=3,descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c) Demonstraţi că,pentru orice număr real a,$a\in(-1,1)$, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x-1)$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx=0$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 are aria egală cu e.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{1}(f(x)+e^x)\,dx=0$.

Testul 60 (Examen de bacalaureat naţional2016, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 1$ şi $a_2 = 4$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(1,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x-2} = 3^{2-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 1.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=10,AC=10 şi BC=12,Arătaţi că sinB= $\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq -1$ şi $m\neq 2$.
c)Pentru m=2,determinaţi soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=27$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 8\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia f:$(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$.
a)Arătaţi că $\int_5^{10}(x-4)f(x)\,dx = \ln 2$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[5,6]\to\mathbb{R}$,$g(x) = xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Testul 61 (Examen de bacalaureat naţional2016, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele $7,3x$ şi x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$,$B(1,0)$ şi $C(1,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ şi $BC=\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(10))=1024$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A(x^2+2)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstraţi că $f(2\sqrt{3})<f(3\sqrt{2})$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{2}{3}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 62 (Examenul de bacalaureat naţional 2016, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$,unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+1$,are valoarea minimă egală cu -3.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_x 3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a), B(0,-3)$ şi $C(1,1)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că AB+BC=AC.
6.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $1*2*3*...*2016$.
c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că $a<b<c$ şi $a*b*c=66$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\right)^n$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
a)Calculaţi $\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=1-\frac{2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

Testul 63 (Examenul de bacalaureat naţional 2016, simulare clasa a 11 − a)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0{,}0625} = \frac{5}{4}$.

2.Determinaţi numărul real m,pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2 - (3m-4)x + m - 3 = 0$ verifică relaţia $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 2^x + 4^x - 8^x = 0$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{0,1,2,\dots,9\}$,acesta să fie soluţie a ecuaţiei $f(n) = 0$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(n) = n^3 + 3n - 4$.

5.Se consideră triunghiul ABC cu AB=AC=$6\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

6.Arătaţi că $\sin(a+b) = 1$,ştiind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$a\neq b$ şi sina+cosa=sinb+cosb.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & 3 & y \\ x^2 & 2 & y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.

a)Calculaţi $\Delta(-1,0)$.

b)Demonstraţi că $\Delta(x,y) = (x-y)(xy-3x-3y+2)$,pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numerele întregi distincte x şi y, ştiind că $\frac{1}{y-x}\Delta(x,y) = 8$.

2.Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde n este număr natural.

a)Calculaţi $A(1) - A(0)$.

b)Determinaţi inversa matricei $A(1)$.

c)Demonstraţi că,dacă $A(n)\cdot A(n) = A(p)$,atunci n=0 şi p=1.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln\frac{2x+1}{x}$ şi şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = f(n)$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c)Demonstraţi că $\ln 2 < x_n \leq \ln 3$, pentru orice număr natural n, n≥1.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}, & x<1 \\ \sqrt{x^2+4x-4}+a, & x\geq 1 \end{cases}$,unde a este număr real.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b)Determinaţi numărul real a, pentru care funcţia f este continuă în punctul x=1.

c)Pentru a=2,calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{\ln(f(x)-2)}{x-1}$.

Testul 64(Examen de bacalaureat naţional2015, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 5$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,5)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{4-x} = 2^{2x+2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 şi BC=13.Arătaţi că sinC= $\frac{5}{13}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=1,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,x$\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=lnx.
a)Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$.
b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx = \frac{1}{2015}$.

Testul 65(Examen de bacalaureat naţional2015, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.
2.Calculaţi produsul f(1)f(2)f(3)f(4),unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-4x+4)=0$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 2,3 şi 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,2) şi B(2,3).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Arătaţi că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(0)\big)=1$.
b)Arătaţi că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+1)B(x)=B(x^2+x+1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 3=3$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.
c)Calculaţi $1\circ2\circ3\circ\ldots\circ2015$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-3x$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=xe^x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$,pentru orice număr natural n,$n\geq2$.

Testul 66(Examen de bacalaureat naţional2015, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 1 - 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(1)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 3x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 64 = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x+1 şi punctul $A(2,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=0.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x) + B(x)\cdot A = 3B(x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x) = B(x^2 + x - 2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + 2X + m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=−1,demonstraţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - 2x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + 2x)\,dx = e - 1$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = e - 3$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2 - 19)$.

Testul 67 (Examen de bacalaureat naţional2015, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=1+i.Calculaţi $(z-1)^2$.
2.Arătaţi că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$,ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+3=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=3x+4 şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că AB=12 şi C= $\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(a))$.
b)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$,unde m este număr real.
a)Pentru m=2,arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că polinomul f este divizibil cu X+1.
c)Arătaţi că,pentru orice număr real strict pozitiv m,polinomul f are două rădăcini de module egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.
a)Calculaţi $\int_0^2 f^2(x)\,dx$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.

Testul 68(Examenul de bacalaureat naţional 2015, simulare clasa a 12 − a)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7},aceasta să aibă un singur element număr par.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ şi $N(4,1)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
6.Arătaţi că $(\sin x+\sin(\pi-x))^2+(\cos x+\cos(2\pi-x))^2=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.
c)Arătaţi că $\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))\geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.
2.Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere întregi x şi y.
b)Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
c)Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_8$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln(x+1)$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in(-1,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.
c)Demonstraţi că $\ln(x+1)\leq x$,pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{8}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

Testul 69 (Examenul de bacalaureat naţional 2015, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 5,2x+3,2x+7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Arătaţi că, pentru orice număr real m,graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+(m-1)x-m$ intersectează axa Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}=2x-1$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea {1,2,3,4,5},acesta să verifice relaţia $5^{n-1}>(n+1)!$.

5.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că,în reperul cartezian xOy,punctul de intersecţie a dreptelor $x+(2a+1)y-4=0$ şi $3x+by-8=0$ este $M(a,-2)$.

6.Arătaţi că $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=tgx$,pentru orice număr real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & \frac{1}{x}\\ 1 & y & \frac{1}{y}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale nenule.

a)Arătaţi că $D\left(2,\frac{1}{2}\right)=0$.

b)Arătaţi că $D(x,y)=-\frac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$,pentru orice numere reale nenule x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(\log_2 x,2)=0$.

2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ a & 1 & 2\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $2A(1)-A(-1)=A(3)$.

b)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $A(a)+bI_3=2(A(1)-I_3)(A(1)-I_3)$

c)Arătaţi că matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ şi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$,

$a_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$este crescător.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases}2x+a+1, x\leq 1\\ x^2+a^2x, x>1\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Determinaţi numerele reale a pentru care funcţia f este continuă în x=1.

b)Pentru a=2,calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$.

c)Pentru a=-1,arătaţi că ecuaţia $f(x)+2^x=0$are cel puţin o soluţie în intervalul $[-1,0]$.

Testul 70(Examen de bacalaureat naţional2014, sesiunea II subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=1+i.Calculaţi z^2.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-4x+6$ nu intersectează axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie impar.
5.În triunghiul ABC punctele M,N şi P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi,respectiv,AC.Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.
6.Ştiind că tga=$\sqrt{3}$ şi a$\in\mathbb{R}$,arătaţi că $\frac{sina-cosa}{cosa+sina}=2-\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-1$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m))=0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=3x+3y−xy−6.
a)Calculaţi 1∗3.
b)Arătaţi că x∗y=3−(x − 3)(y − 3) pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2014\text{ ori}}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+5}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$,x$\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale lui f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{e^2+1}{4}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Testul 71 (Examen de bacalaureat naţional2014, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x-5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-x}=3^{2x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,2 şi 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=AC=3 şi $BC=3\sqrt{2}$.Determinaţi cosC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(2)=2(a-3)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.
c)Pentru a=3,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x)=0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{xe^x}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puţin o soluţie în intervalul (1,2).
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.
a)Arătaţi că $I_1=1-\ln 2$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 72 (Examen de bacalaureat național 2014, sesiunea I subiect de rezervă)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 2,4 şi x+5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ şi $B(1,2)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.
6.Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculaţi $\sin 2x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că 1+i este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru a=3,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$,$x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=4$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.
a)Arătaţi că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.
b)Arătaţi că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Testul 73 (Examen de bacalaureat național 2014, sesiunea I)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 6$ şi $a_2 = 12$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 2x + 4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conţină cifra 1.
5.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AB=2.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
6.Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că A= $\frac{\pi}{2}$ şi AC=4.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 8$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Determinaţi matricea X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ştiind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3 - 2X^2 + 3X + m$,unde m este număr real.
a)Calculaţi f(1).
b)Arătaţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) \leq \frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + x + 1$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{11}{6}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}dx = \ln 3$.

Testul 74(Examen de bacalaureat naţional2014, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4}=5^{4x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5 şi 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ şi $C(4,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
6.Arătaţi că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
c)Determinaţi numerele naturale p şi q ştiind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-4.
c)Arătaţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=3x+e^x$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Testul 75 (Examen de bacalaureat naţional2014, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x-12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-4)=\log_3(6x-12)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 100.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
6.Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC,ştiind că BC=8,$A=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{7\pi}{12}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -x\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$,pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$,unde m este un număr real.
a)Calculaţi $f(-1)$.
b)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$,unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Subiectul III

1. Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_1.
b)Arătaţi că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 76(Examenul de bacalaureat naţional 2014, simulare clasa a $12-a$)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ şi $i^2=-1$.

2.Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x+8$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.

4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu conţină cifra 6.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2), B(2,3)$ şi $C(0,-2)$.Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin C la AB.

6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$,pentru orice număr real a.

b)Calculaţi inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c)Determinaţi perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy-3x-3y+4$.Legea „$*$”este asociativă şi are element neutru.

a)Arătaţi că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.

b)Calculaţi $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}$.

c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „$*$”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcţiei f.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

a)Calculaţi I_1.

b)Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

Testul 77 (Examenul de bacalaureat naţional 2014, simulare clasa a $11-a$)

Subiectul I

1.Calculaţi $z+\bar{z}$,ştiind că $z=3+4i$ şi $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.

2.Determinaţi numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-(m^2-1)x+3$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-1)=2\log_2 x$.

4.Determinaţi câte numere naturale $\overline{abc}$, cu a,b şi c nenule,au suma cifrelor egală cu 5.

5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul D astfel încât $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.Determinaţi numărul real p pentru care $\overrightarrow{AD}=p\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că AC=6 şi cosB=$\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră determinat $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2+1 & y^2+1 & 5 \end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(1,-1)$.

b)Arătaţi că $D(x,y)=(x-2)(y-2)(y-x)$,pentru orice numerele reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $D(2^x,4^x)=0$.

2.Se cosideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr reale.

a)Calculaţi $A(1)-A(2)$.

b)Demonstraţi că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n,$n\neq 1$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

Subiectul III

1.Se cosideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$,$a_n=\frac{n+1}{n^2}$.

a)Arătaţi că $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.

b)Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}(na_n)^{\sqrt{n^2+2}}$

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2x+a, x<2 \\ 0, x=2 \\ \frac{x-b}{2x+1}, x>2 \end{cases}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

c)Pentru b=2,rezolvaţi în mulţimea $(2,+\infty)$ inecuaţia $(7\cdot f(x)-1)(2^x-16)\leq 0$.

Testul 78(Examen de bacalaureat naţional2013, sesiunea II)

Subiectul I

1.Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2} = 9^{1-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie pătrat perfect.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
6.Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=4,BC=5 şi $\sin C = \frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
c)Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y = xy - 4x - 4y + 20$.
a)Calculaţi $3\circ 4$.
b)Arătaţi că $x\circ y = (x-4)(y-4) + 4$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ \ldots\circ x}_{\text{x de 2013 ori}} = 5$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstraţi că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 79(Examen de bacalaureat naţional2013, sesiunea I)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul a=$3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=4x-1$.Calculaţi $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.
4.După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 2200 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,ştiind că $\frac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $D(2,3)=2$.
b)Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n,n^2)$, unde n este un număr natural nenul.Determinaţi numărul natural n,n≥3,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.
2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(4)=8$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.
c)Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$,arătaţi că f se divide cu X−3.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.
a) Calculaţi $f'(x)$,x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq 1$,pentru orice x∈$\mathbb{R}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_1.
b)Arătaţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătaţi că $1\leq(n+1)I_n\leq e$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 80(Examen de bacalaureat național2013, sesiunea specială)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1,2x+2 şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,ştiind că a,b$\in\{2,3,4,5\}$ şi a≠b.
5.În dreptunghiul ABCD,cu AB=8 şi BC=6,se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$,unde $\{O\}=AC\cap BD$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.
6.Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=6,BC=10 şi sinC=$\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(2)-f(-2)$.
b)Determinaţi restul împărţirii lui f la X+2,ştiind că restul împărţirii polinomului f la X−2 este egal cu 9.
c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$,unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-1,1)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,x$\in(-1,1)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1=e^2$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

Testul 81 (Examen de bacalaureat naţional2013, model oficial MEN)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2-x^2)=\log_2 x$.

4. Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulţimile mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7},aceasta să aibă cel mult un element.

5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$.Determinaţi lungimea segmentului [AC].

6.Se consideră numerele reale a şi b astfel încât a+b=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că 2cosb=cosa+$\sqrt{3}$sina.

Subiectul II

1.Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi $D(-1,2)$.

b)Determinaţi numărul q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

c)Arătaţi că există cel puţin o pereche (x,y)de numere reale,cu $x\neq y$,pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2.Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f=X^3+X-m,unde m este un număr real.

a)Determinaţi m astfel încât restul împărţirii polinomului f(X) la X−1 să fie egal cu 8.

b)Arătaţi că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg,pentru orice m$\in\mathbb{R}$.

c)În cazul m=2 determinaţi patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul g=aX^3+bX^2+cX+d să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x-x$.

a)Calculaţi $f'(0)$.

b)Arătaţi că,pentru fiecare număr natural n≥2,ecuaţia $f(x)=n$ are exact o soluţie în intervalul $(0,+\infty)$.

c)Fie x_n unica soluţie din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuaţiei $f(x)=n$, unde n este număr natural, n≥2.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\cos x$ şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=$\frac{\pi}{2}$.

a)Calculaţi aria suprafeţei S.

b)Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei Ox.

c)Demonstraţi că $\int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}f^n(x)\,dx$,pentru orice numere naturale n,k≥1.

Teste propuse

Testul 1(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1 = 2$ şi $b_2 = 8$.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$ şi g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax - 2$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(2) = 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8(8 - x) + \log_8 x = \log_8(6 + x)$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre disticte, se pot forma cu cifre din mulţimea A={2,3,4,6,8}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1), B(2,2)$ şi $C(6,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AC.
6.Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} - 2\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -2a \\ 2 & -1 & -a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + ay - 2az = -1 \\ x - ay = a \\ 2x - y - az = a \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = -4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Arătaţi că, pentru orice număr real $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0, y_0, z_0) şi $4x_0z_0 = 1$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + X^2 - aX + 8$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 8$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 2.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x^2 - 8x - 5 - (2x - 5)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4(x - 2)(1 - e^{2x})$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 8$.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) + n = 0$ are soluţie unică, pentru orice număr natural $n\geq 6$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.
a)Arătaţi că $\int_3^5 f(x)\sqrt{x^2 - 6x + 10}dx = 2$.
b)Arătaţi că $\int_2^4 f(x)\,dx = 0$.
c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei g:$[3,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1 - \frac{\pi}{m}\right)$.

Testul 2(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2i(3+i)+3(1-2i)=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=2x+5.Determinaţi numărul real a pentru care $a+f(a+1)+f(a-1)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(8x-12)=\log_2 x$.
4.Se consideră mulţimea A={4,8,12, … ,60}.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$,$B(0,a)$ şi $C(b,1)$ unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi C=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $6\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1&0&0\\2&-1&2\\1&-a&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(3))=0$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(a)=(2a-1)A(a)$, pentru orice număr real a.
c)Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural.Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=2n^2A(n)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4+X^3+aX^2+bX-4$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Pentru a=4 şi b=0, arătaţi că $f(-1)=0$.
b)Pentru a=b=1, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X+1$.
c)Determinaţi perechile (a,b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{6x^2+1}-5\ln(6x^2+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{12x(\sqrt{6x^2+1}-5)}{6x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\frac{1}{x+3}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+3}\right)dx=15$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+13$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţie g:$(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(e^x)-4e^{3x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $\frac{1}{3}\ln\frac{4e}{e+3}$.

Testul 3 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 4$ şi $a_3 = 20$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - 2ax - 1$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(0) = 2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x^2 - 5x + 4) = 2\log_2 x$.

4.Se consideră mulţimea A={2,4,7,8}.Determinaţi câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ şi $B(3,1)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi $tgB = \frac{1}{3}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\sqrt{10}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & 2a & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 4$.

b)Arătaţi că $A(a) \cdot A(b) = A(a + b - 3ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $A(1) \cdot A(a) + A(5) = 2A(4)$.

2.Se consideră polinomul $f=mX^4 - mX^2 - X - 1$, unde m este număr real nenul.

a)Arătaţi că $f(-1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

b)Determinaţi numărul real nenul m pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X+2$ este egal cu 13.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+3x+1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{xe^x+2}{(x+1)^2}$, $x\epsilon(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=4+\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{\ln^2 x}{x}\right) dx = 8+\ln 3$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) - 4 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)-4}{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

Testul 4(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2x+1, 8 şi x sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=2x+5 şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, g(x)=x+2.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=-a$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_5 x=\log_5(5x+6)$.

4.Se consideră mulţimea A={1,3,5,6,7}.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte, Cu cifra zecilor impară, se pot forma cu elemente din mulţimea A.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(5,0) şi B(4,3).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, cu A=$\frac{\pi}{2}$, B=$\frac{\pi}{3}$ şi AE=2, unde E este punctul în care bisectoarea unghiului B intersectează latura AB.Arătaţi că distanţa de la punctul C la dreapta BE este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea A(a)=$\begin{pmatrix}a & 0 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1-a\end{pmatrix}$ şi şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax-2z=4\\ x+y-2z=5\\ 2x+y+(1-a)z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=-2$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.

c)Pentru a=2, arătaţi că $x_0z_0+y_0\geq 0$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii, cu x_0, y_0şi z_0 numere reale.

2. Pe mulţimea M=$(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie x∗y=$\frac{xy-1}{(1-x)(1-y)}$.

a)Arătaţi că 5∗3=$\frac{7}{4}$.

b)Determinaţi xϵM pentru care x∗x=3.

c)Demonstraţi că $x*(x*x)>2$, pentru orice xϵM.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=xlnx−x+$\ln^2 x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-2)\ln x}{x}$, $x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

c)Determinaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are o soluţie unică.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3+\sqrt{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3\big(f(x)-\sqrt{x^2+9}\big)dx=0$.

b)Arătaţi că $\int_0^4\frac{x}{f(x)-x^2+3}dx=1$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x F(t)\,dt=0$, unde F:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Testul 5(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=2-i$.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}=9$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+4x+m$, unde m este un număr real.Determinaţi numărul real m pentru care graficele funcţiilor f şi g au exact un punct comun.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1+\log_x 3)\log_3 x=3$.

4.Se consideră A, mulţimea numerelor naturale de două cifre.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil 7.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(5,0) şi B(2,4). Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta OB.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=12 şi AC=9. Punctul M este mijlocul segmentului BC. Arătaţi că distanţa de la punctul B la dreapta AM este egală cu 7,2.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+az=-4\\ ax+y+z=2a\\ 3x+2y+z=8\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-4$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.

c)Considerăm (x_1,y_1,z_1) soluţia sistemului de ecuaţii liniare pentru a=1.Pentru a=2, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuaţii liniare pentru care $x_0y_0=y_1$.

2.Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)+m}$, unde $m\in[-9,+\infty)$

a)Pentru m=4, arătaţi că 0∗1=4.

b)Pentru m=16, determinaţi numerele reale x pentru care x∗(3x)=8.

c)Determinaţi $m\in[-9,+\infty)$ pentru care legea de compoziţie „∗” este asociativă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{x-3}}{\sqrt{x-2}}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^{x-3}(2x-5)}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$, $x\in(2,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x-3}}=\sqrt{e}$.

c)Determinaţi mulţimea numerelor reale m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\left(4x+\frac{12}{x^2}\right)\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_3^4\frac{f(x)}{\ln x}dx=15$.

b)Arătaţi că $\int_1^e x(f(x)-4x\ln x)\,dx=6$.

c)Determinaţi primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, pentru care axa Ox este tangentă la graficul funcţiei F.

Testul 6(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2(\log_7 14 - \log_7 2) + \log_7 49 = 4$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(3+m) = 3-m$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^x \cdot 3^{1-x} = 3^7$.

