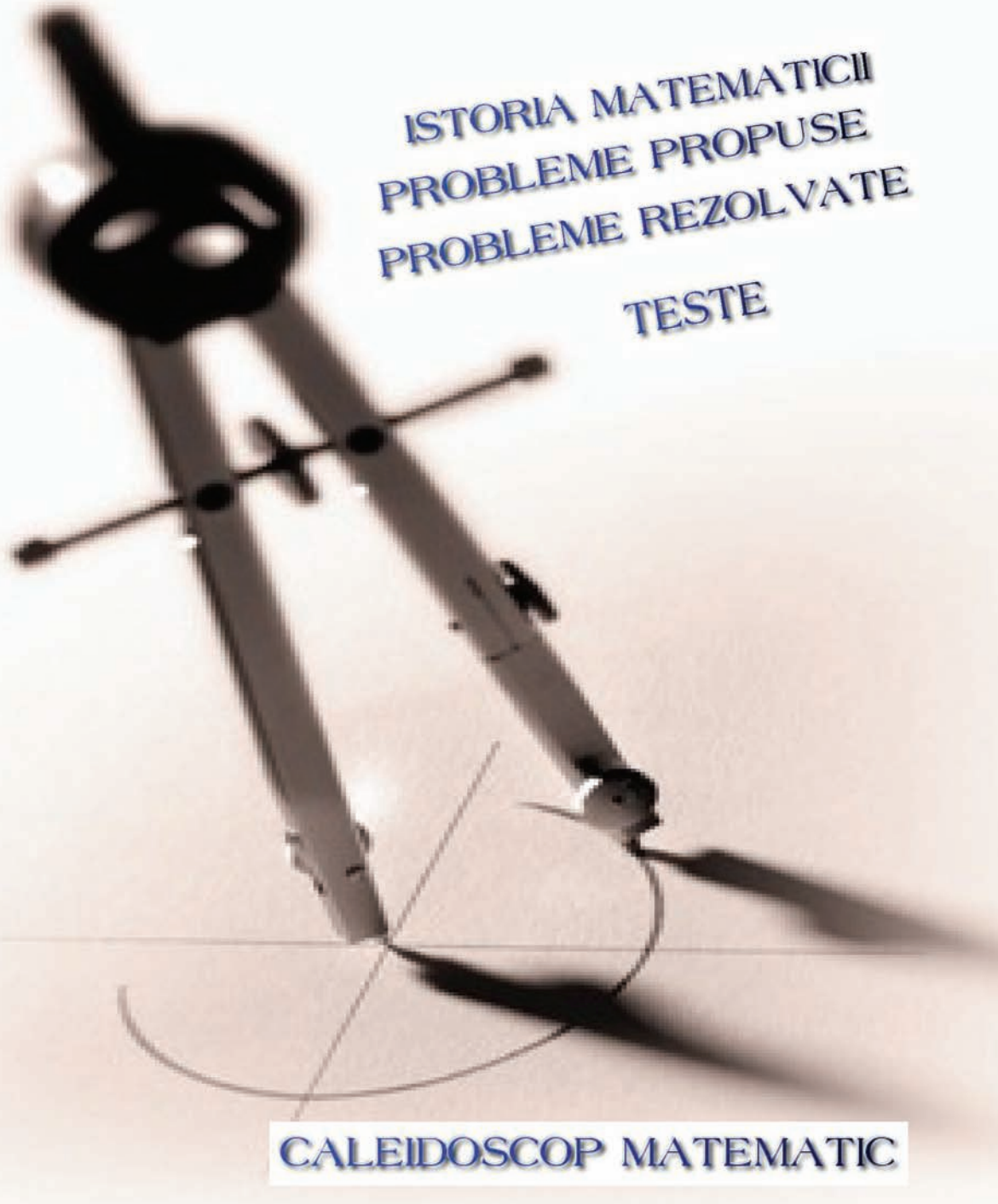
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN VII, NR XIV, 2014

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 14

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An VII, Nr. XIV, NOIEMBRIE 2014, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Apostol – Preşedinte de onoare
Iorgu Mînzală – Inspector matematică, ISJ Buzău
Constantin Rusu – Preşedinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice
Costică Ambrinoc – Preşedinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice
Lenuța Pîrlog – Preşedinte Filiala Buzău a Societății de Ştiințe Matematice
D. M . Bătinețu – Giurgiu **Titu Zvonaru**
Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

- **Director:**
  Neculai Stanciu

- **Redactor şef:**
  Adrian Stan

- **Redactori principali:**
  Nicoleta Gabriela Lupşan **Constantin Dinu**
  Andrei Octavian Dobre **Iuliana Traşcă**
  Gabriel Tica **Ion Stănescu** **Lăcrimioara Năstase**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1
ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3
PROBLEME REZOLVATE..... 12
PROBLEME PROPUSE 33
QUICKIES 42
CALEIDOSCOP MATEMATIC 45
POŞTA REDACTIEI..... 48

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri:**

Maria **Anton,** Mirela **Axente**, Jose Luis Diaz – **Barrero,** Liviu **Bordianu,** Nicoleta **Bran,** Dana **Camelia,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ovidiu **Cioponea,** Ana **Cismaru,** Nicoleta **Clinciu,** Ciprian **Cheşcă,** Marcel **Chiriță,** Aurel **Chiriță,** Nela **Ciceu,** Eliza **Chile,** Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Marian **Cucoaneș,**Gheorghe **Dârstaru**, Viorica **Dogaru**, Marius **Drăgan,** Alexia **Drăgan**,Otilia **Drăgan**, Jamel **Ghanouchi,** Gheorghe **Ghiță,** Dorina **Goiceanu,** Cornelia **Gurău,** Martin **Hriňák**, Ionuț **Ivănescu,** Cornelia Mihaela **Luca,** Ion **Lupşan,** Cristian Cosmin **Lupşan,** Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Gabriela **Marinescu,** Mariana **Mărculescu,** Mariana **Mitea,** Ion **Nedelcu,** Delia **Naidin**, Andrei Florin **Nicolaescu**, Ana **Panaitescu,** Dumitru **Panțuru,** Stelian **Pişcan,** Valerica **Pometescu,** Claudia **Popa,** Florentina **Popescu**, Petre **Păunescu,** Ramona **Puchiu,** Teodora **Rădulescu**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Babis **Stergiou**, Liviu **Smarandache,** Horațiu **Stoian,** Andrei **Spătaru,** Florin **Stănescu**, Ligia **Struțu**, Gheorghe **Struțu**, Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Gabriela **Stoienescu,** George Florin **Şerban,** Daniela **Ticea,** Ionel **Tudor,** Lucian **Tuțescu,** Ovidiu **Țâțan,** Marioara **Vrabie,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean**

