SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XIII, NR XXV, 2020

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

SM

25 SCLIPIREA MINTII

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII SI SERVICII ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 25

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XIII, Nr. XXV, MAI 2020, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Lenuţa Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cristina Drugă - Inspector matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Lucian Tuţescu
Marius Drăgan
Daniel Sitaru
Mihály Bencze
Gheorghe Ghiţă
Ionel Tudor

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor şef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre
Marin Chirciu
Ion Stănescu
Iuliana Traşcă
Gabriel Tica
Constantin Dinu

- **Membri :**

Florică **Anastase**, Orlando **Alecu**, Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea,** Bela **Kovacs,** Anicuţa **Beţiu,** Laura **Brutaru,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ana **Cismaru,** Aurel **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Nela **Ciceu,** Marian **Ciuperceanu,** Claudiu **Ciurcu,** Cătălin **Cristea,** Tatiana **Cristea,** Marian **Cucoaneş** , Luiza Lorena **Cremeneanu**, Camelia **Dană**, Radu **Diaconu**, Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Gheorghe **Dârstaru,** Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu,** Ileana **Duma,** Cristina **Ene,** Alina Georgiana **Ghiţă,** Luminiţa **Ghiţă,** Mădălina **Giurgescu,** Lucian Dan **Grigore,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ştefan **Gobeş**, **Dorina** Goiceanu, Daniel **Iarca**, Mihai **Ionescu**, Viorel **Ignătescu**, Ionuţ **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Adalbert **Kovacs,** **Po-shen Loh,** Mihaela **Mirea,** Mariana **Mitea,** Simona **Miu,** Cristian **Moanţă,** Ionel **Morozenco**, Gabriela **Neguţescu**, Gabriel **Nemţaru**, Constantin **Nicolau**, Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Ion **Pătraşcu**, Stelian **Piscan,** Sorin **Pirlea,** Alin **Pop,** Victoria **Popa,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Florentina **Popescu,** Adriana **Puescu,** Doina **Popescu,** Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Aurora **Porojnicu**, Angel **Plaza**, Simona **Radu**, Petre **Rău**, Robert **Gheorghiţă**, Iulia **Sanda**, Dan **Săulescu**, Livia **Stan**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Gheorghe **Struţu,** Alina **Tigae,** Laura **Tănase,** Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu,** Diana **Trailescu,** Ovidiu **Ţâţan,** Dumitru **Tudor,** Marius **Ursărescu,** Roxana **Vasile,** Carina **Viespescu,** Ionuţ-Florin **Voinea,** Marian **Voinea,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean,** Florentin **Vişescu,** Elena **Zainea,** Mariana **Zotolea**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 3

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 6

PROBLEME REZOLVATE..... 16

PROBLEME PROPUSE 44

QUICKIES 51

CALEIDOSCOP MATEMATIC 54

GÂNDEŞTE CORECT

REDACTIA
Liceul Tehnologic „ Meserii şi Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Aniversare „Sclipirea Mintii”

Numarul 25. Mai 2020

Dragi elevi și profesori, cititori, rezolvitori și membri ai colectivului de redacție al revistei de matematică ” **Sclipirea Minții**” ne aflăm împreună cu ocazia apariției numărului 25, ocazie cu care vrem să vă transmitem cele mai frumoase gânduri pentru cei care ne sunteti întodeauna aproape și ați contribuit prin munca și pasiunea dumneavoastră la realizarea de fiecare dată a revistei.

Cu stimă și recunoștință ne aplecăm în fața dumneavoastră sperând în continuarea acestei colaborări începută în 2008 și care își dorește să se ridice la un nivel care să facă cinste școlii românești de matematică, mulțumindu-vă deopotrivă pentru toate sfaturile și materialele primite.

Nu încheiem înainte de a ne aminti de contribuțiile activităților domnilor profesori râmniceni **Apostol Constantin** și **Rusu Constantin** adevărați mentori și stâlpi ai școlii de matematică buzoiană.

Colectivul de redacție

Director **Neculai Stanciu,** Redactor șef **Adrian Stan**

Mai jos prezentăm câteva din gândurile unor colegi adresate cu ocazia numărului aniversar.

”Frumuseţea revistei „**Sclipirea Minții**” constă în bogaţia şi varietatea conţinuturilor. Apreciez în mod deosebit faptul că revista este deschisă la colaborări internaţionale cu autori tineri sau consacraţi şi remarc faptul extrem de benefic pentru toată comunitatea matematică - profesori si elevi - că Sclipirea Minții este deschisă la colaborarea cu RMM.”

Dan Sitaru, Editor In Chief of Romanian Mathematical Magazine

„ Între anii 1973-1974, ca prima generație de teriști, am făcut stagiul militar la Buzău, oraș care de atunci păstrează o bucățică din viața mea de matematician. La Unitatea Militară de infanteriști, timp de nouă luni conduceam și redactam revista de matematică a unității, care apărea săptămânal la gazeta de perete, conținea probleme propuse care erau rezolvate de colegi –viitorii studenți -, și noutăți matematice.

Sămânța simbolică lăsată la Buzău, după ani buni a început să rodească. Se înființează revista de matematică **Sclipirea Minții**, de un colectiv inimos: Neculai Stanciu, Adrian Stan, Andrei Octavian Dobre, Marin Chirciu, Ion Stănescu, Iuliana Trașcă, Gabriel Tica, Constantin Dinu, la care și eu sunt membru onorific. În 12 ani, revista se afirmă pe plan național, dar și pe plan internațional.

Revista oferă spațiu pentru articole originale, pentru probleme interesante, și publică soluțiile problemelor, care oferă elevilor o viziune matematică profundă. Revista și-a creat o bandă autentică printre revistele de matematică din țară, având un mesaj profund de matematică, și oferind cititorilor, de două ori pe an sclipiri matematice.

Sperăm ca după acest număr aniversar, revista să păstreze tradițiile buzoiene, și să fie în continuare un punct fix în spațiul atât de repede schimbător al valorilor intelectuale. La mulți ani, **Sclipirea Minții** ! ”

Dr. **Mihály Bencze**, Redactor **Revista Octogon Mathematical Magazine**

„ După 12 ani de apariţie bianuală, ajunşi la numărul 25 (cu un nucleu redacţional destul de stabil), ne bucurăm sincer să putem împărtăşi şi cititorilor noştri, în cele ce urmează, câteva puncte de vedere.

Ştim ce înseamnă să trudeşti pentru o revistă de matematică, aşa cum ştim cât de greu e să pui pe picioare o redacţie care să dureze. **Sclipirea Minții**, ajunsă la 25 de numere, este o izbândă care merită salutată.

Ne-am bucura să scriem câteva rânduri şi la împlinirea a o sută de numere binecuvântate de Dumnezeu şi citite de iubitorii de matematică.

Când lumea este în plină schimbare, când ziare şi reviste apar şi dispar peste noapte, **Sclipirea Minții** este un reper pentru matematica din România. Cred că numărul 25 va fi o simplă bornă într-un parcurs îndelungat

Dacă orice domeniu sau instituţie îşi are istoria sa, este firesc ca şi **Sclipirea Minții** aibă acelaşi lucru. Ea are numerele sale care ajută Matematica în misiunea ei. De unde vine folosul şi succesul acestei reviste? Din căldura cititorilor, dar în egală măsură şi din profesionalismul redactorilor. Cu inspiraţie, dar şi cu zel şi tenacitate profesională, într-o muncă enormă de culegere a informaţiilor, de prelucrare şi răspândire a lor, harnicii lucrători de la **Sclipirea Minții** oferă, de două ori pe an, hrană matematică pentru zeci şi sute de oameni. Această muncă, este răsplătită de dragostea, recunoştinţa şi satisfacţia a sute de minţi deschise. Cu dragoste şi recunoştinţă, adresăm şi noi cele mai sincere urări de bine întregului colectiv redacţional, rugându-ne Domnului să-i păzească şi să-i ocrotească în pace şi sănătate. Iar acest „aniversar" al apariţiilor să fie doar începutul unei lucrări care să continue cât mai mult timp.

În peisajul atât de pestriţ al matematicii româneşti, revista **Sclipirea Minții** reprezintă o oază de bun simţ şi trăire matematică. La mulţi ani! "

D. M. Bătineţu-Giurgiu

„ **Sclipirea Minții** reușește să păstreze un echilibru între tentația firească a profesorilor de a scrie despre chestiuni complicate, și dorința elevilor de a găsi probleme mai ușoare. Cred că acest lucru face ca revista buzoiană să merite a fi citită, chiar cu creionul în mână. "

Titu Zvonaru

„ Apariția la Buzău, a numărului jubiliar XXV , în al XIII-lea an de existență , a revistei naționale de cultură matematică „ **Sclipirea Minții**", editată de un colectiv de redacție ce cuprinde renumiți profesori din întreagă țară, a venit în sprijinul dezvoltării învățământului matematic de performanță .

În cuprinsul ei au fost abordate teme și probleme interesante accesibile elevilor din învățământul preuniversitar dar și celor pasionați de matematică.

Remarcăm structura și varietatea materialelor publicate, frumusețea și eleganța problemelor propuse ca și rezolvările lor inedite.

Felicităm colectivul redacțional și-i urăm multă sănătate și succes în continuarea apariției acestei frumoase reviste. "

Ionel Tudor

” Rațiunea este un soare dur;
luminează, dar te orbește.”
Romain Rolland
(1866- 1944)

1. Istoria matematicii

Scurt istoric al numerelor complexe

de Adrian Stan, Buzău

Ceea ce toți elevii de liceu cunosc astăzi despre numerele complexe, până la mijlocul secolului al XVI-lea era de neconceput întrucât toate operațiile aritmetice se efectuau numai cu numere pozitive, întregi, raționale sau iraționale. Rezolvarea unor ecuații algebrice presupunea găsirea doar a acelor soluții pozitive.

Aceasta avea să se schimbe o dată cu cercetările unor matematicieni ca Tartaglia, Cardano, Bombelli, Girard, Gauss, etc.

Numerele complexe au apărut ca soluții la rezolvarea unor ecuații pătratice sau cubice care nu au rădăcini reale. De exemplu, ecuația $x^2+1=0$ are două rădăcini nereale adică complexe și anume, $x_{1,2}=\pm\ i$ unde **„i”** se numește unitatea imaginară.

Drumul până la recunoașterea lui **„i”** nu a fost unul simplu iar cele ce urmează spun povestea acestuia.

Căutând să rezolve diverse tipuri de ecuații profesorul **Scipione del Ferro** (1456-1526) de la Universitatea din Bologna găsește regula generală de rezolvare a ecuațiilor de forma $x^3+px=q$ dar nu o divulgă nimănui cu excepția ginerelui său și unui elev, Antonio Fior.

În spiritul vremii când matematicienii se întreceu în punerea unor probleme la care se cereau soluții, astfel că în 1530, matematicianul **Zuanne de Tonini** propune celorlalți rezolvarea următoarelor ecuații: $x^3+px^2=q$, $x^3+p=qx^2$, $x^3=px^2+q$. La scurt timp matematicianul și inginerul italian **Niccolo Tartaglia**(1500- 1557) anunță că a găsit soluțiile generale de rezolvare.

Atunci, Antonio Fior studentul lui **del Ferro** consideră că poate să-l provoace pe **Tartaglia** și în 1535 îi propune să rezolve și ecuațiile $x^3+px=q$, $x^3+q=px$, $x^3=px+q$ ale căror rezolvare le știa de la profesorul său.

Tartaglia le rezolvă și la rândul său îl provoacă pe Antonio Fior să rezolve ecuațiile pe care le rezolvase el mai înainte în 1530 însă acesta nu este capabil să le rezolve.

Urmărind disputa dintre cei doi, matematicianul și fizicianul italian **Gerolamo Cardano** (1501-1576) din Pavia încearcă să-l convingă pe Tartaglia să-i dezvăluie și lui formulele pentru a le introduce în cartea sa aflată îl lucru „**Ars Magna**”, și reușește într-un final dar cu condiția să nu le publice.

În 1543 **Cardano** și elevul său **Ludovico Ferrari** (1522- 1561) în timp ce se aflau la Bologna și examinau manuscrisele lui **Scipione del Ferro** prin bunăvoința fiului acestuia, aceștia descoperă că **del Ferro** știuse cum să rezolve ecuațiile de gradul 3 și să dea soluția generală pentru ecuații de forma

$x^3 + px = q$. Astfel că, în 1545 reușește să scoată tratatul său de algebră în care prezintă metoda generală de rezolvare a ecuațiilor de gradul 3 și îi amintește pe toți cei care au contribuit la aceasta. El întrebuințează pentru prima dată soluțiile imaginare la rezolvarea ecuațiilor pătratice. La aflarea veștii despre publicarea soluțiilor ecuațiilor de gradul 3, între Tartaglia și Cardano a izbucnit un scandal fiindcă lui Tartaglia i se promisese că nu or să fie publicate.

Cardano face observația că ecuațiile algebrice de grad mai mare ca unu au mai multe rădăcini care pot fi numere negative sau „ imaginare" caz în care acestea sunt în perechi. El a rezolvat ecuația $x^2 - 10x + 40 = 0$ și a găsit că numerele $5 + \sqrt{-15}$ și $5 - \sqrt{-15}$ verifică ecuația dată dar nu le-a considerat ca fiind viabile.

Ludovico Ferrari contribuie și el la realizarea cărții lui Cardano din 1545 prin faptul că reușește să rezolve ecuațiile de gradul al patrulea pe care le publică în cartea profesorului său.

Cel care a dus mai departe munca lui **Cardano** a fost italianul **Rafael Bombelli** (1526- 1572) care prin cartea sa din 1972, „ Algebra" este creditat cu introducerea numerelor complexe. Astfel, el introduce termenul $\sqrt{-1}$ și denumirile $+\sqrt{-1} = +i$ „ piu di meno" (plus din minus) $-\sqrt{-1} = -i$, „ meno di meno" (minus din minus), precum și regulile $+1 \cdot +i = +i,\ -1 \cdot +i = -i,\ +1 \cdot -i = -i,\ -1 \cdot -i = +i,\ +i \cdot +i = -1,\ -i \cdot -i = +1,$ etc.

Bombelli pe lângă regulile cu numere negative a prezentat și operații cu numere de forma $a + b\sqrt{-1}$ cu a și b numere raționale, a dat modul de înmulțire a puterilor lui „**i**" și a făcut observația că în rezolvarea ecuațiilor de gradul 3 cu coeficienți raționali rădăcinile complexe apar în perechi conjugate iar produsul lor dă un număr real ca în exemplul $\sqrt{2 + i \cdot 3} \cdot \sqrt{2 - i \cdot 3} = \sqrt{7}$. Trebuie menționat că notațiile corespunzătoare pe care le cunoaștem astăzi au apărut mult mai târziu, Bombelli cât și ceilalți foloseau cuvinte pentru a exprima notațiile respective.

De abia în 1629, matematicianul olandez **Albert Girard** (1595-1632), introduce prin lucrarea sa „ Invention nouvelle en Algebre" notația $\sqrt{-1}$ respectiv $\sqrt{-n}$, și este primul care consideră ca rădăcini ale unei ecuații și numerele complexe. Este primul care formulează celebra teoremă a algebrei (demonstrată peste 200 de ani de către Gauss): „ Orice ecuație algebrică de grad n are exact n rădăcini reale sau complexe).

Și matematicianul francez **Rene Descartes** (1596- 1650) a utilizat conceptul de numere imaginare în cartea sa „ Geometria" din 1637 pentru a exprima soluțiile nereale ale ecuațiilor în încercarea de a reprezenta geometric rădăcinile unei ecuații pătratice sau a ecuațiilor de gradul 3 și 4.

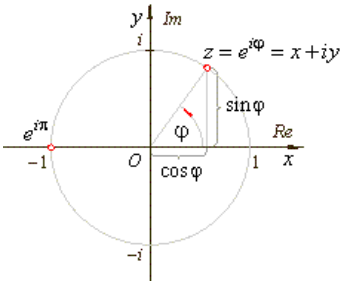
De asemenea, englezul **John Wallis**(1616- 1703) o minte strălucită cu o memorie fantastică este creditat cu numeroase descoperiri printre care numărul de divizori primi , simbolul pentru infinit cu unele reguli corespunzătoare, folosirea virgulei pentru a separa partea întreagă de partea zecimală, a introdus denumirea de mantisă și interpolare, forma algebrică a polinoamelor, și multe altele. Wallis a publicat în cartea sa „Algebra" din 1676 o interpretare geometrică a numerelor imaginare plecând de la cea a reprezentării mediei geometrice dar care nu a condus la ceva concret la momentul respectiv.

Și **G. Leibnitz** (1646-1716) a ajuns la exemple de operații cu acest concept de numere complexe în care suma lor dă un număr real precum și descompuneri ale numerelor de forma $x^4 + a^4$ în funcție de numerele imaginare.

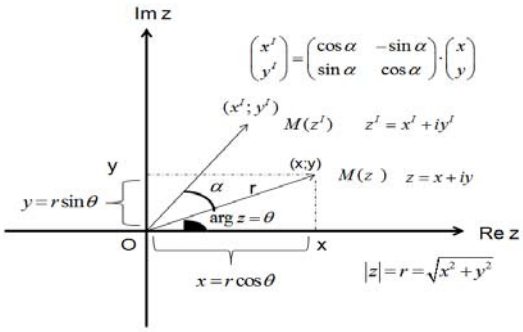
După ce **Francois Viete** (1540-1603) dă formula $(\cos\alpha + \sin\alpha)^n$ cu ajutorul formulei binomiale,

Abraham de Moivre (1667- 1754) exprimă această formulă cu ajutorul unității imaginare „i”: $(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. De asemenea s-a ocupat și cu studiul rădăcinilor de ordinul n ale unității dând formula $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0;1;2;....;n-1\}$.

Cel mai prolific matematician al tuturor timpurilor, **Leonhard Euler** (1707- 1783) introduce notația de „**i**” pentru unitatea imaginară $\sqrt{-1}$, și deși a lucrat cu aceste numere și a obținut o serie de rezultate importante nu le-a dat prea mare importanță. De la Euler ne-au rămas formulele: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{i\pi} + 1 = 0$.



Mult mai târziu, în 1799 topograful norvegian **Caspar Wessel** (1775- 1818) vine cu ideea de a nota un număr imaginar sub forma a + ib și $\sqrt{-1} = \varepsilon$, dând astfel o interpretare geometrică a numerelor imaginare. El făcea observația că dacă operațiile cu segmentele orientate din plan nu se pot face cu ajutorul aritmeticii nu înseamnă că ele nu există.



În 1806, **Jean Robert Argand** (1768- 1822) prin lucrarea „ Essai sur une maniere de reprezenter les quantites imaginaires dans les constructions geometriques”, independent de Wessel va da o intrerpretare a numerelor complexe lucrare pe care autorul i-o dă matematicianului **Adrien Legendre** (1808- 1833) și apoi în 1813 este cunoscută mai mult în urma articolului pulicat de un matematician J. Francais.

O teorie completă a numerelor complexe a dat-o **Carl F. Gauss** (1777- 1855) începând cu 1801 prin lucrarea „ Disquisitiones Arithmeticae ” „ Cercetări aritmetice”, în care face legătura numerelor complexe – (termen pe care-l introduce) cu geometria și apoi până în 1831 când definește operațiile cu numere complexe și norma acestora. Este momentul când lui „i” i se recunoaște identitatea de unitate imaginară iar punctele planului se pun în corespondență bijectivă cu numerele complexe.

Willian Rowan Hamilton (1805-1865) matematician irlandez completează teoria lui Gauss introducând în 1833 cuaternionii- o generalizare a numerelor complexe în patru dimensiuni. Pentru el, numerele complexe erau perechi ordonate (a;b) cu care se puteau face diverse operații iar (0;1)=i, unde $i^2=1$.

În perioada următoare matematicienii nu au mai reușit să găsească metode de rezolvare a ecuațiilor de grad mai mare ca patru cu ajutorul radicalilor până când norvegianul **Niels H. Abel**(1802- 1829) și italianul Ruffini (1765- 1832) demonstrează acest fapt și anume că ecuațiile de grad mai mare ca 4 nu pot fi rezolvate prin radicali încheind astfel o perioadă dar dând liber la găsirea unor noi moduri de abordare a algebrei ș agăsirea soluțiilor raționale și la aproximarea rădăcinilor reale la ecuațiile de grrad superior.

Bibliografie:

1. O scurtă istorie a matematicii. Adrian Stan și colab. Editura Editgraph. Buzău. 2015
2. Experiențe utile în predarea matematicii. Colectiv autori. Editura Teocora. Buzău. 2010.

„Disce ut doceas."
(„Învață ca să-i înveți pe alții.")
Proverb latin

2. Articole şi note matematice

120 de ani de la limita şirului lui Traian Lalescu

de **D.M. Bătineţu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău, Romania

Limita şirului lui Traian Lalescu - Problema 579, G.M., Vol. VI, 1900-1901, pag.148.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{e}-\frac{n}{e}\right)=\frac{1}{e}.$$

Limita şirului lui D. M. Bătineţu-Giurgiu – Problema C:890, G.M., Vol. XCIV, 1989, pag. 139.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\frac{(n+1)}{e}}-\frac{n^2}{\frac{n}{e}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)e-ne\right)=e.$$

Teorema 1. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ **este un şir de numere reale strict pozitive astfel încât** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a\in R_+^*$ **şi** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=b\in R_+^*$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a\ln b$.

Demonstraţie. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{a_n}\cdot\frac{n+1}{n}=a\cdot\frac{1}{a}\cdot 1=1$; notăm $u_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, atunci

$$a_{n+1}-a_n=a_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=a_n(u_n-1)=a_n\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=\frac{a_n}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\ \forall n\in N^*,\ (\mathbf{1}).$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$; $\lim\limits_{n\to\aleph}u_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=b$, (**2**).

Din (**1**) şi (**2**) obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a\cdot 1\cdot\ln b=a\ln b$.

Remarca 1. Dacă $a_n=\sqrt[n]{n!}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}$, i.e. limita şirului lui *Traian Lalescu* .

Teorema 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ **şi** $(b_n)_{n\geq 1}$ **şiruri de numere reale strict pozitive** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=a\in R_+^*$ **şi** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{nb_n}=b\in R_+^*$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\right)=\frac{ae}{2b}$.