4.Se consideră mulţimea $A=\{2,3,4,5,6,7\}$.Determinaţi câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulţimea A, sunt divizibile cu 5.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$,$B(0,2)$ şi $C(6,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC.

6.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} - tgx\cdot\left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2$,unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + y - 2z = 4 \\ 2x + 4y + z = 4 \\ ay + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -3$.

b)Arătaţi că sistemul de ecuaţii are soluţie unică, pentru orice număr real a.

c)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuaţii verifică inegalitatea $y_0 \geq 1$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5-\frac{1}{2}(x-5)(y-5)$.

a)Arătaţi că $7*8=2$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $(x+1)*(x+5) = 7$.

c)Determinaţi tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu $m<n<p$, pentru care $m*n*p=4$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x-7)\sqrt{x^2+3}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2x^2-7x+3}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7x}{f(x)}\right)^x = 1$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 2 + \ln^2 x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln^2 x)dx = 32$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-2}{x}dx = \frac{1}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^{e^2} \frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3}dx$. Demonstraţi că $I_{n+2} + 2I_n \leq 2^{n-1}(e^4 - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 7(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(5-6i)+6i(3+2i)=3$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(g\circ f)(1)=1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(5x-x^2)=\log_2(3+x)$.
4.Se consideră mulţimea A={3,5,6,7,9}.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre disticte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ şi $B(4,6)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=4 şi raza cercului circumscris egală cu 4. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2a\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+ay+2az=a+1\\ x+ay=0\\ x+y-az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=-4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Determinaţi numărul real a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0,y_0,z_0) şi $y_0=a$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4-4X^3+X^2-3X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=5, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=0$, unde x_1,x_2,x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=0, determinaţi numerele reale a pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul X−a este egal cu a.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+11}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x^2-9)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(7x)-f(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,1]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-2+e^{2x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3(f(x)-e^{2x})dx=21$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 4x(f(x)-3x^2+2)\,dx=e^2+1$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{f(t)+1}{t+1}dt=1$.

Testul 8(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ şi $z_2 = 3 + i$. Arătaţi că $3z_1 + iz_2 = 2$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=x+4.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 2^5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,0),B(0,5),C(3,6) şi D(a, b), unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele AC şi BD au acelaşi mijloc.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=2 şi tgC=3.Arătaţi că $BC=2\sqrt{10}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & -9x \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & 2+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 8$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = 2A(x + y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$.
2.Se consideră polinomul $f=aX^3 - 3X^2 - aX + 6$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = 3$, pentru orice număr real nenul a.
b)Pentru a=1, determinaţi câtul şi restul împărţiriipolinomului f la polinomul $g=x^2 - 3X + 1$.
c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x-\ln\frac{x+2}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x\epsilon(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia f:$(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$.
a)Arătaţi că $\int_2^5 f(x)(x-1)^3 dx = 39$.
b)Arătaţi că $\int_2^3 \sqrt{f(x)(x-1)}\, dx = 1 + \ln 2$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2 este egală cu $\frac{e^2+e}{2(e-1)^2(e+1)^2}$.

Testul 9(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 20$ şi $b_3 = 80$.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 4$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \cdot 3^4 = 3^{x+3}$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n}$ să fie număr natural impar.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$,$B(2,6)$ şi $C(a, 4)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele AC şi OB sunt paralele.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 32 şi $BC=AC\sqrt{2}$. Arătaţi că $AB=8$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(x) = \begin{pmatrix} 2x & -x & 0 \\ 3x & -2x & 0 \\ -3 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(M(0)\big) = 0$.

b)Arătaţi că $M(x) \cdot M(y) - xyI_3 = (x + y + 1)M(0)$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(1) \cdot M(x) - M(2) \cdot M\left(\frac{x}{2}\right) = 2M(0)$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=6(x-1)(y-1)+1$.

a)Arătaţi că $1*4=1$.

b)Arătaţi că $e=\frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{36}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-3+\ln x}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{4-\ln x}{x^2}$, $x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = 4$.

c)Determinaţi cel mai mare număr întreg m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are cel puţin o soluţie.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+5}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^x dx = 12$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 4 - \frac{5}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} + 5I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr nenul n.

Testul 10(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + i$ şi $z_2 = 2 - 5i$. Arătaţi că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 - 4x + 6$ .Determinaţi numerele reale a pentru care punctul $A(a, 6)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(9x - 6) = \log_5(x + 2) + \frac{1}{\log_x 5}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 7.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(4,2)$şi $C(a, 5)$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OB şi AC sunt paralele.
6.Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=10$, $BC=6$ şi $\cos B=\frac{4}{5}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det A = 1$.
b)Arătaţi că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x.
c)Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătaţi că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x şi y.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy^2 + x^2y + x + y$.
a)Arătaţi că $3*1=16$.
b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{2}{x}*x=9x$.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $n*m=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^4}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1-4\ln x}{x^5}$, $x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi mulţimea numerelor reale m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are cel puţin o soluţie.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= e^x + x^2 - 2$.
a)Arătaţi că $\int_1^4 (f(x) - e^x)dx = 15$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x)-x^2} dx = \ln \frac{e^2-2}{e-2}$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)+2} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$.

Testul 11(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_3 = 24$ şi $b_4 = 48$.

2.Determinaţi mulţimea numerelor reale m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 56$.

4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, $n^2 + 1$ să fie număr natural de trei cifre.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1), B(4,7) şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. Determinaţi coordonatele punctului D pentru care $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$.

6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu AB=10, înălţimea AD=6 şi distanţa de la punctul D la dreapta AC egală cu $3\sqrt{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 42.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -a & -2 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax + 3y + z = 1 \\ x + y - 3z = 1 \\ -ax - 2y + az = -1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) ale sistemului de ecuaţii pentru care $y_1 = x_2$ şi $z_1 = y_2$.

2.Pe mulţimea M=$(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y = \frac{x+y}{2} - 2 + \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

a)Arătaţi că 4∗1=3.

b)Determinaţi x∈M pentru care x∗x=1.

c)Demonstraţi că mulţimea $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulţimii M în raport cu legea de compoziţie „∗”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-3}{x+3} + \ln\frac{x+3}{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{9(x-1)}{x(x+3)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Determinaţi numerele naturale n pentru care ecuaţia $f(x) = n$ **nu** are soluţii.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{7x^2+1}$.

a)Arătaţi că $\int_{-1}^{2} (7x^2 + 1)f(x)dx = 3$.

b)Arătaţi că $\int_0^3 \sqrt{f(x)}\, dx = 1$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(\sqrt{e^x})} dx$.Arătaţi că $(n + 1)I_n - I_{n+1} = \frac{7(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 12(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2 = 12$ şi $a_3 = 16$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.Arătaţi că $(f \circ f)(4) = 10$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,5,7,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,2)$ .Determinaţi coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=12 şi AB=$\frac{BC}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(B(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) \cdot B(y) - B(x + y) = xyA$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x + 1) - B(2x) \cdot B(1) = xA$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + X + 3 - a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = 5$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=3, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 5$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2 - 6)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 6)$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^4 + 8x^2 + 1$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x) - 8x^2)dx = \frac{12}{5}$.
b)Arătaţi că $\int_1^8 \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 8}{2}$.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x (f(2t) - f(t))\,dt\right)=8$.

Testul 13(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2\lg 100+\lg 5+\lg 2=5$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(4a)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^2\cdot 5^{3x}=5^x$.
4.Determinaţi câte submulţimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulţimea $A=\{0,1,2,3,4,6,8\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(0,3)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 18 şi $C=\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că AC=6 .

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 2x \\ 0 & x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(1))=7$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $M(2)\cdot M(x)=M(x-1)$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care $2\det(M(n))\le\det(M(2n))$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-aX+3a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(3)=0$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=4, arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=11$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-6)+x^2-4x+6$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2(x-2)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^x}=8$.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{3x^2+2}$.
a)Arătaţi că $\int_2^3 f(x)(3x^2+2)dx=10$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{2}{3}\ln 7$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $\frac{3e^2+7}{4}$.

Testul 14(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 3$ şi $a_2 = 9$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(1 + m) = 1 - m$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2 - 4x + 6) = \lg 6$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n + 2}$ să fie natural.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1),B(0,3) şi C(a, 5), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OA şi BC sunt paralele.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghiul în A, cu AB=9 şi $C=\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că $AC=3\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \\ x & x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 3$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$.

c)Arătaţi că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci şi matricea $A(-x)$ este inversabilă.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = \frac{2x+2y-1}{4} + xy$.

a)Arătaţi că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.

b)Arătaţi că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{(x-2)^2}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $x \in (2, +\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact două soluţii, pentru orice $m \in (27, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 + x\ln x$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 (f(x) - x\ln x)dx = 8$.

b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x) - x - 2)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(f(x)-x\ln x-1)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Testul 15(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2(1+2i)-i(4-i)=1$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax+a$, unde a este număr real .Determinaţi numărul real apentru care punctul $A(3,-3)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2+9)=\log_3(9-3x)$.
4.Determinaţi câte numere de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulţimii A={2,3,4,5,6}.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(0,4)$.Determinaţi coordonatele punctului C, ştiind că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.
6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu AC=5, B=$\frac{\pi}{4}$ şi înălţimea AD=4. Arătaţi că BC=7.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}0&a&1\\0&-1&0\\1&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(b)=A(b)-A(a)+I_3$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(0)\cdot X\cdot A(1)=I_3$.
2. Pe mulţimea M=$[2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=m(x-2)(y-2)+2$, unde $m\in(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $2\circ 4=2$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
b)Pentru m=2, arătaţi că e=$\frac{5}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Se consideră funcţia f:M→M, $f(x)=2+\sqrt{x-2}$. Pentru m=1, arătaţi că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice x,y∈M.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-2)^2+(x-1)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2+4)^2}$.
a)Arătaţi că $\int_1^3 f(x)(x^2+4)^2dx=4$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{40}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătaţi că $16I_n-I_{n+4}=\frac{3n+14}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 16(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(4+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt[3]{10}=1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+ax-2$, unde a este număr real.Determinaţi numerele reale a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+2}\cdot 8^x=64$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+81}$ să fie natural.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,1), B(6,4) şi C(2,4). Determinaţi coordonatele punctului D, ştiind că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
6.Se consideră expresia $E(x)=tgx-4cosx\cdot\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A(x)=\begin{pmatrix}-1&0&x\\0&0&-1\\x&-1&1\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\leq 0$, pentru orice număr real x.
c)Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei A(0).
2.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x^2+y^2+2x+2y}{x+y+2}$.
a)Arătaţi că $1*3=3$.
b)Arătaţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=4$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x+8)\sqrt{x^2+6}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2+6}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică, pentru orice număr întreg m.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 e^x f(x)dx=16$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3e-4}{e}$.
c)Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{f(x^n)}dx$. Demonstraţi că $\frac{\ln\frac{3}{2}}{n}\leq I_n\leq\frac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Testul 17(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2$ şi $a_5 = 22$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m, -1)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-1} = 4 \cdot 2^{x+1}$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5,6}.Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii A, care au cel mult două elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(4,4)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=6 şi înălţimea AD=3.Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ x & x & -x \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4 + 2X^3 - 8X^2 - 3mX - m$, unde m este număr real..
a)Pentru m=−2, arătaţi că $f(1) = 3$.
b)Pentru m=0, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul raţional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{6e^x}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{6e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact trei soluţii, pentru orice $m\in(2e, 6)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x + 1)+6x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1))dx = 9$.
b)Arătaţi că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că aria suprefeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu aπ+ln2.

Testul 18(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=3-i$.Arătaţi că $z(z+2i)=10$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$.Arătaţi că $f(2x)-2f(x)=-1$,pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3-3x+3}=x$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, numărul $n+6$ să fie multiplu de 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$ şi $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 9.Arătaţi că $BC=6$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 1 & 2\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+az=4\\ 2x+y+2z=2\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-8$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c)Pentru $a=-2$, arătaţi că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+(3^x-3)(3^y-3)$.
a)Arătaţi că $2\circ 3=150$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Demostraţi că $x\circ(-x)\leq 4$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+10\ln\frac{x+4}{x-1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+3x-54}{(x-1)(x+4)}$, $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $\ln\frac{x+4}{2(x-1)}\geq\frac{3}{5}-\frac{x}{10}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+4x)e^{-x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x dx=27$.
b)Arătaţi că $\int_0^1\frac{f(x)}{x+4}dx=\frac{e-2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=2$.

Testul 19(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(3-i)^2+i(6+i)=7$, unde $i^2=-1$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}+3\cdot 5^x=40$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 8.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$,$B(-2,3)$ şi $C(a,2a)$, unde a este număr real nenul.Arătaţi că dreptele AB şi OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.

6.Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{x}{3}$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & -1 & 2a\\ 1 & 1 & 1-a\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax-y+2az=0\\ x+y+(1-a)z=0,\\ x-2y+az=0\end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.

b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.

c)Pentru $a=-1$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-9(x+y)^2+1$.

a)Arătaţi că $0*1=-8$.

b)Arătaţi că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice numărr real x.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{6}-\ln(x^2+x+6)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-11x}{6(x^2+x+6)}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x^3+8}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2(x^3+8)f(x)dx=4$.

b)Arătaţi că $\int_1^4 xf(x)\,dx=2\ln 2$.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

Testul 20(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $(a+bi)(1+i)=6$, unde $i^2=-1$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul.Determinaţi numerele reale m pentru care $f(m+x)=f(m-x)$, pentru orice număr real x.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2-x+2)$.

4.Se consideră mulţimile A={1,2,3,4} şi F={f|f: A $\to$ A}. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element f din mulţimea F, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\geq n$, pentru orice n∈A.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,5) şi B(5,−1).Determinaţi coordonatele punctului C, ştiind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, cu AC=8, măsura unghiului B este 30° şi punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Determinaţi distanţa de la punctul O la latura AC.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}3 & -2 & a\\ 2a+1 & -1 & 1-a\\ a+2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}3x-2y+az=b\\ (2a+1)x-y+(1-a)z=c\\ (a+2)x+y-2z=-1\end{cases}$$, unde a,b şi c sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-5$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea A(a) este inversabilă.

c)Determinaţi numerele reale b şi c pentru care sistemul de ecuaţii este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+6X-6$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $f(-1)=-11$, pentru orice număr real a.

b)Determinaţi numărul real a pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu 8X−3.

c)Arătaţi că, pentru orice număr real a, polinomul f nu are toate rădăcinile numere întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-(x^4-1)\operatorname{arctg}x-x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, x∈ℝ.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f care este paralelă cu axa Ox.

c)Demonstraţi că $f(\operatorname{tg}x)\leq f(x)\leq \operatorname{tg}(f(x))$, pentru orice x∈[0,1].

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+x^2}{e^{-x}+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3(e^{-x}+1)f(x)dx=8+e^3$.

b)Arătaţi că $\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{e^x+x^2}dx=m$, pentru orice m∈(0,+∞).

c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

Testul 21(Examenul de bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ şi $z_2 = 1 + i$.Arătaţi că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=5x + 1$ şi $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care graficele funcţiilor f şi g au exact un punct comun.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2 + 10) = 2\lg(x\sqrt{11})$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 8.
5.În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctele D şi E aparţin segmentului AC, astfel încât AD=CE.Arătaţi că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$.
6.Determinaţi $x\in[0,\pi]$ pentru care $\sqrt{3}\sin 2x=1+\cos 2x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x + ay - z = 4 \\ ax + y + 2z = -2 \end{cases}$,
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -1$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Pentru a=1, determinaţi soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi şi $x_0 > y_0 > z_0$.
2.Pe mulţimea $M=[-1,1]$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}+1}$.
a)Arătaţi că $\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $(-x) * x\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.
c)Determinaţi perechile (a, b) de numere din mulţimea M pentru care $a*b=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-2-\ln(e^x + x^2)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-8, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x+8}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x + 8}dx = 12$.
b)Arătaţi că $\int_{-4}^{1} \frac{f(x)}{x^2+1} dx = 2$.
c)Demonstraţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{3\pi}{4}$.

Testul 22(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2i(4-i)-8i=2$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(1)=f(-1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x-2}=9^x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3) şi B(−1,1).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2\operatorname{ctg}x\cdot\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-2$.
b)Arătaţi că $A(x-1)-A(x)\cdot A(1)=-2I_3$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care$\cdot A(x)\cdot A(1)\cdot A(1)=3A(1)+2I_3$.
2.Pe mulţimea M=$[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{(x+y)xy}{xy+1}$.
a)Arătaţi că 3∗1=3.
b)Arătaţi că e=1 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu m≤n, pentru care $\frac{1}{n}*\frac{1}{m}=\frac{1}{16}\cdot(n*m)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(3-x)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=n$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+9}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{7}}f(x)\,dx=\frac{37}{3}$.
c)Pentru fiecare număr natural n, n≥2, se consideră numărul $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{f^2(x)}dx$.Determinaţi numărul natural n, n≥2, pentru care $I_{n+2}+9I_n=\frac{3}{n-1}$.

.

Testul 23(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $8-5\sqrt{5}+5\left(\sqrt{5}-1\right)=3$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=4x+m, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\cdot 2^{2x}+4^{x}=6$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x−3 şi punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A aparţine dreptei d.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=8 şi cosA=0.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -x & 1 & 0\\ x^2 & -2x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.
2.Pe mulţimea M=[0, +∞) se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{3x}{y+3}+\frac{3y}{x+3}$.
a)Arătaţi că 1∗0=1.
b)Demonstraţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Determinaţi x∈M, x nenul, pentru care $x*\frac{9}{x}=3x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{x}{e^x-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că, pentru orice m∈(2, 3], ecuaţia $f(x)=m$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-x+\sqrt{x^2+16}$.
a)Arătaţi că $\int_2^6\left(f(x)-\sqrt{x^2+16}\right)dx=0$.
b)Arătaţi că $\int_0^3\frac{x}{f(x)+x-4}dx=1$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 24(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $5(1-2i)+2i(5-i)=7$, unde $i^2=-1$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x^2+7)=2$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare şi distincte.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$,$B(6,1)$ şi $C(2,4)$.Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

6.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât $BC=10$ şi $\sin C=2\sin B$.Arătaţi că lugimea laturii AC este egală cu $2\sqrt{5}$.

.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&x&0\\-x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.

b)Arătaţi că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-5$.

a)Arătaţi că $0*2=3$.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*(x+1)=6$.

c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn-2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-10x+5)\sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(x^2-6x+1)}{2\sqrt{x}}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f .

c) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{10}}=\frac{1}{e}$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+3$.

b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 e^x(f(x)-2x-e^x)\,dx=1$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Testul 25(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $6+3\sqrt{3}$,$\sqrt{3}$ şi $2-\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}=3^x+8$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 4.

5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MA}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele MD şi BC sunt paralele.

6.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=4 şi măsurile unghiurilor A şi B sunt de $60°$, respectiv $30°$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&i&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ şi $A(z)=aI_3+bB$, unde z=a+ib, cu a şi b numere reale şi $i^2=-1$.

a)Arătaţi că $\det B=i$.

b)Demonstraţi că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

2.În mulţimea M=$[1,+\infty)$, se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\log_3(3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12)$.

a)Arătaţi că $x*y=\log_3\left((3^x-3)(3^y-3)+3\right)$, pentru orice x,yϵM.

b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c)Arătaţi că $x*x*x<3x$, pentru orice xϵM.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x-1)e^{-x}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=(-x^3+3x^2-3x+4)e^{-x}$, xϵ$\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x}=e^{-2}$.

c)Demonstraţi că funcţia g :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\frac{f(x)}{e^{-x}}+1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcţia f:$(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

a)Arătaţi că $\int_4^6\frac{f(x)}{\ln(x+1)}dx=10$.

b)Demonstraţi că $F(\sqrt{8})<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\int_1^3 f(x)\,dx=m\ln2-1$.

Testul 26(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 - 2i$ şi $z_2 = 3 + i$.Arătaţi că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 5$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 + 4x - m$, unde m este număr real.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1+2\log_2 \sqrt{x-3} = \log_2 x$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să aibă exact trei multipli în mulţimea A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$,$B(1,3)$ şi $M(4,2)$.Determinaţi coordonatele punctului N, ştiind că patrulaterul ABMN este paralelogram.
6.Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(B + C) + \cos A = 1$.Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & 3 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2y + az = 2 \\ 3x + y + 3z = -1, \\ ax - y + z = -3 \end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a) = A(a) - A(0)$.
c)Demonstraţi că, dacă sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii, atunci $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 \leq 0$, pentru orice soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuaţii, cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale.
2.Pe mulţimea numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{9 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.
a)Arătaţi că $(-1) * 2 = \frac{1}{19}$.
b)Arătaţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „ $*$ ”.
c)Demonstraţi că există cel puţin trei numere complexe distincte şi nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+25}}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x^2-5)(x^2+5)}{x^2\sqrt{x^4+25}}$, $x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x) + f\left(\frac{5}{x}\right) = m$ are exact două soluţii.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 e^x f(x)dx = 15$.
b)Arătaţi că orice primitivă G a funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ este convexă.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx = \frac{a-3\sqrt{3}}{3}$.