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro



“ Matematica este muzica raţiunii “
J.J. Sylvester

1. Istoria Matematicii

Istoria unei prietenii

de prof. Adrian Stan, Buzău

Deşi viaţa i-a adus împreună direct sau indirect prin intermediul scrisorilor pe unii dintre cei mai mari matematicieni cum ar fi Gauss şi Janos Bolyai, Descartes şi Fermat, Tartaglia şi Cardan sau Arhimede şi Apolonius şi mulţi alţii, între ei nu s-au legat mari prietenii care să ducă la alte şi alte descoperiri aşa cum s-a întâmplat în cazul a doi matematicieni englezi a căror pasiune comună pentru matematică, deşi ei practicau avocatura în timpul întâlnirii lor, a adus un câştig matematicii prin dezvoltarea teoriei matricelor , a determinanţilor, precum şi a invarianţilor.



James Joseph Sylvester

Este vorba despre nimeni alţii decât **James Joseph Sylvester** (3 septembrie 1814 – 15 martie 1897) care la mijlocul secolului al XIX-lea, în anul 1850 introducea denumirea de matrice – un tablou dreptunghiular de numere iar prietenul său **Arthur Cayley** (16 august 1821 – 26 ianuarie 1895) care punea bazele teoriei matricelor.

Sylvester a început să studieze matematicile cu Augustus De Morgan, un reputat matematician



Arthur Cayley

de la Universitatea din Londra, dar nu a reuşit să-şi termine studiile aici din cauza unui incident cu un coleg aşa că este nevoit să continue în 1831 la Colegiul St. John’s din Cambridge und îl întâlneşte pe profesorul John Hymers. În 1839, la numai 25 de ani este ales membru al Societăţii Regale din Londra iar până în 1841 el publicase deja peste 50 de articole despre dinamica fluidelor şi despre ecuaţii algebrice dînd printre altele şi o nouă formă a eliminantului a două ecuaţii algebrice.

În 1838, el reuşeşte să ajungă profesor de filozofie naturală la Universitatea din Londra de unde pleacă în 1841 pentru o perioadă scurtă de timp în America, pentru a ţine cursuri la Universitatea din Virginia. De altfel, în America era şi un frate al său mai mare. Dar comportamentul aversiv al unor studenţi faţă de el, (Sylvester era evreu) şi lipsa de reacţie a facultăţii îl determină să-şi dea demisia numai după trei luni.

Arthur Cayley s-a născut la Londra dar primii săi opt ani de viaţă şi i-a petrecut la St. Petersburg (Rusia), după care s-a înapoiat cu părinţii la Londra. El s-a dovedit de mic un copil talentat, de aceea a fost trimis să studieze la King’ s College School şi apoi la Trinity College din Cambridge. La 21 de ani ocupa primul loc la examenul de matematici şi ajungea să predea la Cambridge, acolo unde absolvise.

Lucra foarte mult scriind articol după articol, în 1841 introducând notaţia modernă a determinanţilor şi diverse tipuri de determinanţi în 1844, dar în acelaşi timp citea cu pasiune pe marii scriitori Shakespeare, Byron, Walter Scot, Thackeray. Între 1843 – 1845 pune bazele teoriei funcţiilor eliptice iar în 1854 studiind teoria grupurilor a dat o generalizare a teoriei cuaternionilor, ceea ce reprezenta de fapt o generalizare a numerelor complexe.

După ce pleacă la Londra ca să studieze dreptul la Lincoln's Inn, în 1849 devine avocat, aici cunoscându-l în 1850 pe **Sylvester**, un brunet mic şi îndesat dar având un spirit entuziast şi plin de pasiune, cam agitat şi parcă gata de luptă dar care la 36 de ani studia şi el dreptul.

Cayley avea 29 de ani, era timid, rezervat şi deşi diferiți în comportament , discuțiile dintre ei pe holurile din Lincoln's Inn sau pe drumul pînă la el au dus la o strânsă prietenie pentru todeauna ce a făcut ca la scurt timp, în 1851, **Sylvester** să publice un articol despre determinanți şi să afirme că **" teorema mi-a fost sugerată în parte, în cursul unor discuții cu domnul Cayley, datorită căruia am regăsit bucuriile vieții matematice** ". apud [1.], pag195.

În anul 1850, **Sylvester** a propus într-un articol ca tabloul de numere din care deducea determinanții să-l numească matrice introducând în aceeaşi perioadă şi denumirile de rang şi signatură a unei forme pătratice precum şi denumirile covariant şi invariant, lui datorându-i-se din 1853 şi denumirea de jacobian.

Cayley care era un spirit tenace şi pragmatic s-a aplecat şi mai mult asupra studiului acestor forme, publicând în 1858 lucrarea „Teoria matricelor" dând proprietățile fundamentale ale matricelor.

Astfel, " ***Cayley a făurit armele viitoarelor generații de fizicieni*** " , apud [1.], pag. 195, după cum spunea matematicianul P. G. Tait, căci, dezvoltarea teoriei matriceale şi a determinanților de către cei doi a dus la găsirea de aplicații nu numai în matematică la sistemele liniare sau la transformările geometrice dar şi în fizică la analiza vibrațiilor corpurilor în mişcare, la grafica pe calculator sau în teoria comunicării sau în economie. Calculul matriceal a făcut legătura dintre teoria ecuațiilor algebrice adică algebra şi teoria structurilor algebrice.

De asemenea, **Cayley** a introdus calculul tensorial în cadrul studiului curbelor şi suprafețelor şi s-a ocupat cu obținerea invarianților în teoria formelor.

Între timp, cei doi prieteni s-au lăsat de avocatură şi au ocupat din nou posturi de profesori, în ciuda unui câştig mai mic. Astfel, după 14 ani de avocatură, **Cayley** a ocupat un post la Universitatea din Cambridge iar **Sylvester** din 1855 şi până în 1870 când a ieşit la pensie a ocupat un post la Academia Regală Militară din Woolwich. După această perioadă a cochetat şi cu poezia timp în care printer altele, a scris poemul Rosalinde, care era alcătuit din 400 de versuri toate cu aceeaşi rimă cu a titlului.