Demonstraţie. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{b_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{b_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\frac{b_n n}{b_{n+1}}=\frac{e}{b}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}\cdot\frac{n}{2n+1}=\frac{a}{2}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}=\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}(u_n-1)=\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n=\frac{a_n}{n\sqrt[n]{b_n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=$$

$=\frac{a_n}{n^2}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{b_n}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n$; unde am notat $u_n=\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b_n}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{a_n}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b_n}}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Avem $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{e}{b}\cdot\frac{b}{e}\cdot 1=1$, deci $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$, $\lim_{n\to\aleph}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n\frac{b_n}{b_{n+1}}\sqrt[n+1]{b_{n+1}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n n}{b_{n+1}}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n\right)=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{e}\cdot 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}\right)^{\frac{a_{n+1}-a_n}{n}\cdot\frac{n^2}{a_n}}\right)=$$

$=\frac{1}{e}\cdot e^{a\cdot\frac{2}{a}}=e$. Deci, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{e}{b}\cdot 1\cdot\ln e=\frac{ae}{2b}$.

Nota Redacţiei. Autorii articolului au publicat zeci de probleme de tip *Lalescu* şi de tip *Bătineţu-Giurgiu* în următoarele reviste de matematică:
Crux Mathematicorum, Gazeta Matematică Seria B, La Gaceta de la RSME, Math Problems, Pi Mu Epsilon Journal, Revista de Matematică din Timişoara, Recreaţii Matematice, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, Romanian Mathematical Magazine, School Science and Mathematics, Sclipirea Minţii, The American Mathematical Monthly, The College Mathematics Journal, The Pentagon, The Fibonacci Quarterly,…

Bibliografie:

1. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Şiruri, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Şiruri Lalescu, R.M.T., anul XX (1989), pp. 37-38.
3. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Şirurile Lalescu şi funcţia Euler de speţa a doua. Funcţii Euler-Lalescu, Gazeta Matematică seria A, nr.1 /1990, pp. 21-26.
4. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Asupra unei generalizări a şirului lui Traian Lalescu. Metode de abordare, Gazeta Matematică, nr. 8-9/1990, pp. 219-224.
5. D.M. Bătineţu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu, New classes of sequences-functions and famous limits, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No.2, October, 2019, 784-797.
6. D.M. Bătineţu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu, Two classes of Lalescu's sequences, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 805-813.
7. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers (II), Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 101-111.
8. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, Some limits of Traian Lalescu type (II), Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 184-209.
9. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, Some limits of definite integrals of Lalescu's type, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 312-328.
10. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, Some limits of Traian Lalescu type (II), Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 2, October, 2018, 664-690.
11. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, N. Stanciu, Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 54-87.
12. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, N. Stanciu, Some limits of Traian Lalescu type (I), Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 116-136.
13. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, Certain classes of Lalescu sequence, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 243-251.
14. D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu, Several results of some classes of sequences– The Pentagon, Volume 73, Number 2, Spring 2014, 10-24.
15. D.M. Bătineţu-Giurgiu, A. Kotronis, N. Stanciu, Calculating the limits of some real sequences, Math Problems, Issue 1, 2014, 252-257.

Metoda D. M. Bătineţu-Giurgiu pentru calculul unor limite de tip Lalescu

de **Mihály Bencze**, Braşov şi **Marius Drăgan**, Bucureşti

1) Limita şirului lui Traian Lalescu (G.M., Vol. VI, 1900-1901, problema 579, pag. 148).

$$L=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})=\frac{1}{e}.$$

O soluţie prin metoda Bătineţu-Giurgiu: notăm $u_n=\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\overset{Cauchy-D'Alembert}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{1}{e}\cdot 1\cdot e=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=e.$$

$$L=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(u_n-1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=\frac{1}{e}\cdot 1\cdot\ln e=\frac{1}{e}.$$

2) Limita şirului lui D. M. Bătineţu-Giurgiu (G.M., Vol. XCIV, 1989, problema C:890, pag. 139).

$$B=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e.$$

O soluţie prin metoda Bătineţu-Giurgiu: notăm $u_n=\dfrac{(n+1)^2\cdot\sqrt[n]{n!}}{n^2\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$;

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1\cdot 1=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1;\ \lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}=e^2\cdot\frac{1}{e}=e.$$

$$B=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}(u_n-1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=e\cdot 1\cdot\ln e=e.$$

3) Limita şirului lui Romeo T. Ianculescu (G.M., Vol. XIX, 1913-1914, problema 2042, pag. 160).

$$I=\lim_{n\to\infty}((n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)}-n\sqrt[n]{n})=1.$$

O soluţie prin metoda Bătineţu-Giurgiu: notăm $u_n = \dfrac{(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)}}{n\cdot\sqrt[n]{n}} \to 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-1}{\ln u_n}=1$;

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = e\cdot 1\cdot 1 = e.$$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)} - n\sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{n}\left(u_n-1\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n = 1\cdot 1\cdot\ln e = 1.$$

Remarcă: Metoda de rezolvare folosită mai sus o vom numi ''metoda D. M. Bătineţu-Giurgiu''.

Bibliografie:
1. Colecţia Gazeta Matematică, 1895-2020.
2. Colecţia Octogon Mathematical Magazine, 1993-2020.
3. Colecţia Revista Matematică din Timişoara, 1921-2020.
4. Colecţia Romanian Mathematical Magazine, 2016-2020.
5. Colecţia Sclipirea Minţii, 2008-2020.

Alte soluţii pentru două limite celebre

de Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin şi **Marian Ursărescu,** Roman

Limita şirului lui Traian Lalescu:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}.$$

Soluţie. $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\sqrt[n(n+1)]{\dfrac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n!}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(e^{\ln\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n!}}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\cdot\left(\left(e^{\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n!}}{n(n+1)}} - 1\right) : \left(\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n!}}{n(n+1)}\right)\right)\cdot\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n!}}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot 1\cdot\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n!}}{n+1} = \frac{1}{e},$$

unde am ţinut cont de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n!}}{n+1} \overset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)^n}\right)}{n+2-n-1} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right) = \ln e = 1.$$

Limita şirului lui D. M. Bătineţu-Giurgiu:

$$B = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e.$$

Soluţie. $B=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-1\right]=e\cdot 1=e.$

Am folosit faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-1\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[e^{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]}-1\right]:\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]\cdot\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot 1\cdot\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}+\lim_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]=$$

$$=2+\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]^n=2+\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n!}{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^n}}=$$

$$=2+\ln\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}=2+\ln\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}=2+\ln e^{-1}=2-1=1$$

Nota redacţiei: Daniel Sitaru - Editor-In-Chief la Romanian Mathematical Magazine (RMM) a publicat sute de probleme (de tip Lalescu, respectiv de tip Bătineţu-Giurgiu) propuse de D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu.
Marian Ursărescu – a rezolvat majoritatea problemelor propuse în RMM.

O nouă metodă de rezolvare a ecuaţiei de gradul II

de Po-Shen Loh, US Math Olympiad Coach

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0\Leftrightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Deci trebuie să găsim numerele x_1 şi x_2 cu $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$; adică trebuie să găsim numărul u astfel încât

$$x_1=-\frac{b}{2a}+u,\ x_2=-\frac{b}{2a}-u \text{ şi } \frac{b^2}{4a^2}-u^2=\frac{c}{a}\Leftarrow u^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\Leftarrow u=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Deci $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ şi $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Remarcă. Această metodă a fost postată pe You Tube de Po-Shen Loh la data de 11 decembrie 2019.

Metoda clasică: $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

O rezolvare elementară a unor limite mai puţin elementare

de Dumitru Tudor, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

În această notă vom prezenta o metodă elementară pentru calculul unor limite dintr-o anumită clasă.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x^{2n+1}}$, unde $n \in N^*$, fixat.

Rezolvare: Fie $L_{2n+1} \overset{not.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x^{2n+1}}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$, fixat.

şi $L_{2n-1} \overset{not.}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}}{x^{2n+1}}, n \geq 2$.

Notăm $P(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

$Q(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-2} \cdot \dfrac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}$ şi avem:

$L_{2n+1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - P(x)}{x^{2n+1}}$, respectiv $L_{2n-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - Q(x)}{x^{2n-1}}$.

Pentru $x = 3t$ avem $L_{2n+1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t - P(3t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3\sin t - 4\sin^3 t - P(3t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3(\sin t - P(t)) + 3P(t) - 4(\sin^3 t - Q^3(t)) - 4Q^3(t) - P(3t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}} =$$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t - P(t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}} - 4\lim_{t\to 0}\frac{3(\sin t - Q(t))(\sin^2 t + \sin t \cdot Q(t) + Q^2(t))}{3^{2n+1}t^{2n+1}} + + \lim_{t\to 0}\frac{3P(t) - 4Q^3(t) - P(3t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3^{2n}} \cdot L_{2n+1} - \frac{4}{3^{2n+1}} \cdot \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - Q(t)}{t^{2n-1}} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t + \sin t \cdot Q(t) + Q^2(t)}{t^2}}_{=3} + \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{3P(t) - 4Q^3(t) - P(3t)}{3^{2n+1}t^{2n+1}}}_{=R}.$$

Deci, $L_{2n+1} = \dfrac{1}{3^{2n}} \cdot L_{2n+1} - \dfrac{4}{3^{2n}} \cdot L_{2n-1} + R$. Vom evalua R. Pentru $Q(t)$ avem:

$$Q^2(t) = t^2 - \frac{t^4}{4!} \cdot 2^3 + \frac{t^6}{6!} \cdot 2^5 - \frac{t^8}{8!} \cdot 2^7 + ... + (-1)^n \cdot \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} \cdot 2^{2n-3} +$$

$+ (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}(2^{2n-1} - 2C_{2n}^1) + \omega(t)$, unde $\omega(t)$ reprezintă o expresie polinomială de grad mai mare decât $(2n+1)$ - nesemnificativă în evaluarea limitei R.

$$Q^3(t) = t^3 - \frac{3^5 - 3}{4} \cdot \frac{t^5}{5!} + \frac{3^7 - 3}{4} \cdot \frac{t^7}{7!} - \frac{3^9 - 3}{4} \cdot \frac{t^9}{9!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{3^{2n-1} - 3}{4} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$+ (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{3^{2n+1} - 3 - 24n(2n+1)}{4} \cdot \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \omega_1(t)$, unde $\omega_1(t)$ are gradul mai mare decât $(2n+1)$

Deci, $R = \lim\limits_{t\to 0}(-1)^n \cdot \dfrac{3(3^{2n} - 1 - 8n(2n+1))}{3^{2n+1}t^{2n+1}} \cdot \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + O = (-1)^n \cdot \dfrac{3^{2n} - 1 - 8n(2n+1)}{3^{2n}(2n+1)!}$.

Aşadar, am obţinut următoarea relaţie de recurenţă:

$$L_{2n+1}\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)=-\frac{4}{3^{2n}}L_{2n-1}+(-1)^n\cdot\frac{3^{2n}-1-8n(2n+1)}{3^{2n}(2n+1)!} \text{ sau}$$

$$(3^{2n}-1)\left(L_{2n+1}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)=-4\left(L_{2n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right), n\geq 1, (*).$$

Observaţie. $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Din relaţia (*) pentru $n=1$ avem

$(3^2-1)\left(L_3-\frac{(-1)}{3!}\right)=-4\left(L_1-\frac{1}{1!}\right)\Rightarrow L_3=-\frac{1}{3!}$, apoi prin inducţie matematică rezultă

$$L_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}. \text{ Deci } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x^{2n+1}}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{x^n}$, unde $n\in N^*$, fixat.

Rezolvare: Notăm $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{x^n}$, $P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ deci

$L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-P(x)}{x^n}\Rightarrow L_n=\frac{1}{2^n}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-P(2x)}{x^n}$, (**1**).

$P^2(x)=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+...+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}(2^n-2)+\omega(x)$, unde $\omega(x)$ este un polinom care conţine termeni x^p, cu $p\geq n+1$ (respectiv $p\leq 2n-2$), iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\omega(x)}{x^n}=0$.

Deci $P^2(x)=P(2x)+\frac{x^n}{n!}(2^n-2)+\omega(x)$ şi din (**1**) deducem succesiv că

$$L_n=\frac{1}{2^n}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x)^2-P^2(x)+\frac{x^n}{n!}}{x^n}\Leftrightarrow L_n=\frac{1}{2^n}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x-P(x)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}(e^x+P(x))+\frac{2^n-2}{n!}+0\right]$$

$$\Leftrightarrow L_n=\frac{1}{2^n}\cdot L_n\cdot 2+\frac{1}{n!}\cdot\frac{2^n-2}{2^n}\Leftrightarrow L_n\left(1-\frac{2}{2^n}\right)=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{2}{2^n}\right)\Leftrightarrow L_n=\frac{1}{n!}, \text{ dacă } n\neq 1.$$

Observaţie. Dacă $n=1$, atunci $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, deci formula de calcul pentru L_n confirmă L_1.

Deci, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{x^n}=\frac{1}{n!}$, $\forall n\in N, n\geq 1$.

Folosind aceeaşi metoda se pot demonstra şi următoarele două limite:

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}}{x^{2n}}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, fixat.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}}{x^n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, fixat.

AN IMPROVEMENT OF AN INEQUALITY OF SHAN-HE WU

Vasile Jiglău, Arad

Let ABC be an arbitrary triangle , a,b,c its sides , ω its Brocard angle , R,r its circumradius and inradius , respectively .

In [**1**] Shan-he Wu proved that $1+\frac{R}{r}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. On the other hand , it is a known fact that $\frac{R}{r}\geq\frac{1}{\sin\omega}$ ([2]) . In the following we'll prove that the first inequality may be improved via the second .

Proposition : With the above notations , the following inequality holds :

$$1+\frac{1}{\sin\omega}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Proof : Let x,y,z be three positive real numbers and consider the set $A=\{\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\frac{y}{z}+\frac{z}{y},\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\}$

Lemma : The following inequalities hold : $\max A\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\geq\min A$ (1)

The proof of the lemma : Suppose that $x\geq y\geq z$. (2)

Under this assumption , $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Leftrightarrow x^2y+yz^2\geq x^2z+y^2z\Leftrightarrow(x^2-yz)(y-z)\geq 0$ and in a similar manner $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$, thus $\max A=\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$. We have :

$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\Leftrightarrow\frac{x+z}{z}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\Leftrightarrow(y-x)(y-z)\leq 0$, and the first part of (1) is proved .

We have that $2(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1)\geq(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})$ (3)

because it is equivalent to : $(x-z)(y(y-z)+z(x-y))\geq 0$, which immediately results from (2) . From (3) it results that :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-1\geq\min\{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}),(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})\}=\min A$$, and the lemma is proved .

Remark : In a similar manner one can prove the inequality if $x\geq z\geq y$.

Let's now turn back to the proof of the proposition . We have :

$$\frac{1}{\sin\omega}\geq\frac{\sin(B+\omega)}{\sin\omega}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\Rightarrow 1+\frac{1}{\sin\omega}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$, q.e.d.

(we've used $\frac{\sin(B+\omega)}{\sin\omega}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$ (see ([3]) , 17.11))

Remark : In a similar manner we may prove that : $1+\frac{1}{\sin\omega}\geq\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

[1] Shan-he Wu –Some improved results on the Euler's inequality , available at www.rgmia.org/v7n3.php
[2] Miu Cristian – Câteva problem de matematică , Craiova , 1994
[3] Lalescu Traian – Geometria triunghiului , Ed Apollo , 1993

Generalizarea unei probleme de concurs

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

La concursul interjudețean de matematică „**Speranțe râmnicene** “ , ediția a IX-a-2011 , desfășurat la Râmnicu Sărat , profesorul Dragoș Lăzărescu a propus la clasa a IX-a , demonstrarea relațiilor trigonometrice

$4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$ **(1)** și $8\cos^3\frac{\pi}{7}-4\cos^2\frac{\pi}{7}-4\cos\frac{\pi}{7}+1=0$ **(2).**

Prima relație se stabilește considerând $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{5}$ și cu formulele pentru arcele dublu și triplu , avem $2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}\Big|:\sin\frac{\pi}{5}\Rightarrow$

$2\cos\frac{\pi}{5}=3-4\sin^2\frac{\pi}{5}=-1+4\cos^2\frac{\pi}{5}$, adică relația (1). A doua relație rezultă plecând de la egalitatea $\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=\sin\frac{4\pi}{5}\Rightarrow$

$3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\Leftrightarrow 3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}=4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\Big|:\sin\frac{\pi}{7}\Rightarrow$

$3-4\sin^2\frac{\pi}{7}=4\cos\frac{\pi}{7}\cdot(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1)$ adică relația **(2).**

Relația **(1)** ne arată că $x=\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1,618$ (celebrul număr de aur), este soluția ecuației $x^2-x-1=0$, iar relația **(2)** ne arată că $x=2\cos\frac{\pi}{7}$ este soluție a ecuației de gradul trei $x^3-x^2-2x+1=0$.

Generalizând relațiile (1) și (2) ne propunem rezolvarea în numere naturale a ecuației transcendente :

$f(n)=2^n\cos^n\frac{\pi}{2n+1}-2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{\pi}{2n+1}-2^{n-1}\cos^{n-2}\frac{\pi}{2n+1}+1=0$ **(3).**

Se constată că $n\in\{0;1\}$ nu verifică această ecuație , dar pentru n=2 și n=3 obținem relațiile (**1**) și respectiv (**2**).

Deci $n_1=2$ și $n_2=3$ sunt soluții naturale ale ecuației generalizate (**3**).

Arătăm că ecuația f(n)=0 nu mai are alte soluții naturale mai mari ca 3.

Dacă arătăm că șirul $(f(n))_{n\geq 3}$ este strict descrescător , atunci rezultă $f(n)\langle\ f(3)=0,\ \forall n\geq 4$ și atunci ecuația (3) nu are soluții $n\geq 4$. Ecuația (3) o scriem în forma :

$f(n)=2^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n-2}\cdot\left(2\ \cos^2\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{\pi}{2n+1}-1\right)+1=0\Leftrightarrow$

$f(n)=2^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n-2}\cdot\left(\cos\ \frac{2\pi}{2n+1}-\cos\frac{\pi}{2n+1}\right)+1=0$ sau $f(n)=u(n)\cdot v(n)+1=0$ unde

$u(n)=2^{n-1}\left(\cos\ \frac{\pi}{2n+1}\right)^{n-2}$ și $v(n)=\cos\frac{2\pi}{2n+1}-c\,os\frac{\pi}{2n+1}$, $\forall n\geq 3$.

Stabilim semnul și monotonia expresiilor *u(n)* și *v(n)* , pentru $n\geq 3$.

Evident $u(n)\rangle 0,\ \forall n\geq 3$. Cum $0\langle \frac{\pi}{2n+1}\langle \frac{2\pi}{2n+1}\langle \frac{\pi}{2}, \forall n\geq 3$ și funcția cosinus este strict descrescătoare pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ avem $\cos\frac{\pi}{2n+1}\rangle \cos\frac{2\pi}{2n+1}\Rightarrow\ v(n)\ \langle 0\ \forall n\geq 3.$ Pentru monotonia lui $u(n)\rangle\ 0$

comparăm raportul $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ cu 1 : $\frac{u(n+1)}{u(n)}=\frac{2^n(\cos\frac{\pi}{2n+3})^{n-1}}{2^{n-1}(\cos\frac{\pi}{2n+1})^{n-2}}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2n+3}\cdot\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n+3}}{\cos\frac{\pi}{2n+1}}\right)^{n-2}$.

Avem $0\ \langle \frac{\pi}{2n+3}\langle \frac{\pi}{2n+1}\langle \frac{\pi}{3}\langle \frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2n+3}\rangle \cos\frac{\pi}{2n+1}\rangle \frac{1}{2}\rangle\ 0\Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{2n+3}\ \rangle\ 1$ și $\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n+3}}{\cos\frac{\pi}{2n+1}}\right)^{n-2}\geq\frac{\cos\frac{\pi}{2n+3}}{\cos\frac{\pi}{2n+1}}\rangle\ 1$ deoarece $n-2\geq 1$ dacă $n\geq 3$.

Atunci $\frac{u(n+1)}{u(n)}\rangle\ 1$, $\forall n\geq 3.$ și cum $u(n)\rangle\ 0$, obținem $u(n)\ \langle\ u(n+1)\ \forall n\geq 3,$ deci șirul $\left(u(n)\right)_{n\geq 3}$ este pozitiv și strict crescător.

Din $v(n+1)-v(n)=\left(\cos\frac{2\pi}{2n+3}-\cos\frac{\pi}{2n+3}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}-\cos\frac{\pi}{2n+1}\right)=$

$=-2\sin\frac{\pi}{4n+6}\sin\frac{3\pi}{4n+6}+2\sin\frac{\pi}{4n+2}\sin\frac{3\pi}{4n+2}=\ 2\sin\frac{\pi}{4n+2}\sin\frac{3\pi}{4n+2}-2\sin\frac{\pi}{4n+6}\sin\frac{3\pi}{4n+6}$

Pentru $n\geq 3\Rightarrow 0\langle 4n+2\langle 4n+6\Rightarrow \frac{\pi}{2}\rangle\frac{\pi}{4n+2}\rangle\frac{\pi}{4n+6}\geq 0$ și cum sinus este crescătoare în primul cadran, rezultă $1\rangle\ \sin\frac{\pi}{4n+2}\rangle\ \sin\frac{\pi}{4n+6}\rangle\ 0$ (*).

Pentru $n\geq 3,\ \frac{\pi}{4}\rangle\frac{3\pi}{4n+2}\rangle\frac{3\pi}{4n+6}\rangle 0\Rightarrow\ \sqrt{2}\rangle 2\sin\frac{3\pi}{4n+2}\rangle 2\sin\frac{3\pi}{4n+6}\rangle 0.$ (**).

Din inegalitățile (*) și (**) obținem $v(n)\ \langle\ v(n+1),\forall n\geq 3$ deci șirul $\left(v_n\right)_{n\geq 3}$ este strict crescător și cu termeni pozitivi.

Așadar șirul $u(n)\cdot v(n)$ este strict descrescător și negativ deoarece $u(n)\rangle 0$ și strict crescător iar $v(n)\langle 0$ și strict crescător.

Atunci $u(n+1)v(n+1)\ \langle\ u(n)v(n)\Rightarrow\ u(n+1)v(n+1)+1\ \langle\ u(n)v(n)+1\Rightarrow$

$f(n+1)\ \langle\ f(n),\ \forall n\geq 3$ adică șirul $\left(f(n)\right)_{n\geq 3}$ este strict descrescător.

$f(n)\ \langle f(3)=0,\ \forall n\geq 4$ iar ecuația generalizată (3) nu are soluții naturale $n\geq 4$.