Testul 27(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi media aritmetică a numerelor reale a=$2022-\sqrt{3}$ şi b=$2022+\sqrt{3}$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+1$ .Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(\sqrt{x}+5)+\log_3(\sqrt{x}-5)=2$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 32 submulţimi.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(4,0),N(8,4) şi P(6,4).Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care sin2B·cosB=sinB. Arătaţi că B=$\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\log_2 a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a$\epsilon(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că, pentru orice a$\epsilon(0,+\infty)$, matricea A(a) este inversabilă.
c)Demonstraţi că, pentru orice a$\epsilon(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei A(a).
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+m(x + y) + m(m − 1), unde m $\epsilon(0,+\infty)$.
a)Pentru m=1, arătaţi că 2∘2=8.
b)Demonstraţi că, dacă 2∘1=5, atunci 2∘3=11.
c)Determinaţi numărul real x, ştiind că $(mx^3)\circ(-mx^2)=-m$, pentru orice m$\epsilon(0,+\infty)$

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-3-4\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$,x$\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii distincte în intervalul $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2+\frac{2x}{x^4+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^4+1)f(x)dx=\frac{17}{5}$.
b)Se consideră F :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.Ştiind că graficul funcţiei F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinaţi panta acestei asimptote.
c)Se consideră funcţia G :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $G(0)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

Testul 28(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1-i)^2-2(1-i)+2=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-3$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(1,2)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+2)=\log_4 x+\log_4(x+2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5 şi cu 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,1)$,$N(3,4)$ şi $P(3,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul P şi este paralelă cu dreapta MN.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C.Arătaţi că $tgA=\frac{1}{tgB}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&3a\\0&2&0\\-a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=8$.
b)Determinaţi matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ştiind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$.
a)Arătaţi că $2*0=2$.
b)Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=b$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(2x)*(x^2+1)*(-2x)=10$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+x+2}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x^2+x+2)f(x)dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln 2$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 29(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi modulul numărului complex $z=(3+2i)(3-2i)-(9-3i)$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=4x+20$ .Calculaţi $(g\circ f)(3)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-4}=\frac{1}{25}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=6,BC=4 şi măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=16,AC=12 şi BC=20.Arătaţi că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2a-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$\begin{cases} ax+y+2z=2 \\ 2x+y-3z=1 \\ (2a-1)x+2y-z=a \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(4))=-5$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.
c)Pentru a=3, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuaţii pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.
2.Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_2 y}}$.
a)Arătaţi că 9∗2=3.
b)Arătaţi că e=4 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗” .
c)Determinaţi x∈G, ştiind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziţie „∗” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-4)(x^2-9)+3$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2x(2x^2-13)$,x∈ℝ.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x\operatorname{arctg}x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=6$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{a}-2\sqrt{3}$.
c)Demostraţi că $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=0$.

Testul 30(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $N=\log_2 8-2\log_2 3+\log_2 18$ este natural.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+3$.Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=3$ intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-6}=\sqrt{4x-1}$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 10 submulţimi cu două elemente.
5.Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N şi P mijloacele segmentelor AC,AM, respectiv CM. Arătaţi că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.
6.Determinaţi $x\in(0,\pi)$,ştiind că $\sin 2x-2\sin^2 x=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & c & b\\ bc & ab & ac\end{pmatrix}$ unde a,b şi c sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det\left(A(0,2,1)\right)=2$.
b)Demonstraţi că $\det\left(A(a,b,c)\right)=(b-a)(c-a)(b-c)$, pentru orice numere reale a,b şi c.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere naturale, cu $m<p<n$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,p şi n sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.În mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+bX^3+\hat{2}X+a$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.
a)Pentru $a=\hat{2}$ şi $b=\hat{1}$, arătaţi că $f(\hat{2})+f(\hat{0})=\hat{2}$.
b)Determinaţi perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.
c)Arătaţi că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(e^x+3x+3)}{(e^x+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2(x+4)}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+6x+10}\,dx=9$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 (f^2(x)-4)\,dx=4\ln\frac{17}{10}$.
c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\infty$.

Testul 31(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_2 = 3$ şi $b_4 = 6$.Determinaţi b_6.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 + 2x + m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f este situat pe dreapta $y=-3x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$.
4.Determinaţi numărul de numere naturale de patru cifre care au exact trei cifre egale.
5.Segmentele AB şi A′B′ au acelaşi mijloc.Demonstraţi că $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$.
6.Demonstraţi că, în orice triunghi ABC, are loc relaţia $AC+BC+AB=2R(\sin B + \sin C + \sin A)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul II

1.Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ y + z = 1 \end{cases}$ şi matricea

$X(a,b) = \begin{pmatrix} b & b+1 & b+2 \\ a & a+1 & a+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(X(0,1)) = -1$.
b)Demonstraţi că, pentru orice numere reale distincte a şi b, sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Demonstraţi că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţie a sistemului de ecuaţii, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2bx_0 = 3$, pentru orice număr real b.
2.Pe mulţimea $M=(3,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-2)^{\log_4(y-2)} + 2$.
a)Arătaţi că $5*18=11$.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „ $*$ ”.
c)Determinaţi $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x} + x^4 + 4}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Demonstraţi. că tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f, este paralelă cu dreapta de ecuaţie $x-\sqrt{5}y = 0$.
c)Demostraţi că funcţia f are un singur punct de extrem.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right)$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 \left(3f(x) + \frac{1}{x^2+4}\right) dx = \frac{\pi}{4}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă F a funcţiei f este strict crescătoare.
c)Arătaţi că, pentru orice numere reale a şi b, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)\,dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.

Testul 32(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=2-i$.Arătaţi că $z^2-4z+5=0$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(0,3)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3+4x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra sutelor egală cu 3 şi cifra unităţilor egală cu 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$,$B(3,2)$ şi $C(a,4)$, unde a este un număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.
6.Măsurile unghiurilor A,C şi B ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresiei aritmetice.Demonstraţi că măsura unghiului C este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 1+\ln x & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-5(x+y)+a$, unde a este număr real.
a)Pentru $a=15$, arătaţi că $1*2=2$.
b)Pentru $a=30$,arătaţi că $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$".
c)Demonstraţi că, dacă $a\in[30,+\infty)$, atunci mulţimea $H=[5,+\infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-2^x+3^x$.
a)Arătaţi că $f'(0)=\ln 9$.
b)Se consideră tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f. Determinaţi numărul real a pentru care $A\big(a,\ln(9e)\big)$ este este situat pe această tangentă.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\big(f(x)\big)}{x}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+4}-\frac{3}{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(x^2+4)f(x)dx=\frac{1}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\,dx=2-\ln 2-\frac{3\pi}{8}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 33(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(x)+f(1-x)=9$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{-x}=2$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5}.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conţin pe 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(4,-4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.
6.Triunghiul ABC este dreptunghic în A şi cosB=sinB.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & a & a+2 \\ a^2+2 & a^2+1 & a^2+3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Demonstraţi că pentru orice număr real a , matricea A(a) este inversabilă .
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care inversa matricei A(a) are toate elementele numere întregi.
2.Pe mulţimea $A=[-1,+\infty)$se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3+x^3+y^3-7}$.
a)Arătaţi că $(-1)*2020=-1$.
b)Demonstraţi că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3+1)(y^3+1)-1}$.
c)Determinaţi $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-3}+\ln\frac{x-1}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-5x+9}{x(x-1)(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{1}{x-3}>ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+8}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^3+8)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{9}{8}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 34(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=3-2\sqrt{2}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ este natural.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=f(3)+3$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x^2}=5\cdot 5^x$.

4.Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ are exact 15 submulţimi cu două elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,1)$,$N(0,7)$ şi $A(3,a)$,unde a este număr real.Ştiind că AM=AN, arătaţi că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .

6.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $4\cos x-3=3\cos 2x$.Calculaţi cosx.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2-a\\ a & 1 & 1\\ a & a-2 & 2a-5\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x+ay+(2-a)z=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(a-2)y+(2a-5)z=-4\end{cases}$$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-3$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a))=(a-1)(3-a)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.

c)Determinaţi numărul natural a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\log_3(3^x+3^y)$.

a)Arătaţi că $1*1=1+\log_3 2$.

b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=6$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+4}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+4}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{15}}{2},2\right)$ ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+10}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{46}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{13}{10}$, unde $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+10}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 35(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 21.Determinaţi a_2.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6x+9$.Arătaţi că $(f\circ f)(-3)=9$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-2)=7-\log_2(x+6)$.

4.Dterminaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC şi punctual E mijlocul segmentului BD. Arătaţi că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu BC=$2\sqrt{3}$, B=$\frac{5\pi}{12}$ şi C=$\frac{\pi}{4}$.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 4 & 1\\ a & 2 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax+4y+z=6\\ ax+2y+z=4\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea A(a) are rangul 2.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{4}$. Legea de compoziţie este asociativă şi are elemental neutru e=$\frac{1}{2}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

c)Arătaţi că **nu** există numere întregi x şi y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12x+18\ln x+27-18\ln 3$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-3)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A(4,4) şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctual de abscisă x=3, situat pe graficul funcţiei f.

c)Se consideră numerele reale a,b şi c astfel încât punctul M(a, b) este situat pe graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=x^2-18\ln 3+18\ln x$ şi punctul N(a, c) este situat pe graficul funcţiei h:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $h(x)=12x-27$.Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[3,+\infty)$

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+9}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+9)f(x)dx=-\frac{26}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_1^3 x^n f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Testul 36(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}|n-2\leq 3\}$ este egală cu 15.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 2.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+9}=\sqrt{3-x}$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 6 elemente ale unei mulţimi cu exact 9 elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$,$B(3,-1)$ şi $C(10,8)$.Determinaţi lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.
6.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2021\pi=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&1&0\\0&a&0\\0&1&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=4$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot\ldots\cdot A(2019)=n!\,A(0)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X+m-3$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(1)=0$.
b)Pentru m=3, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m, pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{3}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x-1}{x(x+1)^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Se consideră funcţiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-2}{x+1}$ şi $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{28}{3}$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$, are aria egală cu $\frac{20\sqrt{10}-54}{3}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3f(t)\,dt$.

Testul 37 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_2 = 2$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - mx + 7 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 = 1$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-3) + \log_2(x+3) = 4$.

4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(6,2) şi B(2,6).Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=4 , AC=$3\sqrt{3}$ şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ -ax + y - z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 0$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a)) = a(a-1)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0,y_0 şi z_0 numere întregi.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x-2020)(y-2020)+2020$.

a)Arătaţi că $x*2020=2020$, pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numerele reale x, ştiind că $(x*x)*x = x$.

c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $m*n=2021$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\ln\frac{x}{4} - \sqrt{x} \leq -2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+4)f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 38(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,4)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2020^x+2020^{-x}=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor pară.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$ şi$B(3,-3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
6.Arătaţi că $\sin(a+b)\sin(a-b)=(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}-a & 0 & a\\ 0 & 2 & 0\\ a & 0 & -a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=2A(-ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{31} 32)$ are toate elementele numere întregi.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX-n$, unde m şi n sunt numere reale.
a)Arătaţi că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m şi n.
b)Determinaţi numerele reale m şi n , ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
c)Demonstraţi că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=1$, pentru orice numere reale m şi n, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că , pentru orice $a\in(0,27e^{-3})$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln x)dx=\frac{14}{3}$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-2x^2+f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e are aria egală cu e^2 .
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x)-2x^2)\,dx=0$.

Testul 39(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe z_1=4−i şi $z_2 = 7 - 2i$.Arătaţi că $2z_1 - z_2 = 1$.
2.Derminaţi numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 25$, unde f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 \cdot 9^x - 9^{x+1} + 63 = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1) \leq 42$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,8),B(6,0) şi $C(5, m)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AB=8 şi aria triunghiului ABC este egală cu 24.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ln(a+1) & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale a şi b , a>0,b>0.
c)Determinaţi numărul real a,a>0, ştiind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.
2.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3 + mX^2 - mX + 15$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(-3) = 0$.
b)Pentru m=1, determinaţi rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3} + \frac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$.Demonstraţi că $a\in[3, +\infty)$,pentru orice număr real m.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2 + 6x + 1)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x+7)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x) = a$ are exact trei soluţii reale.
2. Se consideră funcţia f:$(1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\ln x}$.
a)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.
b)Calculaţi $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\, dx$.
c)Determinaţi numărul real a, a>e, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei g:$(1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi x=a are aria egală cu a.

Testul 40(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{5}{x+1}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-2=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{3}{2}$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{6-x}-x=0$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{\log_3 n\,|n\in\mathbb{N}^*, n\leq 30\}$, acesta să fie număr natural

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,0)$ şi $P(1,1)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.

6.Se consideră triunghiul ABC cu $AC=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $m(\sphericalangle B)=30°$.Determinaţi lungimea laturii BC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}-1 & m & -1\\ 1 & 2 & 4\\ m & 1 & 3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-x+my-z=-2\\ x+2y+4z=5\\ mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=-3$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru m=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{3}{4}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

c)Demonstraţi că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziţie „$*$” să fie natural.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln(x^2-x+1)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x+1)}{x^2-x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+3$.

c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 e^x f(x)dx=\frac{9}{2}$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-2$ şi $x=2$ are aria egală cu $e^2+2-\frac{3}{e^2}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)I_n=\frac{1}{e}$.

Testul 41(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi modulul numărului complex $z=(2+i)(3-2i)-4(1-i)$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m-1)x+m(m+1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\log_3 x-\log_x 3=2$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 22 submulţimi cu cel mult două elemente.
5.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii AC şi punctul N mijlocul segmentului BM. Demonstraţi că $2\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
6.Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, ştiind că $2+5\cos x=\cos 2x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&a&4\\1&2&a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+ay+4z=3\\x+2y+az=2\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a))=a(a-3)$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii este incompatibil
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\sqrt{x^2y^2+2x^2+2y^2+2}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\sqrt{(x^2+2)(y^2+2)}-2$,pentru orice numere reale x şi y .
b)Determinaţi perechile de numere naturale a şi b, ştiind că $a\circ b=2$.
c)Demonstraţi că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{2\circ 2\circ\ldots\circ 2}_{2\text{ de n ori}}$ **nu** este natural.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{x^2+2x+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln(x+1)$.
a)Calculaţi $\int_1^2\frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\ln 4}{3}-\frac{5}{18}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^t f(x)\,dx$.

Testul 42(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 666. Al doilea termen al acestei progresii este egal cu:

A. 6 B. 111 C. 222 D. 333

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$.Numărul $(f\circ f)\left(\frac{3}{25}\right)$ este egal cu:

A. -15 B. 15 C. $-\frac{12}{5}$ D. $\frac{12}{5}$

3.Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $2\log_3(x+1)-\log_3(x+3)=\log_{\frac{1}{2}}2$ este:

A. $\left\{-\frac{5}{3},0\right\}$ B. $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ C. $\{0\}$ D. $\left\{0,\frac{5}{3}\right\}$

4.Probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puţin o cifră impară este egală cu:

A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{20}{89}$

5.În reperul cartezian xOy se consideră triunghiul ale cărui laturi se află pe dreptele de ecuaţii $d_1: y=-3x$, $d_2: y=3x$ şi $d_3: x=3$. Perimetrul acestui triunghi este egal cu:

A. $3\left(6+\sqrt{10}\right)$ B. 54 C. $9\sqrt{10}$ D. $6\left(3+\sqrt{10}\right)$

6.Se consideră $E(x)=\cos x-\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, unde x este număr real.Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 1 B. $2\cos x$ C. $2\sin x$ D. 0

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & 2b & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(0,1)$.

b)Arătaţi că $D(a,1)\leq 0$, pentru orice număr real a.

c)Demonstraţi că, dacă numerele m şi n sunt întregi impare, atunci $D(m,n)\neq 0$.

2.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix} -x & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & -x \end{pmatrix}$unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(-x)+A(x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

b)Arătaţi că $\det\big(A(x)A(y)+A(2xy)\big)=0$, pentru orice numere reale x şi y.

c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+A(2021)A\left(\frac{1}{4042}\right)=mI_3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$.

a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b)Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=f(n)$.Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{f(n)}-1\right)$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a-\frac{\sin x}{x}, x\in(-\infty,0) \\ \sqrt{x^2+3x}, x\in[0,+\infty) \end{cases}$,unde a este număr real.

a)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b)Pentru a=1, determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că, pentru orice număr real a, ecuaţia $f(x)=|a|$ are cel puţin o soluţie.

Testul 43(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|$ este natural.
2.Se consideră funcţiile f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=12-x$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=1-12x$.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $f(x)\geq g(x)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x\cdot 2^{x+1}=200$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre pare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$,$B(3,1)$ şi $C(5,1)$.Calculaţi aria triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că AB=4,A=$\frac{\pi}{3}$ şi B=$\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere x şi y.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A(m^2+m+17)$.
2.Se consideră polinomul f=X^3+4X^2-X+a, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1)-f(-1)=0$, pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X−1.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x^2$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $2^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{2}}$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=6x-x^2$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)dx=18$.
b)Arătaţi că $\int_1^3\frac{3-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^6 f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\leq 9I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 44(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $3\bar{z}-z=6+8i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f se află pe axa Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(2x+3)}=\frac{1}{2}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte şi pare.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-4,3)$ şi dreapta d de ecuaţie y=x+2. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2m\\ 1 & 2m & 1\\ 2m & 1 & 1\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+2mz=1\\ x+2my+z=0\\ 2mx+y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=-2$.

b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m))=0$.

c)Pentru m=−1, demonstraţi că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=4xy+x+y.

a)Demonstraţi că $x*y=4\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numărul real x pentru care x∗x∗x=0 .

c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, unde f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{1}{4}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=18x^2-\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(6x-1)(6x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{2}{5},-3\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{5}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{19}}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)$.

2. Se consideră funcţia f:$(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x+4}{x+4}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x+4)f(x)dx=\frac{11}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=3-8\ln\frac{5}{4}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+4)^n\left(f(x)\right)^n dx$.Demonstraţi că $I_n+3nI_{n-1}=e\cdot 7^n-4^n$,pentru orice număr natural n, n≥1.

Testul 45(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=1−3i.Arătaţi că $z^2 - 2z + 10 = 0$.
2.Derminaţi numerele reale a şi b,pentru care graficele funcţiilor f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$ şi g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 3$ se intersectează în punctul M(3,12).
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(5x + 6) = 1 + \log_4(x + 3)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,3),B(5,1) şi C(0,7).Determinaţi lungimea segmentului CM, ştiind că M este simetricul punctului A faţă de punctul B .
6.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=8,AC=12 şi $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + y - az = 1 \\ (a+1)x - y + z = 0, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(M(-1)\big) = 0$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det\big(M(a)\big) = 0$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0)şi $2x_0 + y_0z_0 = 0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\frac{1}{9}xy - (x + y) + 18$.
a)Demonstraţi că $x*y = \frac{1}{9}(x - 9)(y - 9) + 9$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x*x \leq \frac{82}{9}$.
c)Calculaţi $\log_2 1 * \log_2 2 * \log_2 3 * \ldots * \log_2 2019$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=6\ln(x + 1) - 2x^3 + 3x^2 - 6x$.
a)Arătaţi că $f'(x) = -\frac{6x^3}{x+1}$,$x \in (-1, +\infty)$.
b)Demonstraţi că valoarea maximă a funcţiei f este 0.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{-f(x)}}{x}$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2 - x + 1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \frac{5}{6}$.
b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are exact două puncte de inflexiune.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)\, dx = 1$.