În 1876, **Sylvester** la 61 de ani pleacă în America la Universitatea John Hopkins din Baltimore, Maryland şi după doi ani, în 1878 pune bazele primei reviste de matematică din America, " American Journal of Mathematics ".

În 1881, **Cayley** ajunge şi el în America la invitația Universității din Baltimore şi pentru o perioadă de timp, ține cursuri în fața studenților şi a lui **Sylvester.**

În 1885 este rândul lui **Sylvester** să răspundă invitației Universității din Oxford unde preda **Cayley** şi renunță astfel la postul său din America cu părere de rău, pentru a ajunge să predea la Oxford un curs de teoria invarianților, în care, alături de **Cayley** scrie multe articole ce-i consacrează ca fondatori ai acestei teorii.

De fapt, **Cayley** este considerat unul dintre cei mai prodigioşi autori de lucrări matematice publicate, al treilea după Euler(1707 - 1783) şi Cauchy(1789 - 1857). Însuşi **Sylvester** nu înceta să le amintească studenților săi de la Oxford de meritul pe care l-a avut asupra sa, întîlnirea cu prietenul său: " ***cu toate că este mai tânăr decât mine, Cayley a fost părintele meu spiritual, el a fost primul care mi-a deschis ochii şi i-a curățat de orice ceață, aşa că de atunci ei au putut vedea şi însuşi misterele adînci ale credinței noastre în matematici*** ".apud [1.], pag. 196.

Bibliografie:
1. Florica T. Câmpan. A treia carte cu probleme celebre din istoria matematicii. Editura Albatros. Bucureşti. 1976.
2. Vasile Bobancu. Caleidoscop matematic. Editura Niculescu. Bucureşti. 2001.

Prof., Liceul Tehnologic Costin Nenitescu, Buzău

„ Puterea care dinamizează invenția matematică
nu este rațiunea, ci imaginația. ”
Augustus De Morgan

2. Articole si note matematice

Proprietăți şi aplicații ale funcțiilor integrabile

de prof. Lenuța Pîrlog, Buzău

Lucrarea de față prezintă câteva proprietăți interesante ale funcțiilor integrabile, însoțite de câteva exemple:

Propoziția 1. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ **şi** $f:[-a;a]\to\mathbb{R}$ **, o funcție continuă. Atunci,**

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$.

Demonstrație: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$. Prin schimbarea de variabilă $-x=t,\ dx=-dt$ în integrala $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$ şi punând x în loc de t se obține în final ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicația 1. Să se calculeze $I = \int_{\frac{-\pi}{8056}}^{\frac{\pi}{8056}} \frac{1}{\left(1+e^{2014x}\right)\cos(2014x)}dx$.

Rezolvare: Folosind Propoziția 1, şi faptul că $\cos(-x)=cos\ x$, rezultă

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{8056}}\left[\frac{1}{\left(1+e^{2014x}\right)\cos(2014x)}+\frac{1}{\left(1+e^{-2014x}\right)\cos(2014x)}\right]dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8056}}\left[\frac{1+e^{2014x}}{\left(1+e^{2014x}\right)\cos(2014x)}\right]dx =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8056}}\frac{1}{\cos(2014x)}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8056}}\frac{\cos 2014x}{\cos^2(2014x)}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8056}}\frac{\cos 2014x}{1-\sin^2(2014x)}dx = \frac{1}{2014}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt.$$ S-a făcut substituția $\sin 2014x = t \Rightarrow 2014\cos 2014x dx = dt$, de unde, mai departe se obține că

$$I = -\frac{1}{4028}\ln(3-2\sqrt{2}).$$

Aplicația 2. Să se calculeze $I = \int_{1}^{2}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}\bullet e^{2x-3}}dx$.

Rezolvare: Se foloseşte substituția $x-\frac{3}{2}=t,\ dx=dt$ şi Proprietatea 1, rezultând

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}-t}}{\sqrt{\frac{1}{2}-t}+\sqrt{\frac{1}{2}+t}\bullet e^{2t}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+t}}{\sqrt{\frac{1}{2}+t}+\sqrt{\frac{1}{2}-t}\bullet e^{-2t}}\right)dt$$ şi mai departe $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}$.

Aplicația 3. Să se calculeze $I = \int_{-a}^{a}\arccos\left[\frac{x^3-3x}{2}\right]dx,\ a\in[0;2]$.

Rezolvare: $I=\int_{-a}^{a}\arccos\left[\frac{x^3-3x}{2}\right]dx=\int_{0}^{a}\left[\arccos\left(\frac{x^3-3x}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{(x^3-3x)}{2}\right)\right]dx=\int_{0}^{a}\pi dx=a\pi$

Propoziția 2. Fie $a\in\mathbb{R}_+^*$ şi $f,g:[-a;a]\to\mathbb{R}$, funcții continue. Dacă f este pară şi $g(x)\bullet g(-x)=1,\ \forall x\in[-a;a]$ şi $g(x)\neq 0$, atunci, $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$.

Demonstrație: Din aditivitatea integralei şi din $g(x)\bullet g(-x)=1$, se obține

$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx+\int_{-a}^{0}\frac{f(-x)}{1+\frac{1}{g(-x)}}dx$ iar din substituția $-x=t,\ dx=-dt$ în

$\int_{-a}^{0}\frac{g(-x)\bullet f(-x)}{1+g(-x)}dx=\int_{a}^{0}\frac{g(t)\bullet f(t)}{1+g(t)}(-dt)=\int_{0}^{a}\frac{g(x)\bullet f(x)}{1+g(x)}dx$ rezultă în final ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicația 4. Să se calculeze $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2014}}{1+e^{2014x}}dx$.

Rezolvare: Folosind Propoziția 2 pentru $f(x)=x^{2014}$ şi $g(x)=e^{2014x}$ se obține $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2014}}{1+e^{2014x}}dx=$

$=\int_{-2}^{2}x^{2014}dx=\frac{x^{2015}}{2015}\Big|_0^2=\frac{2^{2015}}{2015}$.

Propoziția 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi periodică de perioadă $T\rangle 0$. Atunci, au loc egalitățile: a) $\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx,\ \forall a\in\mathbb{R}$. **b)** $\int_{a}^{a+nT}f(x)dx=n\int_{0}^{T}f(x)dx,\ \forall a\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$.