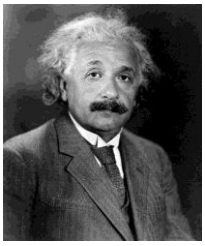
Singurele soluții naturale sunt $n_1=2$ și $n_2=3$.

<u>Observație</u>: Stabilirea monotoniei funcției f(n) cu ajutorul derivatelor (adică $f^I(n)\langle 0,\forall n\geq 4$) necesită calcule foarte complicate.

Dedicăm această notă memoriei profesorului *Constantin Rusu* și apariției ediției jubiliare a 25-a, a revistei „*SCLIPIREA MINȚII*" .

„ Ce faci pentru tine, dispare o dată cu tine,
ce faci pentru alții rămâne pentru eternitate.”

Albert Einstein
(1879-1955)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:898. Care este ultima cifră a numărului $\frac{44^{2019}}{2}$? **Sorin Pîrlea,** Craiova

Rezolvare: $N=\frac{44^{2019}}{2}=44^{2018}\cdot 2\Rightarrow\ U(\frac{44^{2019}}{2})=U(44^{2018})\cdot U(2)=U(6\cdot 2)=2$.

G:899. Arătați că numărul 2019 se poate scrie în trei moduri ca suma a trei numere prime , dintre care unul este mai mare decât 2000.

Ionel Tudor, Călugăreni **,** Giurgiu

Numerele prime mai mari decât 2000 și mai mici decât 2019 sunt 2003, 2011 și 2017.
Două exprimări ale lui 2019 în care apare 2003 sunt : 3+13+2003=2019 și 5 + 11 + 2003 = 2019)
O exprimare a lui 2019 în care apare 2011 este : 3+5+2011=2019.
O sumă a trei numere prime , egală cu 2019 în care să apară 2017 nu există și avem doar suma cu doi teremeni 2+2017=2019.
Deci **2019=3+5+2011=3+13+2003 = 5+11+2003.**

G:900. Arătați că numărul $a=169^n$ **se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte , oricare ar fi n natural.** **Gheorghe Struțu**, Buzău

Rezolvare: $a=169^n=13^{2n-2}\cdot 13^2=\left(13^{n-1}\right)^2\cdot\left(12^2+5^2\right)=\left(12\cdot 13^{n-1}\right)^2+\left(5\cdot 13^{n-1}\right)^2,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

G:901. Să se scrie numărul 10^{2019} **ca sumă de cinci numere pare consecutive.**

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Evident, o sumă de cinci numere pare consecutive este de forma $(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2)+(2n+4)=10^{2019}$ de unde rezultă că $n=10^{2018}$ și atunci, $10^{2019}=(2\cdot 10^{2018}-4)+(2\cdot 10^{2018}-2)+2\cdot 10^{2018}+(2\cdot 10^{2018}+2)+(2\cdot 10^{2018}+4)$.

G:902. Fie $p=2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot.....\cdot 9^9$ **. Arătați că “p” se divide cu** 210^5 **și găsiți ultima cifră nenulă a lui p.** **Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede

Rezolvare: Se descompun bazele 4, 6, 8, 9 în factori primi și aplicând proprietățile puterilor rezultă:
$p=2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot.....\cdot 9^9=2^{40}\cdot 3^{27}\cdot 5^5\cdot 7^7=(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^5\cdot 2^{35}\cdot 3^{22}\cdot 7^2=210^5\cdot 2^{35}\cdot 3^{22}\cdot 7^2$.
$u(21^5)=1,\ u(2\cdot 3)^{22}=6,\ u(2^{13})=2,\ u(7^2)=9\Rightarrow u(p)=8$.

G:903. Dacă k este un număr natural oarecare și a = 3k+11, b = 2k+5, atunci (a;b) = 1 sau (a;b) = 7.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Prin eliminarea lui k din exprimarea lui a și b, $a=3k+11,\ b=2k+5$ rezultă $2a-3b=7$.
Fie d = (a;b). Atunci $d\,|\,a$ și $d\,|\,b$, deci $d\,|\,(2a-3b)\Rightarrow d\,|\,7$. Așadar, d nu poate fi decât 1 sau 7.

G:904. **Rezolvați în mulțimea numerelor naturale:** $16:(x-y)=x+2$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Cum $x+2\in D_{16}=\{1;2;4;8;16\}\Rightarrow x\in\{0;2;6;14\}$.

Se obțin soluțiile $(x;y)\in\{(6;4),(14;13)\}$.

G:905. **Aflați câtul și restul împărțirii numărului** $A=5^{n+4}\cdot 3^{n+1}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}+3^2\cdot 15^n$ **la 2019.**

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$A=5^{n+4}\cdot 3^{n+1}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}+3^2\cdot 15^n=3^n\cdot 5^n(5^4\cdot 3+5\cdot 3^3+3^2)=3^n\cdot 5^n\cdot 2019\vdots 2019$, deci câtul este 15^n, iar restul este 0.

G:906. **Fie** $n,m\in\mathbb{N}^*$**. Să se arate că** 2^n+7^m **este divizibil cu 5 dacă și numai dacă** 3^n+8^m **este divizibil cu 5.**

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Notăm cu $u(x)$ ultima cifră a numărului natural x.

Avem succesiv:

$$u(2^n)=\begin{cases}6, n=4k\\2, n=4k+1\\4, n=4k+2\\8, n=4k+3\end{cases},\quad u(7^m)=\begin{cases}1, n=4p\\7, n=4p+1\\9, n=4p+2\\3, n=4p+3\end{cases},\quad u(3^n)=\begin{cases}1, n=4l\\3, n=4l+1\\9, n=4l+2\\7, n=4l+3\end{cases},\quad u(8^m)=\begin{cases}6, n=4q\\8, n=4q+1\\4, n=4q+2\\2, n=4q+3\end{cases},\ k,p,l,q\in\mathbb{N}^*.$$

Analizând toate situațiile posibile, deducem că $2^n+7^m\vdots 5$, dacă:

$$\left.\begin{array}{l}n=4k, m=4p+2\Rightarrow u(3^n)+u(8^m)=u(6+9)=5\Rightarrow 3^n+8^m\vdots 5\\ n=4k+1, \mathrm{m}=4\mathrm{p}+3\Rightarrow u(3^n)+u(8^m)=u(5)=5\Rightarrow 3^n+8^m\vdots 5\\ n=4k+2, m=4p\Rightarrow u(3^n)+u(8^m)=u(5)=5\Rightarrow 3^n+8^m\vdots 5\\ n=4k+3, \mathrm{m}=4\mathrm{p}+1\Rightarrow u(3^n)+u(8^m)=u(7+8)=5\Rightarrow 3^n+8^m\vdots 5\end{array}\right.$$

. Reciproca este evidentă.

G:907. **Fie a, b, c numere naturale diferite. Să se arate că numărul** $N=(a-c)\cdot(b-c)$ **se divide la numărul** $2n^2+n$ **știind că are loc egalitatea** $na+(n+1)c=(2n+1)b$**.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Egalitatea dată devine $na+(n+1)c=nb=(n+1)b\Leftrightarrow n(a-b)=(n+1)(b-c)$. Deoarece n și n+1 sunt prime între ele rezultă $n|(b-c)$;

Din $na+(n+1)c=(2n+1)b\ \Big|\ (n+1)a\Rightarrow(2n+1)a+(n+1)c=(2n+1)b+(n+1)a\Leftrightarrow$

$(2n+1)(a-b)=(n+1)(a-c)\Rightarrow(2n+1)|(a-c)$ deoarece 2n+1 și n+1 sunt prime între ele.

▪ Clasa a VI-a

G:908. **Să se afle două numere naturale a și b știind că suma numerelor naturale mai mari ca a și mai mici ca b este 2017.**

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Evident, a < b.

Fie $S=(a+1)+(a+2)+....+(b-1)=\frac{1}{2}[(a+1)+(b-1)]\cdot[(b-1)-(a+1)+1]=\frac{1}{2}(a+b)(b-a-1)$.

Cum S = 2017, 2017 fiind un număr prim, iar primul factor (a + b) este mai mare decât al doilea (b – a – 1), singura variantă care convine este dată de sistemul a + b = 2017 și b – a - 1 = 2, de unde rezultă că a = 1007 și b = 1010.

G:909. **Arătați că există numerele naturale** a,b,c,d **astfel încât** $a^3+b^3+c^3+d^3=10^{2021}$**.**

Iuliana Trașcă, Olt

Rezolvare:

$10^{2021}=10^2\cdot 10^{2019}=10^2\cdot\left(10^3\right)^{673}=(1^3+2^3+3^3+4^3)\cdot\left(10^{673}\right)^3=\left(10^{673}\right)^3+\left(2\cdot 10^{673}\right)^3+\left(3\cdot 10^{673}\right)^3+\left(4\cdot 10^{673}\right)^3$

Evident, $a=10^{673},\ b=2\cdot 10^{673},\ c=3\cdot 10^{673},\ d=4\cdot 10^{673}$.

G:910. Într-o cutie sunt 2 creioane roşii şi 3 creioane albastre de aceeaşi mărime. Se extrage câte un creion. 1) Care este numărul minim de creioane extrase la întâmplare, pentru a fi siguri că apare un creion roşu ?
2) Ce tip de creion se extrage, dacă probabilul (probabilitatea) apariţiei este 60 % ?

Ion Stănescu, Smeeni,Buzău

Rezolvare:

1) Numărul extragerilor trebuie să depăşească numărul creioanelor albastre. Răspuns 4.

2) $60\%=\frac{3}{5}$. Probabilul extragerii unui creion roşu $=\frac{2}{5}$. Probabilul extragerii unui creion albastru $=\frac{3}{5}$.

Răspuns. Se extrage un creion albastru.

G:911. Două scumpiri succesive cu același procent, un produs își majorează prețul cu 21% . Care este procentul unei scumpiri ? **Marian Ciuperceanu**, Craiova

Rezolvare:

Fie x prețul inițial și p procentul de majorare, atunci prețul după prima scumpire este

$x+\frac{p}{100}\cdot x=x\left(1+\frac{p}{100}\right)$ iar după a doua scumpire este $\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{p}{100}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$. (1)

Pe de altă parte, prețul final este $x+\frac{21}{100}\cdot x=x\left(1+\frac{21}{100}\right)=\frac{121}{100}\cdot x$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\left(\frac{11}{10}\right)^2\Leftrightarrow 1+\frac{p}{10}=\frac{11}{10}\Rightarrow p=10.$ Deci, după două scumpiri succesive cu 10%, s-a obținut o majorare cu 21%.

G:912. Să se determine $n\in\mathbb{N}$, pentru care numărul $a=3^n+81$ este pătrat perfect.

Ionel Tudor ,Călugăreni ,Giurgiu

Rezolvare: Pentru $n\in\{0;1;2;3;4\}$ se verifică prin calcul că **a** nu este pătrat perfect.

Dacă n=5, avem $a=3^5+81=18^2$, deci e pătrat perfect;

Pentru $n\geq 6$, $a=3^4(3^{n-4}+1)$ este un pătrat pefect doar dacă $3^{n-4}+1$ este pătrat perfect.

Cum $3^{n-4}+1=(4-1)^{n-4}+1=M_4+(-1)^n+1=M_4+2$ care nu este pătrat perfect pentru n par.

Dacă n este impar, adică n = 2p+1cu $p\geq 3$ rezultă $3^{n-4}+1=3^{2p-3}+1=q^2\Rightarrow 3^{2p-3}=(q-1)(q+1)$.

Fie $a,b\in\mathbb{N},\ a\rangle b\geq 1$ cu $a+b=2p-3$ și $3^a=q+1,\ 3^b=q-1$. Atunci, $3^a-3^b=2\Rightarrow 3|2$, fals, prin urmare a=1, b=0 și p=q=2 și n= 5.

Așadar, singurul număr natural n pentru care a este pătrat perfect este n=5.

G:913. Determinați x, y, z știind că $\frac{x+y}{8}=\frac{y-z}{3}=\frac{z}{2}$ și că $3x-2z=10$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare: Din $\frac{x+y}{8}=\frac{y-z}{3}=\frac{z}{2}=k\Rightarrow z=2k,\ y=5k,\ x=3k$. Din $3x-2z=10\Rightarrow k=2.$ Se obține $x=6,\ y=10,\ z=4.$

G:914. Arătați că $\overline{\underbrace{55...5}_{2019\ cifre}}+\overline{\underbrace{33...3}_{2019\ cifre}}^{\,2}=\overline{\underbrace{11.....1}_{2019\ cifre}\underbrace{44....4}_{2019\ cifre}}$. **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

Rezolvare: Notăm $x=\overline{\underbrace{11....1}_{2019\ cifre}}$. Atunci, $\overline{\underbrace{11.....1}_{2019\ cifre}\underbrace{44....4}_{2019\ cifre}}=\overline{\underbrace{11.....1}_{2019\ cifre}\underbrace{11....1}_{2019\ cifre}}+\overline{\underbrace{33...3}_{2019\ cifre}}=x\cdot 10^{2019}+x+3x=$

$= x(10^{2019}-1)+5x = x\cdot\overline{\underbrace{99...9}_{2019cifre}}+5x = 3^2\cdot\overline{\underbrace{11....1}_{2019cifre}}^{\,2}+\overline{\underbrace{55...5}_{2019cifre}}$.

G:915. Fie a_1 şi a_2 două numere diferite de zero. Fie $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pentru $n>2$. Arătaţi că produsul oricăror 2015 termeni consecutivi ai şirului $a_1, a_2, a_3, ...$ este termen al şirului.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:**

Utilizând $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, obţinem $a_3 = \frac{a_2}{a_1}$, $a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{a_2}{a_1}}{a_2} = \frac{1}{a_1}$, $a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{1}{a_1}}{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{1}{a_2}$, $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2}$,

$$a_7 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{1}{a_2}} = a_1, a_8 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{a_1}{\frac{a_1}{a_2}} = a_2, \ldots.$$

Deoarece $a_7 = a_1$ şi $a_8 = a_2$, şirul este periodic cu perioada 6: $a_1, a_2, \frac{a_2}{a_1}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, a_1, a_2, \frac{a_2}{a_1}, ...$.

Observăm că a_n şi inversul său $\frac{1}{a_n}$ sunt termeni ai şirului pentru orice n; produsul primilor şase termeni este egal cu 1; produsul oricăror şase termeni consecutivi este 1.
Deoarece $2016 = 6\cdot 336$ rezultă că produsul oricăror 2016 termeni consecutivi este egal cu 1. Deci produsul oricăror 2015 termeni consecutivi este inversul termenului următor, adică este termen al şirului.

G:916. Suma măsurilor a 10 unghiuri este 1000^0. Să se calculeze suma măsurilor suplementelor acestor unghiuri.

Florentina Popescu, Buzău

Rezolvare: Fie S suma măsurilor unghiurilor suplementare. Atunci, S+1000^0 =10·180^0, rezultă $S = 1800^0 - 1000^0 = 800^0$.

▪ Clasa a VII-a

G:917. Aflaţi numărul natural n, dacă $2+4+6+.....+2n = abc$ este maxim.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

***Rezolvare*:**

Cum suma dată este $S = 2(1+2+....+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$ şi $31\cdot 32 = 992$ iar $32\cdot 33 = 1056$, rezultă că n = 31.

G:918. Fie $\frac{x+y}{y} = 3-\sqrt{3}$. Calculaţi $\frac{x^2+y^2}{xy}$. **Tatiana Cristea**, Craiova

Rezolvare: $\frac{x}{y}+\frac{y}{y} = 3-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = 2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 4.$

G:919. Există valori ale numărului real a, astfel încât numerele $x = \frac{2a+3}{4}$ şi $y = \frac{3a-1}{2}$ să fie simultan numere întregi ? **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Din $x=\frac{2a+3}{4}\Rightarrow a=\frac{4x-3}{2}$ și $y=\frac{3a-1}{2}\Rightarrow a=\frac{2y+1}{3}$ atunci $\frac{4x-3}{2}=\frac{2y+1}{3}\Rightarrow$
$3(4x-3)=2(2y+1)\Rightarrow 4(3x-y)=11$ ceea ce înseamnă că nu există x și y întregi.

G:920. Să se arate că 7 divide numărul $A=29^{6n+1}-22,\ \forall n\in\mathbb{N}$. **Florentina Popescu**, Buzău

Rezolvare: $A=29^{6n+1}-22=29\cdot 29^{6n}-29+29-22=29(29^{6n}-1)+7=29\cdot 28\left(M_{29}+1\right)+7\ \vdots\ 7$.

G:921. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $x^2+y^2+6x-10y+31=0$. **Arătați că** $|y-x-8|\le 2\sqrt{3}$.

Ionel Morozenco, Tulcea

Rezolvare: $(x+3)^2+(y-5)^2=3\Rightarrow \begin{array}{l}|x+3|\le\sqrt{3},\Rightarrow -\sqrt{3}\le x+3\le\sqrt{3}\ \Leftrightarrow -\sqrt{3}\le -x-3\le\sqrt{3}\\ |y-5|\le\sqrt{3}\Rightarrow -\sqrt{3}\le y-5\le\sqrt{3}\end{array}$

$\Rightarrow -2\sqrt{3}\le y-x-8\le 2\sqrt{3}$.

G:922. Se dau numerele raţionale $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-.....+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$,

$B=\frac{1}{1011}+\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+.....+\frac{1}{2020}$ **şi** $C=\sqrt{n+1+\sqrt{2n+1}}-\sqrt{n+1-\sqrt{2n+1}}$.

a) Calculaţi $(A-B)^{2019}$**;** **b) Calculaţi** $(C-A+B)^2$ **pentru *n* = 2019.**

Daniela Badea, Ploiești

Rezolvare:

a) Fie $N=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}$

$N-A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=$

$=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2020}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}$.

$N-B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}-\left(\frac{1}{1011}+\frac{1}{1012}+.....+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}\right)=$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}\Rightarrow A=B\Rightarrow (A-B)^{2019}=0$

b) $(C-A+B)^2=C^2$; $C^2=\left(\sqrt{n+1+\sqrt{2n+1}}-\sqrt{n+1-\sqrt{2n+1}}\right)^2=$

$=n+1+\sqrt{2n+1}-2\sqrt{n+1+\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{n+1-\sqrt{2n+1}}+n+1-\sqrt{2n+1}=$

$=2n+2-2\sqrt{(n+1)^2-(2n+1)}=2n+2-2n=2,(\forall)n\in\mathbb{N}$.

G:923. Se dă numărul $A=4\cdot\underbrace{\overline{11.....1}}_{2019\ cifre}\underbrace{55....5}_{2019\ cifre}+4$. **Calculați** $\sqrt{A}$. **Adrian Gobej,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Notăm $a=\underbrace{\overline{11....1}}_{2019\ cifre}$.

$A=4\cdot\left[a\cdot 10^{2019}+5a+1\right]=4\cdot\left[a\cdot\left(\overline{999...9}+1\right)+5a+1\right]=4\left[a(9a+1)+5a+1\right]=4(9a^2+6a+1)=4(3a+1)^2$

Rezultă, $\sqrt{A}=\sqrt{2^2(3a+1)^2}=|2(3a+1)|=2\cdot\left(\underbrace{\overline{33...3}}_{2019cifre}+1\right)=\underbrace{\overline{66....68}}_{2019cifre}$.

G:924. Să se determine numerele reale x, y, z știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4 și că $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 3xz - 2yz + 129 = 0$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Fie $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = p$ adică $x = 2p,\ y = 3p,\ z = 4p$ și egalitatea dată devine $p^2(2^2 + 3^2 + 4^2) - p^2(4\cdot3\cdot2 + 3\cdot2\cdot4 + 2\cdot3\cdot4) + 129 = 0$, de unde avem că $p^2(29 - 72) = -129$, adică $p^2 = 3^2$, deci $p = \pm3$, ceea ce înseamnă că $x = \pm6$, $y = \pm9$, $z = \pm12$.

G:925. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 3y - 2017 = 0$.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $x(2x+y) + y(2x+y) - 3(x+y) = 2017$ de unde rezultă că $(x+y)(2x+y-3) = 2017$ cu următoarele posibilități:

$(x+y, 2x+y-3) \in \{(1;2017),(2017;1),(-1;-2017),(-2019;-1\}$ de unde se obțin soluțiile:

$(x;y) \in \{(2019;-2018),(2019;-4036),(-2013;2012),(-2013;4030\}$.

G:926. Să se rezolve ecuația $2019 = \sqrt{2019 + 2(1+2+3+....+x)},\ x \in Ą$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Se ridică la pătrat egalitatea, rezultând $2019^2 = 2019 + 2(1+2+3+.....+x) \Rightarrow$ $2019^2 - 2019 = x(x+1) \Rightarrow\ 2019\cdot2018 = x(x+1) \Rightarrow x = 2018.$

G:927. Calculați $(x+y)^7$ dacă $\begin{cases} x + 3y = \frac{13}{x^2} \\ 3x + y = \frac{14}{y^2} \end{cases}$.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare: Înmulțim prima ecuație cu x^2 și pe a doua cu y^2 rezultând $\begin{cases} x^3 + 3x^2y = 13 \\ 3xy^2 + y^3 = 14 \end{cases}$, de unde prin adunarea ecuațiilor rezultă $(x+y)^3 = 3^3 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow (x+y) = 3^7 = 2187$.

G:928. Pe latura BC a triunghiului echilateral ABC se consideră punctul D și se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BDE și CDF. Dreptele AE și AF intersectează latura BC în punctele M, respectiv N. Calculați $\frac{DM}{MB} + \frac{CN}{NB}$.

Roxana Vasile, Craiova

Rezolvare:

$DE \parallel AB \Rightarrow \Delta ABM\ :\ \Delta EDM \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{DE}{AB}$; $\quad CF \parallel AB \Rightarrow \Delta CNF\ :\ \Delta NBA \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CF}{AB}$.

Atunci, $\frac{DM}{MB} + \frac{CN}{NB} = \frac{DE + CF}{AB} = \frac{BD + CD}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$.

G:929. Fie triunghiul ABC, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ astfel încât AD și BE să fie bisectoarele unghiurilor $S\,BAC$ respectiv $S\,ABC$. Dacă $AB^2 = AC \cdot AE$ și $AC^2 = AB \cdot DC$, atunci calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

Deoarece $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$ și $S\,BAC$ este comun, rezultă că triunghiurile AEB și ABC sunt asemenea. Deducem că $S\,ABE = S\,BAC$, adică $B = 2C$, (1).