Testul 46(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\log_4\left(\sqrt{13}-3\right)+\log_4\left(\sqrt{13}+3\right)$ este natural.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=3x−2 şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, g(x)=$x^2+9x+7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+4)^3=(4-x)^3$.
4.Calculaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii {0,1,2,3,4}.
5.Punctele M,N şi P verifică relaţia $3\overrightarrow{MN}+5\overrightarrow{NP}=\vec{0}$.Calculaţi lungimea segmentului MP,ştiind că MN=5.
6.Arătaţi că $\sin(2\pi+x)+\sin(\pi+x)+\sin(\pi-x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1 & x\\ y & x & 1\\ 1 & y & y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det\left(A(3,2)\right)=12$.
b)Demonstraţi că $\det\left(A(n^2,n)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei B=$A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea A(x, 0).
2.Se consideră polinomul f=nX^n-X^2-nX+1, unde n este număr natural,n≥3.
a)Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,n≥3.
b)Arătaţi că, dacă n este număr natural impar,n≥3, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătaţi că, pentru orice număr natural n, n≥5, polinomul f **nu** are rădăcini în mulţimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=arcctgx+x.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, x$\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, g(x)=arctgx−x.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=$e^{-x^3}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f\left(\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe$\mathbb{R}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Testul 47 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{64}+\sqrt{6}$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că $(f\circ f)(x)=f(x+2)$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+2}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{4x+5}$.
4.Determinaţi numărul de submulţimi cu cel puţin patru elemente ale mulţimii $A=\{0,1,2,\dots,9\}$.
5.Se consideră triunghiului MNP cu MN=12,MP=16 şi $m(\sphericalangle M)=90°$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
6.Determinaţi numărul real x, ştiind că ctgx+tgx+2=0 şi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 4x-2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4x-2 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\big(A(x)\big)=0$.
b)Demonstraţi că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.
2.Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{30}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{29}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{5}x+\hat{5}y+\widehat{25}$.
a)Demonstraţi că $x\circ y=\big(x+\hat{5}\big)\big(y+\hat{5}\big)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{30}$.
b)Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_{30}$, ştiind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{30}$.
c)Daţi exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{30}\setminus\{\widehat{25}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=-\frac{7}{2}$.
b)Determinaţi imaginea funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^{\frac{x}{2}}-2e^{2x}-\frac{3}{8}\leq0$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\text{arcctgx}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 f(\text{ctgx})dx=\frac{3}{2}$.
b)Calculaţi $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.
c)Demonstraţi că $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2(n+2)}\leq(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 48(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul complex z, ştiind că $3\,\bar{z} + iz = 10 + 6i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 3x$.Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) > x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+3} \cdot \sqrt[3]{125} = 5^5$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={0,1,2,3,4,5}, aceasta să conţină numai numere impare.
5.Se consideră dreptunghiul ABCD,cu AB=8,AD=4 şi punctul M, mijlocul laturii AB.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM}$.
6.Se consideră $E(x) = \cos\frac{2x}{3} - \sin\frac{8x}{3}$, unde x este număr real.Arătaţi că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} a^2 - a & a^2 + a & 1 \\ a^2 + a & a^2 - a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(-2)\big) = 32$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x) + xI_3) \leq 0$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a(a^2 - a, a^2 + a)$, unde a este număr real. Demonstraţi că pentru orice număr real nenul a, punctele P_a, P_{-a} şi O **nu** sunt coliniare.
2.Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Demonstraţi că $M(x) \cdot M(-x) = M(0)$, pentru orice număr real x.
b)Calculaţi inversa matricei M(x), $x\epsilon\mathbb{R}$.
c)Arătaţi că $\det\big(M(1) + M(2) + \cdots + M(n)\big) = 2n^2(2^n - 1)$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-2, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+3x}{(x+2)^2}$.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n)$ este descrescător.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + \sin(x-2) + m, x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}, x > 2 \end{cases}$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = \frac{3}{16}$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.
c)Pentru $m=-\frac{141}{16}$, demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (0,3).

Testul 49(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(4-3i)^2+(4+3i)^2=14$,unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-7x+12$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-2x-3}=x-3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(3,4)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
6.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=6,BC=$3\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle ABC)=60°$.

Subiectul II

1.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\x&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.
2.Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+5$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(2)=-3$.
b)Pentru a=-6, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-5.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,$x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(e^x+1)f(x)\,dx=e(e-1)$.
b)Arătaţi că $\int_{-2}^{2}x^3\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=2 are aria mai mică decât ln5.

Testul 50(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 1 + 3i$.Arătaţi că $3z_1 - 2z_2 = 7$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 2 = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x + 4) + \log_3(x - 4) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.
5.Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 24$.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - (m+4)X^2 + (m^2+8)X - 8$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = -8$,pentru orice număr real m.
b)Demonstraţi că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-2)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 4e^x - 2x^2 - 4x - 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4(e^x - x - 1), x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = (x+3)^n$, unde n este număr natural nenul.
a)Arătaţi că $\int_{-3}^{0} (x+3)^2\,dx = 9$.
b)Pentru n=1, arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx = 3e - 2$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−1 şi x=1 are aria egală cu $\frac{240}{n+1}$.

Testul 51(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 4i$ şi $z_2 = 3 - 3i$.Arătaţi că $3z_1 + 4z_2 = 27$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 - 2x + 3$.Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+3} = 5 \cdot 5^{3x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2), B(0,4)$ şi $C(m, 0)$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC,ştiind că BC=$4\sqrt{2}$,AC=6 şi C=$\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 & 0 & 2(1-x) \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = 2$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)A(-x)) \leq 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că,dacă numerele naturale m şi n verifică relaţia $A(m)A(n) = A(5)$,atunci m+n=6.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + 2X + 1$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(1) = 0$.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = e^x - 2 - \ln(x + 1)$.
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, $x\in(-1, +\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(-1, +\infty)$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^3 \ln^n x\, dx$.
a)Arătaţi că $\int_1^e x^3\, dx = \frac{e^4-1}{4}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $4I_{n+1} + (n + 1)I_n = e^4$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 52(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=3−i.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\bar{z}=16$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(2,m)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(2-\log_3 x)(3-\log_3 x)=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra zecilor strict mai mare decât cifra unităţilor.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,4)$, $B(3,1)$ şi $C(0,2)$.Determinaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $(1+tg^2x)\cos^2x+(1+ctg^2x)\sin^2x=2$,pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&a&2\\-2&3&-1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2y+z=0\\x+ay+2z=0,\\-2x+3y-z=0\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(9))=0$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.
c)Demonstraţi că,dacă sistemul are soluţia (x_0,y_0,z_0),cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+6x+6y+30.
a)Arătaţi că x∘y=(x+6)(y+6)−6,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că x∘x=x.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $2019^a\circ(-5)=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{3-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{3-x+x\ln x}{x(3-x)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că xlnx>x−3,pentru orice $x\in(3,+\infty)$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+9x^2$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-9x^2)\,dx=e-1$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{13}{4}$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)-e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu n^2+n+1.

Testul 53(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $(-5,5)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2-1$.Calculaţi $(f\circ f)(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=x-3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,100\}$,acesta să fie multiplu de 11.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ şi $N(4,2)$.Determinaţi coordonatele punctului P,situat pe axa Ox,astfel încât PM=PN.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $AB=6\sqrt{2}$ şi $C=\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & x\\ 1 & 4^x & 2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big)=1$.

b)Demonstraţi că $\det\big(A(x)\big)=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$,pentru orice număr real x.

c)Arătaţi că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2018)=\begin{pmatrix}2018 & 2018 & 2018\\ 2018 & 2(2^{2018}-1) & 2019\cdot 1009\\ 2018 & \frac{4}{3}(4^{2018}-1) & 2018\cdot 2019\end{pmatrix}$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=6xy+6x+6y+5$.
a)Arătaţi că $x*y=6(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstraţi că,dacă a,b şi c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=35$,atunci numerele a,b şi c sunt egale.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{3-x^2}{e^x}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$,situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $-\frac{6}{e^3}\leq f(x)\leq 2e$,pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+3)^2}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\frac{x+3}{\sqrt{x}}f(x)\,dx=\ln\frac{5}{4}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c)Determinaţi numărul real m,$m>0$,ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+3)f(x)$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=3$ are aria egală cu $2-3\ln\frac{m+2}{m}$.

Testul 54(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 6 - 2i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2 - 2z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x) = 3x - 2$ şi g:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x) = x^2 - x + 1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_6(x^2 - 9) = \log_6(6x - 17)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x−2017 şi punctul A(2,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin(\pi + x)\sin x + \cos(\pi + x)\cos x = -1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculaţi $\det\big(A(3)\big)$.
b)Demonstraţi că $\det\big(A(x) + B(x)\big) = \det\big(B(x)\big)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p) = 2B(5)$.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + 18X + 8$,unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(2) = 0$.
b)Pentru a=9,determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + 7X + 4$.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in(-6,6)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^{2020} + 2020x + 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2020(x^{2019} + 1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a, 2022)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două soluţii reale distincte.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+3}\,dx$.
a)Calculaţi $\int_0^1 (x^2 + 3x + 3)\,dx$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n + 3I_{n-1} = \frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,n≥2.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{7}$.

Testul 55(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\frac{5+i}{5-i}+\frac{5-i}{5+i}=\frac{24}{13}$,unde $i^2=-1$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(2m-3)x+m^2-3m+2=0$.Arătaţi că $(x_1-x_2)^2=1$,pentru orice număr real m.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-3}=5-x$.

4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5.Se consideră triunghiului ABC şi punctele M,N şi P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstraţi că $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}$.

6.Determinaţi numerele reale x,ştiind că $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$ şi $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&5\\1&5&a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+5z=4\\x+5y+az=4\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(a)\big)=(a+3)(a-5)$,pentru orice număr real a.

b)Determinaţi numerele reale m pentru care $A(m)A(4-m)=A(4-m)A(m)$.

c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+15x+15y-42$.

a)Arătaţi că $x*y=3-5(x-3)(y-3)$,pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $(n*n)*n=n$.

c)Arătaţi că,dacă $a*a=b$ şi $b*b=a$,atunci $a=b=3$ sau $a=b=\frac{14}{5}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

a)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

c)Demonstraţi că pentru orice număr real a,$a\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)$,ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale distincte.

2.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ şi,pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

b)Demonstraţi că $I_n\le\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstraţi că $(2n+1)I_n=4-6nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,$n\ge2$.

Testul 56(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=6-i$.Calculaţi $z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că axa Ox este tangentă graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+5)x+m^2+4m+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\log_x 7+\log_7(7x)=7$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 15.
5.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii AC şi punctul N mijlocul medianei BM.Demonstraţi că $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
6.Arătaţi că,dacă $(\sin x-5\cos y)^2+(\cos x+5\sin y)^2=26$ şi $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ x^2-x & y^2-y & 6\end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\Delta(0,2)=6$.
b)Arătaţi că $\Delta(x,y)=(x-3)(y-3)(y-x)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Demonstraţi că numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2,pentru orice numere întregi m şi n.
2.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 0 & 2a-1\\ 0 & 1 & 0\\ 2a-1 & 0 & 2a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi A(0)+A(1).
b)Arătaţi că $A(a)A(b)=A\left(4ab-a-b+\frac{1}{2}\right)$,pentru orice numere reale a şi b.
c)Arătaţi că $A\left(\frac{1}{4}\right)A\left(\frac{3}{4}\right)A\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2019}{4}\right)=A\left(\frac{1}{4}\right)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^3}$.
a)Arătaţi că $f(x)=\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{x^3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n)\right)^{2n^3}$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2-x-a, x\le 0\\ \frac{e^{5x}-1}{e^{4x}-1}, x>0\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul x=0.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in(3,6)$,atunci ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin două soluţii reale distincte în intervalul $(-3,-1)$.

Testul 57 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2018$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul A(2,6) aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{4x-6} = 9^{5x-9}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să conţină cifra 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3) şi B(5,6).Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi sinx= $\frac{3}{5}$,arătaţi că sin2x= $\frac{24}{25}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ ax + 2y - z = -1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -12$.
b)Demonstraţi că matricea A(a) este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -2$ şi $a\neq 2$.
c)Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=4xy+4x+4y+3$.
a)Arătaţi că $x\circ y=4(x + 1)(y + 1) - 1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 4$.Demonstraţi că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de2018 ori a}} = 4^{2017} - 1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = \ln\frac{x+2}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$, $x\in(2, +\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(2, +\infty)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f'(3) + f'(4) + f'(5) + \cdots + f'(n)\right) = -\frac{25}{12}$.
2. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 \sqrt{x}f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătaţi că $\int_1^{e^2} \left(\sqrt{x} - f(x)\right)\ln x\,dx = 4$.
c)Determinaţi numărul real a,$a>1$,ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a + \frac{5}{2}\right)$.

Testul 58(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 23,1019 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6x+m$ este tangentă axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-6}=125$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{49}\}$,acesta să fie număr raţional.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2),B(-3,-2)$ şi $C(3,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle A)=45°$ şi BC=$4\sqrt{2}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a & 4a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2ay+4a^2z=2\\ x-y+z=-1\\ x+y-2az=6\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,a≠$-\frac{1}{2}$ şi a≠$\frac{1}{6}$.
c)Determinaţi numerele reale a,pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=−xy+3x+3y−6.
a) Arătaţi că x∗y=$3-(x-3)(y-3)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,pentru care x∗x=2.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere întregi astfel încât m∗n∗p=3,atunci produsul numerelor m,n şi p este divizibil cu 3.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+2\ln x+1$.
a) Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică în intervalul $(0,1)$.
2.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x+4}dx$.
a)Arătaţi că $I_0=-\frac{7}{2}+16\ln\frac{5}{4}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}+4I_n=\frac{1}{n+3}$,pentru orice număr natural n.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

Testul 59(Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2=14$.
2.Caculaţi produsul $f(-2)f(0)f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-7x+8)=\log_5 2$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 5,2,3 şi 1.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$ şi $B(1,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 4x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real a,$a\neq-2$,ştiind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2017\cdot2018}\right)=A\left(\frac{a+1}{a+2}\right)$.
2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+3$,unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m,ştiind că $f(1)=0$.
b)Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=4,descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c) Demonstraţi că,pentru orice număr real a,$a\in(-1,1)$, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x-2)$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 f(x)e^{-x}\,dx=0$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=2 şi x=3 are aria egală cu e^2.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{1}(f(x)+2e^x)\,dx=0$.

Testul 60 (Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 6$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x-3} = 5^{3-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 40.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=10,AC=10 şi BC=16,Arătaţi că $\sin B = \frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y + z = -1 \\ x + my + z = -1 \\ x + y + mz = -m \end{cases}$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq 1$ şi $m\neq -2$.
c)Pentru $m=-2$,determinaţi soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+8x+8y-28$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12=4$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=26$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 18\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-3)(x+3)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia f:$(5,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x(x-5)}$.
a)Arătaţi că $\int_6^{12}(x-5)f(x)\,dx = \ln 2$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[6,7]\to\mathbb{R}$,$g(x) = xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Testul 61(Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele $20,5x$ şi x^2+5 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+m$ este tangentă axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-18}=243^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\}$, aceasta să aibă cel mult trei elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$,$B(1,0)$ şi $C(3,6)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediana din B a triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $B=\frac{2\pi}{3}$ şi $AC=\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(6))=729$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)\cdot A(3x)=A(x^2+3)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2018)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2019.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+5X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x+1-e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstraţi că $f(5\sqrt{6})>f(6\sqrt{5})$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\frac{1}{4^n}\int_0^2(4-x^2)^n dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{4}{3}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 62(Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a-b)(i+1)=(a+b+1)(i-1)$,unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-mx+2$,are valoarea minimă egală cu -2.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x=\log_x 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre numere prime.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,-1)$,$B(-3,0)$ şi $C(1,1)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că AB+BC=AC.
6.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{5}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin a\right)^2=2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & m & 1\\ 1 & m & m\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-5x-5y+30$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $1*2*3*...*2018$.
c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că $a<b<c$ şi $a*b*c=59$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\right)^n$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{2x}$.
a)Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

Testul 63(Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\log_{2020} 101 + \log_{2020} 20 + \sqrt{0{,}0256} = \frac{29}{25}$.
2.Determinaţi numărul real m,pentru care soluţiile ecuaţiei $x^2 - (2m-3)x + m - 4 = 0$ verifică relaţia $x_1 + x_2 = 3x_1x_2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot 3^x + 2\cdot 9^x - 27^x = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{0,1,2,\dots,9\}$,acesta să fie soluţie a ecuaţiei $f(n) = 0$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(n) = n^3 + 4n - 5$.
5.Se consideră triunghiul ABC cu AB=AC=$8\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
6.Arătaţi că $\sin(a+b) = 1$,ştiind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,a≠b şi sina−cosb=sinb−cosa.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x^2 & 2 & y^2 \\ x & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.
a)Calculaţi $\Delta(-1,0)$.
b)Demonstraţi că $\Delta(x,y) = (y-x)(xy-3x-3y+2)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele întregi distincte x şi y, ştiind că $\frac{1}{y-x}\Delta(x,y) = 8$.
2.Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n & 1 & 0 \\ 3^n & 2^n & 1 \end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Calculaţi $A(2) - A(1)$.
b)Determinaţi inversa matricei $A(1)$.
c)Demonstraţi că,dacă $A(n)\cdot A(n) = A(p)$,atunci n=0 şi p=1.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln\frac{3x+1}{x}$ şi şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = f(n)$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.
c)Demonstraţi că $\ln 3 < x_n \leq \ln 4$, pentru orice număr natural n, n≥1.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+6}, & x<1 \\ \sqrt{x^2+5x-5}+a, & x\geq 1 \end{cases}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
b)Determinaţi numărul real a, pentru care funcţia f este continuă în punctul x=1.
c)Pentru $a=-\frac{1}{5}$,calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{\ln\left(f(x)+\frac{1}{5}\right)}{x-1}$.

Testul 64(Prelucrare de bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_2 = 6$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(4,6)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a + x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{4+x} = 3^{4x-2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 4.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 şi BC=13.Arătaţi că cosC= $\frac{12}{13}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(26)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 3X^2 + X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=3,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=lnx.
a)Arătaţi că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = 2$.
b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi $x=e^2$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}\big(f(x)\big)^n dx = \frac{1}{2017}$.

Testul 65(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{5}+1\right)^2=12$.
2.Calculaţi produsul f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)f(6),unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x) = x − 5.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+4x+4)=0$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 3,4 şi 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3) şi B(3,5).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Arătaţi că sin(π + x) + sin(π − x) = 0,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(0)\big)=1$.
b)Arătaţi că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+1)B(-x)=B(x^2-x+1)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
x∘y=$\frac{1}{2}(x-4)(y-4)+4$.
a)Arătaţi că $(-4)\circ 4=4$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care n∘n=22.
c)Calculaţi 1∘2∘3∘...∘2019.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie y=−3x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x-1)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_3^4\frac{1}{x-1}f(x)\,dx=e^3(e-1)$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(2)=0$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_2^3\frac{x^{n+1}}{x-1}f(x)\,dx$.Arătaţi că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e^2(3^{n+1}e-2^{n+1})$,pentru orice număr natural n,n≥2.

Testul 66(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 1 - 3i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(1)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 3x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 64 = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x+1 şi punctul $A(2,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 2x \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=0.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x) + B(x)\cdot A = 6B(x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x) = B(x^2 + x - 8)$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3 + 2X^2 - 2X + m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=1,demonstraţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2-x+1)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big)^x$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = e - 1$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = e + 3$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2 + 29)$.

Testul 67(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=3+2i.Calculaţi $(z-3)^2$.
2.Arătaţi că $2(x_1+x_2)-3x_1x_2=0$,ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-6x+4=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 14.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x+4 şi punctul A(2,3). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că BC=$8\sqrt{3}$ şi A=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & a & a+2\\ 1 & a+1 & a+3\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(a))$.
b)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+2mX-6$,unde m este număr real.
a)Pentru m=1,arătaţi că $f(2)=6$.
b)Determinaţi numărul real m,ştiind că polinomul f este divizibil cu X+2.
c)Arătaţi că,pentru orice număr real strict pozitiv m,polinomul f are două rădăcini de module egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+3}{e^x-x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$.
a)Calculaţi $\int_0^3 f^2(x)\,dx$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $nI_n+9(n-1)I_{n-2}=\sqrt{10}$ pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.

Testul 68(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{3-2i}{2+3i}$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+a$ are graficul tangent axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+5\cdot 4^x-384=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,aceasta să aibă un singur element număr impar.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,2)$ şi $N(1,4)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
6.Arătaţi că $(\sin(\pi-x)+\sin x)^2+(\cos(2\pi-x)+\cos x)^2=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
b)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.
c)Arătaţi că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.
2.Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere întregi x şi y.
b)Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
c)Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_8$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+2-\ln(x+3)$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in(-3,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2-f(x)-\ln 5}{x-2}$.
c)Demonstraţi că $\ln(x+3)\leq x+2$,pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+9}$.
a)Calculaţi $\int_0^3 f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{9f(x)+x^2f(x)}{x^4+9}\,dx=\frac{\pi}{24}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)\,dt$.

Testul 69(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 6,2x+5,2x+8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Arătaţi că, pentru orice număr real m,graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+(m-2)x-2m$ intersectează axa Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3-x}=2x-3$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea {1,2,3,4,5},acesta să verifice relaţia $6^{n-1}>(n+1)!$.