Demonstrație: a) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(a)=\int_{a}^{a+T}f(x)dx$. Atunci, $g'(a)=0$ (f funcție continuă, periodică de perioadă T) şi g(a)=g(0), deci $\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx,\ \forall a\in\mathbb{R}$. Pentru b) vezi aditivitatea integralei.

Aplicația 5. Să se calculeze $I=\int_{0}^{2015\pi}\arcsin(\sin x)dx$.

Rezolvare: $I=\int_{0}^{\pi}\arcsin(\sin x)dx+\int_{\pi}^{2015\pi}\arcsin(\sin x)dx.$

Cum $\int_{\pi}^{2015\pi}\arcsin(\sin x)dx=\int_{\pi}^{\pi+1007\cdot 2\pi}\arcsin(\sin x)dx\overset{b)}{=}$

$1007\cdot\int_{0}^{2\pi}\arcsin(\sin x)dx=1007\int_{\pi}^{-\pi}\arcsin(\sin t)(-dt)=1007\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\sin x)dx=0$.

Atunci, $I=\int_{0}^{\pi}\arcsin(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\arcsin(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\arcsin(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{4}$.

Bibliografie:
1. Culegere de probleme de analiză matematică. Mircea Ganga. Editura Mathpress. 2008.
2. Colecția Gazeta matematică;

Prof. , Liceul Teoretic "Alexandru Marghiloman", Buzău

Altă metodă de calcul al unor integrale definite

de Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Articolul prezent este o continuare a celui din [1].

Teoremă. **Dacă** $f,h:\left[\frac{1}{a},a\right]\to R$ **şi** $g:\left[\frac{1}{a},a\right]\to R^*, a>1$ **sunt funcţii continue care îndeplinesc condiţiile** $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=h(x)$, $x^2g\left(\frac{1}{x}\right)=g(x), \forall x\in\left[\frac{1}{a},a\right]$, **atunci** $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{h(x)}{g(x)}dx$.

Demonstraţie. Cu substituţia $x=\frac{1}{t}$ obţinem: $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=$

$=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2g\left(\frac{1}{t}\right)}dt=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{h(t)-f(t)}{g(t)}dt=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{h(t)}{g(t)}dt-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(t)}{g(t)}dt$, de unde urmează că $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{h(x)}{g(x)}dx$.

Aplicaţii:

1. Să se calculeze: $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln^{2n+1}x}{x^2+x+1}dx$, unde $n\in N^*$ (Problema 23792 din G.M.-B, nr. 9/1997, autor Traian Tămâian, Carei).

Soluţie. Deoarece $\ln^{2n+1}x+\ln^{2n+1}\frac{1}{x}=0$ cu teorema 2 obţinem $I=0$.

2. Calculaţi $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctgx}{x}dx$, unde $a>1$ (Publicată în G.M.-B, nr. 4/2007, autor Gheorghe Szöllősy).

Soluţie. Aplicând teorema unde $h(x)=\frac{\pi}{2}$ obţinem $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctgx}{x}dx=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln a$.

3. Să se calculeze $I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{(1+x^2)\left(f(x)+x^{\alpha}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}dx$,

unde $a>1, \alpha\geq 0$ şi $f:\left[\frac{1}{a},a\right]\to(0,+\infty)$ (Problema 25333, din G.M.-B, nr. 6/2005, autor Dumitru Acu).

Soluţie. În teoremă luăm $f(x)$ ca fiind $f_1(x)=\frac{f(x)}{f(x)+x^{\alpha}f\left(\frac{1}{x}\right)}$, $f_1:\left[\frac{1}{a},a\right]\to(0,+\infty)$ şi

$g(x)=1+x^2$ şi avem $h(x)=f_1(x)+f_1\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

Deci: $I(a)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}arctgx\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}=\frac{1}{2}\left(arctga-arctg\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}arctg\frac{a^2-1}{2a}$.

4. Dacă $a>1$ şi $f:\left[\frac{1}{a},a\right]\to R, g:\left[\frac{1}{a},a\right]\to R^*$ sunt funcţii continue astfel încât $g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)=1$, să se calculeze: $I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{(1+x^2)\left(f(x)+g(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}dx$ (Problema C.3072 din G.M-B, nr. 9/2006, autor D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti).

Soluție. Considerăm în teoremă pe f ca fiind $f_1:\left[\frac{1}{a},a\right]\to(0,+\infty)$, $f_1(x)=\frac{f(x)}{f(x)+g(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}$ iar $g(x)=1+x^2, g:\left[\frac{1}{a},a\right]\to R$ şi avem

$h(x)=f_1(x)+f_1\left(\frac{1}{x}\right)=1$, de unde rezultă $I(a)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}arctg\frac{a^2-1}{2a}$.

5. Calculaţi $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{5x^{2n}+4x^n+3}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}dx$ (Problema 25815 din G.M.-B, nr. 6/2007, autori Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran, Arad).

Soluție. În teoremă considerăm $f:\left[\frac{1}{2},2\right]\to R$, $f(x)=\frac{5x^{2n}+4x^n+3}{x^{2n}+x^n+1}$ şi $g(x)=1+x^2, g:\left[\frac{1}{2},2\right]\to R$. Obţinem $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=8$ şi deci:

$I=\frac{8}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{1+x^2}dx=4arctgx\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=4\left(arctg2-arctg\frac{1}{2}\right)=4arctg\frac{3}{4}$.

Exerciţii:

Utilizând teorema calculaţi următoarele integrale:

a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctg\frac{1}{x}}{4x^2+3x+4}dx$; b) $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln^{\alpha}x}{\sqrt{4x^4+x^2+4}}dx, \alpha\in N^*, \alpha=\text{impar}$;

c) $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{2x^4-x^2+2}}dx$; d) $\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{arctg\frac{x-1}{x+1}}{\sqrt{2x^4+x^2+2}}dx$.

Bibliografie:

1. Constantin Rusu, *O metodă de calcul al unor integrale definite*, Sclipirea Minţii, An VII, Nr. XIII, 2014, 13-14.

În legătură cu problema IX.370 din RMT 3/2013

de Marius Drăgan, Bucureşti, Neculai Stanciu, Buzău
şi Titu Zvonaru, Comăneşti

În această notă dorim să prezentăm rezultatele obținute în legătură cu următoarea problemă

(1) Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ cu proprietatea $a+b+c=3$. Arătați că:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}} \geq 3.$$ (IX.370, RMT 3/2013, *Marian Cucoaneş*)

reformulată astfel:

(1′) Arătați că $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$, $\forall x,y,z>0$.