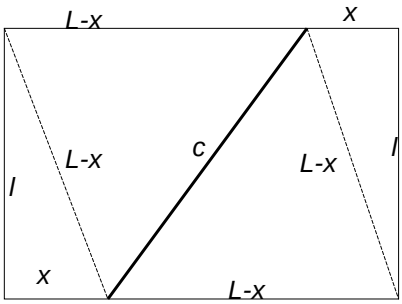
Analog din $\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{AB}$ şi S_{BCA} comun, deducem că triunghiurile ADC şi BAC sunt asemenea, deci $A=2B$, (2). Din (1), (2) şi faptul că $A+B+C=180^0$ obţinem

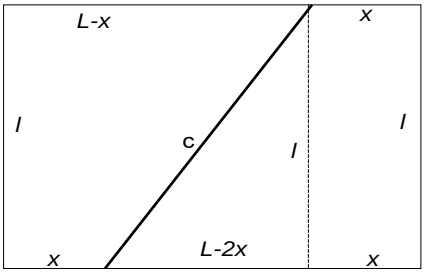
$$C=\left(\frac{180^0}{7}\right),\quad B=2\cdot\left(\frac{180^0}{7}\right),\quad A=4\cdot\left(\frac{180^0}{7}\right).$$

G:930. O coală de hârtie dreptunghiulară cu dimensiunile L şi l se îndoaie o singură dată astfel încât două colţuri opuse să se suprapună. Calculaţi lungimea îndoiturii.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Avem configuraţia de mai jos, unde îndoitura este marcată cu linie îngroşată şi are lungimea c.





Cu teorema lui Pitagora avem $l^2+x^2=(L-x)^2$, de unde $x=\frac{L^2-l^2}{2L}$, (1).

Aplicăm din nou teorema lui Pitagora şi obţinem $c^2=l^2+(L-2x)^2$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $c=\frac{\sqrt{2L^4+l^4-L^2l^2-2(L^2-l^2)}}{L}$.

G:931. Fie AA',BB',CC' mediane în triunghiul ABC, care intersectează cercul circumscris în punctele A'',B'',C''. Să se arate că: $\frac{1}{A^IA^{II}}+\frac{1}{B^IB^{II}}+\frac{1}{C^IC^{II}}\ge\frac{6}{R}$ unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare : Scriind puterea punctului A' faţă de cerc, avem:

$$AA'\cdot A'A''=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{A'A''}{AA'}=\frac{a^2}{4AA'^2}\Leftrightarrow\frac{A'A''}{AA'}=\frac{a^2}{4m_a^2}\Leftrightarrow\frac{A'A''}{AA'}=\frac{a^2}{2(b^2+c^2)-a^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{A'A''}{A'A''+AA'}=\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}\Leftrightarrow\frac{A'A''}{AA''}=\frac{a^2}{2(b^2+c^2)}\Leftrightarrow AA''=\frac{2(b^2+c^2)}{a^2}A'A''.$$

Deoarece $AA''\le 2R\Rightarrow\frac{2(b^2+c^2)}{a^2}A'A''\le 2R\Leftrightarrow A'A''\le\frac{a^2R}{b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{1}{A'A''}\ge\frac{b^2+c^2}{a^2R}\Rightarrow$

$\sum\frac{1}{A'A''}\ge\frac{1}{R}\sum\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{1}{R}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)\ge\frac{6}{R}$, de unde rezultă inegalitatea dată.

▪ Clasa a VIII-a

G:932. Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$ ştiind că $ab^2+4ab-2b^2+4a-8b=44$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

$$ab^2+4ab-2b^2+4a-8b=44 \Leftrightarrow b^2(a-2)+4b(a-2)+4(a-2)=36 \Leftrightarrow (a-2)(b+2)^2=36.$$

De aici, $\overline{ab}\in\{34;61\}$.

G:933. Aflaţi n, natural, pentru care $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+...+\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}=\frac{120}{121}$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

Din $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=\frac{120}{121}$ rezultă $1-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=\frac{120}{121}\Rightarrow$

$1-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=1-\frac{1}{121}\Rightarrow\sqrt{2n+3}=121\Rightarrow n=7319.$

G:934. Să se calculeze $S_n=2020+\overline{2020a}+\overline{2020aa}+....+\overline{2020aa...a}$ **, unde a este o cifră iar la ultimul număr al sumei avem n-1 de a. caz particular a=9.**

Petre Rău, Galați

Rezolvare: $S_n=2020+2020\cdot10^1+\overline{a}+2020\cdot10^2+\overline{aa}+....2020\cdot10^{n-1}+\overline{aaa..a}=$

$=2020\cdot\left(1+10^1+10^2+...+10^{n-1}\right)+a\cdot(1+11+111+...+1111..11)=$

$2020\cdot\frac{10^n-1}{9}+a\cdot\left(\frac{10^1-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+....+\frac{10^{n-1}-1}{9}\right)=2020\cdot\frac{10^n-1}{9}+\frac{a}{9}\cdot\left(\frac{10^n-10}{9}-n+1\right).$

G:935. Să se scrie numărul 17^{2019} **, ca sumă a trei pătrate perfecte iar numărul** $17^{2019}-1944\cdot17^{2016}$ **, ca sumă a trei cuburi perfecte.**

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

$17^{2019}=17\cdot17^{2018}=(4+4+9)\cdot17^{2\cdot1009}=(2\cdot17^{1009})^2+(2\cdot17^{1009})^2+(3\cdot17^{1009})^2.$

$17^{2019}-1944\cdot17^{2016}=17^{2016}\cdot17^3-1944\cdot17^{2016}=\left[(8+9)^3-1944\right]\cdot17^{3\cdot672}=$

$=(8^3+3\cdot8^2\cdot9+\cancel{3\cdot8\cdot9^2}+9^3-\cancel{1944})\cdot\left(17^{672}\right)^3=(8^3+9^3+12^3)\cdot\left(17^{672}\right)^3=$

$=(8\cdot17^{672})^3+(9\cdot17^{672})^3+(12\cdot17^{672})^3.$

G:936. Arătaţi că dacă $a,b,c,x,y,$ **şi** z **sunt numere reale pozitive astfel încât** $a+b+c=x+y+z=1$**, atunci** $ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\le1$**.**

Florentina Popescu şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Se aplică inegalitatea mediilor aritmetică-geometrică şi ipoteza $a+b+c=x+y+z=1$.

$ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\le ax+by+cz+ab+bc+ca+xy+yz+zx=$

$=ax+by+cz+\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}+\frac{(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2}{2}=$

$=1-\frac{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}{2}\le1$. Egalitatea are loc când: $a=x,b=y$ şi $c=z$.□

G:937. Fie numărul $A=\frac{5x+4}{x+1}$ **, cu x număr raţional pozitiv. Calculaţi partea întreagă a numărului A. Aflaţi** $x\in\mathbb{Q}_+$ **, pentru care partea fracţionară a numărului A este 0,8.**

Marian Ciuperceanu, Craiova

Rezolvare:

$A=\frac{5x+4}{x+1}=\frac{4(x+1)+x}{x+1}=4+\frac{x}{x+1}$. Cum $x\in\mathbb{Q}_+$ rezultă $0\langle\frac{x}{x+1}\langle 1$. Atunci partea întreagă a lui A este 4 iar partea fracționară este $\frac{x}{x+1}$. Din $\{A\}=0,8\Rightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{8}{10}\Rightarrow x=4.$

G:938. Aflați numerele reale a,b,c care verifică inegalitatea
$5(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)\ \le\ 3(2a+2b+2c-1)$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

Rezolvare: Observăm că $5(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)-3(2a+2b+2c-1)=$
$=(2a+b-1)^2+(2b+c-1)^2+(2c+a-1)^2\ge 0$. Așadar, trebuie să avem

$$\begin{cases}2a+b-1=0\\2b+c-1=0\\2c+a-1=0\end{cases}\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

G:939. Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care fracția $\frac{35x^3-29x^2-76x-12}{70x^3+47x^2-29x-6}$ se simplifică prin 41 .

Constantin Nicolau , Curtea de Argeș

Rezolvare:

$\frac{35x^3-29x^2-76x-12}{70x^3+47x^2-29x-6}=\frac{(x+1)(35x+6)(x-2)}{(x+1)(35x+6)(2x-1)}$. Au loc următoarele cazuri:

$x+1=41\Rightarrow x=40$; $x+1=-41\Rightarrow x=-42$; $35x+6=41\Rightarrow x=1$; $35x+6=-41\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

Dacă am avea $(x+1)(35x+6)=41$ care nu are soluții întregi;

Dacă $41|x-2$ și $41|2x-1\Rightarrow 41|3$, ceea ce e fals. Deci, $x\in\{-42;\ 1;\ 40\}$.

G:940. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-2}+2\sqrt{y-3}+3\sqrt{z-4}=\frac{x+y+z+5}{2}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Punând condițiile de existență se obține $x\ge 2,\ y\ge 3,\ z\ge 4.$ Ecuația dată este echivalentă cu

$2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-4}=x+y+z+5\Leftrightarrow$

$x-2-2\sqrt{x-2}+1+y-3-4\sqrt{y-3}+4+z-4-6\sqrt{z-4}+9=0\Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-4}-3\right)^2=0$. De aici, se obține că $(x;y;z)\in\{(3;7;13)\}$.

G:941. Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $a_n=\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right),\ n\in\mathbb{N}.$

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$a_n^{\ 2}=\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-1}+\sqrt{n+1}-1\right)=$

$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2\Rightarrow a_n^{\ 2}=2\Rightarrow a_n=\sqrt{2}\in(1;2)$. Așadar, $[a_n]=1\Rightarrow\{a_n\}=\sqrt{2}-1$.

G:942. Fie punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât $AD=BD=CD=x$, $m(\measuredangle ADB)=60^0$, $m(\measuredangle BDC)=120^0$, $m(\measuredangle ADC)=90^0$.

a) Calculați $ctg(\sphericalangle ABC)$;

b) Determinaţi şi calculaţi distanţa de la punctul D la planul (ABC) şi măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (BCD);

c) Determinaţi şi calculaţi sinusul unghiului diedru format de planele (ABC) şi (ABD) şi distanţa de la punctul C la planul (ABD).

Daniela Badea, Ploieşti

Rezolvare:

a) ΔDAB isoscel cu un unghi de $60^0 \Rightarrow \Delta DAB$ echilateral $\Rightarrow AB = x$,

ΔDAC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AC = x\sqrt{2}$

ΔDBC isoscel, $DO \perp BC, O \in BC \Rightarrow DO$ mediană şi bisectoare

$$\Delta DOB, m(\mathrm{R}O) = 90^0 \Rightarrow \sin D = \frac{OB}{BD} \Leftrightarrow OB = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$$

Cu reciproca teoremei Pitagora avem că ΔABC dreptunghic în A $\Rightarrow ctg\mathrm{R}ABC = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

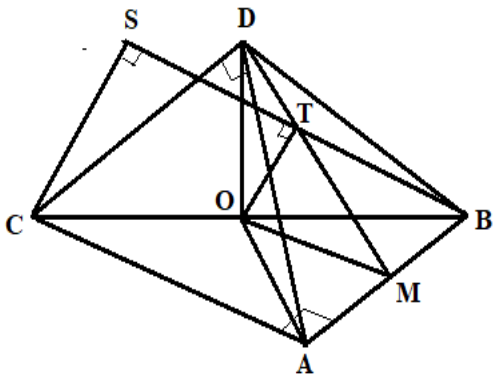
b) ΔABC dreptunghic în A $\Rightarrow AO$ mediană, $AO = BO = CO$

$\Delta DOA \equiv \Delta DOB \equiv \Delta DOC(LLL) \Rightarrow \mathrm{R}DOA \equiv \mathrm{R}DOB \equiv \mathrm{S}\,DOC = 90^0$

$\Rightarrow DO \perp (ABC) \Rightarrow d(D,(ABC)) = DO = \frac{x}{2}$

$DO \perp (ABC), DO \subset (DBC) \Rightarrow (DBC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow m\mathrm{R}((DBC),(ABC)) = 90^0.$



c)

$$\left.\begin{array}{l} DO \perp (ABC) \\ OM \perp AB \\ AB, OM \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow DM \perp AB;$$

$$\left.\begin{array}{l} DM \perp AB, DM \subset (DAB) \\ OM \perp AB, OM \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow m(\mathrm{R}(DAB),(ABC)) = m(\mathrm{R}DMO);$$

ΔDOM dreptunghic $DO = \frac{x}{2}, OM = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \mathrm{R}DMO = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

Fie $OT \perp DM$ (1) ; Din $AB \perp DM, AB \perp OM \Rightarrow AB \perp (DOM), OT \subset (DOM) \Rightarrow OT \perp AB$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow OT \perp (DAB)$;

Fie $CS \perp (ABD), S \in (ABD) \Rightarrow d(C,(ABD)) = CS$;

$CS \perp (ABD), OT \perp (ABD) \Rightarrow CS \parallel OT$

În ΔCSB avem $[OT]$ linie mijlocie, de unde CS = 2OT;

În $\Delta DOM \Rightarrow OT = \frac{DO \cdot OM}{DM} = \frac{x\sqrt{6}}{6} \Rightarrow CS = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

G:943. Trei pătrate sunt înscrise într-un triunghi dreptunghic ca în figura de mai jos.Aflaţi lungimea laturii pătratului din mijloc ştiind că lungimea laturii pătratului mic este 1 cm iar lungimea laturii pătratului mare este 4 cm.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

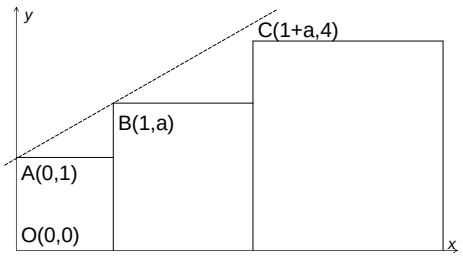
Alegem un sistem de axe ca în figura de mai jos. Trebuie ca punctele A, B, C să fie coliniare.

Avem $A \in G_f \Rightarrow f(x) = mx + 1$;

$B \in G_f \Rightarrow m + 1 = a$;

$C \in G_f \Rightarrow m(1+a) + 1 = 4$.

Obţinem $m = 1, a = 2$. Deci, lungimea laturei pătratului din mijloc este 2 cm.



▪ Clasa a IX-a

L:713. Fie $A = \sqrt{n + \sqrt{6n-9}} - \frac{3}{\sqrt{6}}$**. Să se determine numerele naturale n astfel încât** $\sqrt{6} \cdot A \in \mathbb{N}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\sqrt{6} \cdot A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{n + \sqrt{6n-9}} - 3 = \sqrt{6n - 9 + 6\sqrt{6n-9} + 9} - 3 = \sqrt{\left(\sqrt{6n-9} + 3\right)^2} - 3 =$$

$$= \sqrt{6n-9} + 3 - 3 = \sqrt{6n-9} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 6n - 9 = k^2.$$

$6n = k^2 + 9 \Rightarrow n \in \{3; 15; 39; 75, ...\}$ se obține pentru k=3 și $k = 3p,\ \ p - prim,\ \ p \rangle 3$.

L:714. Fie $a, b, c \rangle 0$**. Arătați că** $\max\left\{\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{4b(b^2+1)}, \frac{b^4 + 6b^2 + 1}{4c(c^2+1)}, \frac{c^4 + 6c^2 + 1}{4a(a^2+1)}\right\} \geq 1$.

Tatiana Cristea, Dorina Goiceanu, Craiova

Rezolvare:

Presupunem prin reducere la absurd că maximul cerut este mai mic decât 1. Atunci, fiecare termen este mai mic decât 1 și $\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{4b(b^2+1)} \cdot \frac{b^4 + 6b^2 + 1}{4c(c^2+1)} \cdot \frac{c^4 + 6c^2 + 1}{4a(a^2+1)} \langle 1$ ceea ce este fals deoarece $\frac{a^4 + 6a^2 + 1}{4a(a^2+1)} \geq 1 \Leftrightarrow (a-1)^4 \geq 1$ și la fel pentru celelalte rapoarte.

L:715. Dacă 0<a<1, atunci $\frac{\sqrt{1-a^3} + 1 - \sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a} + 1 - \sqrt{a}} \rangle \sqrt{1 + a + a^2}$ **.**

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Membrul drept al inegalității poate fi înlocuit cu $\sqrt{1 + a + a^2} = \frac{\sqrt{1-a^3}}{\sqrt{1-a}}$.

Cum toate numerele implicate în cele două fracții sunt pozitive, eliminând numitorii, ne rămâne de demonstrat că $\sqrt{1-a} \cdot \left(1 - a\sqrt{a}\right) \rangle \sqrt{1-a^3} \cdot \left(1 - \sqrt{a}\right)$, care este echivalentă cu

$$\cancel{\sqrt{1-a}} \cdot \cancel{\left(1 - \sqrt{a}\right)}\left(1 + \sqrt{a} + a\right) \rangle \cancel{\sqrt{1-a}} \cdot \left(\sqrt{1 + a + a^2}\right) \cdot \cancel{\left(1 - \sqrt{a}\right)} \Rightarrow \left(1 + \sqrt{a} + a\right) \rangle \sqrt{1 + a + a^2}. \text{ (A)}$$

Altfel. Inegalitatea dată se mai poate scrie $\sqrt{1-a^3} + 1 - \sqrt{a^3} \rangle \sqrt{(1-a)(1+a+a^2} + (1-\sqrt{a})\sqrt{1+a+a^2}$

$\Rightarrow 1 - a\sqrt{a} \rangle (1-\sqrt{a})\sqrt{1+a+a^2} \,\big|()^2 \Rightarrow a^2 - a^2\sqrt{a} + a - \sqrt{a} \langle 0 \Leftrightarrow a^2(1-\sqrt{a}) - \sqrt{a}(1-\sqrt{a}) \langle 0$

$(1-\sqrt{a}) \cdot \sqrt{a} \cdot (a\sqrt{a} - 1) \langle 0$.

L:716. Să se arate că dacă $a_1 \langle a_2 \langle a_3 \langle ..... \langle a_{2n-1} \langle a_{2n}$, **pentru** $n \geq 1$, **atunci**
$\left(a_1+a_2+a_3+.....+a_{2n}\right)^2 \rangle\ 4n\left(a_1a_{2n}+a_2a_{2n-1}+a_3a_{2n-2}+....+a_na_{n+1}\right)$.

Ionel Tudor , Călugăreni ,Giurgiu

Rezolvare: Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_{2n})+(x-a_2)\cdot(x-a_{2n-1})+.....+(x-a_n)\cdot(x-a_{n+1})$. Avem
$f(a_1)=\sum_{k=2}^{n}(a_1-a_k)(a_1-a_{2n-k+1})$. Deoarece $a_1\langle a_k\langle a_{2n-k+1}, \forall k=\overline{2,n}$ atunci $a_1-a_k\langle 0$ și $a_1-a_{2n-k+1}\langle 0$ de unde $(a_1-a_k)(a_1-a_{2n-k+1})\rangle 0 \Rightarrow f(a_1)\rangle 0$. Avem și $f(a_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)(a_n-a_{2n-k+1})\ \langle\ 0$ deoarece din ipoteză, $a_n-a_k\rangle 0$ și $a_n-a_{2n-k+1}\ \langle\ 0,\ \forall k=\overline{1,n-1}$.

Rezultă și $f(a_{2n})=\sum_{k=2}^{n}\underbrace{(a_{2n}-a_k)}_{\rangle 0}\underbrace{(a_{2n}-a_{2n-k+1})}_{\rangle 0}\ \rangle\ 0$. Am găsit $f(a_n)\ \langle\ 0\langle f(a_1)$ și $f(a_n)\ \langle\ 0\langle f(a_{2n})$, deci ecuația de gradul al doilea f(x)=0 are rădăcinile reale distincte $x_1\in(a_1,a_n),\ x_2\in(a_n,a_{2n})$. Atunci discriminantul Δ al ecuației este strict pozitiv.

Cum $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)(x-a_{2n-k+1})=\sum_{k=1}^{n}\left[x^2-(a_k+a_{2n-k+1})x+a_ka_{2n-k+1}\right]$
$=nx^2-(a_1+a_2+...+a_{2n})x+(a_1a_{2n}+a_2a_{2n-1}+....+a_na_{n+1})$ avem
$\Delta\rangle 0 \Leftrightarrow \left(a_1+a_2+a_3+.....+a_{2n}\right)^2\ \rangle\ 4n\left(a_1a_{2n}+a_2a_{2n-1}+a_3a_{2n-2}+....+a_na_{n+1}\right)$.

L:717. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **care verifică relația**
$f(x-y)+f(2x-y)+f(2y-x)=2(x-3y+3)$. **Livia Stan**, Buzău

Rezolvare:
Pentru x=y=0 rezultă $3f(0)=6\Rightarrow f(0)=2$. Pentru x=y $\Rightarrow f(0)+f(x)+f(x)=2(-2x+3)\Rightarrow$
$2f(x)=-4x+4\Rightarrow f(x)=-2x+2$.

L:718. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(a,b,c)=\dfrac{(a+b+c)^3}{(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)}$, **când** a,b,c **parcurg** $(0,\infty)$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Cu inegalitatea lui Hölder avem:
$(8a^3+2)(8b^3+2)(8c^3+2)=(8a^3+1+1)(1+8b^3+1)(1+1+8c^3)\geq(2a+2b+2c)^3$,
de unde $(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)\geq(a+b+c)^3$, (1).

Din (1) obținem $E(a,b,c)=\dfrac{(a+b+c)^3}{(4a^3+1)(4b^3+1)(4c^3+1)}\leq\dfrac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3}=1$.

Deducem că valoarea maximă a expresiei $E(a,b,c)$ este 1 care este atinsă pentru $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

L:719. Arătați că numărul 22^{111} **are cel puțin 149 cifre .**

Constantin Nicolau , prof. , Curtea de Argeș

Rezolvare: Vom utiliza **inegalitatea lui Bernoulli** .

Avem $22^{111}=22^{3\cdot 37}=(22^3)^{37}=10648^{37}=(10000+648)^{37}=\left[10000(1+\dfrac{648}{10000})\right]^{37}\geq$

$\geq 10^{148}\cdot(1+\frac{37\cdot 648}{10000})=10^{148}\cdot 1,2516 \rangle 10^{148}$.

L:720. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Notăm $n=\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$, $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n(1-[x])=1\Rightarrow [x]=1-\frac{1}{n}\Rightarrow n\in\{-1;1\}$.

Dacă $n=1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow x\in[0;1)$ și $\left[\frac{1}{1-x}\right]=1\Rightarrow 1\leq\frac{1}{1-x}\langle 2\Rightarrow x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

Dacă $n=-1\Rightarrow [x]=2\Rightarrow x\in[2;3)$ și $\left[\frac{1}{1-x}\right]=-1\Rightarrow -1\leq\frac{1}{1-x}\langle 0\Rightarrow x\in[2;3)$.