5.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că,în reperul cartezian xOy,punctul de intersecţie a dreptelor $x+(2a-1)y-6=0$ şi $3x-by-8=0$ este $M(a,-2)$.

6.Arătaţi că $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}x$,pentru orice număr real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 2\end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale nenule.

a)Arătaţi că $D\left(2,\frac{1}{2}\right)=0$.

b)Arătaţi că $D(x,y)=-\frac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$,pentru orice numere reale nenule x şi y.

c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(\log_2 x,2)=0$.

2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 2 & 1 & a\\ a & 2 & 1\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $2A(1)-A(-1)=A(3)$.

b)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $A(a)+bI_3=2(A(1)-I_3)(A(1)-I_3)$

c)Arătaţi că matricea A(n) este inversabilă pentru orice număr natural n.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}$ şi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$,

$a_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)$.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$este crescător.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+2)(a_n-\ln n)$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases}3x+a+4, x\leq 1\\ x^2+a^2x, x>1\end{cases}$,unde a este număr real.

a)Determinaţi numerele reale a pentru care funcţia f este continuă în x=1.

b)Pentru a=3,calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$.

c)Pentru a=−4,arătaţi că ecuaţia $f(x)+3^x=0$are cel puţin o soluţie în intervalul $[-1,0]$.

Testul 70(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=1-i$.Calculaţi z^2.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+4x-6$ nu intersectează axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3x-4)=\log_3(x+2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie par.
5.În triunghiul ABC punctele M,N şi P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi,respectiv,AC.Arătaţi că $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.
6.Ştiind că $tga=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $a\in\mathbb{R}$,arătaţi că $\frac{sina+cosa}{cosa-sina}=2+\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-4$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m))=0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2 & 6 & 6\\ 6 & 10 & 16\\ 6 & 16 & 10\end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4x+4y-xy-12$.
a)Calculaţi $1*4$.
b)Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2016\text{ ori}}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4-x)(x-2)}{(x^2-6x+10)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale lui f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x^2\ln^n x\,dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{2e^3+1}{9}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$ pentru orice număr natural nenul n.

Testul 71(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=1-2i+3i^2$.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x-1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-x}=2^{3x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,4 şi 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=12\vec{i}+(m-1)\vec{j}$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=BC=4 şi $AC=4\sqrt{2}$.Determinaţi cosA.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2-2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+aX-8$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(2)=2(a-14)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2+X+1.
c)Pentru $a=-7$,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x)=0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{xe^x}{x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x^2+3x+3)e^x}{(x+3)^2}$,$x\in(-3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puţin o soluţie în intervalul (1,2).
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{3+x^n}dx$.
a)Arătaţi că $I_1=1-3\ln\frac{4}{3}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 72(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 2,4 şi x+5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-x+3$ este situată deasupra axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(-1,4)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.
6.Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, calculaţi $\sin 2x$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2x & 4x+1 & 3x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2-2X+2a$, unde a este număr real.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că 3+i este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru a=10,arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=28$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^2}{x-3}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$,$x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=5$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{1}{2}\ln 2$.
b)Arătaţi că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Testul 73(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 5$ şi $a_2 = 10$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 4x + 6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(5^x - 1)(5^x - 5) = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conţină cifra 3.
5.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AB=6.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
6.Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că C=$\frac{\pi}{2}$ şi AC=4.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 8$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Determinaţi matricea X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ştiind că $A(1)\cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.
2.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f=$X^3 - 2X^2 - 5X + m$,unde m este număr real.
a)Calculaţi f(3).
b)Arătaţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 20$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=-\frac{\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Se consideră funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - x + 1$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x-1}{f(x)}dx = \ln 7$.

Testul 74(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(2-4i)+2(1+6i)=8$.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-2x+1$ este tangentă la axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4}=5^{-4x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 2,4,6 şi 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(4,2)$ şi $C(-4,-2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
6.Arătaţi că $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&2^n-1\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
c)Determinaţi numerele naturale p şi q ştiind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.
2.Se consideră polinomul f=X^3-X^2+3X-2.
a)Calculaţi $f(0)$.
b)Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-4.
c)Arătaţi că $(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2=-4$ ştiind că x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2x+e^x$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x)\geq 3x+1$ pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x^2-x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2-x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-x-1)\,dx=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Testul 75(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{1-i}{1+i}$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-9)=\log_2(10x-30)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 120.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{BA}=4\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-6\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.
6.Calculaţi lungimea laturii BA a triunghiului ABC,ştiind că CA=8,B=$\frac{7\pi}{12}$ şi A=$\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -x\end{pmatrix}$.
a)Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$,pentru orice număr real x.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $\det\big(A(x)\big)=0$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2-mX+1$,unde m este un număr real.
a)Calculaţi $f(-1)$.
b)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$,unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Subiectul III

1. Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^{n+1}e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1}=(n+2)I_n-1$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstraţi că $I_n=(n+1)!\cdot\left(e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 76(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $\frac{1-i}{1+i} = a + ib$ şi $i^2 = -1$.
2.Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x + 8$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{\frac{x+2}{2}} - 3^{x+1} = 18$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu conţină cifra 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1), B(3,2)$ şi $C(-2,0)$.Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin C la AB.
6.Determinaţi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1-\sin x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\cos x}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a)) = -(a+2)(a-1)^2$,pentru orice număr real a.
b)Calculaţi inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
c)Determinaţi perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 60.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=4xy-4x-4y+5$.Legea „$*$”este asociativă şi are element neutru.
a)Arătaţi că $x*y=4(x-1)(y-1)+1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $\frac{1}{1009} * \frac{2}{1009} * \frac{3}{1009} * \ldots * \frac{2018}{1009}$.
c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „$*$”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+2}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$.
a)Calculaţi I_1.
b)Arătaţi că $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{3}$.

Testul 77 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi $z+\bar{z}$,ştiind că $z=4+3i$ şi $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.

2.Determinaţi numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=-2$ este axă de simetrie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+(m^2-1)x+3$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(4x-4)=2\log_3 x$.

4.Determinaţi câte numere naturale $\overline{abc}$, cu a,b şi c nenule,au suma cifrelor egală cu 6.

5.Se consideră triunghiul ABC şi punctul D astfel încât $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.Determinaţi numărul real p pentru care $\overrightarrow{BD}=p\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,ştiind că AB=8 şi $\cos C=\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră determinat $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2+1\\ 1 & y & y^2+1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}$,unde x şi y sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(-1,1)$.

b)Arătaţi că $D(x,y)=(x-2)(y-2)(y-x)$,pentru orice numerele reale x şi y.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $D(4^x,2^x)=0$.

2.Se cosideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & 2 & x\\ 2 & x & 2\\ x & 2 & 2\end{pmatrix}$,unde x este număr reale.

a)Calculaţi $A(1)-A(2)$.

b)Demonstraţi că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n,$n\neq 2$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

Subiectul III

1.Se cosideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=\frac{n+2}{n^2}$.

a)Arătaţi că $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.

b)Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}(na_n)^{\sqrt{n^2+3}}$

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x+a, x<3\\ 0, x=3\\ \frac{x-b}{3x+3}, x>3\end{cases}$,unde a şi b sunt numere reale.

a)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b)Determinaţi numerele reale a şi b pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

c)Pentru b=3,rezolvaţi în mulţimea $(3,+\infty)$ inecuaţia $(7\cdot f(x)-1)(3^x-243)\leq 0$.

Testul 78(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 8$.
2.Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x - 8$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+2} = 4^{1-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu fie pătrat perfect.
5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CB} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.
6.Calculaţi sinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=10,BC=8 şi $\sin A = \frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
c)Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y = xy - 3x - 3y + 12$.
a)Calculaţi $2\circ 3$.
b)Arătaţi că $x\circ y = (x-3)(y-3) + 3$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ \ldots\circ x}_{\text{x de 2019 ori}} = 4$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2x+e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-1)e^x}{(2x+e^x)^2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x) \geq \frac{e}{e+2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^2 e^{-nx^3}\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstraţi că $I_n = \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 79(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=3(3+2i)+2(5-3i)$ este real.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+1$.Calculaţi $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(5x)=\log_5(4+x)$.
4.După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 4400 de lei.Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5.Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,ştiind că $\frac{4\sin x+\cos x}{\sin x}=5$.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $D(2,3)=2$.
b)Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n,n^2)$, unde n este un număr natural nenul.Determinaţi numărul natural n,$n\geq 3$,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.
2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=-X^3+4X^2-3X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=4,arătaţi că $f(4)=-8$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.
c)Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$,arătaţi că f se divide cu X−3.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\cos x-\frac{x^2}{2}$.
a) Calculaţi $f'(x)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\leq -1$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1}+(n+2)I_n=e$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătaţi că $1\leq(n+2)I_n\leq e$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 80(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele $1,2x-2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+9}=x+3$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,ştiind că $a,b\in\{3,4,5,6\}$ şi $a\neq b$.
5.În dreptunghiul ABCD,cu AB=6 şi BC=8,se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$,unde $\{O\}=AC\cap BD$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.
6.Calculaţi sinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=10,BC=6 şi $\sin A=\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&3&3\\3&a&3\\3&3&a\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=-14I_3$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(2)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-3X+1$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(2)-f(-2)$.
b)Determinaţi restul împărţirii lui f la $X-2$,ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X+2$ este egal cu 7.
c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3$,unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-1,1)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este crescătoare pe intervalul $(-1,1)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^3 x^n e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1=2e^3$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=3^{n+1}e^3-e$, pentru orice număr natural n.

Testul 81(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul n=$\left(\sqrt{5}+1\right)^2-2\sqrt{5}$ este natural.

2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care graficul funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(5-x^2)=\log_5(4x)$.

4. Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulţimile mulţimii A={1,2,3,4,5,6},aceasta să aibă cel mult un element.

5.Se consideră punctele A,B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+9\vec{j}$.Determinaţi lungimea segmentului [AC].

6.Se consideră numerele reale a şi b astfel încât b−a=$\frac{\pi}{3}$.Arătaţi că 2cosb=cosa−$\sqrt{3}$sina.

Subiectul II

1.Se notează cu D(x,y) determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix}x&2&1\\1&x&y\\2&1&x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi D(−1,2).

b)Determinaţi numărul q pentru care matricea A(2,q) are rangul egal cu 2.

c)Arătaţi că există cel puţin o pereche (x,y)de numere reale,cu x≠y,pentru care D(x,y)=D(y,x).

2.Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f=X^3-X+m,unde m este un număr real.

a)Determinaţi m astfel încât restul împărţirii polinomului f(X) la X+1 să fie egal cu 6.

b)Arătaţi că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg,pentru orice m$\in\mathbb{R}$.

c)În cazul m=−2 determinaţi patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul g=aX^3+bX^2+cX+d să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x-x$.

a)Calculaţi $f'(0)$.

b)Arătaţi că,pentru fiecare număr natural n≥2,ecuaţia f(x)=n are exact o soluţie în intervalul $(-\infty,0)$.

c)Fie x_n unica soluţie din intervalul $(-\infty,0)$ a ecuaţiei f(x)=n, unde n este număr natural, n≥2.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,f(x)=sinx şi se notează cu S suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=$\frac{\pi}{2}$.

a)Calculaţi aria suprafeţei S.

b)Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei S în jurul axei Ox.

c)Demonstraţi că $\int_0^{2\pi}f^{2n}(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}f^{2n}(x)\,dx$,pentru orice numere naturale n,k≥1.

Testul 82 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 6$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x-3} = 5^{3-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 40.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=8,AC=8 şi BC=10,Arătaţi că sinC= $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 2 & 2 \\ 2 & -m & 2 \\ 2 & 2 & -m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} -mx + 2y + 2z = -2 \\ 2x - my + 2z = -2 \\ 2x + 2y - mz = m \end{cases}$,
unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 16$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq -2$ şi $m\neq 4$.
c)Pentru m=4,determinaţi soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 4z_0 = 12$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+12x+12y-66$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-6)(y-6)+6$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=6$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=14$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 27\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$.
a)Arătaţi că $\int_4^{16}(x-3)f(x)\,dx = \ln 4$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[4,5]\to\mathbb{R}$,$g(x) = xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Testul 83(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele $4,10x$ şi x^2+32 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+m$ este tangentă axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-5}=81^x$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{9}\}$, aceasta să aibă cel mult trei elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0),B(2,0)$ şi $C(2,5)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediana din B a triunghiului ABC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{5\pi}{6}$ şi $BC=\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(6))=729$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(2x)\cdot A(4x)=A(x^2+5)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(0)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 1008.
2.Se consideră polinomul $f=-X^3+5X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016+4a$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x+1-e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstraţi că $f(2\sqrt{3})>f(3\sqrt{2})$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x^3)^n dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{3}{4}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}\le I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(3n+4)I_{n+1}=3(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 84(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_2 = 4$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(4,2)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - 2x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{4-x} = \frac{1}{2^{2x+2}}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,5)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 3.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=12,AC=16 şi BC=20.Arătaţi că tgC= $\frac{3}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(x + y + xy)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(2x)A(3x) = A(23)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = m$.
b)Pentru m=2,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=lnx.
a)Arătaţi că $\int_e^{e^2} f'(x)\,dx = 1$.
b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi $x=e^2$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\big(f(x)\big)^n\,dx = \frac{2^{2016}-1}{2016}$.

Testul 85(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=3+i.Calculaţi z^2.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x+10$ nu interesează axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(3x-4)=\log_3(x+2)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 3.
5.În triunghiul ABC punctele M,N şi P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi,respectiv,AC.Arătaţi că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$.
6.Ştiind că tga=$\sqrt{5}$ şi a$\in\mathbb{R}$,arătaţi că $\frac{sina-cosa}{cosa+sina}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=-4$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m))=0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&6&6\\6&10&16\\6&16&10\end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=4x+4y−xy−12.
a)Calculaţi 3∗4.
b)Arătaţi că x∗y=4−(x−4)(y−4) pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2016\text{ ori}}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4-x)(x-2)}{(x^2-6x+10)^2}$,x$\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale lui f.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x^2\ln^n x\,dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{2e^3+1}{9}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$ pentru orice număr natural nenul n.

Testul 86(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{2+3i}{3-2i}$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+a$ are graficul tangent axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x}+24\cdot 25^x-625=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7,8},aceasta să aibă un singur element număr impar.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele ΔABC, cu $A(-2,1), B(1,2)$ şi $C(5,4)$.Determinaţi ecuaţia medianei din A în ΔABC .
6.Arătaţi că $(\sin x+\sin(2\pi+x))^2+(\cos x+\cos(4\pi-x))^2=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&x\\x&0&x\\x&x&0\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $A(2)+A(-2)=2A(0)$.
b)Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.
c)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(xy)+2xyI_3$,pentru orice numere reale x şi y.
2.Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-6x-6y+42$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-6)(y-6)+6$,pentru orice numere întregi x şi y.
b)Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
c)Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_8$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 30.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+1-\ln(x+2)$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in(-2,+\infty)$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1-f(x)-\ln 4}{x-2}$.
c)Demonstraţi că $x+1\geq\ln(x+2)$,pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+4}$.
a)Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{4f(x)+x^2f(x)}{x^4+4}\,dx=\frac{\pi}{18}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$.

Testul 87 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{6}+2\right)^2+\left(\sqrt{6}-2\right)^2=20$.
2.Calculaţi produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x-4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2-5x+5)=0$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 4,5 şi 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ şi $B(2,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Arătaţi că $\sin(x-\pi)-\sin(\pi+x)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&4x\\0&1&0\\2x&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(0)\big)=1$.
b)Arătaţi că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2-4)B(4x)=B(x^2+4x-4)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x+3)(y+3)-3$.
a)Arătaţi că $(-3)\circ 3=-3$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=29$.
c)Calculaţi $(-1)\circ(-2)\circ(-3)\circ\ldots\circ(-2016)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{5}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{20}\cdot x+3$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2e^x$.
a)Arătaţi că $\int_3^4\frac{1}{x^2}f(x)\,dx=e^3(e-1)$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(0)=1$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $I_n+(n+2)I_{n-1}=e$,pentru orice număr natural n,$n\geq 2$.

Testul 88(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 4i$ şi $z_2 = 2 - 4i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(2)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 4x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x - 125 = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x+2 şi punctul $A(3,2)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin(\pi - x)\sin x + \cos(x - \pi)\cos x = -1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 2x \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=0.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x) + B(x)\cdot A = B(6x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x) = B(2x^2 + 2x - 8)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 3X^2 + 5X + m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru $m=-15$,demonstraţi că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2x+2)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big)^x$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x$.
a)Arătaţi că $\int_2^4 (f(x) - 2x)\,dx = e^x(e - 1)(e + 1)$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = e + 2016$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2 + 29)$.

Testul 89 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 5$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(4,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^{x-1} = 8^{1-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mare sau egal cu 60.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,4).Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 3.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=10,AC=10 şi BC=16,Arătaţi că sinC= $\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx - y - z = 1 \\ -x + my - z = 1 \\ -x - y + mz = -m \end{cases}$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq -1$ şi $m\neq 2$.
c)Pentru m=2,determinaţi soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 3y_0 + 5z_0 = 15$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+6x+6y-15$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=3$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=17$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 18\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-3)(x+3)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$.
a)Arătaţi că $\int_4^8 (x-3)f(x)\,dx = \ln 2$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[4,5]\to\mathbb{R}, g(x) = xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Testul 90(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a-b)(i-1)=(a+b-1)(i+1)$,unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-mx+2$,are valoarea minimă egală cu -2.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x=\log_x 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre numere prime.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,a)$,$B(0,-2)$ şi $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că AB+BC=AC.
6.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin a\right)^2=2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & m & 1\\ 1 & m & m\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $\det(A(1))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-5x-5y+30$.
a)Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $1*2*3*...*2016$.
c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că $a<b<c$ şi $a*b*c=8$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x(x+2)}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\right)^n$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x+2016x}{x}$.
a)Calculaţi $\int_3^6\frac{1}{\ln x+2016x}f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=2017-\frac{2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

Testul 91(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_2 = 3$.
2.Determinaţi valorile reale m,ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x) = x^2 - 2x + m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4 x = \log_x 4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,5) şi N(5,1).Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
6.Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC în care AB=5,BC=6 şi B=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(2))$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
c)Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(50)) = -2 \cdot 25^3 \cdot 51^2$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - mX^2 + 4X - 1$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(3) - f(-3)$.
b)Determinaţi restul împărţirii lui f la X+3,ştiind că restul împărţirii polinomului f la X−3 este egal cu 2.
c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 19$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-2,2)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,$x\in(-2,2)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-2,2)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_3^4 x^n e^x\, dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1 = e^3 \cdot (3e - 2)$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3(4^{n+1}e - 3^{n+1})$, pentru orice număr natural n.

Testul 92(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi partea reală a numărului complex $z=1+3i+2i^2$.
2.Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=4x+3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-2x}=5^{3x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,4 şi 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+9\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=(m-1)\vec{i}+27\vec{j}$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=AC=4 şi $BC=4\sqrt{2}$.Determinaţi cosB.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2-2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(-y)=A(x-y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX-3$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(3)=3(a+2)$.
b)Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2+X+1.
c)Pentru $a=-2$,rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(3^x)=0$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{xe^x}{x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x^2+3x+3)e^x}{(x+3)^2}$,$x\in(-3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puţin o soluţie în intervalul (1,2).
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{2+x^n}dx$.
a)Arătaţi că $I_1=1-2\ln\frac{3}{2}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 93(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{6}+1\right)^2+\left(\sqrt{6}-1\right)^2=14$.
2.Calculaţi produsul f(1)f(2)f(3)f(4)f(5),unde f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2-6x+9)=0$.
4.Determinaţi câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 2,3 şi 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,4) şi B(4,5).Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.
6.Arătaţi că $\cos(\pi-x)-\cos(\pi+x)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&4x\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(0)\big)=1$.
b)Arătaţi că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+2)B(x)=B(x^2+x+2)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x-5)(y-5)+5$.
a)Arătaţi că $(-5)\circ 5=5$.
b)Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=13$.
c)Calculaţi $1\circ2\circ3\circ\ldots\circ2016$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{5}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
c)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-5x+7$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x+2)e^x$.
a)Arătaţi că $\int_2^3\frac{1}{x+2}f(x)\,dx=e^2(e-1)$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(x+2)^n f(x)\,dx$. Arătaţi că $I_n+(n+1)I_{n-1}=3^{n+1}e-2^{n+1}$,pentru orice număr natural n,$n\geq2$.