I. O soluție folosind inegalitatea lui *Hölder* (vezi [1]).

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq (x^2+y^2+z^2)^3$$

şi atunci este suficient să arătăm că

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} \geq 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

inegalitate adevărată deoarece este echivalentă cu $(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2 \geq 0$.

II. O soluție folosind inegalitatea lui *Jensen*.

Pentru a demonstra $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$, $\forall x,y,z>0$ notăm $x^2=a$, $y^2=b$, $z^2=c$,

iar după condiționarea $a+b+c=1$, inegalitatea devine $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{3}$.

Cu inegalitatea Jensen ponderată aplicată funcției convexe $f:(0,\infty)\to R$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ avem

$af(b)+bf(c)+cf(a) \geq f(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Este suficient să arătăm că $\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$, care rezultă imediat din cunoscuta $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$, ținând cont de faptul că $a+b+c=1$.

III. O extindere pentru patru variabile a problemei.

Să se demonstreze că pentru orice numere strict pozitive x_1,x_2,x_3,x_4 are loc inegalitatea $\sum \frac{x_1^2}{x_2} \geq \sqrt{4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}$.

Soluție: Notăm $x_i^2=a_i$, $i=\overline{1,n}$. Inegalitatea este echivalentă cu

$\sum \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} \geq \sqrt{4(a_1+a_2+a_3+a_4)}$, care după condiționare poate fi scrisă sub forma

$\sum \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} \geq 2$, pentru $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ cu $a_1,a_2,a_3,a_4 \geq 0$, (2).

Din inegalitatea Jensen ponderată aplicată funcției convexe $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ cu ponderile a_1,a_2,a_3,a_4 obținem $\sum\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\geq\frac{1}{\sqrt{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1}}$, (3).

Dar, deoarece $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1\leq\frac{1}{4}$ pentru $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ cu $a_1,a_2,a_3,a_4\geq 0$ din (3) rezultă că inegalitarea (2) este adevărată.

IV. O soluție elementară şi o rafinare (vezi [2]).

Aplicând inegalitatea lui *Bergström* obținem

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c.$$

Dar, conform inegalității dintre media aritmetică şi media pătratică, avem

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\geq a+b+c.$$

Scriem inegalitatea sub forma

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-a-b-c\geq\sqrt{3\sum a^2}-\sum a$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b}+b-2a+\frac{b^2}{c}+c-2b+\frac{c^2}{a}+a-2c\geq\frac{3\sum a^2-\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{3\sum a^2}+\sum a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq\frac{\sum(a-b)^2}{\sqrt{3\sum a^2}+\sum a}.$$

Este suficient să demonstrăm că $\frac{(a-b)^2}{b}\geq\frac{(a-b)^2}{\sqrt{3\sum a^2}+\sum a}$.

Dacă $a=b$ avem egalitate; dacă $a\neq b$, rămâne de arătat că

$$\frac{1}{b}\geq\frac{1}{\sqrt{3\sum a^2}+\sum a}\Leftrightarrow\sqrt{3\sum a^2}+a+c\geq 0,\text{ adevărată.}$$

Soluția de mai sus are avantajul că ne permite obținerea următoarei rafinări

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3\sum a^2}+\sum\frac{(a-b)^2(a+c)}{b\left(\sqrt{3\sum a^2}+\sum a\right)}.$$

V. O soluție folosind problema 26865 din G.M.-B, 1/2014.

'' Dacă $a,b,c>0$, demonstrați inegalitatea $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sum\sqrt{a^2-ab+b^2}$.''

Soluție: Scăzând $\sum a$ din ambii membri obținem:

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-a-b-c=\frac{a^2}{b}+b-2a+\frac{b^2}{c}+c-2b+\frac{c^2}{a}+a-2c=\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}$ şi

$$\sum\sqrt{a^2-ab+b^2}-\sum a=\sum\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}-\frac{a+b}{2}\right)=$$

$$=\sum\frac{a^2-ab+b^2-\frac{(a+b)^2}{4}}{\sqrt{a^2-ab+b^2}+\frac{a+b}{2}}=\sum\frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2-ab+b^2}+2(a+b)}.$$

Este suficient să demonstrăm că $\frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2-ab+b^2}+2(a+b)}$.

Dacă $a=b$ avem egalitate; dacă nu, rămâne de arătat că

$\frac{1}{b} \geq \frac{3}{4\sqrt{a^2-ab+b^2}+2(a+b)} \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2-ab+b^2}+2(a+b) \geq 3b$, adevărată deoarece

$\sqrt{a^2-ab+b^2} \geq \frac{a+b}{2}$. Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Inegalitatea de mai sus, împreuna cu problema 26865 din G.M.-B, nr. 1/2014, i.e.:

Să se arate că dacă $x,y,z>0$, atunci $\sum\sqrt{x^2-xy+y^2} \geq \sqrt{3\sum x^2}$ (pentru care soluții se găsesc în Gazeta Matematica, nr. 6-7-8/2014 şi în [2]), duce la o nouă soluție pentru problema IX.370 din RMT 3/2013.

Bibliografie:

[1] **T. Zvonaru, N. Stanciu** - *Bergström sau Hölder*, RMT nr. 4/2013, 10-12.
[2] **T. Zvonaru, N. Stanciu** – *O modalitate de a demonstra unele inegalități*, RMT nr. 3/2014.

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul " formulei de integrare prin părți"

I

Prof. Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Lucrarea cuprinde mai multe modele aplicative , de calcul a primitivelor unei funcții , utilizând „metoda de integrare prin părți". Lucrarea se adresează elevilor de liceu, profesorilor de matematică şi cercurilor de matematică a profesorilor si elevilor.

Model I.