Așadar, $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup[2;3)$.

L:721. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $abc=a+b+c+2$. Arătați că $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2\geq 75$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Avem $abc=a+b+c+2\Leftrightarrow\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$.

Cu **inegalitatea mediilor AM-HM** obținem:

$1=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{9}{3+a+b+c}$, de unde $1\geq\frac{9}{3+a+b+c}\Leftrightarrow a+b+c\geq 6$, (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Avem $abc=a+b+c+2\Leftrightarrow\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2$. Cu **inegalitatea lui Bergström** obținem:

$$2=\sum\frac{a}{1+a}=\sum\frac{a^2}{a+a^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum a+\sum a^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{36}{\sum a+\sum a^2}\text{, de unde}$$

$$2\geq\frac{36}{\sum a+\sum a^2}\Leftrightarrow\sum a+\sum a^2\geq 18\Leftrightarrow\sum(2a+1)^2\geq 75.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

L:722. Să se determine funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că $\begin{cases} f(x+y)+2g(2x-12)=\frac{x+1}{2} \\ f(\frac{x+13}{2})+g(x-7)=x+3\end{cases}$.

Ionel Morozenco, Tulcea

Rezolvare: Se înlocuiește x cu 2x-5 în relația a doua rezultând în final $\begin{cases} f(x+y)+2g(2x-12)=\frac{x+1}{2} \\ f(x+4)+g(2x-12)=2x-2\end{cases}$. De aici, se află $g(2x-12)=\frac{-3x+5}{2}$. Mai departe, se află $f(x+4)=\frac{7x-9}{2}$ iar de aici prin înlocuirea lui x cu x-4 rezultă $f(x)=\frac{7x-37}{2}$.

Notând pe **2x-12** cu **t** rezultă $g(t)=\frac{-(3t+26)}{2}\Rightarrow g(x)=-\frac{3}{2}x-13$.

L:723. Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale în progresie geometrică , cu $q \neq \{-1;0;1\}; b_1 \in \mathbb{R}^*$, atunci demonstraţi :

$$\frac{q^4}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+5}} + \frac{q^8}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+5} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+9}} + \ldots + \frac{q^{i+4}}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5}} = \frac{q^4\left(q^{i+4}-1\right)}{q^4-1}, \ \forall n \in N^*; i = 4p, p \in \mathbb{N}$$

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni

Rezolvare:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{4k+5} - \sum_{k=1}^{n} b_{4k+1} = \sum_{k=1}^{n} b_1\left(q^{4k+4} - q^{4k}\right) = b_1\left(q^8 - q^4 + \ldots + q^{4n+4} - q^{4n}\right) = b_1 q^4\left(q^{4n}-1\right)$$

$$\frac{q^4}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+5}} = \frac{1}{b_1\left(q^{4n}-1\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+1}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+5}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{4k+9} - \sum_{k=1}^{n} b_{4k+5} = \sum_{k=1}^{n} b_1\left(q^{4k+8} - q^{4k+4}\right) = b_1\left(q^{12} - q^8 + \ldots + q^{4n+8} - q^{4n+4}\right) = b_1 q^8\left(q^{4n}-1\right)$$

$$\frac{q^8}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+5} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+9}} = \frac{1}{b_1\left(q^{4n}-1\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+5}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+9}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5} - \sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+1} = \sum_{k=1}^{n} b_1\left(q^{4k+i+4} - q^{4k+i}\right) = b_1\left(q^{i+8} - q^{i+4} + \ldots + q^{4n+i+4} - q^{4n+i}\right) = b_1 q^{i+4}\left(q^{4n}-1\right).$$

$$\frac{q^{i+4}}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5}} = \frac{1}{b_1\left(q^{4n}-1\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+1}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5}}\right),$$

$$S = \frac{1}{b_1\left(q^{4n}-1\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+1}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{4k+i+5} - \sum_{k=1}^{n} b_{4k+1} = \sum_{k=1}^{n} b_1\left(q^{4k+i+4} - q^{4k}\right) = b_1\left(q^{i+4}-1\right)q^4 \cdot \frac{q^{4n}-1}{q^4-1},$$

$$S = \frac{1}{b_1\left(q^{4n}-1\right)} \cdot \frac{b_1\left(q^{i+4}-1\right)q^4\left(q^{4n}-1\right)}{q^4-1} = \frac{q^4\left(q^{i+4}-1\right)}{q^4-1}.$$

L:724. Dacă a,b,c sunt laturile unui triungh cu semiperimetrul p, atunci

$$(2a-p)(2b-p)(2c-p) \leq (p-a)(p-b)(p-c).$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Relaţia dată este echivalentă cu

$$(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b) \leq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b), \ (\mathbf{1}).$$

Suma numerelor $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ este pozitivă, la fel suma oricăror două dintre ele. Dacă unul din numerele $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ este negativ, atunci (**1**) este adevărată. Dacă toate numerele $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ sunt pozitive, atunci din inegalitatea mediilor, obţinem

$$\sqrt{(3a-b-c)(3b-a-c)} \leq \frac{3a-b-c+3b-a-c}{2} = a+b-c.$$

Scriind alte două inegalităţi similare, prin înmulţire rezultă (**1**).

L:725. **Într-un triunghi arbitrar de laturi *a* , *b* , *c* , notăm cu** w_a, h_a **lungimile bisectoarei interioare , respectiv înălțimii corespunzătoare laturii *a* , etc , și cu** $\{u,v,w\}=\{\frac{w_a}{h_a},\frac{w_b}{h_b},\frac{w_c}{h_c}\}$ **. Demonstrați că are loc identitatea :** $\frac{uv}{w}+\frac{vw}{u}+\frac{wu}{v}=uvw+2$ **.** **Vasile Jiglău,** Arad

***Rezolvare*:** Identitatea din enunț este echivalentă cu $\sum u^2v^2=u^2v^2w^2+2uvw$

Cu formulele $w_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, h_a=\frac{2S}{a}$ rezultă imediat că

$$u^2v^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\cdot\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}\cdot\frac{a^2b^2}{16S^4}=\frac{a^3b^3c^2p^2(p-a)(p-b)}{S^4(a+c)^2(b+c)^2}$$ și de aici:

$$\sum u^2v^2=\frac{a^2b^2c^2p^2}{S^4(a+c)^2(b+c)^2(a+b)^2}\sum ab(a+b)^2(p-a)(p-b) \qquad (1)$$

$$u^2v^2w^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\cdot\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}\cdot\frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}\frac{a^2b^2c^2}{64S^6}=\frac{a^4b^4c^4p^2}{S^4(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2} \qquad (2)$$ de unde

$$uvw=\frac{a^2b^2c^2p}{S^2(a+b)(a+c)(b+c)} \qquad (3)$$

Din (1) , (2) si (3) , după efectuarea simplificărilor , identitatea din enunț devine echivalentă cu :

$$p\sum ab(a+b)^2(p-a)(p-b)=a^2b^2c^2p+2S^2(a+b)(a+c)(b+c) \qquad (4)$$

Conform formulei lui Heron avem $16S^2=2p(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ astfel că după simplificare cu p , (4) devine echivalentă cu :

$$\sum ab(a+b)^2(-a+b+c)(a-b+c)=4a^2b^2c^2+\prod(a+b)\prod(-a+b+c)=0$$

identitate care se verifică imediat prin calcul direct .

L:726. **Să se calculeze:** $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{x+n-1}}-2\sqrt{x+n-1}\right)\right]$, **unde** $x>1, n\in N^*$ **(unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x).**

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare: Prin însumarea inegalităţilor $\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}>2(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k-1})$, pentru $k=\overline{1,n}$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}>2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k-1})=2(\sqrt{x+n}-\sqrt{x})>2(\sqrt{x+n-1}-\sqrt{x})\Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}-2\sqrt{x+n-1}>-2\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}-2\sqrt{x+n-1}\right)>-2.$$

Cu notaţia

$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}-2\sqrt{x+n-1}, n\geq 1,$ avem: $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{x+n}}-2\sqrt{x+n}+2\sqrt{x+n-1}<0$ (uşor de verificat),

şi deci (x_n) este un şir descrescător, şi atunci $x_n\leq x_1=\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}<-\sqrt{x}.$

Din ultima inegalitate, rezultă că: $\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x+k-1}}-2\sqrt{x+k-1}\right)<-1.$

Obţinem că partea întreagă este egală cu -2.

▪ Clasa a X-a

L:727. Să se calculeze, fără ajutorul tabelelor, expresia $E=\lg^3 2+\lg 5\cdot\lg^2 2+2\lg 5\cdot\lg 2+\lg^2 5$

Petre Rău, Galați

Rezolvare: $E=\lg 2\left(\lg^2 2+\lg 5\cdot\lg 2+2\lg 5\right)+\lg^2 5=\lg 2(\lg 2+\lg 25)+\lg^2 5=\lg 2\lg 50+\lg^2 5=$
$=(1-\lg 5)(1+\lg 5)+\lg^2 5=1-\lg^2 5+\lg^2 5=1$.

L:728. Arătaţi că $\operatorname{Re}\dfrac{1+2019i}{1-2019i}=\operatorname{Im}\dfrac{2019+i}{1+2019i}$ **şi** $\left[\dfrac{1+n^2}{4n}\left(\dfrac{1+ni}{1-ni}+\dfrac{n+i}{1+ni}\cdot i\right)\right]^{2019}=-i;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

Rezolvare:

$$z_1=\frac{1+2019i}{1-2019i}=\frac{(1+2019i)^2}{1+2019^2}=\frac{1-2019^2}{1+2019^2}+\frac{4038i}{1+2019^2}$$

$$z_2=\frac{2019+i}{1+2019i}=\frac{(2019+i)(1-2019i)}{1+2019^2}=\frac{4038}{1+2019^2}+\frac{1-2019^2}{1+2019^2}\cdot i.$$ Rezultă $\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Im} z_2$.

$$\frac{1+ni}{1-ni}=\frac{1-n^2}{1+n^2}+\frac{2n}{1+n^2}i \text{ și } \frac{n+i}{1+ni}=\frac{2n}{1+n^2}+\frac{1-n^2}{1+n^2}i \text{ atunci } \frac{1+ni}{1-ni}+\frac{n+i}{1+ni}i=\frac{4ni}{1+n^2}.$$

$$\left[\frac{1+n^2}{4n}\left(\frac{1+ni}{1-ni}+\frac{n+i}{1+ni}\cdot i\right)\right]^{2019}=\left[\frac{1+n^2}{4n}\cdot\frac{4ni}{1+n^2}\right]^{2019}=i^{2019}=i^{2016}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

L:729. Dacă $a,b\in(0;1)$ **cu** $a^3+b^3=1$ **atunci să se arate că** $(a+b)\cdot e^{\sqrt{a+b}}\le a\cdot e^{\frac{1}{a}}+b\cdot e^{\frac{1}{b}}$

Florică Anastase, Lehliu Gară

Rezolvare: Considerăm funcția $f:(0;\infty)\to(0;\infty),\ f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ convexă pe (0;1), atunci

$$f\left(\frac{1}{a+b}\right)=f\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)=f\left(\frac{a}{a+b}\cdot a^2+\frac{b}{a+b}\cdot b^2\right)\le\frac{a}{a+b}f(a^2)+\frac{b}{a+b}f(b^2)\Leftrightarrow$$

$$e^{\sqrt{a+b}}\le\frac{a}{a+b}\cdot e^{\frac{1}{a}}+\frac{b}{a+b}\cdot e^{\frac{1}{b}}\Leftrightarrow(a+b)\cdot e^{\sqrt{a+b}}\le a\cdot e^{\frac{1}{a}}+b\cdot e^{\frac{1}{b}}.$$

L:730. Rezolvaţi ecuaţia $10^{-2}\cdot x^{\lg x}+\lg^2 x=x+\lg x+2$ **în** $\mathbb{R}^*$. **Adrian Gobej,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Cum $x^{\lg x}=x$ **și** $x^{\lg x}=10^{\lg^2 x}$, ecuația dată devine: $10^{-2}\cdot 10^{\lg^2 x}+\lg^2 x=10^{\lg x}+\lg x+2\Leftrightarrow$

$$10^{\lg^2 x-2}-10^{\lg x}+\lg^2 x-\lg x-2=0\,\Big|:10^{\lg x}\Rightarrow\ 10^{\lg^2 x-\lg x-2}+\frac{1}{x}(\lg^2 x-\lg x-2)=1.$$

Se va studia semnul funcției $f(x)=\lg^2 x-\lg x-2=(\lg x-2)(\lg x+1)$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$.

Dacă $-1\langle\lg x\langle 2\Rightarrow f(x)\langle 0$; Dacă $\lg x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)\Rightarrow f(x)\rangle 0$. Dacă $\lg x\in\{-1;2\}\Rightarrow f(x)=0$.

Ecuația dată este $10^{f(x)}+\dfrac{f(x)}{x}=1$. Se observă că doar pentru f(x)=0 se obțin soluții ale ecuației.

$10^{f(x)}+\dfrac{f(x)}{x}=10^0=1\Rightarrow\lg x=-1\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{10}$, și $\lg x=2\Rightarrow x_2=100$.

L:731. Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ **ştiind că** $x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\ge 2\sqrt{3y}-y-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. **Livia Stan**, Buzău

Rezolvare: Se folosește inegalitatea mediilor $x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}=3\cdot 1=3$ cu egalitate pentru x=1, iar $2\sqrt{3y}-y\leq 3\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{3}\right)^2\geq 0,$ adevărat, cu egalitate pentru $\sqrt{y}=\sqrt{3}\Rightarrow y=3.$

L:732. Să se demonstreze că orice triunghi de arie egală cu S, unde S verifică ecuația $\sqrt[4]{3-x}+\sqrt[4]{x-1}=2$ are raza cercului înscris în triunghi mai mică sau egală cu $\frac{2}{\sqrt[4]{108}}$.

Emil C.Popa, Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Condițiile de existență ale radicalilor ne dau $x\in[1;3]$ iar cu notațiile $u=\sqrt[4]{3-x}$ **și** $v=\sqrt[4]{x-1}$ obținem sistemul $\begin{cases}u+v=2\\u^4+v^4=2\end{cases}$ care se rezolvă ridicând la puterea a patra prima ecuație:

Se obține: $u^4+v^4+4u^2v^2+4u^3v+4uv^3+2u^2v^2=16$ care este echivalentă cu $2+4uv(4-2uv)+6u^2v^2=16$. Notăm cu $z=uv\Rightarrow 2z^2-16z+14=0\Leftrightarrow z^2-8z+7=0$ cu soluțiile $z\in\{1;7\}$. Așadar, $\begin{cases}u+v=2\\uv=1\end{cases}\Rightarrow u=v=1\Rightarrow x=2.$ și $\begin{cases}u+v=2\\uv=7\end{cases}\Rightarrow u=v\notin\mathbb{R}.$ Se obține că S=2.

Se folosește **inegalitatea lui Euler** și **inegalitatea mediilor**:

$$r\leq\frac{R}{2}=\frac{abc}{8S}=\frac{abc}{16}\leq\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{16}=\frac{8p^3}{27\cdot 16}=\frac{8}{54r^3}\Rightarrow r\langle\frac{2}{\sqrt[4]{108}}.$$

L:733. Fie $B=1!!\cdot 2!!\cdot 3!!\cdot\ldots\cdot 1944!!\cdot 1945!!$. Arătați că B nu este pătrat perfect. Poate fi scos un număr k!! din B astfel încât numărul rămas să fie pătrat perfect ?

Lucian Tuțescu, Cristina Ene, Craiova

Rezolvare:

Se observă că 1933 este cel mai mare număr prim care este mai mic sau egal cu 1945. Numărul 1933 va trebui să apară în B la o putere pară.

Numerele unde apare 1933 sunt: 1933!!, 1935!!, 1937!!, 1939!!, 1941!!, 1943!!, 1945!!. Si atunci în factorizarea lui B numărul 1933 apare de șapte ori adică B nu este pătrat perfect.

Deoarece 1931 este număr prim iar 1933 , prim, apare în descompunerea lui B la puterea a șaptea. Va trebui scos unul dintre numerele 1933!!, ……., 1945!!. Atunci 1931 va apărea tot la puterea a șaptea în numărul rămas, adică nu se poate să scoatem un k!! ca numărul rămas să fie pătrat perfect.

L:734. Să se arate că $S=\sqrt{C_{2020}^0\cdot C_{2020}^1}+\sqrt{C_{2020}^1\cdot C_{2020}^2}+\ldots+\sqrt{C_{2020}^{2019}\cdot C_{2020}^{2020}}\langle 2^{2020}-1$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Se aplică inegalitatea mediilor și formulele de la combinări.

$$S\langle\frac{C_{2020}^0+C_{2020}^1}{2}+\frac{C_{2020}^1\cdot C_{2020}^2}{2}+\ldots+\frac{C_{2020}^{2019}\cdot C_{2020}^{2020}}{2}=C_{2020}^1+C_{2020}^2+\ldots\ldots+C_{2020}^{2019}+C_{2020}^{2020}=2^{2020}-1,$$

$\Rightarrow S\langle 2^{2020}-1$ deoarece $C_{2020}^0=C_{2020}^{2020}$ și se adună și se scade în inegalitatea de mai sus $C_{2020}^0=1$.

L:735. Rezolvați ecuația: $arctg\frac{1-x}{1+x}=44^0$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Evident $1+x\neq 0$, deci $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

$tg44^0=tg(45^0-1^0)=\frac{1-tg1^0}{1+tg1^0}\Rightarrow tg\left(arctg\frac{1-x}{1+x}\right)=tg44^0=\frac{1-tg1^0}{1+tg1^0}$, și cum funcțiile tangentă și

arctangentă sunt inverse uneia alteia, rezultă $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-tg1^0}{1+tg1^0}\Rightarrow 2x=2tg1^0\Rightarrow x=tg1^0\neq -1$.

L:736. Fie $a\geq 0$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=ax^5+(1-5a)x+4a+6$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Domeniul de definiție este $D=\left[0,\frac{4}{3}\right]$. Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[3]{3x^2-3x+1}=\sqrt[3]{(3x^2-3x+1)\cdot 1\cdot 1}\leq\frac{(3x^2-3x+1)+1+1}{3}=x^2-x+1,$$

cu egalitate pentru $3x^2-3x+1=1$.

$$\sqrt[4]{4x^3-3x^4}=\sqrt[4]{(4x^3-3x^4)\cdot 1\cdot 1\cdot 1}\leq\frac{(4x^3-3x^4)+1+1+1}{4}=\frac{4x^3-3x^4+3}{4},$$

cu egalitate pentru $4x^3-3x^4=1$.

Obținem $ax^5+(1-5a)x+4a+6=\sqrt[3]{3x^2-3x+1}+4\sqrt[4]{4x^3-3x^4}\leq x^2-x+1+4\cdot\frac{4x^3-3x^4+3}{4}=$

$=6-x+x^2+4x^3-3x^4$, de unde rezultă că:

$ax^5+(1-5a)x+4a+6\leq 6-x+x^2+4x^3-3x^4 \Leftrightarrow ax^5+3x^4-4x^3-x^2+(2a-5)x+4a\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(ax^3+(2a+3)x^2+(3a+2)x+4a\right)\leq 0$.

Cum $a\geq 0$ și $x\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$ avem $\left(ax^3+(2a+3)x^2+(3a+2)x+4a\right)\geq 0$.

Deducem din cele de mai sus că $x=1$ este soluția unică a ecuației date.

L:737. Să se rezolve în Z ecuaţia: $(2n+3)3^n=2^{2n+2}-1$. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare: Prin calcul deducem că 0, 1 şi 2 sunt soluţii ale ecuaţiei.

Pentru $n\geq 3$, dezvoltând după **binomul lui Newton**, avem:

$2^{2n+2}=4(3+1)^n=4(3^n+C_n^1 3^{n-1}+C_n^2 3^{n-2}+...+C_n^{n-1}3+1)>4\cdot 3^n+4n\cdot 3^{n-1}+2n(n-1)\cdot 3^{n-2}$.

In acest caz ecuaţia nu are soluţii, deoarece:

$4\cdot 3^n+4n\cdot 3^{n-1}+2n(n-1)\cdot 3^{n-2}>(2n+3)\cdot 3^n+1\Leftrightarrow 3^n-2n\cdot 3^{n-1}+2n(n-1)\cdot 3^{n-2}-1>0\Leftrightarrow$

$3^{n-2}\cdot\left(2n^2-8n+9\right)\rangle 1$ deoarece pentru $n\geq 3$ avem că $3^{n-2}\rangle 1$ și $2n^2-8n+9\rangle 1$.

Pentru n < 0 înlocuim n cu – n şi ecuaţia devine:

$(3-2n)\cdot 3^{-n}=2^{-2n+2}-1\Leftrightarrow(3-2n)\cdot 4^n=4\cdot 3^n-12^n\Leftrightarrow 3\cdot 4^n-2n\cdot 4^n=4\cdot 3^n-12^n\Leftrightarrow$

$3\cdot 4^n+12^n=4\cdot 3^n+2n\cdot 4^n$. Observăm că pentru $n\geq 1$ avem inegalităţile: $3\cdot 4^n\geq 4\cdot 3^n$ și $12^n\rangle 2n\cdot 4^n\Leftrightarrow 3^n\rangle 2n$, inegalităţi care se demonstrează uşor prin inducţie matematică.

În concluzie, mulţimea soluţiilor S = {0,1,2}.

L:738. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{1+4^{\sin x}}\geq\frac{\cos x}{2}+\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

Rezolvare: Pentru $\frac{\cos x}{2}+\sin x\langle 0$ inegalitatea este evidentă, întrucât $\sqrt{1+4^{\sin x}}\geq 0$.

Deoarece $\sin x\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, iar funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x$ este strict crescătoare,

rezultă că $1+4^{\sin x}\geq 1+4^{-1}=\frac{5}{4},\ \forall x\in\mathbb{R}$. **(1).**

Din **inegalitatea Cauchy – Buniakovski-Schwarz** obținem

$\left(\frac{\cos x}{2}+\sin x\right)^2 \le \left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}$. **(2).** Din (1) și (2) rezultă concluzia.