Testul 94(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_2 = 7$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(4,3)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - 2x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{3-x} = 5^{x-3}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(3,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 3.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=9,AC=12 şi BC=15.Arătaţi că cosC= $\frac{3}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(2xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(13)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 4X^2 + 4X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=8,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x - \sqrt{x^2+4}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,f(x)=lnx+2016x.
a)Arătaţi că $\int_1^{e^{2016}} \frac{1}{x}dx = 2016$.
b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x) - 2016x)^n dx = \frac{1}{2016}$.

Testul 95 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 3$.
2.Determinaţi numărul real a,știind că punctul $A(2,a)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 9$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{x-3} = 2^{3-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 50.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=13,AC=10 şi BC=13,Arătaţi că $\sin A = \frac{12}{13}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 3 & 3 \\ 3 & -m & 3 \\ 3 & 3 & -m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} -mx + 3y + 3z = -3 \\ 3x - my + 3z = -3 \\ 3x + 3y - mz = m \end{cases}$,
unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 54$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq -3$ şi $m\neq 6$.
c)Pentru m=6,determinaţi soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+6x+6y-15$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-3)(y-3)+3$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=3$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=11$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 64\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{4(x-4)(x+4)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$.
a)Arătaţi că $\int_4^{12}(x-3)f(x)\,dx = \ln 3$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[4,5]\to\mathbb{R}, g(x) = xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Testul 96(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 5$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 4x + 7$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(5^x - 1)(5^x - 5) = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu conţină cifra 2.
5.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AB=4.Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
6.Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că B= $\frac{\pi}{2}$ şi BC=6.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ a & 3 & 3 \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 27$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 27$.
c)Determinaţi matricea X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ştiind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$.
2.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f=$X^3 - 3X^2 + 4X + m$,unde m este număr real.
a)Calculaţi f(2).
b)Arătaţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
c)Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 10$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{\ln x + 2016x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,$x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) \leq \frac{1 + 2016e}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2.Se consideră funcţiei f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - x + 1$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{f(x)}\,dx$.Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x-1}{f(x)}\,dx = \ln 7$.

Testul 97(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x pentru care numerele 3,3x+3 şi 15 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+9}=x+3$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,ştiind că a,b$\in\{2,5,6,7\}$ şi a≠b.
5.În dreptunghiul ABCD,cu AB=4 şi BC=3,se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OD}$,unde $\{O\}=AC\cap BD$.Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.
6.Calculaţi sinusul unghiului B al triunghiului ABC în care AB=6,AC=4 şi sinC=$\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ -1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$.
a)Calculaţi $\det(A(0))$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $(A(a))^2-A(a)=2I_3$.
c)Determinaţi inversa matricei $A(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+4X-1$,unde m este număr real.
a)Calculaţi $f(3)-f(-3)$.
b)Determinaţi restul împărţirii lui f la X+3,ştiind că restul împărţirii polinomului f la X−3 este egal cu 2.
c)Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\frac{11}{2}$,unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(-3,3)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$.
a)Calculaţi $f'(x)$,x$\in(-3,3)$.
b)Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-3,3)$.
c)Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_2^3 x^n e^x\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_1=2e^3-e^2$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=3^{n+1}e^3-2^{n+1}\cdot e^2$, pentru orice număr natural n.

Testul 98(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $(1-2i)^2$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care dreapta de ecuaţie x=3 este axă de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+2$.
3.Se notează cu g inversa funcţiei bijective $f:(0,+\infty)\to(3,+\infty)$,$f(x)=3^x+2$.Determinaţi $g(5)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de două cifre acesta să fie format din cifre divizibile cu 3.
5.În ΔABC punctele M,N,P sunt mijloacele laturilor AB,BC şi respectiv AC.Arătaţi că $2\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
6.Fie x un număr real care verifică egalitatea tgx+ctgx= $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Arătaţi că sin2x= $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & a & 1\\ 9b^2 & 3b & 1\end{vmatrix}$,unde a şi b sunt numere reale.
a)Arătaţi că $D(2,1)=-2$.
b)Verificaţi dacă $D(a,b)=(1-a)(3b-1)(3b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n^2,n)$, unde n este un număr natural nenul.Determinaţi numărul natural n,n≥3,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 28.
2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-6X^2-X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=10,arătaţi că $f(2)=-8$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_3=x_2$.
c)Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=24(x_1+x_2+x_3)$,arătaţi că f se divide cu X−5.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{e^x}{3x+e^x}$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{3e^x(x-1)}{(3x+e^x)^2}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+3}$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
2.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^2e^{-nx^3}\,dx$.
a)Calculaţi I_0.
b)Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{3n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 99(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 0$ şi $a_2 = 2016$.
2.Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f:$[1,5] \to \mathbb{R}$,$f(x) = x + 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2 - 7x) = \log_4 8$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,4}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2),B(5,1) şi C(7,0).Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că ABCD este paralelogram.
6.Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC în care BC=1,B=$\frac{\pi}{6}$,C=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(2) + A(4) + A(6) + \cdots + A(200) = 100 \cdot A(101)$.
c)Aflaţi numerele reale a ştiind că $A^2(a) - 2A(a) + I_3 = 0_3$.
2.Se consideră polinomul f=$X^3 - 6X^2 + mX + 3$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 3$.
b)Determinaţi numărul real m pentru care $x_1 = x_2 + x_3$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=18,arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x(x^2 - 10x + 25)$
a)Arătaţi că $f'(x) = e^x(x^2 - 8x + 15)$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^x(x-5)^2 \leq 4e^3$,pentru orice $x\in(-\infty, 5]$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1 - x^5)^n \, dx$.
a)Calculaţi I_1.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
c)Demonstraţi că $I_{n+1} = \frac{5(n+1)}{5n+6} \cdot I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 100(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + 3i$ şi $z_2 = 3 - 4i$.Arătaţi că $4z_1 + 3z_2 = 25$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 - 2x + 5$.Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4} = 5 \cdot 5^{4x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 2 şi cu 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3), B(3,6)$ şi $C(m, 0)$,unde m este număr real.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctele A,B şi C sunt coliniare.
6.Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC,ştiind că AB=$6\sqrt{2}$,BC=8 şi B=$\frac{\pi}{4}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x + y + 2z = 0, \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(9)) = 0$.
b)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.
c)Demonstraţi că,dacă sistemul are soluţia (x_0, y_0, z_0),cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $x_0 - y_0 + z_0 = 13(x_0 + y_0 + z_0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+8x+8y+56.
a)Arătaţi că x∘y=$(x + 8)(y + 8) - 8$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că x∘x=x.
c)Determinaţi numărul real a,ştiind că $2018^a \circ (-7) = 1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(4, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{4-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{4-x+x\ln x}{x(4-x)^2}$, $x\in(4, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că xlnx>x−4,pentru orice $x\in(4, +\infty)$.
2.Se cosideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = e^x + 6x^2$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - 6x^2)\,dx = e(e - 1)$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{5}{2}$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu $2n^2 - n + 1$.

Testul 101 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=2+3i.Arătaţi că $z+\bar{z}+z\bar{z}=17$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2.Determinaţi numărul real m,ştiind că punctul $A(2,m)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_2 x)(2-\log_3 x)=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra zecilor mai mică sau egală cu cifra unităţilor.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(1,3)$ şi $C(0,2)$.Determinaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
6.Arătaţi că $(3+tg^2x)\cos^2x+(3+ctg^2x)\sin^2x=4$,pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5^x & x\\ 1 & 25^x & 2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=4$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x))=(5^x-1)(5^x+x-x\cdot 5^x)$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2018)=\begin{pmatrix}2018 & 2018 & 2018\\ 2018 & \frac{5(5^{2018}-1)}{4} & 1009\cdot 2019\\ 2018 & \frac{25(25^{2018}-1)}{24} & 2018\cdot 2019\end{pmatrix}$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătaţi că $x*y=5(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstraţi că,dacă a,b şi c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=24$,atunci numerele a,b şi c sunt egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2020}+2020x+3$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2020(x^{2019}+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,2023)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+3x+4}dx$.
a)Calculaţi $\int_0^1(x^2+3x+4)\,dx$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}+3I_n+4I_{n-1}=\frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,$n\geq 2$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{8}$.

Testul 102(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $(-17,17)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2-25$.Calculaţi $(f\circ f)(5)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+2}=x-3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,100\}$,acesta să fie multiplu de 21.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,3)$ şi $N(5,3)$.Determinaţi coordonatele punctului P,situat pe axa Ox,astfel încât PM=PN.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $AC=6\sqrt{3}$ şi $B=\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\0&x&0\\6&0&0\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculaţi $\det(A(3))$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p)=3B(1)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-aX^2+8X+4$,unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(2)=0$.
b)Pentru $a=-2$,determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+4X+2.
c)Demonstraţi că,dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+4}}$.
a)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{3x}=\frac{1}{\sqrt{e^9}}$.
c)Demonstraţi că pentru orice număr real a,$a\in\left(-\frac{4}{\sqrt{7}},-1\right)$,ecuaţia $f(x)=a$ are exact două soluţii reale distincte.
2.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ şi,pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(2-\sqrt{3}\right)$.
b)Demonstraţi că $I_n\leq\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(2n+1)I_n=4-6nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,$n\geq2$.

Testul 103(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 9 - 6i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2 + 3z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3x + 1$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2 - 16) = \log_5(9x - 24)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 9.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=5x-2018$ şi punctul $A(2,1)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 2x + ay + 3z = 15 \\ 2x + 3y + az = 14 \end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a)) = 2(a - 1)(a - 3)$,pentru orice număr real a.
b)Determinaţi numerele reale m pentru care $A(m)A(2 - m) = A(2 - m)A(m)$.
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0, y_0, z_0),iar x_0, y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-5xy+15x+15y-42$.
a)Arătaţi că $x*y=3-5(x - 3)(y - 3)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele naturale n,ştiind că $(n * n) * n = n$.
c)Arătaţi că,dacă $a*a=b$ şi $b*b=a$,atunci $a=b=3$ sau $a=b=\frac{14}{5}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-5, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 5) - e^x + 5$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{1}{x+5} - e^x$, $x\in(-5, +\infty)$.
b)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(-5, +\infty)$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_1^e x\ln^{n+3}x\,dx$.
a)Arătaţi că $\int_1^e x^3\,dx = \frac{e^4-1}{4}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $2I_{n+1} + (n + 4)I_n = e^2$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 104(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\frac{3+i}{3-i}+\frac{3-i}{3+i}=\frac{8}{5}$,unde $i^2=-1$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(2m-1)x+m^2-m+2=0$.Arătaţi că $(x_1-x_2)^2=-7$,pentru orice număr real m.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-6}=8-x$.
4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre impare.
5.Se consideră triunghiului ABC şi punctele M,N şi P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstraţi că $\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BP}$.
6.Determinaţi numerele reale x,ştiind că sin2x=$\sqrt{2}$cosx şi x$\epsilon\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 1-x \\ 0 & -1 & 0 \\ 2(x-1) & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=-2$.
b)Demonstraţi că $\det(A(x)A(-x))\leq 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătaţi că,dacă numerele naturale m şi n verifică relaţia $A(m)A(n)=-A(3)$,atunci m+n=4.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+aX-8$, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a,ştiind că $f(2)=0$.
b)Pentru a=2,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+4.
c)Determinaţi numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(5,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{5-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5-x+x\ln x}{x(5-x)^2}$, $x\epsilon(5,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că xlnx>x−5,pentru orice $x\epsilon(5,+\infty)$.
2.Se cosideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+4x^2$.
a)Arătaţi că $\int_3^4(f(x)-4x^2)\,dx=e^3(e-1)$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=2$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$g(x)=f(x)-e^x$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=n are aria egală cu n^2+6n+9.

Testul 105(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 2018$ şi raţia r=3.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(2,4)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{4x-4} = 25^{3x-2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să conţină cifra 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(5,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei AB.
6.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{5}{13}$,arătaţi că $\sin 2x=\frac{120}{169}$.

Subiectul II

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & a^2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+ay+a^2z=0\\ 2x-y+z=2\\ 2x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq -1$ şi $a\neq\frac{1}{3}$.
c)Determinaţi numerele reale a,pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+5x+5y-20$.
a) Arătaţi că $x*y=5-(x-5)(y-5)$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x,pentru care $x*x=1$.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=5$,atunci produsul numerelor m,n şi p este divizibil cu 5.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c) Demonstraţi că,pentru orice număr real a,$a\in(-1,1)$, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x(x-3)$.
a)Arătaţi că $\int_0^4 f(x)e^{-x}\,dx=-4$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=3 şi x=5 are aria egală cu $e^3(e^2+1)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{1}(f(x)+3e^x)\,dx=0$.

Testul 106(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1. Determinaţi numărul real a,ştiind că numerele 13,1022 şi a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+m$ este tangentă axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}=32$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{64}\}$,acesta să nu fie număr raţional.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2),B(-1,-3)$ şi $C(3,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este perpendiculară pe dreapta AC.
6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle C)=60°$ şi AB=$6\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2-x\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real a,$a\neq-2$,ştiind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\dots\cdot A\left(\frac{1}{2017\cdot2018}\right)=A\left(\frac{a+1}{a+2}\right)$.
2. Se consideră polinomul f=X^4+mX^2+4,unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m,ştiind că $f(-1)=0$.
b)Demonstraţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1,x_2,x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=5,descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Subiectul III
1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-50\ln x$.
a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-5)(x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.
2. Se consideră funcţia f:$(4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x(x-5)}$.
a)Arătaţi că $\int_6^{12}(x-5)f(x)\,dx=\ln2$.
b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[6,8]\to\mathbb{R}$,$g(x)=xf(x)$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)\,dx\right)=1$.

Testul 107 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $\left(\sqrt{3}-5\right)^2+\left(\sqrt{3}+5\right)^2=56$.
2.Caculaţi produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-3$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2-8x+8)=\log_4 1$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare ,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 2,3,4 şi 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ şi $B(2,1)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 3 & 3\\ 3 & -m & 3\\ 3 & 3 & -m\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-mx+3y+3z=-3\\ 3x-my+3z=-3\\ 3x+3y-mz=m\end{cases}$,
unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=54$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq-3$ şi $m\neq6$.
c)Pentru m=6,determinaţi soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care
$3x_0+2y_0+z_0=17$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+8x+8y-28$.
a)Arătaţi că $x*y=-2(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=4$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=6$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-3$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1, x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstraţi că $f(2\sqrt{5})<f(5\sqrt{2})$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^2\left(\frac{4-x^2}{4}\right)^n dx$.
a)Arătaţi că $I_1=\frac{4}{3}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 108(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(3,a)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{x-2} = 2^{2-x}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mare sau egal cu 40.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=20,BC=20 şi AC=24,Arătaţi că sinA=$\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(4)) = 625$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(2x)\cdot A(3x) = A(x^2+4)$.
c)Ştiind că $A(n) = A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot \ldots \cdot A(2017)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.
2.Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X + a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2018 - 4a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{1,0\}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\right)^n$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
a)Calculaţi $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

Testul 109(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele 5,4x şi x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-m$ este tangentă axei Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x-9}=32^{2x}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\}$, aceasta să aibă cel mult trei elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A$(-3,1)$,B$(2,3)$ şi C$(1,4)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediana din C a triunghiului ABC.

6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care C=$\frac{3\pi}{4}$ şi AB=$4\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -m\\ -m & -m & 1\\ 1 & -m & 1\end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(-1))$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m,pentru care matricea A(m) este inversabilă.

c)Rezolvaţi ecuaţia matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă x∗y=xy+4x+4y+12.

a)Arătaţi că $x*y=(x+4)(y+4)-4$,pentru orice numere reale x şi y.

b)Calculaţi $(-1)*(-2)*(-3)*\ldots*(-2018)$.

c)Determinaţi numerele naturale a,b şi c,ştiind că a<b<c şi a∗b∗c=26.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$, $x\in(1,+\infty)$.

b)Demonstraţi că funcţia f este concavă pe $(1,+\infty)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\cdots+f'(n)\right)=\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2\sqrt{x}f(x)\,dx=\frac{9}{2}$.

b)Arătaţi că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=12$.

c)Determinaţi numărul real a,a>1,ştiind că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi(9\ln a+22)$.

Testul 110(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numerele reale a şi b,ştiind că $(a-2b)(i+1)=(a+2b+1)(i-1)$,unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numerele reale m,pentru care funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-mx+1$,are valoarea minimă egală cu -8.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7 x=\log_x 7$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,a)$,$B(0,-4)$ şi $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinaţi numărul real a,ştiind că AB+BC=AC.
6.Determinaţi $a\in(0,\pi)$,ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{5}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin a\right)^2=2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ -a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-ay+z=1\\ -ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-2$.
b)Demonstraţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ şi $a\neq1$.
c)Determinaţi numerele întregi a, pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0,y_0 şi z_0 sunt numere întregi.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătaţi că $x\circ y=5(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+5$.Demonstraţi că $f(x\circ y)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de2017 ori a}}=5^{2016}-1$.

Subiectul III făc
1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=e^x+3\ln x+2$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{3}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică în intervalul (0,1).
2.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+7}dx$.
a)Arătaţi că $I_0=1+7\ln\frac{7}{8}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}+7I_n=\frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural n.
c)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{8}$.

Testul 111 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x,ştiind că numerele 5,3x şi x^2+3 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2.Determinaţi numărul real m,ştiind că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+m$ este tangentă axei Ox.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{5}\right)^{6x-5}=125^x$.

4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând o submulţime a mulţimii A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A$(-2,0)$,B$(2,0)$ şi C$(2,8)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

6.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care A=$\frac{5\pi}{6}$ şi BC=$\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 3 & 3 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(a))=(a+6)(a-3)^2$,pentru orice număr real a.

b)Calculaţi inversa matricei $A(-5)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c)Determinaţi perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 60.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∗y=3xy+3x+3y+2.Legea „∗”este asociativă şi are element neutru.

a)Arătaţi că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$,pentru orice numere reale x şi y.

b)Calculaţi $\left(-\frac{2017}{1010}\right)*\left(-\frac{2016}{1010}\right)*\ldots*0*\frac{1}{1010}*\frac{2}{1010}*\frac{3}{1010}*\ldots*\frac{2017}{1010}$.

c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „∗”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=8\ln x-x^2$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(2-x)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia f:$(5,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{x(x-5)}$.

a)Arătaţi că $\int_6^{18}(x-5)f(x)\,dx=\ln 3$.

b)Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei g:$[6,8]\to\mathbb{R}$,$g(x)=xf(x)$.

c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)\,dx\right)=1$.

Testul 112(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_2 = 5$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(4,6)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2a - x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{3-x} = 3^{3x+2}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 2.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 2.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AC=5,AB=12 şi BC=13.Arătaţi că sinC= $\frac{12}{13}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(-xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(28)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + 3X^2 + X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=3,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -9x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=2e^x - x^2 - 2x - 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2e^x - 2x - 2$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Demonstraţi că $f(5\sqrt{6})<f(6\sqrt{5})$.

2.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1 - x^4)^n dx$.
a)Arătaţi că $I_1 = \frac{4}{5}$.
b)Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $(4n + 5)I_{n+1} = 4(n + 1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

Testul 113(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(2-4i)+2(1+6i)=8$.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+4x+4$ este tangentă la axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+9}=3^{6x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3 şi 4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(-5,-3)$ şi $C(5,3)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
6.Arătaţi că $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\2x&0&2x\\0&2x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că detA=0.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=6B(x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B(8x^2+8x-8)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+8X+m$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=m$.
b)Pentru m=−1,demonstraţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=32$,unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.
a)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
b)Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f,în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(0)+f(1)+\cdots+f(n)\right)^n$.
2.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$.
a)Calculaţi $\int_1^e\frac{1}{x+\ln x}f(x)\,dx$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=2-\frac{2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$.

Testul 114(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 4i$ şi $z_2 = 2 - 4i$.Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(2)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 4x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x - 27 = 0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 8.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x+2 şi punctul A(3,0). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin(2\pi - x)\sin x - \cos(2\pi - x)\cos x = -1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -4$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m)) = 0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a) \cdot A(a) - A(a^2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4x+4y-xy-12$.
a)Calculaţi $1*4$.
b)Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x * x *\ldots* x}_{\text{x de 2016 ori}}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
2.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x^2$.
a)Arătaţi că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = 2$.
b)Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e.
c)Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}\big(f(x)\big)^n dx = \frac{2^{2017}}{2018}$.