Avem următoarele tipuri de integrale:

a. $\int P(x)\cdot e^x dx, x\in\mathbb{R}$

b. $\int P(x)\cdot e^{ax} dx, x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}^*$

c. $\int u'(x)\cdot h(x)\cdot e^{u(x)} dx, \quad x\in D_u\cap D_u^{'}, u,h: D\to\mathbb{R}$ (derivabile cu derivatele continue), $h(x)=u(x)+c; c\in\mathbb{R}$

d. $\int P(x)\cdot\left(e^{a_1x}+e^{a_2x}+....+e^{a_nx}\right)dx, n\in\mathbb{N}^*, a_i\in\mathbb{R}_+^*, i=\overline{1,n}$

unde $P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+s_1\cdot x+s_0$, $s_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}, s_n\neq 0, x\in\mathbb{R}$

Exemple: Să se calculeze integralele:

a) $\int(x+1)\cdot e^x dx, x\in\mathbb{R}$; b) $\int x^2\cdot e^{2x} dx, x\in\mathbb{R}$; c) $\int x\cdot e^{px} dx, x\in\mathbb{R}; p\in\mathbb{N}^*$; d) $\int x\cdot e^{\sqrt{2}x} dx, x\in\mathbb{R}$

e) $\int(\cos x)\cdot(\sin x+4)\cdot e^{\sin x} dx, x\in\mathbb{R}$; f) $\int\left(\sqrt{3}x+1\right)\cdot\left(e^x+e^{3x}+....+e^{2011x}\right)dx, x\in\mathbb{R}$;

g) $\int(x+1)\cdot\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^{x^2+2x} dx, x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) $\int(x+1)\cdot e^x dx, x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: $\int(x+1)\cdot e^x dx=(x+1)\cdot e^x-\int e^x dx=(x+1)\cdot e^x-e^x+C=x\cdot e^x+C$.

b) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx, x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare:

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int u'(x) \cdot e^{u(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{u(x)} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

Aplicăm integrarea prin părți:

$I = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int x \cdot e^{2x} dx$, pentru integrala din partea a doua a egalității aplicăm încă o dată formula integrării prin părți: $f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$, $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1.$

$$\Rightarrow I = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \left(x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = e^{2x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$$

c) $\int x \cdot e^{px} dx, x \in \mathbb{R}; p \in \mathbb{N}^*$;

Rezolvare:

$$f'(x) = e^{px} \Rightarrow f(x) = \int e^{px} dx = \frac{e^{px}}{p}; \quad g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$I = x \cdot \frac{e^{px}}{p} - \frac{1}{p} \cdot \int e^{px} dx = x \cdot \frac{e^{px}}{p} - \frac{1}{p^2} \cdot e^{px} + C$$

d) $\int x \cdot e^{\sqrt{2}x} dx, x \in \mathbb{R}$**;**

Rezolvare:

$$f'(x) = e^{\sqrt{2}x} \Rightarrow f(x) = \int e^{\sqrt{2}x} dx = \frac{e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{2}x}}{2} \; ; \quad g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$I = x \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{2}x}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}}{2} \cdot \int e^{\sqrt{2}x} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{2}x}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\sqrt{2}x} + C$$

e) $\int (\cos x) \cdot (\sin x + 4) \cdot e^{\sin x} dx$

Rezolvare:

$$f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow f(x) = \int (\cos x) \cdot e^{\sin x} dx = \int \left(e^{\sin x} \right)' dx = e^{\sin x}; \quad g(x) = \sin x + 4 \Rightarrow g'(x) = \cos x$$

$$I = (\sin x + 4) e^{\sin x} - \int (\cos x) e^{\sin x} dx = (\sin x + 4) \cdot e^{\sin x} - \int \left(e^{\sin x} \right)' dx = (\sin x + 4) \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

f) $\int \left(\sqrt{3}x + 1 \right) \cdot \left(e^x + e^{3x} + ... + e^{2011x} \right) dx$

Rezolvare**:**

$$f'(x) = e^x + e^{3x} + ... + e^{2011x} \Rightarrow f(x) = \int \left(e^x + e^{3x} + ... + e^{2011x} \right) dx = e^x + \frac{e^{3x}}{3} + ... + \frac{e^{2011x}}{2011};$$

$$g(x) = \sqrt{3}x + 1 \Rightarrow g'(x) = \sqrt{3};$$

$$I = \left(\sqrt{3}x + 1 \right) \cdot \left(e^x + \frac{e^{3x}}{3} + ... + \frac{e^{2011x}}{2011} \right) - \int \sqrt{3} \cdot \left(e^x + \frac{e^{3x}}{3} + ... + \frac{e^{2011x}}{2011} \right) dx =$$

$$=\left(\sqrt{3}x+1\right)\cdot\left(e^x+\frac{e^{3x}}{3}+...+\frac{e^{2011x}}{2011}\right)-\sqrt{3}\cdot\left(e^x+\frac{e^{3x}}{3^2}+...+\frac{e^{2011x}}{2011^2}\right)+C;$$

g) $\int(x+1)\cdot\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^{x^2+2x}dx,\ x\in R$

Rezolvare:

$$f'(x)=(x+1)\cdot e^{x^2+2x}\Rightarrow f(x)=\int(x+1)\cdot e^{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left(e^{x^2+2x}\right)'dx=\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2x}$$

$$g(x)=x^2+2x+1\Rightarrow g'(x)=2(x+1)$$

$$I=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^{x^2+2x}-\int(x+1)\cdot e^{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^{x^2+2x}-$$

$$-\int\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x^2+2x}\right)'dx=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^{x^2+2x}-\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2x}+C.$$

Profesori, Colegiul Vasile Lovinescu, Falticeni

An elementary proof of one Wallis-type limit

By D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

Introduction

The famous *Wallis*' s sequence $(W_n)_{n\geq 1}$ is defined by: $W_n=\frac{4^n(n!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)}$, $n\geq 1$, (1).

It is well-known that $\lim_{n\to\infty}W_n=\frac{\pi}{2}$, (2).

By results of many mathematicians which use properties of some sequences of definite integrals or the asymptotic analysis of W_n we can obtained that $\lim_{n\to\infty}n\left(W_n-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8}$, (*), (see for e.g. [1])

Result, In this paper, using elementary methods, we show (*). Indeed, we have:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(W_n-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{W_n-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}}\overset{Cesaro-Stolz}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}-W_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{W_n-W_{n+1}}{\frac{1}{n(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}W_n\cdot\frac{1-\frac{W_{n+1}}{W_n}}{\frac{1}{n^2}}\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n+1)!!)^2(2n+3)}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{(2n+1)(2n+3)-4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}(4n^2+8n-3-4n^2-8n-4)=\frac{\pi}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}(-1)=-\frac{\pi}{8},\text{ and we are done.}$$

References:

1. Eugen Păltănea, *On the rate of convergence of Wallis' sequence*, Aust. Math. Soc. Gazette 43 (2007), no. 1, 34-38.

„ Algebra nu e decât o geometrie scrisă
şi geometria nu este decât o algebră figurată .”
Marie Sophie Germain

3. Probleme rezolvate

▪ Învăţământ primar

P:298. Suma a 46 de numere naturale diferite şi nenule este 2011. Arătaţi că cel puţin două dintre ele sunt numere naturale impare.