L:739. Să se arate că într-un triunghi ABC în care p = 2R, are loc inegalitatea : $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\rangle 9\cdot\sqrt[3]{2}\cdot r$, **notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.**

Alin Pop, Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare :

Folosind **inegalitatea mediilor, inegalitatea lui Mitrinovic** $p\ge 3r\sqrt{3}$ echivalentă cu $R\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot r$,

ipoteza și relațiile $abc=4RS,\ S=pr$ avem:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ \rangle\ 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{4RS}=3\sqrt[3]{4Rpr}=3\sqrt[3]{8R^2\cdot r}\ge 9\sqrt[3]{2}\cdot r.$$

L:739 [1]. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi cu aria S, atunci să se demonstreze că $\left(\sum\frac{a^3}{a+b}\right)\left(\sum\frac{a^3}{a+3b}\right)\ge 6S^2$. **D.M. Bătineţu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Folosim inegalitatea $\sum a^2\ge\sum ab$, şi **inegalitatea lui Bergström** şi obţinem

$$\sum\frac{a^3}{a+b}=\sum\frac{a^4}{a^2+ab}\ge\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2+\sum ab}\ge\frac{\sum a^2}{2},\ (1).$$

$$\sum\frac{a^3}{a+3b}=\sum\frac{a^4}{a^2+3ab}\ge\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2+3\sum ab}\ge\frac{\sum a^2}{4},\ (2).$$

Rămâne să mai arătăm că $\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{8}\ge 6S^2\Leftrightarrow\sum a^2\ge 4S\sqrt{3}$, care este tocmai **inegalitatea Ionescu-Weitzenböck.**

▪ Clasa a XI-a

L:740. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} e^{\ln x} & \ln x\\ \sqrt{x} & \frac{1}{x}\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Să se calculeze suma $A(1)+A(2)+A(2^2)+....+A(2^{10})$ **;**

b) Să se calculeze $\det\left[A(1)^{2020}\cdot A(2)^{2020}\right]$. **Livia Stan**, Buzău

Rezolvare: a) $e^{\ln x}=x\Rightarrow 1+2+2^2+....+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047$;

$\ln 1+\ln 2+\ln 2^2+\ln 2^3+....+\ln 2^{10}=0+\ln 2+2\ln 2+3\ln 2+....+10\ln 2=(1+2+3+...+10)\cdot\ln 2=55\cdot\ln 2.$

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+.....+\sqrt{2^{10}}=1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+2^2+4\sqrt{2}+2^3+8\sqrt{2}+2^4+16\sqrt{2}+2^5=$
$31\sqrt{2}+(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)=31\sqrt{2}+63.$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....+\frac{1}{2^{10}}=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}$. Așadar suma este $\begin{pmatrix} 2047 & 55\ln 2 \\ 31\sqrt{2}+63 & \frac{2^{11}-1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $\det\left[A(1)^{2020}\cdot A(2)^{2020}\right]=\det A(1)^{2020}\cdot\det A(2)^{2020}=\left(\det A(1)\right)^{2020}\cdot\left(\det(A(2)\right)^{2020}$ și mai departe

$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=1$, $A(2)=\begin{pmatrix} 2 & \ln 2 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=1-\sqrt{2}\cdot\ln 2$.

L:741. Se consideră matricea $M_n(x)=\begin{pmatrix} 1+nx & nx \\ -nx & 1-nx \end{pmatrix}$**, unde** $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.

a. **Arătaţi că** $\det(M_{2019}(0))=1$.
b. **Demonstraţi că** $M_n(x)\cdot M_n(y)=M_n(x+y)$, **unde** $x,y\in R; n\in N^*$.
c. **Determinaţi matricea** $M_1(0)+M_2(0)+...+M_{2019}(0)$.
d. **Demonstraţi că** $M_n(x)\cdot M_m(x)=M_{n+m}(x)$, **unde** $x\in R; n,m\in N^*$.
e. **Demonstraţi că** $M_1(0)\cdot M_2(0)\cdot...\cdot M_{2019}(0)=I_2$, **unde** $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
f. **Arătaţi că** $M_n(x)+M_n(-x)=2M_n(0)$, **unde** $x\in R, n\in N^*$.
g. **Determinaţi numărul real pozitiv** x **pentru care are loc egalitatea:** $M_n(\sqrt{x})\cdot M_n(\sqrt{x+2})=M_n(2), \forall n\in N^*$.

Ciobîcă Constantin;Ciobîcă Elena, Fălticeni

Rezolvare:

a) $M_{2019}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \det(M_{2019}(0))=\det I_2=1$;

b) $M_n(x)\cdot M_n(y)=\begin{pmatrix} 1+nx & nx \\ -nx & 1-nx \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+ny & ny \\ -ny & 1-ny \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+n(x+y) & n(x+y) \\ -n(x+y) & 1-n(x+y) \end{pmatrix}=M_n(x+y)$.

c) $\sum_{i=1}^{2019}M_i(0)=\underbrace{I_2+I_2+...+I_2}_{de\ 2019\ ori}=2019\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2019 & 0 \\ 0 & 2019 \end{pmatrix}$.

d) $M_n(x)\cdot M_m(x)=\begin{pmatrix} 1+nx & nx \\ -nx & 1-nx \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+mx & mx \\ -mx & 1-mx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+(n+m)x & (n+m)x \\ -(n+m)x & 1-(n+m)x \end{pmatrix}=M_{n+m}(x)$

e) $M_i(0)=I_2\Rightarrow\prod_{i=1}^{2019}M_i(0)=\underbrace{I_2\cdot I_2\cdot...\cdot I_2}_{de\ 2019\ ori}=I_2$.

f) $M_n(x)+M_n(x)=\begin{pmatrix} 1+nx & nx \\ -nx & 1-nx \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-nx & -nx \\ nx & 1+nx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2\cdot M_n(0); \forall x\in R; n\in N^*$

g) $M_n(\sqrt{x})\cdot M_n(\sqrt{x+2})=M_n(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})=M_n(2)\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=2\Rightarrow x=\frac{1}{4}\in[0;\infty)$.

L:742. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$**, ecuația:** $(n+1)\cos^{2n}\frac{\pi}{n}+(n+1)\cos^{2n}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2^n}$

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Singura soluție care verifică ecuația este n=3.

$4\cos^6\frac{\pi}{3}+4\cos^6\frac{2\pi}{3}=\frac{4}{2^6}+\frac{4}{2^6}=\frac{1}{2^3}$. Celelalte nu verifică.

Dacă n=4 rezultă $5\cos^8\frac{\pi}{4}+5\cos^8\frac{\pi}{2}=5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=\frac{5}{2^4}\rangle\frac{1}{2^4}$.

Dacă $n\rangle 4$, avem $\frac{\pi}{n}\langle\frac{\pi}{4}$ și cum funcția cos x este strict descrescătoare în cadranul întâi , rezultă $\cos\frac{\pi}{n}\rangle\cos\frac{\pi}{4}$ și $(n+1)\cos^{2n}\frac{\pi}{n}+(n+1)\cos^{2n}\frac{2\pi}{n}\rangle\cos^{2n}\frac{\pi}{n}\rangle\cos^{2n}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^n}$.

L:743. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x+\sin^2 x)^2-1}{\sin^2 x+4\sin x}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Notăm sinx=t. Rezultă:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t+t^2)^2-1}{t^2+4t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t+t^2-1)\cdot(1+t+t^2+1)}{t(t+4)}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+1)\cdot(t+t^2+2)}{t(t+4)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

L:744. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ **astfel încât** $\det\left[(I_2-B)\cdot A+(A-I_2)\cdot B\right]=\det(A-B)$. **Să se arate că** $(A-B)^n=O_2,\ n\in\mathbb{N}^*$. **Florică Anastase**, Lehliu Gară

Rezolvare: $(I_2-B)\cdot A+(A-I_2)\cdot B=A-B$

$tr\left[(A-B)(AB-BA)\right]=tr(A-B)\cdot tr(AB-BA)$ deoarece $tr(AB-BA)=0$.

Atunci, $\det(A-B+AB-BA)=\det(A-B)+\det(AB-BA)\Rightarrow\det(AB-BA)=0$.

Din ecuația Hamilton-Cayley se obține:

$(AB-BA)^2-tr()AB-BA)(AB-BA)+\det(AB-BA)\cdot I_2=O_2\Rightarrow(AB-BA)^2=O_2, n\in\mathbb{N}^*$.

L:745. Fie $a_1,a_2,...,a_n>0$ **astfel încât** $a_1a_2...a_n=1$ **și** $\lambda\geq\frac{1}{2}$ **. Arătați că**

$\frac{1}{\lambda+a_1}+\frac{1}{\lambda+a_2}+...+\frac{1}{\lambda+a_n}\leq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\lambda+1}$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Inegalitatea se mai scrie $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda+1}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda+a_i}$.

Se va utiliza următoarea lemă:

<u>Lemă.</u>

Dacă $x>0$ și $\lambda\geq\frac{1}{2}$, are loc inegalitatea $\frac{x}{\lambda+1}\geq\frac{1}{x+\lambda}+\frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\ln x$. (*)

Demonstrarea presupunene studiul monotoniei funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\frac{x}{\lambda+1}-\frac{1}{x+\lambda}-\frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\ln x$, care are în 1 un minim egal cu f(1)=0. Rezultă că $f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$, de unde rezultă inegalitatea (*).

Folosim **Lema** pentru $x\in\{a_1,a_2,...,a_n\}$, sumăm și ținem seama de condiția din ipoteză $a_1a_2...a_n=1$.

Obținem: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+\lambda}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+\lambda}+\frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln a_i\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+\lambda}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+\lambda}+\frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\ln(a_1a_2...a_n)\Leftrightarrow$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+\lambda}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+\lambda}+\frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\ln 1\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+\lambda}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda a_i}$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

L:746. Fie $n \geq 2$. Determinați imaginea funcției $f(x)=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-2\operatorname{ctg} x+n-1}{\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{ctg} x+n+1}$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Notând $1+\operatorname{ctg} x=t$ avem $0\leq t\leq 2$ și $f(t)=\dfrac{t^2-4t+n+2}{t^2+n}$.

Calculăm $f'(t)=\dfrac{4\left(t^2-t-n\right)}{\left(t^2+n\right)^2}\leq 0$ pentru $0\leq t\leq 2$, iar $f(0)=\dfrac{n+2}{n}$ și $f(2)=\dfrac{n-2}{n+4}$.

Rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $[0,2]$, deci $\operatorname{Im} f=[f(2),f(0)]=\left[\dfrac{n-2}{n+4},\dfrac{n+2}{n}\right]$.

L:747. Arătaţi că dacă $M\in M_2(C)$ astfel încât ecuaţia $\det(M-\lambda I_2)=0$ are în mulţimea numerelor complexe C două soluţii distincte, şi X_i sunt soluţiile ecuaţiei $X^2=M$ atunci $\sum_i X_i^n=O_2, \forall\ n=impar$.

Gabriel Tica, Dolj și **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Voma arăta că dacă $M\in M_2(C)$ are două valori proprii distincte atunci ecuaţia $X^2=M$ are exact patru soluţii X_i, $i=\overline{1,4}$.

Lemă. Dacă $M=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$, unde $\lambda\neq\mu\neq 0$, atunci orice soluţie a ecuaţiei $X^2=M$ este o matrice diagonală.

Demonstraţie. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & (a+d)b\\ (a+d)c & d^2+bc\end{pmatrix}$.Rezultă $a^2\neq d^2$, deci $a+d\neq 0$.Atunci $b=c=0$.□

Apoi dacă $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}^2$ rezultă că $a^2=\lambda$ şi $d^2=\mu$.

Deci, ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ are soluţiile: $\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix};\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -d\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{pmatrix}\right\}$.

Acum se ştie că dacă M este o matrice cu două valori proprii distincte λ şi μ există o matrice inversabilă V astfel încât $V^{-1}MV=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$. Se mai observă că X este soluţia ecuaţiei $X^2=M$ dacă şi numai dacă $Y=V^{-1}XV$ este soluţia ecuaţiei $Y^2=V^{-1}MV=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$.

Aşadar, $X^2=M$ are exact următoarele patru soluţii $V\begin{pmatrix}\pm a & 0\\ 0 & \pm d\end{pmatrix}V^{-1}$. Prin urmare avem că $i=\overline{1,4}$ şi pentru $n=impar$ rezultă că $\sum_i X_i^n=X_1^n+X_2^n+X_3^n+X_4^n=V\begin{pmatrix}2a^n-2a^n & 0\\ 0 & 2d^n-2d^n\end{pmatrix}V^{-1}=O_2$.□

L:748. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x\cdot 7^{\frac{7(1-x)}{6}}=1$.

Constantina Prunaru, Luiza Cremeneanu, Craiova

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $x=7^{\frac{7(x-1)}{6}}$ adică $\dfrac{7^{\frac{7(x-1)}{6}}}{x}=1$.

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{7^{\frac{7(x-1)}{6}}}{x}$ cu $f^{I}(x)=\dfrac{7^{\frac{7(x-1)}{6}}(\frac{7x}{6}\ln 7-1)}{x^2}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} f(x)=\infty$, ecuația $f(x)=1$ are cel mult două soluții: $x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{7}$.

L:749. Să se calculeze $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(7x+\sqrt{x^2+1})^n+(7x-\sqrt{x^2+1})^n}{x^n},\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

Alina Tigae, Ileana Duma, Craiova

Rezolvare:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(7+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1})^n+x^n(7-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1})^n}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(7+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^n+\left(7-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=8^n+6^n$$

Generalizare: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(ax+\sqrt{x^2+1})^n+(ax-\sqrt{x^2+1})^n}{x^n}=(a+1)^n+(a-1)^n,\ n\geq 2, n\in\mathbb{N}.$

L:750. Fie funcţia f : [a,b] $\to\mathbf{R}_+^*$ continuă, cu 0 < a < b şi f(a) $\neq$ f(b). Să se arate că pentru orice k, l, m, n $\in$ N, $\exists c\in(a,b)$ astfel încât: $\dfrac{f^k(c)-f^k(a)}{f^l(b)-f^l(a)}=\dfrac{b^m-c^m}{b^n-a^n}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Fie funcţia g : [a, b] $\to$R, $g(x)=\dfrac{f^k(x)-f^k(a)}{f^l(b)-f^l(a)}-\dfrac{b^m-x^m}{b^n-a^n}$, care este o funcţie continuă.

Deoarece $g(a)=-\dfrac{b^m-a^m}{b^n-a^n}=-\dfrac{b^{m-1}+ab^{m-2}+...+a^{m-1}}{b^{n-1}+ab^{n-2}+...+a^{n-1}}<0$,

şi $g(b)=\dfrac{f^k(b)-f^k(a)}{f^l(b)-f^l(a)}=\dfrac{f^{k-1}(b)+f(a)f^{k-2}(b)+...+f^{k-1}(a)}{f^{l-1}(b)+f(a)f^{l-2}(b)+...+f^{l-1}(a)}>0$ şi g continuă rezultă că $\exists c\in(a,b)$ astfel încât g(c) = 0, de unde rezultă relaţia propusă.

L:751. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ **un șir monoton, astfel încât** $\forall n\in\mathbb{N}^*\ a_n>0$. **Notăm** $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ **pentru** $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **Dacă șirul** $(s_n)_{n\geq 1}$ **este convergent, demonstrați că** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\sqrt{n}\right)=0$.

Luminița Petrișan, Buzău

Rezolvare:

Dacă notăm $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l\in\mathbb{R}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=l-l=0$, deci $a_n\to 0$. Rezultă că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ nu poate fi crescător (ar avea toți termenii în $[a_1,\infty)$, cu $a_1>0$, ceea ce contrazice $a_n\to 0$). Deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, de unde rezultă că $a_1\geq a_2\geq a_3\geq...\geq a_n$. Deci $a_1\geq a_n$, $a_2\geq a_n$, ... , $a_n\geq a_n$. Însumând cele *n* inegalități obținem $s_n\geq n\cdot a_n$ pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ fiind convergent, este mărginit, deci există $M>0$ astfel încât $\forall n\in\mathbb{N}^*\ s_n\leq M$. Obținem pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $0<n\cdot a_n\leq M$. Împărțind cu $\sqrt{n}>0$ deducem inegalitatea $0<a_n\cdot\sqrt{n}\leq\dfrac{M}{\sqrt{n}}\to 0$. Aplicând teorema „cleștelui” rezultă $a_n\cdot\sqrt{n}\to 0$.

▪ Clasa a XII-a

L:752. Se consideră mulţimea $G=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\cdot x & \sqrt{2}\cdot x\\ -\sqrt{2}\cdot x & 1-\sqrt{2}\cdot x\end{pmatrix}/x\in R\right\}$.

a) Să se arate că mulţimea G **este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor din** $M_2(R)$.

b) Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ **este grup abelian.**

c) Arătaţi că funcţia $f:R\to G,\ f(x)=M(x)$ **este morfism de grupuri (de la grupul** $(R,+)$ **la grupul** $(G,\cdot)$**)** **d) Arătaţi că** $f(0)=I_2$**, unde** f **este funcţia de la punctul c).**

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni

Rezolvare:

a) $\forall M(x),M(y)\in G\Rightarrow M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}x & \sqrt{2}x\\ -\sqrt{2}x & 1-\sqrt{2}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}y & \sqrt{2}y\\ -\sqrt{2}y & 1-\sqrt{2}y\end{pmatrix}=M(x+y)\in G$

b) Element neutru: $M(e)=M(0)=I_2$; Element simetrizabil: $M(x')=M(-x)\in G$.

c) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\Leftarrow M(x+y)=M(x)\cdot M(y);\forall x,y\in R$

d) $f(e_1)=e_2$; $e_1=0$ element neutru în $(R,+)$. $e_2=M(0)=I_2$ element neutru în $(G,\cdot)$;

$\Rightarrow f(0)=M(0)=I_2$

L:753. Să se arate că în orice triunghi ABC în care $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ **are loc inegalitatea:**

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\le 2\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare: Vom utiliza **inegalitatea lui Popoviciu** (a se vedea de exemplu: Mircea Becheanu, Bogdan Enescu – *Inegalităţi elementare... şi mai puţin elementare*, Editura Gil, Zalău, 2002, pag. 63-64).

Fie $f:I\to R$ o funcţie concavă şi a, b, c puncte din intervalul I. Atunci este adevărată inegalitatea

$$f(a)+f(b)+f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le 2\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right].$$

Demonstraţia este dată în lucrarea amintită anterior, în cazul unei funcţii convexe (când sensul inegalităţii este invers faţă de cel de mai sus).

Să considerăm funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to R$, $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

Obţinem: $f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos^2 x}{\cos x\sqrt{\cos x}}$, $f''(x)<0$ pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, deci funcţia $f(x)=\sqrt{\cos x}$ este concavă pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Aplicând inegalitatea lui Popoviciu pentru funcţia $f(x)=\sqrt{\cos x}$, rezultă inegalitatea propusă, valabilă în orice triunghi ascuţitunghic sau dreptunghic.

Avem egalitate în cazul triunghiului echilateral (şi numai în acest caz).

L:754. Fie numărul natural $n\ge 2$ **şi mulţimea** $G_n=\left\{A=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\middle|x,y\in C^*,A^n=I_2\right\}\subset M_2(C^*)$

Să se arate că $(G_n,\cdot)$ **este grup comutativ. Aflaţi numărul elementelor grupului** G_n.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Evident operația de înmulțire a matricelor este lege de compoziție internă pe G_n și este și asociativă.

Elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_n$ deoarece $I_2^{\,n} = I_2$

Elementul inversabil este $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \in G_n$ deoarece $\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1} = \left(I_2\right)^{-1} = I_2$.

Prin inducție se arată că $A^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow x^n = y^n = 1 \Rightarrow$

$x, y \in \left\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}\right\}$ unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ este rădăcină de ordin n a unității.

Matricele A din G_n se formează considerând pentru fiecare din cele n valori ale lui x cele n valori ale lui y, prin urmare G_n are $n \cdot n = n^2$ elemente.

L:755. Să se demonstreze egalitatea: $\sqrt[3]{2\sin\frac{\pi}{18}} + \sqrt[3]{2\sin\frac{5\pi}{18}} - \sqrt[3]{2\sin\frac{7\pi}{18}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{9} - 6}$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare:

Notăm: $y_1 = \sin\frac{\pi}{18}$; $y_2 = \sin\frac{5\pi}{18}$; $y_3 = \sin\left(-\frac{7\pi}{18}\right) = -\sin\frac{7\pi}{18}$. Având în vedere formula

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, deducem: $3y_1 - 4y_1^3 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $3y_2 - 4y_2^3 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$3y_3 - 4y_3^3 = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că y_1, y_2, y_3 sunt rădăcinile (reale şi distincte) ale

ecuaţiei: $3y - 4y^3 = \frac{1}{2}$ care se poate scrie: $8y^3 - 6y + 1 = 0$. (1)

Considerăm ecuaţia de gradul trei: $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$ (2) cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi în care: $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $S_3 = x_1x_2x_3$.

Avem relaţiile, care se pot verifica uşor:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$
$$x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 = S_2^3 - 3S_1S_2S_3 + 3S_3^2$$
$$x_1^3x_2^3x_3^3 = S_3^3.$$

Ecuaţia care admite ca rădăcini cuburile rădăcinilor ecuaţiei precedente (2) este:

$$y^3 - S_1'y^2 + S_2'y - S_3' = 0 \qquad (3)$$

unde: $y_1 = x_1^3$, $y_2 = x_2^3$, $y_3 = x_3^3$

$$S_1' = y_1 + y_2 + y_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$
$$S_2' = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = S_2^3 - 3S_1S_2S_3 + 3S_3^2$$
$$S_3' = y_1y_2y_3 = S_3^3.$$

Revenind la ecuaţia (1), putem spune: $S_1' = 0$, $S_2' = -\frac{3}{4}$, $S_3' = -\frac{1}{8}$.

Punem condiţiile: $S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 = 0$; $S_2^3 - 3S_1S_2S_3 + 3S_3^2 = -\frac{3}{4}$; $S_3^3 = -\frac{1}{8}$.

Rezolvând acest sistem se obține $S_3=-\frac{1}{2}$ apoi $S_2=\frac{2S_1^3-3}{6S_1}$ și înlocuind obținem $\left(2S_1^3-3\right)^3+54S_1^3\left(2S_1^3-3\right)+324S_1^3=0$. Notând $S_1^3=t$ se obține ecuația $8t^3+72t^2+216t-27=0$ cu soluția unică $t_1\in(0,1)$ și anume $t_1=\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}$ adică $S_1=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}$.

Așadar, $S_1=x_1+x_2+x_3=\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3}=\sqrt[3]{\sin\frac{\pi}{18}}+\sqrt[3]{\sin\frac{5\pi}{18}}-\sqrt[3]{\sin\frac{7\pi}{18}}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}$

şi egalitatea propusă în enunţul problemei este demonstrată.