Testul 115(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{2+3i}{3-2i}$.
2.Determinaţi numărul real a,știind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x-a$ are graficul tangent axei Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x}+4\cdot 9^x-45=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7,8,9},aceasta să aibă un singur element număr par.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,2)$ şi $N(1,4)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.
6.Arătaţi că $\big(\sin x-\sin(\pi+x)\big)^2+\big(\cos x+\cos(2\pi+x)\big)^2=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 2 & 2\\ 2 & -m & 2\\ 2 & 2 & -m\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}-mx+2y+2z=-2\\ 2x-my+2z=-2\\ 2x+2y-mz=m\end{cases}$,
unde m este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=16$.
b)Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq -2$ şi $m\neq 4$.
c)Pentru m=4,determinaţi soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care
$x_0+3y_0+5z_0=12$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=-4xy+24x+24y-138$.
a)Arătaţi că $x*y=-4(x-6)(y-6)+6$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=6$.
c)Determinaţi numerele naturale m şi n,pentru care $m*n=38$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x^2+4x+5}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{8(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x^2+4x+5)^2}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big)^x$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(f(x)+x)\,dx=e-1$.
b)Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(2)=e^2-5$.
c)Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2-13)$.

Testul 116(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi numărul real x ştiind că numerele 4,8 şi x+6 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2.Arătaţi că parabola asociată funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=-x^2+x-4$ este situată sub axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2+2}=3$.
4.Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ şi $B(4,-2)$.Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.
6.Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculaţi sin2x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\0&0&2^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(10))=1024$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A(x^2+2)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-6X+a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2015-2a$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^2-4x+4)\cdot e^x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=(x^2-2x)\cdot e^x$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că $e^x\cdot(x-2)^2\leq 4$,pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3x+9}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2-3x+9)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^3(f(x)-x-3)\,dx=\frac{-6\pi}{\sqrt{3}}$.
c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{36}$.

Testul 117(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{3-2i}{2+3i}$.
2.Determinaţi valorile reale ale lui a,ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+x-a$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+4\cdot 4^x-40=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7},aceasta să aibă un singur element număr impar.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(1,4)$.Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.
6.Arătaţi că $\left(\sin x-\sin(x-\pi)\right)^2+\left(\cos x+\cos(x-2\pi)\right)^2=4$, pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\left(A(5)\right)=243$.
b)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(2x)\cdot A(3x)=A(x^2+4)$.
c)Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2017)$,demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+6X-a$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(0)=-a$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-5a$, unde x_1,x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x+1}{x-e^x}$.
a)Calculaţi $f'(x),x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}$.
a)Calculaţi $\int_0^4 f^2(x)\,dx$.
b)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătaţi că $nI_n=\sqrt{17}-16(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,n≥3.

Testul 118(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_2 = 7$.
2.Determinaţi numărul real a,ştiind că punctul $A(2,6)$ aparţine graficului funcţiei f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a + x$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{5-x} = 3^{4x+4}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,2)$.Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu -3.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 şi BC=13.Arătaţi că cosC= $\frac{12}{13}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 3$.
b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(2xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(13)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 3X^2 + X + m$, unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = m$.
b)Pentru m=1,arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul natural prim m,ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\frac{xe^x}{x+3}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x^2+3x+3)e^x}{(x+3)^2}$,$x\epsilon(-3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x) = 1$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,2)$.
2.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^n}dx$.
a)Arătaţi că $I_1 = 1 + 4\ln\frac{4}{5}$.
b)Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 119(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ şi $z_2 = 6 - 9i$.Arătaţi că numărul $z_1z_2 + 3z_1 + z_2$ este real.
2.Calculaţi $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = x^2 + x + 2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2 - 4) = \log_2(4x - 7)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 6.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=4x−2018 şi punctul A(2,1). Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6.Arătaţi că $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos x = 0$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a)) = (2a + 1)(a - 1)^2$,pentru orice număr real a.
b)Calculaţi inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
c)Determinaţi perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 27.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∗y=4xy−8x−8y+18. Legea „∗”este asociativă şi are element neutru.
a)Arătaţi că $x*y = 4(x - 2)(y - 2) + 2$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Calculaţi $\frac{1}{502} * \frac{2}{502} * \frac{3}{502} * \ldots * \frac{2016}{502}$.
c)Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea „∗”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + e^x$.
a)Calculaţi $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x) \geq 3x + 1$ pentru orice număr real x.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2 + 2x + 4)f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - x + 2)\,dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{16}$.

Testul 120(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + 3i$ şi $z_2 = 3 + 2i$.Arătaţi că $2z_1 - 3z_2 = -1$.
2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3mx + 5 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x + 12) + \log_5(x - 12) = 2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 2.
5.Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.
6.Arătaţi că $(\sin 2x - \cos 2x)^2 + \sin 4x = 1$,pentru orice număr real x.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+4 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0)) = -4$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 32$.
c)Determinaţi matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(0) \cdot X = A(2)$.
2.Se consideră polinomul $f = -X^3 + (m+2)X^2 - (m^2+2)X + 1$,unde m este număr real.
a)Arătaţi că $f(0) = 1$,pentru orice număr real m.
b)Demonstraţi că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_2 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6e^x - 3x^2 - 6x - 2$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 6(e^x - x - 1), x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+6)^n$, unde n este număr natural nenul.
a)Arătaţi că $\int_{-6}^{0} (x+6)^2 \, dx = 72$.
b)Pentru n=1, arătaţi că $\int_0^1 f(x)e^x \, dx = 6e - 5$.
c)Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−4 şi x=−2 are aria egală cu $\frac{240}{n+1}$.

Testul 121(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(5-2i)^2+(5+2i)^2=42$,unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-10x+21$.Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x-2}=x-1$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,1) şi B(4,3).Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
6.Calculaţi aria paralelogramului ABCD, ştiind că AB=$6\sqrt{3}$,BC=3 şi $m(\sphericalangle ABC)=60°$.

Subiectul II

1.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\0&0&2x\\2x&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=8$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z)=8xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.
2.Se consideră polinomul f=X^4+aX^2+16, unde a este număr real.
a)Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(2)=0$.
b)Pentru a=-8, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2-X+2.
c)Determinaţi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(2i)=0$, unde $i^2=-1$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$,x$\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x)=3-\frac{3}{e^x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(e^x+1)f(x)\,dx=3e-3$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 x^5\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.
c)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 are aria mai mică decât ln8.

Testul 122 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi elementele mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{11}{x+1}\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-6=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{35}{6}$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{42-x}-x=0$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{\log_3 n\,|n\in\mathbb{N}^*, n\leq 100\}$, acesta să fie număr natural

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,2)$ şi $P(0,4)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.

6.Se consideră triunghiul ABC cu $AC=7\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle B)=45°$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$.Determinaţi lungimea laturii AB.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ m & -1 & -1\\ 1 & m & 3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+y+4z=5\\ mx-y-z=-2\\ x+my+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=-3$.

b)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

c)Pentru m=1, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4x_0^2=(y_0+z_0)^2$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{7}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{21}{4}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\frac{1}{7}\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(y-\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{2}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

c)Demonstraţi că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziţie „$*$” să fie natural.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-\ln(x^2+2x+2)$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{6}{5}x+2$.

c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

a)Arătaţi că $\int_0^3 e^x f(x)dx=9$.

b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$ are aria egală cu $e-\frac{3}{e}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Testul 123(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1=2-i$ şi $z_2=7-4i$.Arătaţi că $4z_1-z_2=1$.
2.Derminaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(a+1)=43$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot 5^x-5^{x+1}+50=0$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+2)\geq 48$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(10,4)$,$B(2,6)$ şi $C(m,5)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
6.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AB=5 şi aria triunghiului ABC este egală cu 30.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>1.
a)Arătaţi că $\det\big(A(3)\big)=2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a şi b , a>0,b>0.
c)Determinaţi numărul real a,a>0, ştiind că $A(a)A(a)A(a)=A(28)$.
2.Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=-X^3-mX^2+mX-2$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(-2)=0$.
b)Pentru m=1, determinaţi rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$.Demonstraţi că $a\in[3,+\infty)$,pentru orice număr real m.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+3x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+4)(x+1)$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\ln x^2}$.
a)Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.
b)Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.
c)Determinaţi numărul real a, a>e, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=e şi x=a are aria egală cu 4a.

Testul 124(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=(4+i\sqrt{2})(4-i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,8)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-a$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2017^{2x}+2017^{-2x}=2$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de tre cifre, acesta să aibă cifra zecilor impară.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$ şi$B(2,-1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
6.Arătaţi că $\sin(b-a)\sin(a+b)=(\sin b-\sin a)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 0 & -2a\\ 0 & 2 & 0\\ -2a & 0 & 2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=2A(2ab)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Demonstraţi că matricea $B=A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot A(\log_5 6)\cdot\ldots\cdot A(\log_{26}27)$ are toate elementele numere întregi.
2.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+2n$, unde m şi n sunt numere reale.
a)Arătaţi că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m şi n.
b)Determinaţi numerele reale m şi n , ştiind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
c)Demonstraţi că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=1$, pentru orice numere reale m şi n, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^6e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x^5(6-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că , pentru orice $a\in\left(0,\frac{6^6}{e^6}\right)$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2+\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln x)dx=14$.
b)Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-6x^2+f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e^2$ are aria egală cu $\frac{5e^2-1}{2}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1}x^n(f(x)-6x^2)\,dx=0$.

Testul 125(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$.

2.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + mx + 3 = 0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $3x_1 + 3x_2 + 4x_1x_2 = 6$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 5$.

4.Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(8,6) şi B(6,4).Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu BC=$3\sqrt{3}$, AC=4 şi C= $\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - ay - z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 0$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a)) = a(a-1)(a+1)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstraţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0,y_0 şi z_0 numere întregi.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+2019)(y+2019)-2019$.

a)Arătaţi că $x*(-2019)=-2019$, pentru orice număr real x.

b)Determinaţi numerele reale x, ştiind că $(x*x)*x = x$.

c)Determinaţi perechile de numere întregi m şi n pentru care $m*n=-2020$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x) = \sqrt{x} - 2\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{2x}$,$x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $\sqrt{x} - 2\ln\frac{x}{16} \geq 4$, pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x^2}{x^2+16}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+16)f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 126(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}|n-1\leq 5\}$ este egală cu 21.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu -6.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4}=\sqrt{10-x}$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 8 elemente ale unei mulţimi cu exact 10 elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$,$B(-4,0)$ şi $C(8,10)$.Determinaţi lungimea segmentului AD, unde punctul D este mijlocul segmentului BC.
6.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2025\pi=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a-1&0&0\\1&a&1\\0&0&a-1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=2$.
b)Demonstraţi că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b-1)A(0)$, pentru orice numere reale a şi b.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(0)A(2)A(3)\cdot...\cdot A(2050)=n!\,A(0)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2-4X+3-m$, unde m este număr real.
a)Determinaţi numărul real m, ştiind că $f(1)=0$.
b)Pentru m=3, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real m, pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3+12$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}-1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-x}{x(x+1)^2}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Se consideră funcţiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ şi $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+36}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{109}{3}$.
b)Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$, are aria egală cu $\frac{74\sqrt{37}-432}{3}$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3f(t)\,dt$.

Testul 127 (Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 18.Determinaţi a_2.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+4$.Arătaţi că $(f\circ f)(-2)=4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x-2)=5-\log_3(x+16)$.

4.Dterminaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC şi punctual E mijlocul segmentului BD. Arătaţi că $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6.Se consideră triunghiul ABC cu $AC=4\sqrt{3}$, $A=\frac{5\pi}{12}$ şi $C=\frac{\pi}{4}$.Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+az=1\\ ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=0$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care matricea A(a) are rangul 2.

c)Determinaţi numărul real a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+\frac{1}{3}(x+y)-\frac{2}{9}$. Legea de compoziţie este asociativă şi are elemental neutru $e=\frac{2}{3}$.

a)Demonstraţi că $x*y=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x şi y.

b)Determinaţi numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

c)Arătaţi că **nu** există numere întregi x şi y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziţie „$*$” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-16x+32\ln x+48-32\ln 4$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-4)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A(3,3) şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctual de abscisă x=4, situat pe graficul funcţiei f.

c)Se consideră numerele reale a,b şi c astfel încât punctul M(a, b) este situat pe graficul funcţiei g:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=x^2-32\ln 4+32\ln x$ şi punctul N(a, c) este situat pe graficul funcţiei h:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=16x-48$.Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[4,+\infty)$

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2+16}$.

a)Arătaţi că $\int_0^1(x^2+16)f(x)dx=-\frac{47}{3}$.

b)Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_1^4 x^n f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Testul 128(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $a=7-5\sqrt{2}-\frac{1}{7-5\sqrt{2}}$ este natural.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$.Arătaţi că $(f\circ f)(1)=f(3)-4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x^2}=2\cdot 2^x$.

4.Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ are exact 21 submulţimi cu două elemente.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,1)$,$N(0,5)$ şi $A(4,a)$,unde a este număr real.Ştiind că AM=AN, arătaţi că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .

6.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $5\cos x-4=4\cos 2x$.Calculaţi cosx.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2-a\\ a & a-2 & 2a-5\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x+ay+(2-a)z=1\\ ax+(a-2)y+(2a-5)z=-4\\ ax+y+z=2-a\end{cases}$$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-3$.

b)Demonstraţi că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.

c)Determinaţi numărul natural a pentru care sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0) şi x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\log_4(4^x+4^y)$.

a)Arătaţi că $0*0=\frac{1}{2}$.

b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=2+\log_4 3$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+9}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$,$x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că,pentru orice $m\in\left(\frac{\sqrt{35}}{2},3\right)$ ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+17}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{97}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{20}{17}$, unde $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+17}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 129(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul $n=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
2.Se considera funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(x)+f(2-x)=8$, pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^x+7^{-x}=2$.
4.Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conţin pe 1.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-5,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.
6.Triunghiul ABC este dreptunghic în A şi cosC=sinC.Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a^2+2 & a^2+3 & a^2+1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big)=-1$.
b)Demonstraţi că pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă .
c)Determinaţi numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.
2.Pe mulţimea $A=[1,+\infty)$se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+28}$.
a)Arătaţi că $1*2021=1$.
b)Demonstraţi că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{27}(x^3-1)(y^3-1)+1}$.
c)Determinaţi $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-4}+\ln\frac{x-1}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-7x+16}{x(x-1)(x-4)^2}$, $x\in(4,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $\frac{1}{x-4}>ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(4,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+27}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^3+27)f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{28}{27}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 130(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex z=3+i.Arătaţi că $z^2 - 6z + 10 = 0$.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(0,-2)$ aparţine graficului funcţiei f.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3 - 2x}$.

4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulţimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra miilor egală cu 2 şi cifra unităţilor egală cu 1.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,5),B(2,3) şi $C(8,a)$, unde a este un număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

6.Măsurile unghiurilor A,C şi B ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai Unei progresii aritmetice.Demonstraţi că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\ln x \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

a)Arătaţi că $\det\big(A(1)\big) = 1$.

b)Demonstraţi că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y= xy - 8(x + y) + a$, unde a este număr real.

a)Pentru a=36, arătaţi că 1∗3=7.

b)Pentru a=72,arătaţi că e=9 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗".

c)Demonstraţi că, dacă $a\in[72,+\infty)$, atunci mulţimea $H=[8,+\infty)$ este parte stabilă a mulţimii numerelor reale în raport cu legea de compoziţie „∗" .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x)=12^x - 6^x + 2^x$.

a)Arătaţi că $f'(0) = \ln 4$.

b)Se consideră tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f. Determinaţi numărul real a pentru care $A\big(a,\ln(16e)\big)$ este este situat pe această tangentă.

c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= 1-\frac{2x}{x^2+5} - \frac{4}{x^2+5}$.

a)Arătaţi că $\int_1^2 (x^2 + 5)f(x)dx = \frac{1}{3}$.

b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = \sqrt{5} - \ln 2 - \frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x)\,dx$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Testul 131(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numărul N=$\log_3 6 - 4\log_3 2 + \log_3 24$ este natural.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=$x^2 - x - 2$.Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=-2 intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{2x - 1}$.
4.Dterminaţi numărul de elemente ale unei mulţimi A, ştiind că mulţimea A are exact 6 submulţimi cu două elemente.
5.Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N şi P mijloacele segmentelor BC,BM, respectiv CM. Arătaţi că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = -\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right)$.
6.Determinaţi x$\epsilon(0, \pi)$,ştiind că $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ ab & ac & bc \end{pmatrix}$ unde a,b şi c sunt numere reale.
a)Arătaţi că $\det\left(A(0,2,1)\right) = 2$.
b)Demonstraţi că $\det\left(A(a, b, c)\right) = (b - c)(a - c)(a - b)$, pentru orice numere reale a,b şi c.
c)Demonstraţi că,dacă m,n şi p sunt numere naturale, cu p<n<m, astfel încât determinantul matricei $A(m, n, p)$ este număr prim, atunci numerele m,n şi p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2.În mulţimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul f=$X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$, unde a,b$\epsilon\mathbb{Z}_3$.
a)Pentru a=$\hat{2}$ şi b=$\hat{1}$, arătaţi că $f(\hat{2}) + f(\hat{0}) = \hat{2}$.
b)Determinaţi perechile (a, b), cu a,b$\epsilon\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu X+$\hat{1}$.
c)Arătaţi că, pentru orice a,b$\epsilon\mathbb{Z}_3$, există x,y $\epsilon\mathbb{Z}_3$, cu x≠y, astfel încât $f(x) = f(y)$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=$\frac{xe^x}{e^x+6}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{e^x(e^x+6x+6)}{(e^x+6)^2}$, x$\epsilon\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că dreapta de ecuaţie y=x este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=$\frac{2(x+7)}{\sqrt{x^2+12x+37}}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2 + 12x + 37}dx = 15$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 (f^2(x) - 4)dx = 4\ln\frac{37}{26}$.
c)Se consideră numerele reale a şi b, cu 0≤a<b. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \infty$.

Testul 132(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9+3i)$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ şi $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=5x-20$ .Calculaţi $(g\circ f)(2)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-2}=\frac{1}{16}$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 10.
5.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=4,BC=6 şi măsura unghiului BAC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{BM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AC.
6.Se consideră triunghiul ABC cu AB=6,AC=8 şi BC=10.Arătaţi că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC şi R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2a-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} ax-y-2z=2 \\ 2x-y+3z=1 \\ (2a-1)x-2y+z=a \end{cases}$$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(4))=-5$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.
c)Pentru a=3, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuaţii pentru care $z_0^2=x_0-y_0$.
2.Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_6 y}}$.
a)Arătaţi că 16∗6=4.
b)Arătaţi că e=36 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗” .
c)Determinaţi x∈G, ştiind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziţie „∗” .

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+4$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2x(2x^2-13)$,x∈ℝ.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-4}=\frac{1}{30}$.
c)Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.
a)Arătaţi că $\int_1^3\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=8$.
b)Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{a}-\sqrt{3}+1$.
c)Demostraţi că $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=0$.

Testul 133(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(1+i)^2-2(2+i)+4=0$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $M(1,4)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x^2+4)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 şi cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$,$N(0,1)$ şi $P(3,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul N şi este paralelă cu dreapta MP.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în B.Arătaţi că $tgC=\frac{1}{tgA}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}a+3&0&-a\\0&3&0\\3a&0&3-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=27$.
b)Determinaţi matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ştiind că $aB=A(a)-3I_3$, pentru orice număr real a.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{1}{2}(|x-y|+x+y)$.
a)Arătaţi că $3*0=3$.
b)Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=b$.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(4x)*(x^2+4)*(-4x)=20$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+6}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+6}-x}{\sqrt{x^2+6}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+x+6}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x^2+x+6)f(x)dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_1^2 g(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
c)Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\leq a<b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Testul 134(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Calculaţi media aritmetică a numerelor reale a=$2024-\sqrt{5}$ şi b=$2024+\sqrt{5}$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$ .Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(\sqrt{x}+6)+\log_4(\sqrt{x}-6)=2$.
4.Determinaţi numărul de elemente ale unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 256 submulţimi.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(3,0),N(5,3) şi P(4,3).Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
6.Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care 2sin2A·cosA=sinA.Arătaţi că A=$\frac{\pi}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_4 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde aє$(0,+\infty)$.
a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că, pentru orice aє$(0,+\infty)$, matricea A(a) este inversabilă.
c)Demonstraţi că, pentru orice aє$(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei A(a).
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie x∘y=xy+m(m + 1)−m(x + y), unde m є$(0,+\infty)$.
a)Pentru m=1, arătaţi că 2∘2=2.
b)Demonstraţi că, dacă 2∘1=5, atunci 2∘5=1.
c)Determinaţi numărul real x, ştiind că $(mx^3)\circ(-mx^2)=m$, pentru orice mє$(0,+\infty)$

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6-4\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$,xє$(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii distincte în intervalul $(0,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{2x}{x^4+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^1(x^4+1)f(x)dx=7$.
b)Se consideră F :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.Ştiind că graficul funcţiei F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinaţi panta acestei asimptote.
c)Se consideră funcţia G :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $G(0)=0$.Arătaţi că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

Testul 135(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că numerele $12-6\sqrt{3}$,$\sqrt{6}$ şi $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-1$, unde m este număr real.Determinaţi numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x+2}=4^x+15$.
4.Calculaţi probabilitatea ca,alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra unităţilor multiplu de 3.
5.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MA}=\vec{0}$. Arătaţi că dreptele MD şi BC sunt paralele.
6.Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC, în care AC=4 şi măsurile unghiurilor A şi C sunt de 30° , respectiv 60°.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ şi $A(z)=aI_3-bB$, unde z=a+ib, cu a şi b numere reale şi $i^2=-1$.
a)Arătaţi că $\det B=i$.
b)Demonstraţi că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care
$A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)\cdot A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)=nI_3$.
2.În mulţimea M=$[1,+\infty)$, se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=\log_6(6^{x+y}-6^{x+1}-6^{y+1}+42)$.
a)Arătaţi că $x*y=\log_6\left((6^x-6)(6^y-6)+6\right)$, pentru orice x,yϵM.
b)Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Arătaţi că $x*x*x<3x$, pentru orice xϵM.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x+3)e^{-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=x(-x^2+3x-3)e^{-x}$, xϵ$\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x}=e^{-2}$.
c)Demonstraţi că funcţia g :$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\frac{f(x)}{e^{-x}}-3\right|$ are un singur punct de extrem.
2. Se consideră funcţia f:$(3,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-3)$.
a)Arătaţi că $\int_4^6\frac{f(x)}{\ln(x-3)}dx=10$.
b)Demonstraţi că $F\left(\sqrt{24}\right)<F(5)$, pentru orice primitivă F a funcţiei f.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\int_5^7 f(x)\,dx=m(16\ln2-3)$.