***Prof*. Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Suma primelor 46 de numere pare nenule ne dă 2162 iar pentru a obține suma 2011 trebuie să înlocuim un număr par de numere pare cu acelaşi număr par de numere impare, deci, cel puțin două dintre numere sunt naturale impare.

P:299. Raisa şi Violeta au împreună 35 de ani. În urmă cu 5 ani vârsta Violetei era de 4 ori mai mare decât vârsta Raisei. Aflaţi vârstele celor două.

***Prof*. Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Notăm cu x vârsta Raisei şi cu y vârsta Violetei. Atunci, $x+y=35\Rightarrow y=35-x$ (1) şi $4(x-5)=y-5\Rightarrow y=4x-15$, (2). Din (1) şi (2) rezultă $x=10\Rightarrow y=25.$

P:300. Gică vrea să cumpere mai multe reviste ’’Sclipirea Minţii’’. Dacă ar cumpăra şapte, i-ar mai rămâne 10 lei, iar dacă ar dori să cumpere nouă, ar mai avea nevoie de 10 lei. Cât costă o revistă ’’Sclipirea Minţii’’?

***Prof*. Gheorghe Struţu,** Buzău

Rezolvare:

Fie g preţul unei reviste ’’Sclipirea Minţii’’. Condiţia din enunţ se scrie sub forma $7g+10=9g-10$, de unde $g=10$ lei.

P:301. Arătaţi că oricare ar fi şase numere pare, diferite, există cel puţin două a căror diferenţă se împarte exact la 10.

***Prof*. Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare :

Un număr par are ultima cifră 0, 2, 4, 6 sau 8, adică sunt cinci cazuri. Având şase numere, două dintre ele se vor termina cu aceeaşi cifră. Făcând diferenţa lor vom obţine un număr care se termină cu zero, deci se împarte exact la 10.

P:302. Ştiind că $1\text{x}2-(\text{a}-1)(4-\text{a})=0$**, aflaţi numărul a .**

***Prof*. Constantin Apostol,** Rm. Sărat

Dacă diferenţa este egală cu zero, rezultă că $1\text{x}2=(\text{a}-1)(4-\text{a})$.

Dacă $1=\text{a}-1$ şi $2=4-\text{a}$, deducem că $\text{a}=2$;
Dacă $1=4-\text{a}$ şi $2=\text{a}-1$, deducem că $\text{a}=3$.
Rezultă că există două valori ale lui a pentru a avea egalitatea dată .

▪ Clasa a V-a

G:420. **Se dă numărul** $A=\left\{\left[5:\left(2\cdot 3-1\right)+14\right]:15+3:\left[1+2\cdot\left(45:15-2\right)\right]\right\}:2+2008$.
Să se calculeze suma divizorilor numărului A.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Se calculează A şi se obține $A=2009=7^2\cdot 41$. Divizorii lui A sunt $:1,7,41,49,287,2009$. Suma lor este 2394.

G:421. Determinați cele mai mici numere naturale $\overline{abcde}$ **, respectiv** $\overline{fghij}$ **astfel încât:** $2\cdot\overline{abcde}=\overline{fghij}$ **şi cele două numere împreună să utilizeze toate cifrele de la 0 la 9.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Condiția ca cele două numere împreună să utilizeze toate cifrele de la 0 la 9 este echivalentă cu condiția: la litere diferite să corespundă cifre diferite. Evident avem $A=\overline{1\bullet\bullet\bullet\bullet}$ şi $B=\overline{2\bullet\bullet\bullet\bullet}$, cifrele 1 şi 2 sunt astfel folosite. Apoi $B=2A$, conține pe 0 (altfel A conține 0, iar B conține 0 sau 1 – contradicție). Mai departe avem $A=\overline{13\bullet\bullet\bullet}$, $A=\overline{134\bullet\bullet}$ şi $B=\overline{26\bullet\bullet\bullet}$. Deoarece B conține cifra 0, rezultă că A conține cifra 5. Dacă $A=\overline{134\bullet 5}$ atunci $B=2A=\overline{2691\bullet}$, contradicție(avem de două ori cifra 1). Rezultă $A=\overline{134\bullet 5}$, unde poziția zecilor poate fi ocupată de 7 sau de 8. Singura posibilitate convenabilă este cifra zecilor 8. Aşadar, numerele căutate sunt: $(\overline{abcde},\overline{fghij})\in\{13485,26970\}$. □

G:422. Aflați numărul natural n, astfel încât $2013\cdot 4024+2\cdot 2013\cdot 4024+...+n\cdot 2013\cdot 4024$ **să fie pătrat perfect.**

Prof. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Suma dată este egală cu $2013\cdot 4024\cdot(1+2+3+...+n)=\dfrac{2013\cdot\cancel{4024}\cdot n(n+1)}{\cancel{2}}$ care este pătrat perfect pentru $n=2012$.

G:423. **a) Să se arate că fracția** $F=\dfrac{544}{225}$ **este ireductibilă.**

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ **care verifică egalitatea** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=\dfrac{544}{225}$.

Prof. **Ionel Tudor, Viorica Dogaru**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Fracția $F=\dfrac{544}{225}=\dfrac{2^5\cdot 17}{3^2\cdot 5^2}$ este ireductibilă întrucât nu se simplifică.

b) Egalitatea dată se mai scrie $\dfrac{5^{2n}-3^{2n}}{3^n\cdot 5^n}=\dfrac{544}{225}$. Din a) rezultă că fracția F este ireductibilă, prin urmare, se impune ca $5^{2n}-3^{2n}=544$ şi $3^n\cdot 5^n=225\Rightarrow n=2$.

G:424. Determinați numerele naturale a şi b astfel încât fracția $\dfrac{1961}{ab-7a+3b-21}$ **să fie echiunitară**.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Cum $\frac{1961}{ab-7a+3b-21}=\frac{1961}{(a+3)(b-7)}\Rightarrow (a+3)(b-7)=1961$. Din $1961=1\cdot 37\cdot 53$ se obțin următoarele soluții: $(a;b)\in\{(34;60),(50;44),(1958;8)\}$.