L:756. Să se calculeze $\int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\ln\cos x\right)dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare:

$\int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=e^x tgx-\int e^x tgx dx$, $\int e^x\cdot\ln\cos x\ dx=e^x\cdot\ln\cos x-\int e^x(-tgx)dx$. Rezultă că integrala dată este $I=e^x\cdot tgx+e^x\cdot\ln\cos x+C$.

L:757. Să se calculeze $\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-2x+3}dx$. **Ovidiu Țâțan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Folosind schimbarea de variabilă $x=\frac{t+1}{t-1}\Rightarrow dx=\frac{-2}{(t-1)^2}dt$ și atunci când $x=2\Rightarrow t=3, x=3\Rightarrow t=2$ obținem

$$I=\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-2x+3}dx=\int_2^3\frac{\ln\left(\frac{t+1}{t-1}-1\right)}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2-2\frac{t+1}{t-1}+3}\cdot\frac{2}{(t-1)^2}dt=\int_2^3\frac{\ln 2-\ln(t-1)}{t^2-2t+3}dt=\ln 2\cdot\int_2^3\frac{1}{t^2-2t+3}dt-I$$

$$\Rightarrow I+I=\ln 2\cdot\int_2^3\frac{1}{(t-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dt\Rightarrow I=\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t-1}{\sqrt{2}}\Big|_2^3=\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}\cdot arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

L:758. Să se calculeze $\int_a^b\frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx$, $a,b,c\in\mathbb{R},c>0$. **Ovidiu Țâțan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

Notând $\begin{matrix} t=a+b-x\Rightarrow dx=-dt, \\ x=a\Rightarrow t=b, \\ x=b\Rightarrow t=a\end{matrix}$ și $I=\int_a^b\frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx$ obținem: $I=\int_a^b\frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx=\int_a^b\frac{1}{c^{2a+2b-2t-a-b}+1}dt=$

$$=\int_a^b\frac{1}{c^{a+b-2t}+1}dt=\int_a^b\frac{c^{2t-a-b}}{1+c^{2t-a-b}}dt\Rightarrow I+I=\int_a^b\frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx+\int_a^b\frac{c^{2x-a-b}}{1+c^{2x-a-b}}dx=\int_a^b 1dx=b-a\Rightarrow I=\frac{b-a}{2}$$

L:759. Calculați: $\int_1^e\frac{e^x(1+\ln x-x\ln x)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx$. **Marin Chirciu**, Pitești

Rezolvare: Avem $\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)'=\frac{(1+\ln x)e^x-x\ln x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1+\ln x-x\ln x)}{e^{2x}}$.

Obținem $\int_1^e \frac{e^x(1+\ln x - x\ln x)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx = \int_1^e \frac{\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)'}{1+\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)^2}dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e^{1-e}$.

L:760. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[(a+1)n^2]{\frac{(a+1)(k+n)-a}{(a+1)n}}\right)^{(a+1)(k+n)-a}$ **, unde** $a\in\mathbb{N}^*$**.**

Gabriel Tica, Dolj şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[(a+1)n^2]{\frac{(a+1)(k+n)-a}{(a+1)n}}\right)^{(a+1)(k+n)-a} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right).$$

Observăm că $\frac{k-1}{n} < \frac{(a+1)k-a}{(a+1)n} < \frac{k}{n}$, $k=\overline{1,n}$.

Deci, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right)$ este suma *Riemann* pentru $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ pe intervalul $[0,1]$, cu partiția $\left\{0,\frac{1}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right\}$. Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[0,1]$ urmează că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{(a+1)k-a}{(a+1)n}\right) = \int_0^1(1+x)\ln(1+x)dx = 2\ln 2-\frac{3}{4}.\square$$

L:761. Să se calculeze integrala $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[e^{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\sin x + e^x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\cdot\ln(1+tgx)dx$ **.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Făcând schimbarea de variabilă $\varphi(x)=\frac{\pi}{4}-x \Rightarrow \varphi^I(x)=-1,\ \varphi(0)=\frac{\pi}{4},\ \varphi(\frac{\pi}{4})=0$ integrala dată devine

$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\left[e^x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+e^{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\sin x\right]\cdot\ln\left[1+tg(\frac{\pi}{4}-x)\right]dx$. Cum $\ln\left[1+tg(\frac{\pi}{4}-x)\right]=\ln\frac{2}{1+tgx}\Rightarrow$

$$I=(\ln 2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[e^x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+e^{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\sin x\right]dx - I \Rightarrow I=\frac{\ln 2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\pi}{4}-x}\cdot\sin x dx\right].$$

În final se obține $I=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\ln 2}{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\right)$.

L:762. Se consideră funcția $f:(0;1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\arcsin x-\ln x}{x^2}$.

a) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(\frac{1}{2})=2-\frac{\pi}{2}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\nearrow 1}F(x)\langle 4-\frac{\pi}{2}$. **c) Calculați** $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^3\cdot(f(x)+\frac{\ln x}{x^2})dx$**.**

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

a) $F(x)=\int \frac{\arcsin x-\ln x}{x^2}dx=-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\Rightarrow \quad F(\frac{1}{2})=2-\frac{\pi}{3}$ și cum

$F(\frac{1}{2})=2-\frac{\pi}{2}$. rezultă $F(x)=-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\ln(8+4\sqrt{3})$.

b) $\lim\limits_{x\nearrow 1}F(x)=-\frac{\pi}{2}+1+\ln(8+4\sqrt{3})=-\frac{\pi}{2}+\ln(e\cdot(8+4\sqrt{3}))\langle-\frac{\pi}{2}+\ln(e\cdot e^3)=4-\frac{\pi}{2}$.

c) Integrala cerută este $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot\arcsin x\ dx$ și se calculează prin părți pe $\left[\frac{1}{2},u\right]$, $\frac{1}{2}\langle u\langle 1$.

$$I=\lim_{u\nearrow 1}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{u}x\cdot\arcsin x\ dx=\lim_{u\nearrow 1}\left(\frac{u^2}{2}\arcsin u-\frac{\pi}{48}+\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{u}{4}\sqrt{1-u^2}+\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\arcsin u}{4}+\frac{\pi}{24}\right)=\frac{7\pi-3\sqrt{3}}{48}.$$

ERATĂ

În revista **nr. 24** la problema **L701** apare o altă soluție care nu aparține problemei date, cea corectă fiind dată mai jos:

L. 701. Să se arate că are loc egalitatea: $C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+...+\frac{1}{n}C_n^n=1+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}+...+\frac{2^n-1}{n},n\in N^*$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare . Fie $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}C_n^k$. Avem: $S_{n+1}-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}+\sum\limits_{k=1}^{n}(C_{n+1}^k-C_n^k)=$

$$\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(C_n^k+C_n^{k-1}-C_n^k)=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}C_n^{k-1}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{n+1}^k}{n+1}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Însumând după k, relația: $S_{k+1}-S_k=\frac{2^{k+1}-1}{k+1}$, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-S_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{k+1}\Leftrightarrow S_{n+1}-S_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{k+1}\Leftrightarrow S_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{k+1}\Leftrightarrow S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}-1}{k+1},$$

Știați că ...?

..... Proprietatea lui Darboux cunoscută în matematică și care se referă la proprietatea unei funcții definită pe un interval și care o dată cu valorile luate în două puncte ale intervalului ia și toate valorile intermediare când argumentul funcției parcurge intervalul determinat de cele două puncte a fost folosită mult mai înainte de către **Carl Gauss**(în 1799) la demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei și definitivată de către **Bernhard Bolzano** în 1850.

Proprietatea a ajuns să-i poarte numele marelui matematician **Gaston Darboux** și ca urmare a faptului că acesta a avut mai multe contribuții în domeniu precum și că a arătat în 1875 că există funcții care fără să fie continue au această proprietate, posteritatea păstrând numele lui în detrimentul celorlalați.

„A citi și a nu înțelege este asemănător cu a vâna și a nu prinde nimic”
Proverb italian

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:944. Arătați că numărul 5^{2n+4} se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural n.

Gobej Ștefan, elev , Curtea de Argeș

G:945. Un dreptunghi are mărimile lungimea L, lăţimea i. 1) Dacă mărim L cu 1, apoi îl micşorăm cu 1, cât va fi suma ariilor noilor figuri ? 2) Aceeaşi întrebare, dacă mărirea (micşorarea) se face cu n < L.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:946. Să se determine numerele naturale prime *a, b, c, d* pentru care avem:
$2a+5b+50c+250d=2020$

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:947. Aflați ultimele patru cifre ale numărului $n=2\cdot 8^{672}-2\cdot 4^{1005}-2^{2010}$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:948. Determinați $n\in\mathbb{N}$ care verifică ecuația $n^{n^2}=4294967296$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:949. Aflați numărul $\overline{abc}$ pentru care $a\cdot\left(\overline{bb}^b+13^b+c^b+c\right)=2019$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:950. Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte şi o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:951. Comparaţi numerele $2020^{n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1}\right)}$ și $2020^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+....+\frac{n}{n+1}\right)}$ cu $n\in\mathbb{N}$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:952. Să se afle numărul n, știind că $\frac{17}{1\cdot 4}+\frac{41}{4\cdot 7}+\frac{83}{7\cdot 10}+...+\frac{3917}{61\cdot 64}=\frac{505}{16}-\frac{n}{2^6}$.

Iuliana Trașcă, Olt

G:953. Se consideră mulțimile $A=\left\{x=2019n+n^2\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ și $A=\left\{y=2019n^2+n+1\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Calculați $A\cap B$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:954. Aflați produsul ultimelor trei cifre ale numărului $n=30!+961$, unde $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot x,\ x\in\mathbb{N}^*$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:955. Să se demonstreze că numărul 2^n nu se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural par nenul n.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:956. Să se arate că numărul $n=\frac{7^{2020}-7}{6}$ este natural și să se afle ultimele două cifre ale sale.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:957. Rezolvați ecuația $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdot....\cdot\left(1+\frac{1}{x+2018}\right)=2020$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:958. Fie AOB, BOC, ..., HOA opt unghiuri în jurul punctului O astfel încât $m(AOB)=x^0$, $m(BOC)=x^0+6^0$, $m(COD)=x^0+2\cdot 6^0$, $m(DOE)=x^0+3\cdot 6^0$, etc.

a) Aflaţi măsurile celor opt unghiuri.

b) Arăţi că unghiul $\angle$BOH este drept.

c) Arăţi că punctele A, O, F sunt coliniare.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VII-a

G:959. Să se arate că nu există numerele naturale a,b,c astfel încât $(a+b)(a+c)(b+c)=28920$.

elevi **Carina Viespescu, Mihai Ionescu**, Craiova

G:960. Rezolvați ecuația $x+30\cdot\{x\}=[x]$, $x\in\mathbb{Q}$, unde $[x]$ respectiv $\{x\}$ reprezintă partea întreagă respectiv partea fracționară a lui x.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:961. Reconstituiți înmulțirea: $a\cdot\overline{ab}=\overline{(a-1)ba}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:962. Să se arate că pentru n > 3 nu există pătrate perfecte de forma $n^4 - 6n^3 + 8n^2 - 6n + 4$.

Petre Rău, Galați

G:963. Determinați restul împărțirii numărului $N=8^{2020}-7^{2020}$ la 56.

Ionel Morozenco, Tulcea

G:964. Se consideră numerele $a=\sqrt{505+\frac{\sqrt{x}}{2}}$ și $b=\sqrt{505-\frac{\sqrt{x}}{2}}$. Să se determine numărul real x astfel încât a și b să aibă sens și să se arate că dacă $a+b=\sqrt{2020}$, atunci a – b este natural.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:965. Determinaţi perechile (x,y) de numere naturale nenule cu proprietatea că $x^{2014}=y^x$.

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

G:966. Arătaţi că: $\frac{a}{\sqrt{673\cdot 875-b}}>1$, unde $a=27\sqrt{27}+48\sqrt{48}+75\sqrt{75}+\sqrt{1875}$ iar $b=\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot.....\cdot\left(1+\frac{2}{2018}\right)$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:967. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot x-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\\ \sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot x-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot y=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{cases}$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:968. Să se determine $m,n\in\mathbb{N}$ și numărul prim a, știind că $\sqrt{a^m+a^{2n}}$ este număr rațional.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:969. În triunghiul Δ ABC cu $m(A)=15^0$ și $m(B)=90^0$ se consideră punctele $D\in(AC)$ și $E\in(AB)$ astfel încât $m(ABD)=15^0$ și $m(ACE)=30^0$. Se duce $EF\perp AC,\ F\in(AC)$ și fie $(BD)\cap(EF)=\{M\},\ (BD)\cap(CE)=\{N\}$.

a) Să se arate că triunghiul Δ MEN este echilateral;

b) Calculați $m(BDE)$;

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:970. În triunghiul ABC cu $m(A)=90^0$ avem AB=4 cm. Bisectoarea AD, $D\in(BC)$ a unghiului BAC are lungimea $3\sqrt{2}$ cm. Aflați perimetrul și aria triunghiului ABC.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

▪ Clasa a VIII-a

G:971. Să se arate că numărul $(2n^2+2n)^2+(2n^2-2n)^2+(n^2+2)^2$ este pătrat perfect pentru orice n natural; Să se găsească trei numere naturale distincte care au suma pătratelor egală cu 133225.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:972 Determinaţi toate perechile de numere întregi (x,y) care verifică relaţia

$$2x^3+x^2y+xy^2+2y^3=0.$$

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

G:973. Pentru care $x\in\mathbb{R}$, E(x) este minimă , unde

$$E(x)=(4x^2-12x+5)\cdot\left(\frac{1}{2x-5}-\frac{1}{2x-1}\right)\cdot(4x^2-12x+13),\ x\neq\frac{1}{2},x\neq\frac{5}{2}.$$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:974. Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}{x^2-x+1}$.

Petre Rău, Galați

G:975. Arătați că numerele de forma $4(4n^2+5)$ se pot scrie ca sumă de patru pătrate perfecte de numere naturale impare consecutive pentru orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

G:976. Fie $A=2019^{2019}$. Calculați produsul dintre media aritmetică și media armonică a tuturor divizorilor naturali ai numărului A. **Adrian Gobej**, Curtea de Argeș

G:977. Să se determine n numere întregi consecutive pentru care suma cuburilor lor este egală cu pătratul sumei lor. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:978. Fie $A=1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1943!\cdot 1944!$. Să se extragă un număr k! din produsul A astfel încât numărul rămas să fie pătrat perfect și să se arate că A nu poate fi pătrat perfect.

Gabriela și Răzvan Drînceanu, Craiova

▪ Clasa a IX-a

L:763. Să se determine funcția $f:[0;\infty)\to[0;\infty)$ care satisface proprietatea

$f^2(x+2020)=(x+2019)^2+2(x+2019)+1,\ \forall x\geq -2020$. **Adrian Stan,** Buzău

L:764. Dacă S_n este suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, să se arate că $\frac{3}{5}S_{5n} = S_{4n} - S_n$. **Petre Rău**, Galați

L:765. Fie $\lambda > 0$. Să se demonstreze că $\frac{(\lambda x^2 + y^2)(\lambda y^2 + x^2)}{xy} \geq (\lambda^2 + 1)xy + \lambda(x^2 + y^2)$, $\forall x, y > 0$.

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu**, Buzău

L:766. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 2a^n b^n$. Să se arate că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional. **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

L:767. Fie $a, b > 0$. Numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n \geq \frac{b-a}{2a}$ verifică relația $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$. Arătați că $\frac{1}{ax_1^2 + b} + \frac{1}{ax_2^2 + b} + ... + \frac{1}{ax_n^2 + b} \geq \frac{n}{a+b}$. **Marin Chirciu**, Pitești

L:768. Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3$ arătați că: $\frac{a}{b^3 + b^2 + b} + \frac{b}{c^3 + c^2 + c} + \frac{c}{a^3 + a^2 + a} \geq 1$.

Marin Chirciu, Pitești

L:769. Se consideră în **R**, inecuația: $1 + [x] + \left[\frac{2x+3}{3}\right] \leq 3x$. Arătați că dacă x este soluție , atunci $x > 0$. Determinați mulțimea S a soluțiilor inecuației date. ($[a]$ este partea întreagă a numărului a).

Ionel Tudor ,Călugăreni, Giurgiu

L:770. Fie $a_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, n}$ distincte două câte două. Dacă $a = \max(a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci are loc inegalitatea $\sum_{k=1}^{n} a^2{}_k \leq (a-n)\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$. Când are loc egalitatea? **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:771. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \cdot \sqrt{S}}{16} \rangle \frac{\min\left\{\frac{-a+b+c}{2}, \frac{a-b+c}{2}, \frac{a+b-c}{2}\right\}}{a+b+c}.$$

Radu Diaconu, Sibiu

L:772. Într-un triunghi de laturi a, b, c notăm cu m_a, w_a lungimile medianei , respectiv bisectoarei interioare aferente laturii a, etc , celelate notații fiind cele uzuale . Demonstrați că :

$$\frac{R}{2r} \geq \sum_{ciclic} \frac{bc}{ab + bc + ca} \cdot \frac{m_a^2}{w_a^2}.$$

Vasile Jiglău , Arad

▪ Clasa a X-a

L:773. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația : $9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} = \frac{81}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}}$.

Gobej Adrian , Curtea de Argeș

L:774. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{7^x}{x}+x\cdot 7^{\frac{1}{x}}=14$. **Adrian Stan,** Buzău

L:775. Dacă z este o rădăcină de ordinul 5 a unității, să se arate că numărul $E(z)=\frac{z}{z^2+1}+\frac{z^2}{z^4+1}$ este un număr real. **Petre Rău**, Galați

L:776. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Arătați că $\left(\frac{a}{4-a^2}\right)^n+\left(\frac{b}{4-b^2}\right)^n+\left(\frac{c}{4-c^2}\right)^n\geq\frac{3}{3^n}$, unde $n\in\mathbb{N}$. **Marin Chirciu**, Pitești

L:777. Să se determine numerele naturale $a\langle b\langle c$ știind că sunt în progresie geometrică iar $c\leq 1+a+2\log_2 a$. **Emil C. Popa,** Sibiu

L:778. Fie $x,y,z>0$. Să se demonstreze că $\frac{y-z}{z^2(x+y)}+\frac{z-x}{x^2(y+z)}+\frac{x-y}{y^2(z+x)}\geq 0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:779. Dacă $a,b,c\in(1;\infty)$ sau $a,b,c\in(0;1)$ atunci are loc inegalitatea: $\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ab}c\geq\log_{a^2bc}bc+\log_{ab^2c}ca+\log_{abc^2}ab$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:780. Pentru un număr natural k, notăm prin S(k) suma cifrelor. Să se arate că:
Dacă numărul a= $(n!)^n$ are n cifre zecimale , atunci S(a) este pătrat perfect.
Dacă numărul b= $(n!)^4$ are $2n$ cifre zecimale , atunci S(b) este pătrat perfect.

Ionel Tudor , Călugăreni, Giurgiu

L:781. Pentru $a,b\in(1;\infty)$ cu $\{\log_a b\}+\{\log_b a\}=1$ atunci să se arate că $\{\log^n{}_a b\}+\{\log^n{}_b a\}=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. **Florică Anastase**, Lehliu Gară

L:782. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, respectiv G centrul de greutate al triunghiului. Știind că $\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{32}$, arătați că $\sum_{cyc}\frac{AI\cdot AG^2}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=11R^3$.

Radu Diaconu, Sibiu

▪ Clasa a XI-a

L:783. Să se calculeze limita $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos^2 x+5\sin x-4}{4\cos^2+6\sin x-6}$; **Adrian Stan**, Buzău

L:784. Arătați că dacă numerele a și b verifică $2\langle a\langle b\sqrt{e}$ $(e=2,71...)$, atunci $(x+a)(y+a)\langle b^2e^{\frac{x+y+2}{2}}$, $\forall x,y\geq 0$. **Ionel Tudor,** Călugăreni

L:785. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix}a & d & 0\\ 0 & b & 0\\ e & f & c\end{pmatrix}, a\neq b\neq c\neq a$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

L:786. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+13y-5z=0, \\ x-11y+3z=0 \end{cases}$ unde x, y, z $\in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.
b) Să se rezolve sistemul.
c) Să se găsească o soluţie $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a sistemului pentru care
$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0^2+y_0^2-z_0^2-y_0+39$. **Iuliana Trașcă,** Olt

L:787. Fie a, b, c laturile unui triunghi oarecare cu $2(ab+bc+ac)\le 3$. Să se arate că
$\dfrac{\sin(a^2+b^2+c^2)}{\sin(ab+bc+ac)} \rangle \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}\cdot\cos(ab+bc+ca)$. **Emil C. Popa**. Sibiu

L:788. Se consideră șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ de numere reale cu termeni pozitivi și
$x_1+x_2+.....+x_n=\ln(1-x_{n+1}),\ n\ge 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$. **Florică Anastase**, Lehliu Gară

L:789. Pentru $n,k\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ cu $k\langle n$ să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{\sqrt[n]{k}}{n^2}\right)$.

Florică Anastese, Lehliu Gară

▪ Clasa a XII-a

L:790. Să se arate că dacă a, b, c și d sunt numere reale, cu a+b+c+d=0, atunci avem
$12(a^6+b^6+c^6+d^6) = 3(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 + 4(a^3+b^3+c^3+d^3)^2$. **Petre Rău**, Galați

L:791. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+\int\limits_0^x e^{-t}f(x-t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și f(0)=0.

Ionel Morozenco, Tulcea

L:792. Să se calculeze. $\int \dfrac{1}{x(1+x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}})}dx$. **Adrian Stan**, Buzău

L:793. Calculați: $\int\limits_1^e \dfrac{e^x\left(1+\ln x-\ln^2 x\right)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx$. **Marin Chirciu**, Pitești

L:794. Să se arate că polinomul $f(X)=X(X+1)(X+2)\cdot....\cdot(X+n)-1$ are o singură rădăcină pozitivă x_1 și $x_1\langle\dfrac{1}{n!},\ n\in\mathbb{N}^*$. Polinomul $g(X)=X(X-1)(X-2)\cdot....\cdot(X-n)+(-1)^n$ are o singură rădăcină negativă x_1 și $-\dfrac{1}{n!}\langle x_1,\ n\in\mathbb{N}^*$. **Ionel Tudor** , Călugăreni, Giurgiu

L:795. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k+\sqrt{n^2+nk}}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:796. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei $x^3+ax^2+bx+c=0$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $2a^3=9ab-27c$. **Gabriel Tica,** Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:797. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie "$*$" astfel:

$$x*y=\frac{1}{3}\left(x+y-2xy+1\right), \text{ oricare ar fi } x, y\in\mathbb{R}.$$

a) Este această lege comutativă? Care este elementul neutru?

b) Arătaţi că orice element $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ este simetrizabil în raport cu legea "$*$"

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x*9^x=\frac{1}{3}$. **Iuliana Trașcă,** Olt

L:798. a) Să se separe rădăcinile reale ale ecuației $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+86x-325=0$.

b) Arătați că $x=\sqrt[3]{\frac{25+3\sqrt{69}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{25-3\sqrt{69}}{2}}$ este soluție a ecuației de la a).