Testul 136(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4(1+2i)-2i(4-i)=2$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-3$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=3+a^2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(3x^2+1)=4$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare şi distincte.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$,$B(1,6)$ şi $C(4,2)$.Determinaţi coordonatele punctului D,ştiind că $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât BC=20 şi sinB=2sinC.Arătaţi că lngimea laturii AB este egală cu $4\sqrt{5}$.
.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}1+x&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
b)Arătaţi că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=(x+y)^2-2(y-x)-3$.
a)Arătaţi că $2*0=5$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $x*(x+1)=4$.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-15x+70)\sqrt{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{5(x^2-9x+14)}{2\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f .
c) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{15}}=\frac{1}{e}$
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+e^x+\frac{1}{e^x+1}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+9$.
b)Arătaţi că $\int_{-1}^1 e^x(f(x)-5x-e^x)\,dx=1$.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Testul 137(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $8-2\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}-1\right)=6$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=3x−m, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=4$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot 5^{2x}+25^{x}=20$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=3x+2 şi punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul A aparţine dreptei d.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=10 şi cosC=0.Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(A(2)\big)=1$.
b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+2)\cdot A(n+4)\cdot A(n+6)=A(16n^2)$.
2.Pe mulţimea M=[0, +∞) se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{6x}{y+6}+\frac{6y}{x+6}$.
a)Arătaţi că 1∗0=1.
b)Demonstraţi că e=0 este elementul neutru al legii de compoziţie „∗”.
c)Determinaţi x∈M, x nenul, pentru care $x*\frac{36}{x}=x$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6+\frac{x}{e^x-x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, x∈$\mathbb{R}$.
b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
c)Demonstraţi că, pentru orice m∈(5, 6], ecuaţia f(x) = m are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8-x+\sqrt{x^2+64}$.
a)Arătaţi că $\int_7^9\left(f(x)-\sqrt{x^2+64}\right)dx=0$.
b)Arătaţi că $\int_0^6\frac{x}{f(x)+x-8}dx=2$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Testul 138(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $2i(3-2i)-6i=4$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m pentru care $f(-1)=f(1)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $81^{x-1}=27^x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(2,-2)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2\sin\frac{2x}{3}\cdot tgx$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&1\\-x&x+1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-2$.
b)Arătaţi că $A(0)\cdot A(x-1)-A(x-2)=2I_3$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(x-1)=3A(0)+2I_3$.
2.Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+4}$.
a)Arătaţi că $2*4=4$.
b)Arătaţi că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{2}{m}*\frac{2}{n}=\frac{1}{25}\cdot[(2m)*(2n)]$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-6x+1}{e^x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(7-x)}{e^x}$,$x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=n$ are soluţie unică, pentru orice număr natural nenul n.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+36}$.
a)Arătaţi că $\int_0^8\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+36}}dx=32$.
b)Arătaţi că $\int_0^{\sqrt{13}}f(x)\,dx=\frac{127}{3}$.
c)Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{f^2(x)}dx$.Determinaţi numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $I_{n+2}+36I_n=\frac{15}{n-1}$.

Testul 139(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $(4-i)^2+i(8+5i)=10$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$.Determinaţi numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=3m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 7.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$,$B(3,-5)$ şi $C(3a,a)$, unde a este număr real nenul.Arătaţi că dreptele AB şi OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.
6.Se consideră expresia $E(x)=\sin x-4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & -2 & a\\ a & -1 & 2a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+(1-a)z=0\\ x-2y+az=0\\ ax-y+2az=0\end{cases}$,
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţie unică.
c)Pentru $a=-1$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2y^2-36(x+y)^2+1$.
a)Arătaţi că $0*1=-35$.
b)Arătaţi că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice numărr real x.
c)Determinaţi perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{2}-\ln(x^2+x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2-3x}{2(x^2+x+2)}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.
2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2(x^3+8)f(x)dx=2$.
b)Arătaţi că $\int_1^4 xf(x)\,dx=\ln 2$.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.

Testul 140(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numărul complex $z=6+i$.Arătaţi că $z(z-2i)=37$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$.Arătaţi că $f(2x)-2f(x)=-1$,pentru orice număr real x.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+2x+2}=x$.
4.Se consideră mulţimea A, a numerelor naturale de două cifre.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, numărul $n+8$ să fie multiplu de 10.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(4,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul O şi este paralelă cu dreapta AB.
6.Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 36.Arătaţi că $BC=12$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & -2 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax+(a+1)y-2z=a \\ x-y+az=4 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases}$,
unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(0))=-8$.
b)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c)Pentru $a=-2$, arătaţi că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+(4^x-4)(4^y-4)$.
a)Arătaţi că $2\circ 3=726$.
b)Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
c)Demostraţi că $x\circ(-x)\leq 9$, pentru orice număr real x.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4\ln\frac{x+6}{x-3}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2+3x-54}{(x-3)(x+6)}$, $x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $\ln\frac{x+6}{4(x-3)}\geq\frac{3}{2}-\frac{x}{4}$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+10x)e^{-x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3 f(x)e^x dx=54$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+10}dx=\frac{e-2}{e}$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=5$.

Testul 141(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_7 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 3$ şi $a_6 = 28$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m, -4)$ aparţine graficului funcţiei f.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1} = 9 \cdot 3^{x-1}$.
4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5}.Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii A, care au cel puţin trei elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) şi B(4,4).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=4 şi înălţimea AD=2.Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -x & -x & -x \\ 1 & -x & 1 \\ -1 & x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 0$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) + A(xy) = (-x - y)A(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2.Se consideră polinomul $f=-X^4 - 2X^3 + 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real..
a)Pentru m=2, arătaţi că $f(1) = 13$.
b)Pentru m=0, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul raţional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{3e^x}{x^2+x+1}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = -\frac{3e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = -\infty$.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact trei soluţii, pentru orice $m\in(-3, -e)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=12x+\ln(x + 1)$.
a)Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1))dx = 18$.
b)Arătaţi că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-12x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.
c)Determinaţi numărul real a, ştiind că aria suprefeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $a\pi+2+\ln 2$.

Testul 142(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 5$ şi $a_2 = 10$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 8$.Determinaţi numărul real m pentru care $f(1 + 2m) = 1 - 2m$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2 - 4x + 7) = \lg 7$.
4.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n + 5}$ să fie natural.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(1,4),B(5,0) şi C(7, a), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele OA şi BC sunt paralele.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghiul în A, cu AC=12 şi $B=\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că $AB=4\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2)) = -3$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$.
c)Arătaţi că, dacă matricea A(x) este inversabilă, atunci şi matricea A(−x) este inversabilă.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy-\frac{1-2x-2y}{4}$.
a)Arătaţi că $1\circ 1=\frac{7}{4}$.
b)Arătaţi că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „∘”.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x^2\right)=\frac{1}{2}-x^2$.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x^3}{(x-3)^2}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x^2(x-9)}{(x-3)^3}$, $x\in(3,+\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(81,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+x\ln x$.
a)Arătaţi că $\int_3^5 (f(x)-x\ln x)dx = 10$.
b)Arătaţi că $\int_1^e (f(x)-x-1)\,dx=\frac{3e^2+1}{4}$.
c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{(f(x)-x\ln x)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{48a}$.

Testul 143(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $4\lg 100+\lg 2+\lg 5=9$.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(5a)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{6x}\cdot 5^5=5^x$.
4.Determinaţi câte submulţimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$ şi $B(6,0)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 72 şi $B=\frac{\pi}{4}$.Arătaţi că AB=12 .

Subiectul II

1.Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(M(2))=16$.
b)Determinaţi numărul real x pentru care $M(x+1)\cdot M(2)=M(x)$.
c)Determinaţi numerele naturale n pentru care $3\det(M(n))\le\det(M(3n))$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2-aX+4a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(4)=0$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=4, arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul g=X+2.
c)Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=12$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-8)+x^2-6x+8$.
a)Arătaţi că $f'(x)=2(x-3)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-e^x}=12$.
c)Arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{3x^2+5}$.
a)Arătaţi că $\int_3^4 f(x)(3x^2+5)dx=14$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}\ln\frac{8}{5}$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $\frac{3e^2+13}{4}$.

Testul 144(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2 = 10$ şi $a_3 = 14$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$.Arătaţi că $(f \circ f)(2) = 12$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 + 6x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulţimii A={1,2,3,4,7,9}.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,2)$ .Determinaţi coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu BC=8 şi AB=$\frac{BC}{2}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 6^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(B(1)\big) = 0$.
b)Arătaţi că $B(x) \cdot B(y) - B(x + y) = xyA$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x + 1) - B(2x) \cdot B(1) = xA$.
2.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + X + 6 - a$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = 8$, pentru orice număr real a.
b)Pentru a=6, determinaţi rădăcinile polinomului f.
c)Determinaţi numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 8$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2 - 30)e^{2x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 30)$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^4 + 9x^2 + 1$.
a)Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x) - 9x^2)dx = \frac{12}{5}$.
b)Arătaţi că $\int_1^9 \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 9}{2}$. .
c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \big(f(2t) - f(t)\big)\,dt\right)$=9.

Testul 145(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_2 = 10$ şi $b_3 = 50$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$Determinaţi numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x \cdot 5^3 = 5^{x+2}$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+1}$ să fie număr natural par.
5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3),B(6,2) şi C(5, a), unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele AC şi OB sunt paralele.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 18 şi $BC=AB\sqrt{2}$. Arătaţi că AC=6.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(x) = \begin{pmatrix} 3x & 8x & -8 \\ -x & -3x & 2 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det\big(M(0)\big) = 0$.
b)Arătaţi că $M(x)\cdot M(y) - xyI_3 = (x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x) - M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right) = 2M(0)$.
2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$x*y=4(x-1)(y-1)+1$.
a)Arătaţi că $1*2=1$.
b)Arătaţi că $e=\frac{5}{4}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
c)Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{16}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziţie „$*$”.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x-4+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{5-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = 5$.
c)Determinaţi cel mai mare număr întreg m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are cel puţin o soluţie.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+8}{e^x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^2 f(x)e^x dx = 18$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx = 9 - \frac{10}{e}$.
c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.Arătaţi că $I_{n+1} + 8I_n \leq \frac{e}{n+1}$, pentru orice număr nenul n.

Testul 146(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - i$ şi $z_2 = 4 + i$. Arătaţi că $4z_1 + iz_2 = 3$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=x+5.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 15$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2 - 5x + 4} = x$.
4.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizor al numărului 3^4.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,2),B(3,0),C(6,4) şi D(a, b), unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că segmentele AC şi BD au acelaşi mijloc.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=2 şi tgB=4.Arătaţi că $BC=2\sqrt{17}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2+3x & 0 & -x \\ 0 & 2 & 0 \\ 9x & 0 & 2-3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 8$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = 2A(x + y)$, pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x) + A(3x)) \cdot A(2x) = 4A(x^2)$.
2.Se consideră polinomul $f=aX^3 + 4X^2 - aX - 8$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) = -4$, pentru orice număr real nenul a.
b)Pentru a=1, determinaţi câtul şi restul împărţiriipolinomului f la polinomul $g=x^2 + 4X - 1$.
c)Determinaţi numărul real nenul a pentru care $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2x+2+\ln\frac{x}{x+2}$.
a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$, $x\epsilon(0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.
2. Se consideră funcţia f:$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$.
a)Arătaţi că $\int_1^4 f(x)(x + 1)^3 dx = 5$.
b)Arătaţi că $\int_0^2 \sqrt{f(x)(x + 1)}\, dx = 2 - \ln 3$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,$g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=−2 şi x=2 este egală cu $\frac{e^2-1}{2(e^2+1)}$.

Testul 147(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(6-5i)+5i(3+2i)=8$, unde $i^2=-1$.
2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+a$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(g\circ f)(2)=2$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(8x-x^2)=\log_2(7+x)$.
4.Se consideră mulţimea A={3,4,6,7,9}.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre disticte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(2,6)$.Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=8 şi raza cercului circumscris egală cu 8. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală $32\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 2a\\ a & 1 & 0\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ax+y=0\\ ax+y+2az=0\\ x+y-az=-1\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=-4$.
b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.
c)Determinaţi numărul real a pentru care sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0,y_0,z_0) şi $x_0=a$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4-7X^3+X^2-6X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=11, arătaţi că $f(1)=0$.
b)Determinaţi numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=2$, unde x_1,x_2,x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=0, determinaţi numerele reale a pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul X−a este egal cu a.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x^2-4)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(5x)-f(x)\le\sqrt{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-1+e^{4x}$.
a)Arătaţi că $\int_0^3(f(x)-e^{4x})dx=24$.
b)Arătaţi că $\int_0^1 16x(f(x)-3x^2+1)\,dx=3e^4+1$.
c)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{f(t)}{t+1}dt=2$.

Testul 148(Prelucrare bacalaureat naţional)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3(\log_3 6-\log_3 2)+\log_3 27=6$.

2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=x+4.Determinaţi numărul real m pentru care $f(2+m)=2-m$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x\cdot 4^{1-x}=2^7$.

4.Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}.Determinaţi câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulţimea A, sunt divizibile cu 5.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$,$B(2,2)$ şi $C(4,6)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC.

6.Se consideră expresia $E(x)=tgx\cdot\left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2-\sin x$,unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ a & 1 & -2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}ay+z=1\\ ax+y-2z=4\\ 2x+4y+z=4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-3$.

b)Arătaţi că sistemul de ecuaţii are soluţie unică, pentru orice număr real a.

c)Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care soluţia (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuaţii verifică inegalitatea $y_0\geq 1$.

2.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=8-\frac{1}{2}(x-8)(y-8)$.

a)Arătaţi că $10*11=5$.

b)Determinaţi numărul real x pentru care $(x+4)*(x+8)=6$.

c)Determinaţi tripletele (m, n, p) de numere naturale, cu m<n<p, pentru care m∗n∗p=7.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x-13)\sqrt{x^2+6}$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2-13x+6}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-13x}{f(x)}\right)^x=1$.

2. Se consideră funcţia f:$(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^3+5+\ln^2 x$.

a)Arătaţi că $\int_1^2(f(x)-\ln^2 x)dx=35$.

b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{f(x)-8x^3-5}{x}dx=\frac{1}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^{e^2}\frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3}dx$. Demonstraţi că $I_{n+2}+5I_n\leq 2^{n-1}(e^4-1)$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 149(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 8$ şi $a_3 = 40$.

2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 3ax - 1$.Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ f)(0) = 4$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x^2 - 6x + 9) = 2\log_2 x$.

4.Se consideră mulţimea A={1,2,4,6}.Determinaţi câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulţimea A.

5.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(2,8) şi B(1,5).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.

6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AC=4 şi tgC= $\frac{1}{2}$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\sqrt{5}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 2a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -4$.

b)Arătaţi că $A(a) \cdot A(b) = A(a + b - 3ab)$, pentru orice numere reale a şi b.

c)Determinaţi numărul real a pentru care $A(1) \cdot A(a) + A(5) = 2A(4)$.

2.Se consideră polinomul $f=-mX^4 + mX^2 + X + 1$, unde m este număr real nenul.

a)Arătaţi că f(−1)=0, pentru orice număr real nenul m.

b)Determinaţi numărul real nenul m pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul g=X+2 este egal cu 11.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$, unde x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+6x+1}{x+1}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = \frac{xe^x+5}{(x+1)^2}$, $x\epsilon(-1,+\infty)$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=7 + \frac{1}{x} + \frac{\ln^2 x}{x}$.

a)Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{\ln^2 x}{x}\right) dx = 14+\ln 3$.

b)Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) - 7 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}$.

c)Determinaţi numărul real m pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)-7}{x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=1 şi x=e este egală cu $m\left(1 - \frac{2}{e}\right)$.

Testul 150(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Arătaţi că $3i(3+i)+3(2-3i)=3$.
2.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, f(x)=2x−5.Determinaţi numărul real a pentru care $a+f(a-2)+f(a+2)=0$.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(7x-12)=\log_2 x$.
4.Se consideră mulţimea A={3,6,9, … ,90}.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$,$B(a,0)$ şi $C(3,b)$ unde a şi b sunt numere reale.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$.
6.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu AB=6 şi B=$\frac{\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A(a)=\begin{pmatrix}3a-2&0&0\\3&-1&3\\1&-a&3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $\det(A(2))=4$.
b)Arătaţi că $A(a)\cdot A(a)=(3a-2)A(a)$, pentru orice număr real a.
c)Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural.Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=n^2A(n)$.
2.Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX-16$, unde a şi b sunt numere reale.
a)Pentru a=6 şi b=2, arătaţi că $f(1)=-7$.
b)Pentru a=b=−1, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X-1$.
c)Determinaţi perechile (a,b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia f:$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{3x^2+1}-\ln(3x^2+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6x(\sqrt{3x^2+1}-1)}{3x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii, pentru orice $m\in(2,+\infty)$.
2. Se consideră funcţia f:$(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+4}$.
a)Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+4}\right)dx=7$.
b)Arătaţi că $\int_1^e\frac{3\ln x}{f(x)-3x^2}dx=e^2+15$.
c)Arătaţi că aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţie g:$(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$,$g(x)=f(e^x)-3e^{2x}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 este egală cu $\frac{1}{4}\ln\frac{5e}{e+4}$.

Testul 151(Prelucrare bacalaureat)

Subiectul I

1.Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1 = 4$ şi $b_2 = 12$.

2.Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = ax - 3$, unde a este număr real.Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ g)(2) = 2$.

3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_8 x + \log_8(10 - x) = \log_8(8 + x)$.

4.Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre disticte, se pot forma cu cifre din mulţimea $A=\{1,2,3,5,7\}$.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(2,2)$ şi $C(5,6)$.Determinaţi ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AC.

6.Se consideră expresia $E(x) = 3\text{tg}\frac{x}{3} - 2\sin\frac{2x}{3} + \sin x$, unde $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -2a \\ 2 & -1 & -a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x - y - az = a \\ x + ay - 2az = -1, \\ x - ay = a \end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(2)) = -4$.

b)Pentru a=1, arătaţi că sistemul de ecuaţii are o infinitate de soluţii.

c)Arătaţi că, pentru orice număr real $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuaţii are soluţia unică (x_0, y_0, z_0) şi $4x_0z_0 = 1$.

2.Se consideră polinomul $f=X^3 - 4X^2 + aX - 16$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $f(0) = -16$, pentru orice număr real a.

b)Determinaţi numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul g=X-4.

c)Determinaţi numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 2.

Subiectul III

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2 - 20x - 11 - (2x - 11)e^{2x}$.

a)Arătaţi că $f'(x) = 4(x - 5)(1 - e^{2x})$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 20$.

c)Demonstraţi că ecuaţia $f(x) + n = 0$ are soluţie unică, pentru orice număr natural $n\geq 0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+37}}$.

a)Arătaţi că $\int_6^8 f(x)\sqrt{x^2 - 12x + 37}dx = 2$.

b)Arătaţi că $\int_5^7 f(x)\,dx = 0$.

c)Determinaţi numărul real nenul m pentru care volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $g:[6,7]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\left(1 - \frac{\pi}{m}\right)$.

Bibliografie

[1].....subiecte.edu.ro