BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 32

Prof: Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3=\sqrt{b_2\cdot b_4}=\sqrt{7\cdot 28}=14$ $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{14}{7}=2$; $2=\frac{7}{b_1}\Rightarrow b_1=\frac{7}{2}$	2p 2p 1p
2.	$f(1)=5^1+\log_5 1=5$ $f(f(1))=f(5)=5^5+1=3126$	2p 3p
3.	În binomul $(a+b)^n$, termenul T_{k+1} se scrie $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$ $\Rightarrow T_{k+1}=C_9^k\left(2012\cdot\sqrt[4]{x}\right)^{9-k}\left(\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^k$, $9\ge k\Rightarrow k\in\{0,1,\cdots,9\}$ $T_{k+1}=C_9^k 2012^{9-k}\cdot x^{\frac{9-k}{4}}\cdot 2012^k\cdot x^{-\frac{k}{2}}=2012^9\cdot x^{\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}}$. Trebuie să avem $\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow 9-3k=0\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=2012^9$ $\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow 9-3k=0\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=2012^9$	1p 1p 2p 1p
4.	$p=\frac{c_f}{c_p}$; $c_p=3^3=27$. Numărul de cazuri favorabile este $3\cdot 2\cdot 1$, deci $c_f=6$, iar	1p 2p

	$p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}=0,(2)$	2p
5.	Centru paralelogramului se găsește la intersecția diagonalelor AC și BD. Fie O acest centru. Atunci $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{3+n}{2}=0\Rightarrow n=-3\Rightarrow D(-3,5);$ $y_O=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{m+5}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m=2\Rightarrow B(3,2)$	2p 1p 2p
6.	$tgC=tg(\pi-A-B)=tg\left[\pi-(A+B)\right]-tg(A+B)$ $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}=\frac{2+\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}{1-2\cdot\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}=\frac{22+8-5\sqrt{3}}{11-16+10\sqrt{3}}=$ $=\frac{5\left(6-\sqrt{3}\right)}{-5\left(1-2\sqrt{3}\right)}=-\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(1+2\sqrt{3}\right)}{-11}=\frac{6+12\sqrt{3}-\sqrt{3}-6}{11}=\sqrt{3}$ $tgC=\sqrt{3}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2-I_3$	5p
b)	Prin inducție. Egalitatea se verifică, conform punctului a). Presupun că $P(n):A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$ $P(n+1):$ și demonstrez $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$	2p

	$P(n+1): A^{n+1}-A^{n-1}=A^2-I_3$. Într-adevăr, avem: $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$, conform a)	2p
c)	Obsevăm că se verifică pentru n=1. Presupunem adevărată pentru pentru valorile mai mici și egale cu n-1 și demonstrăm pentru n. notăm cu S_n suma elementelor. Din $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3 \Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3 \Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$ $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3 \Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$ $\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$	2p 2p
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a, \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x \Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x \Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a) \Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x+3}{3-x}\right)'}{\dfrac{x+3}{3-x}}=\dfrac{3-x+x+3}{(3-x)^2}\cdot\dfrac{3-x}{x+3}=\dfrac{6}{9-x^2}>0,\forall x\in(-3,3)$ Deci $f(x)$ este strict crescătoare pentru $x\in(-3,3)$	3p 2p
b)	1. asimptote orizontale nu există, pentru că nu se pune problema calculului limitei la $\pm\infty$; 2. asimptote oblice, nu există; din aceleași rațiuni ($x\in(-3,3)$) 3. asimptote vericale: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln 0=-\infty$. Deci $x=-3$ este asimptotă verticală la dreapta. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln\infty=\infty$. Deci $x=3$ este asimptotă verticală la stânga.	1p 1p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{3-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{3x+1}{3x-1}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=1^\infty$ $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{3x-1}-1\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-1}\right)^x$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{\ln 2}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot arctgx\Big\|_0^1=\dfrac{\pi}{4}\cdot\ln 2$	5p

b)	Deoarece $x \in (0,1) \Rightarrow x^n > x^{n+1}$, iar $\frac{1}{x^2+1} > 0$ $\Rightarrow \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1} > \frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x^2+1}, \forall x \in (0,1) \Rightarrow I_n > I_{n+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1} dx > \int_0^1 \frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x^2+1} dx, \forall x \in (0,1) \Rightarrow I_n > I_{n+1} \Rightarrow$ șirul este descrescător.	2p 3p
c)	$0 \le I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1} dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$	5p