Ionel Tudor , Călugăreni, Giurgiu

Demonstraţii făra cuvinte *

Șirul lui Traian Lalescu: În G.M., Vol. VI (1900-1901) la pagina 148, marele matematician *Traian Lalescu* propune:

Problema 579. Dacă $L_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$, $n\geq 2$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$.

$$\mathrm{L}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{e}-\frac{n}{e}\right)=\frac{1}{e}.$$

Șirul lui D. M. Bătineţu-Giurgiu: În G.M., Vol. XCIV (1989) la pagina 139, *D.M. Bătineţu-Giurgiu*, propune:

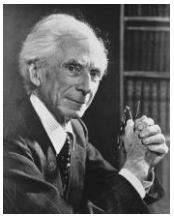
Problema C:890. Dacă $B_n=\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$, $n\geq 2$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}B_n$.

$$\mathrm{B}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)\overset{k!\cong\left(\frac{k}{e}\right)^k\Rightarrow\sqrt[k]{k!}\cong\frac{k}{e}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\frac{(n+1)}{e}}-\frac{n^2}{\frac{n}{e}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)e-ne\right)=e.$$

de Neculai Stanciu

„ Mathematics possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere like that of sculpture”.
Bertrand Russel
(1872- 1970)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before October 01, 2020.

PROPOSALS – QUICKIES

Q59. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. Prove that in any triangle ABC with usual notations is true the following inequality $\sum \frac{w_a^2}{bc} \le \frac{9}{4}$.

Q60. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. If $a_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$, then prove the following inequalities a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{(a_k+1)(a_k^3+1)} \le \frac{n}{4}$; b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^3}{(a_k^2+a_k+1)(a_k^4+1)} \le \frac{n}{6}$.

Q61. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Prove that in any triangle ABC with usual notations is true the following inequality

$$\frac{ab}{s-c} + \frac{bc}{s-a} + \frac{ca}{s-b} \ge 12 \cdot \sqrt{3} \cdot r.$$

Q62. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute the following limits: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\sqrt[k]{k!}}$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt[k]{(k!)^2}}$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q55. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Let $a \in \mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, be a strictly increasing function and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a function which satisfy

$f(g(x+a)) \le f(x) \le f(g(x)+a)$ for any $x \in \mathbb{R}$, then compute $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)dx$.

Solution by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania and independently by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. We have $g(x)+a \ge x \Leftrightarrow g(x) \ge x-a \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Also we have $g(x+a) \le x$, where we take $x+a=y$, thus $g(y) \le y-a, \forall y \in \mathbb{R}$ so $g(x) \le x-a, \forall x \in \mathbb{R}$. So, $g(x) = x-a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Hence, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (x-a)dx = \left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{7\pi}{24} - a\right)$.

Q56. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence such that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n}=a\in R_+^*$. Evaluate the following limits:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\sqrt[n^2]{\frac{(n!)^n}{b}}$, where $b\in R_+^*$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$.

Solution I by author. a) $\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\sqrt[n^2]{\frac{(n!)^n}{b}}=\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$, (1).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e},\ (2).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{e}{a},\ (3).$$

From (1), (2) and (3) we obtain $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\sqrt[n^2]{\frac{(n!)^n}{b}}=\frac{e}{a}\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{a}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n^2]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e\cdot 1}=1$.

Solution II by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\sqrt[n^2]{\frac{(n!)^n}{b}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n^2]{(n!)^n}}{\sqrt[n]{a_n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n^2]{b}}$ but

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n^2]{b}}=1 \text{ and } \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n^2]{(n!)^n}}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{a_n}}\overset{C-D'A}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)na_n}{na_{n+1}}=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

b) $\sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}$, and by Cauchy-D'Alembert we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\sqrt[n]{n!}}{(n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\overset{C-S}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+2]{(n+2)!}-\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\overset{Lalescu}{=}\frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}=1.$$

Q57. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If ABC is a triangle, then prove the inequality $\frac{\sin^6 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^6 B}{\sin^2 C}+\frac{\sin^6 C}{\sin^2 A}\geq\frac{\left(s^2-4Rr-r^2\right)^3}{8s^2R^4}$.

Solution I by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. $a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$;

$$\frac{\sin^6 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^6 B}{\sin^2 C}+\frac{\sin^6 C}{\sin^2 A}=\frac{1}{16R^4}\left(\frac{(a^2)^3}{b^2}+\frac{(b^2)^3}{c^2}+\frac{(c^2)^3}{a^2}\right)\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{16R^4}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(a+b+c)^2}=$$

$$=\frac{1}{16R^4}\cdot\frac{8(s^2-4Rr-r^2)^3}{4s^2}=\frac{(s^2-4Rr-r^2)^3}{8s^2R^4}.$$

Solution II by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania. By *J.Radon*'s s inequality we obtain

$$\frac{\sin^6 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^6 B}{\sin^2 C}+\frac{\sin^6 C}{\sin^2 A}=\frac{\left(\sin^2 A\right)^3}{\sin^2 B}+\frac{\left(\sin^2 B\right)^3}{\sin^2 C}+\frac{\left(\sin^2 C\right)^3}{\sin^2 A}\ge\frac{\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)^3}{\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)^2}.$$

Since, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\dfrac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}$ and $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{s}{R}$, we are done !

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania and **Marin Chirciu**, Piteşti, Romania.

Q58. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

If ABC is a triangle, then prove the inequality $\dfrac{a^2}{r_br_c}+\dfrac{b^2}{r_cr_a}+\dfrac{c^2}{r_ar_b}\ge 4$.

Solution I by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=S^2\left(\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}\right)=$$

$$=p(p-a)(p-b)(p-c)\cdot\frac{p-a+p-b+p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p^2.$$

$$\frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}=\frac{4p^2}{p^2}=4.$$

Solution II by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

$$\frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b}\ge 4\Leftrightarrow\sum a^2(p-b)(p-c)\ge 4S^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a^2(a+b-c)(a-b+c)\ge 16S^2\Leftrightarrow\sum(a^4-a^2b^2-a^2c^2+2a^2bc)\ge 2\sum a^2b^2-\sum a^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^4-2\sum a^2b^2-(2\sum a^2b^2-2\sum a^2bc)\ge 0\Leftrightarrow\sum(a^2-b^2)^2-\sum c^2(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\left((a+b)^2-c^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum(a-b)^2(a+b+c)(a+b-c)\ge 0.$$

Solution III by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania.

By Bergström's inequality we get $\sum\dfrac{a^2}{r_br_c}\ge\dfrac{\left(\sum a\right)^2}{\sum r_ar_b}$, and using $\sum a=2p$ and $\sum r_ar_b=p^2$, we obtain the conclusion.

Solution IV by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.

Using identity in triangle $\dfrac{a^2}{r_br_c}+\dfrac{b^2}{r_cr_a}+\dfrac{c^2}{r_ar_b}=4\left(\dfrac{R}{r}-1\right)$ the inequality is written

$4\left(\dfrac{R}{r}-1\right)\ge 4\Leftrightarrow R\ge 2r$, (Euler's inequality). Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

O problema propusă de Lewis Caroll (Charles Dodgson):

În lupta înverşunată care a avut loc, 70 din cei 100 de piraţi şi-au pierdut un ochi, 75 o ureche, 80 o mână şi 85 un picior. Care este numarul minim de piraţi care şi-au pierdut simultan un ochi, o ureche, o mână şi un picior ? (răspuns la pagina 55)

„ Între ceea ce știi și ceea ce nu știi este ceea ce presupui”
****

6. Caleidoscop matematic

Două mii douăzeci
2020

de **Kovács Béla**, Satu Mare

2020 este un număr compus, descompunerea în factori primi: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.
Are 12 divizori, care sunt următoarele:
1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20 , 101 , 202 , 404 , 505 , 1010 , 2020
Sume divizorilor mai mici ca numărul însuși:
1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 101 + 202 + 404 + 505 + 1010 = 2264
Descompunerea într-o sumă de numere naturale consecutive:
2020 = 402 + 403 + 404 + 405 + 406
2020 = 249+250+251+252+253+254+255+256
2020 = 31 + 32 + 33 + . . . + 68 + 69 + 70
Cum se mai poate scrie acest număr?

$2020 = 2^2+4^2+8^2+44^2$
$2020 = 2^2+4^2+20^2+40^2$
$2020 = 2^2+12^2+24^2+36^2$
$2020 = 3^2+7^2+21^2+39^2$
$2020 = 3^2+9^2+9^2+43^2$
$2020 = 3^2+9^2+29^2+33^2$
$2020 = 4^2+8^2+28^2+34^2$
$2020 = 4^2+14^2+28^2+32^2$
$2020 = 5^2+5^2+11^2+43^2$
$2020 = 5^2+5^2+17^2+41^2$
$2020 = 5^2+23^2+25^2+29^2$
$2020 = 7^2+11^2+13^2+41^2$
$2020 = 7^2+11^2+25^2+35^2$
$2020 = 7^2+13^2+29^2+31^2$
$2020 = 7^2+15^2+15^2+39^2$
$2020 = 7^2+17^2+29^2+29^2$
$2020 = 7^2+21^2+21^2+33^2$
$2020 = 8^2+10^2+16^2+40^2$
$2020 = 8^2+16^2+16^2+38^2$

Suma pătratelor a două numere naturale (două posibilități)
$2020 = 16^2+42^2$ $\quad$ $2020 = 24^2+38^2$

Diferența pătrarelor a două numere naturale (două posibilități)
$2020 = 506^2-504^2$ $\quad$ $2020 = 106^2-96^2$

Suma pătratelor a trei numere naturale (o singură posibilitate)
$2020 = 18^2+20^2+36^2$

Suma pătratelor a patru numere naturale:
$2020 = 8^2+16^2+26^2+32^2$
$2020 = 8^2+20^2+20^2+34^2$
$2020 = 9^2+11^2+27^2+33^2$
$2020 = 9^2+15^2+25^2+33^2$
$2020 = 11^2+13^2+19^2+37^2$
$2020 = 11^2+21^2+27^2+27^2$
$2020 = 11^2+23^2+23^2+29^2$
$2020 = 12^2+12^2+24^2+34^2$
$2020 = 12^2+16^2+18^2+36^2$
$2020 = 12^2+20^2+24^2+30^2$
$2020 = 13^2+13^2+29^2+29^2$
$2020 = 13^2+19^2+23^2+31^2$
$2020 = 14^2+16^2+28^2+28^2$
$2020 = 14^2+20^2+20^2+32^2$
$2020 = 15^2+15^2+27^2+29^2$
$2020 = 15^2+21^2+25^2+27^2$
$2020 = 16^2+16^2+22^2+32^2$
$2020 = 17^2+19^2+23^2+29^2$

Sume și diferențe de pătrate:

$2020 = 2^2 + 45^2 - 3^2$

$2020 = 10^2 + 44^2 - 4^2$

$2020 = 14^2 + 43^2 - 5^2$

$2020 = 26^2 + 37^2 - 5^2$

$2020 = 30^2 + 34^2 - 6^2$

$2020 = 25^2 + 38^2 - 7^2$

$2020 = 22^2 + 40^2 - 8^2$

$2020 = 26^2 + 38^2 - 10^2$

$2020 = 20^2 + 42^2 - 12^2$

$2020 = 33^2 + 34^2 - 15^2$

$2020 = 26^2 + 40^2 - 16^2$

$2020 = 30^2 + 38^2 - 18^2$

$2020 = 34^2 + 35^2 - 19^2$

$2020 = 22^2 + 44^2 - 20^2$

$2020 = 30^2 + 43^2 - 27^2$

$2020 = 34^2 + 42^2 - 30^2$

$2020 = 38^2 + 40^2 - 32^2$

Sume și diferențe de puteri

$2020 = 2^8 + 6^2 + 12^3$

$2020 = 5^5 - 3^4 - 2^{10}$

$2020 = 5^4 + 4^5 + 3^5 + 2^7$

$2020 = 7^4 - 5^3 - 2^8$

$2020 = 7^3 + 41^2 - 2^2$

$2020 = 11^3 + 9^3 - 7^2 + 3^2$

$2020 = 12^3 + 6^3 + 4^3 + 2^4 - 2^2$

$2020 = 13^3 - 13^2 - 2^3$

$2020 = 15^3 - 6^4 - 3^3 - 2^5$

Cu puterile lui 2:

$2020^2 = 400^2 + 1980^2$

$2020^2 = 868^2 + 1824^2$

$2020^2 = 1212^2 + 1616^2$

$2020^2 = 1344^2 + 1508^2$

$2020^2 = 2525^2 - 1515^2$

Cu ajutorul factorialelor:

$2020 = 4! \cdot 5! - 6! - 5! - 4! + 3! - 2!$

$2020 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 4 \cdot 3! + 2 \cdot 2!$

$2020 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3! - 2!$

$2020 = \sqrt{10! + 9! + 2 \cdot 8! + 2 \cdot 7! - 2 \cdot 6! - 4 \cdot 5! - 3 \cdot 4! - 3! - 2!}$

$2020 = \sqrt{2020 + 10! + 9! + 2 \cdot 8! + 7! + 6! + 2 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3!}$

$2020 = \dfrac{24!}{3! \cdot 21!} - \dfrac{4!}{3!}$

$2020 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2$

$2020 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 - 2^3 - 2^2$

$2020 = 2^{11} - 2^4 - 2^3 - 2^2$

$2020 = 2^{11} - 2^5 + 2^2$

Cu puterile lui 3:

$2020 = 3^7 - 3^5 + 3^4 - 3^2 + 3 + 3^0$

Printre numere pitagorice

$2020 = \dfrac{30!}{2! \cdot 3! \cdot 27!} - \dfrac{5!}{2! \cdot 3!}$

$2020 = \dfrac{14!}{5! \cdot 9!} + \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} - 2!$

$2020 = \dfrac{25!}{3! \cdot 22!} - \dfrac{13!}{3! \cdot 10!} + 3!$

Printre fracții egiptene:

$\dfrac{1}{2020} = \dfrac{1}{2420} + \dfrac{1}{12220}$

$\dfrac{1}{2020} = \dfrac{1}{1620} - \dfrac{1}{8181}$

$\dfrac{1}{2020} = \dfrac{1}{1900} + \dfrac{1}{818100} - \dfrac{1}{30780}$

Răspuns de la pag. 53

30 nu și-au pierdut un ochi; 25 nu și-au pierdut o ureche; 20 nu și-au pierdut o mână; 15 nu și-au pierdut un picior (total 90 de pirați) . Deci, 100-90 = 10 pirați care și-au pierdut simultan un ochi, o mână, un picior si o ureche

„ Ești inteligent dacă nu crezi decât jumătate din ceea ce auzi. Ești înțelept dacă știi care jumătate.”
Alain Gillet

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 25** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 26** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 OCTOMBRIE 2020**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

ELEVI REZOLVITORI

Școala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scornicești, Olt
Clasa a VIII-a: . Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Prof. Iuliana Trașcă**

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a X-a: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**

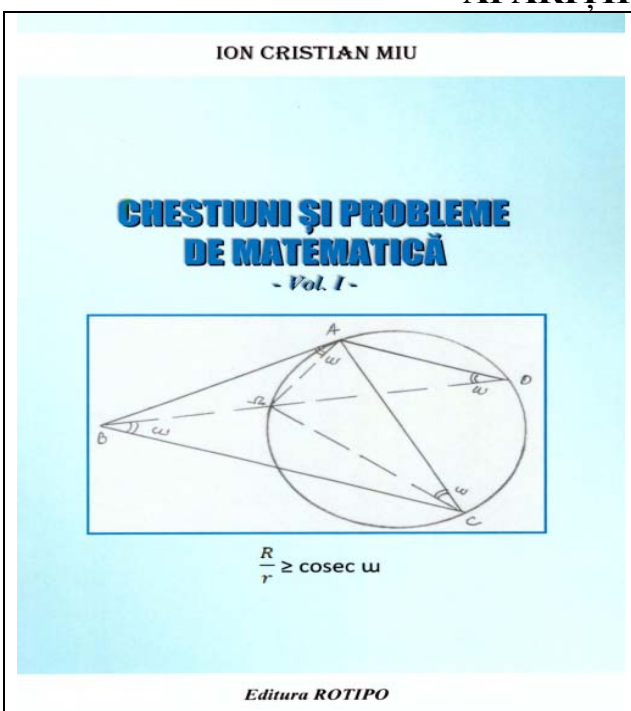
Școala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeș:
Clasa a V-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;

Scoala Gimnazială ” Rareș Vodă” Ploiești, Prahova
Clasa a VII-a: Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Niţoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a IX-a: Găvăneanu Adriana, Berechet Ștefan**; Clasa a X-a :** Știrbu Cătălin; **Clasa a XI-a:** Catinca Teodora; **Clasa a XII-a:** Vizitiu Anamaria, Coman Andrei, Roșioru Ionuț**; Prof. Adrian Stan.**

Scoala Gimnazială Smeni:
Clasa a V-a: Jifcu Mario, Mîrzu Alexandru, Ion Alexandru; **Clasa a VI-a:** Negoiță Elena, Anghel Marius, Rusu Sebian; **Clasa a VII-a**: Andreescu Mario, Teodorescu Sebastian; **Clasa a VIII-a:** Cucuvea Rareș, Neacșu Alexandra; **Clasa a XI-a:** Nicolae Mirabela; **Prof. Ion Stănescu**

APARIȚII EDITORIALE

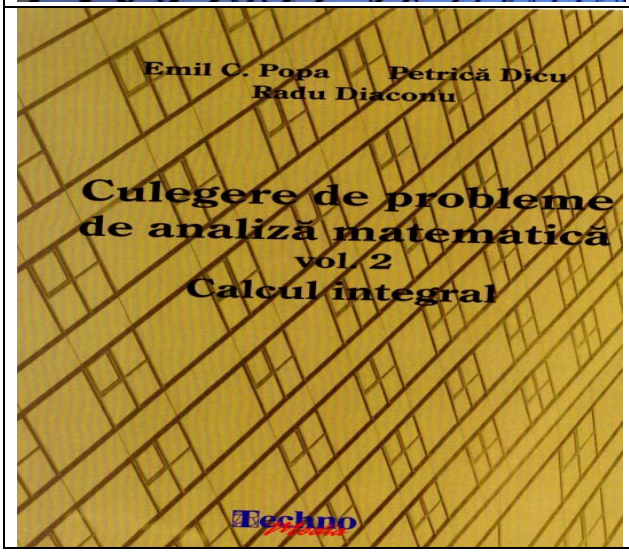


Apărută în anul 2019 la editura Rotipo din Iași, cartea de 352 de pagini reprezintă o excelentă colecție de probleme și teme matematice utile elevilor de liceu, studenților și profesorilor prin buna organizare a conținuturilor și a detalierii rezolvărilor.

Chiar dacă există un număr restrâns de teme principale, ele sunt urmate de o bogată gamă de exemplificări ale noțiunilor care generează noi rezultate adecvate propunerii lor ca subiecte pentru olimpiadele școlare.

Astfel, autorul insistă pe o serie de inegalități integrale, teoreme de medie, limite de șiruri duble, inegalități în triunghi, convergența șirurilor aducând în prim plan inegalități celebre cum ar fi inegalitățile Jensen, Hölder, Minkwski, Cebâșev, Openheim-Chiriță-Băndilă, Hadwiger-Finsler, etc, la care dezvoltă numeroase aplicații ale acestora.

Prin urmare, cartea se înscrie în categoria cărților pe care trebuie să le aibă în bibliotecă orice profesor cu pretenție.



O lucrare de excepție apărută în 2018 în două volume la editura TechnoMedia din Iași însumând peste 800 de pagini și realizată de un colectiv de profesori de la Universitatea „Lucian Blaga” din Sibiu, autori cunoscuți pentru numeroasele probleme propuse în revista Gazeta Matematică precum și în alte publicații.

Deși cartea se adresează în principal studenților, ea conține destule capitole care pot fi parcurse și de către elevii de clasele a XI-a și a XII-a întrucât sunt prezentate metodic și bine organizate noțiunile de teorie și aplicațiile lor în capitole ca: șiruri, serii numerice, derivarea funcțiilor, primitive și integrale.

Iese în evidență bogata gamă de aplicații ale noțiunilor teoretice care sunt însoțite de rezolvări complete ceea ce face ca lucrarea să fie de un real ajutor elevilor și profesorilor întrucât sunt conținute exerciții atât pentru consursuri și olimpiade școlare cât și utile pentru pregătirea examenului de bacalaureat.

Nu ne rămâne decât să felicităm autorii pentru munca formidabilă în realizarea unei colecții speciale de analiză matematică.

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 25 ANUL XIII - MAI 2020

Cuprins

Aniversare Revista „ Sclipirea Minții ” …… 1

1. Istoria matematicii

Scurt istoric al numerelor complexe de Adrian Stan ……. 3

2. Articole şi note matematice

120 de ani de la limita șirului lui Traian Lalescu
de D. M. Bătinețu Giurgiu , Neculai Stanciu ……. 6

Metoda D.M. Bătinețu – Giurgiu pentru calculul unor limite de tip Lalescu de Mihály Bencze, Marius Drăgan …… 8

Alte soluții pentru două limite celebre
de Daniel Sitaru, Marian Ursărescu …… 9

O nouă metodă de rezolvare a ecuației de gradul doi
de Po – shen Loh ……... 10

O rezolvare elementară a unor limite mai puțin elementare
de Dumitru Tudor, Titu Zvonaru …….. 11

An improvement of an inequality of Shan-He Wu
by Vasile Jiglău..... 13

Generalizarea unei probleme de concurs
de Ionel Tudor 14

3. Probleme rezolvate 16

4. Probleme propuse 44

5. Quickies 51

6. Caleidoscop matematic 54

7. Poşta redacţiei 56

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601