G:425. **Să se găsească numerele naturale m şi n ştiind că :** $1^n+2^n+3^n+.....+2013^n=45^m-12$.

Prof. Şerban George-Florin, Brăila

Rezolvare:

A=(1^n+2^n+.....+10^n)+ (11^n+12^n+.....+20^n)+.....+(2001^n+2002^n+.....+2010^n)+2011^n+2012^n +2013^n . Avem 201 paranteze având aceeaşi ultimă cifră.

Dacă n=4k , u(1^n+2^n+.....+10^n)=u(1+6+1+6+5+6+1+6+1+0)=3

u(2011^n+2012^n+2013^n)=u(1+6+1)=8 . Deci u(**A**)=u(201·3+8)=1 ,

Dacă n=4k+1 , u(1^n+2^n+.....+10^n)=u(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0)=5

u(2011^n+2012^n+2013^n)=u(1+2+3)=6 . Deci u(**A**)=u(201·5+6)=1 ,

Dacă n=4k+2 , u(1^n+2^n+.....+10^n)=u(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)=5

u(2011^n+2012^n+2013^n)=u(1+4+9)=4 . Deci u(**A**)=u(201·5+4)=9 ,

Dacă n=4k+3 , u(1^n+2^n+.....+10^n)=u(1+8+7+4+5+6+3+2+9+0)=5

u(2011^n+2012^n+2013^n)=u(1+8+7)=6 . Deci u(**A**)=u(201·5+6)=1

Deci, **u(A) poate fi 1 sau 9** . Presupun că n≥1 , atunci u(**A**)∈{1,9} , dar u(45^m -12)=3 , pentru m≥1 , egalitatea nu poate avea loc . Daca n= 0 avem

2013=45^m -12 , 45^m=2025=45^2 , m=2 . Daca m=0 , 1^n+2^n+.....+2013^n = -11, fals, deoarece suma este pozitivă . În concluzie, avem că n= 0 si m= 2 .

G:426. **Determinați perechile de numere naturale** (a,b)**, pentru care** $2ab+3a+b=21$.

***Prof*. Constantin Apostol,** Rm. Sărat

Rezolvare: Din $2ab+3a+b=21\Rightarrow a=\frac{21-b}{2b+3}\Rightarrow 2a=\frac{42-2b}{2b+3}\in\mathbb{N}\Rightarrow 2b+3$ divide $42-2b$ şi deci, $2b+3$ divide $45-(2b+3)$.

$a=\frac{45-(2b+3)}{2b+3}=\frac{45}{2b+3}-\frac{2b+3}{2b+3}=\frac{45}{2b+3}-1\in\mathbb{N}$. Astfel, rezultă că:

1) $2b+3\,|\,45$ şi 2) $\frac{45}{2b+3}\geq 1$. Divizorii lui 45 sunt 1, 3, 5, 9, 15 şi 45.

I) Dacă $2b+3=1,\Rightarrow b\notin\mathbb{N}$;

II) Dacă $2b+3=3,\Rightarrow b=0$ şi $a=7,\Rightarrow (a,b)=(7;0)$;

III) Dacă $2b+3=5,\Rightarrow b=1$ şi a = 4 , $\Rightarrow (a,b)=(4;1)$;

IV) Dacă $2b+3=9,\Rightarrow$b = 3 şi a = 2 , $\Rightarrow (a,b)=(2;3)$;

V) Dacă 2b + 3 = 15, $\Rightarrow$b = 6 şi a = 1, $\Rightarrow (a,b)=(1;6)$;

VI) Dacă 2b + 3 = 45, $\Rightarrow$b = 21 şi a = 0, $\Rightarrow (a,b)=(0;21)$.

Astfel, concluzionăm că, perechile ordonate care verifică egalitatea dată, sunt:

$(7;0),\ (4;1),\ (2;3),\ (1;6),\ (0;21)$.

G:427. **Determinați numerele** $\overline{ab}$**, şi trei numere naturale consecutive, dintre care primul număr este prim , ştiind că prin împărțirea lui** $\overline{ab}$ **la cele trei numere numere, se obțin ca resturi precedentele celor trei numere.**

***Prof*. Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare : Fie $n+1,n+2,n+3,n\in N^*$, cele trei numere consecutive la care se împarte un număr natural N = $\overline{ab}$, cu $n+1$ prim. Resturile împărțirii lui N la cele trei numere sunt $n,n+1,$ respectiv $n+2$.

Conform teoremei împărțirii cu rest, avem: $N=(n+1)c_1+n=(n+2)c_2+n+1=(n+3)c_3+n+2,$

şi, atunci: $N+1=(n+1)(c_1+1)=(n+2)(c_2+1)=(n+3)(c_3+1)$,
deci $N+1$ este multiplu de $n+1, n+2$ şi $n+3$, cu $n+1$ prim, adică $N+1$ se divide la produsul lor, adevarat doarece n+2 si n+3 sunt prime intre ele. Deci $N=(n+1)(n+2)(n+3)k-1, k\in N^*$. Se observă că pentru $k=1. n\geq 3$, sau $k\geq 2, n\geq 2$ obţinem numere N mai mari ca 100. Rămâne de găsit numerele N pentru $n\in\{1,2\}$.

1) Pentru n =1 $\Rightarrow N=24k-1\Rightarrow N\in\{23,47,71,95\}$, pentru care prin împărţirea la 2, 3, 4 se obţin resturile 1, 2 şi 3 ;

2) Pentru $n=2\Rightarrow N=60k-1\Rightarrow N=59$, care prin împărţirea la 3, 4 şi 5, dă resturile 2, 3, respectiv 4.

In concluzie $\overline{ab}\in\{23,47,71,95\}$ şi cele trei numere naturale sunt 2,3 şi 4,şi pe de altă parte $\overline{ab}=59$ cu numerele naturale sunt 3, 4, 5.

G:428. **Mulţimile A şi B sunt astfel încât** $card(A\cup B)=140$, $card(A-B)=50$ **şi** $card(B-A)=60$. **Să se calculeze** $card(A\cap B)$. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Cum $card(A\cup B)=card(A-B)+card(B-A)+card(A\cap B)$ rezultă
$140=50+60+card(A\cap B)\Rightarrow card(A\cap B)=30$.

G:429. **Prin împărţirea numărului *a* la numărul *b*** $\left(a,\ b\in\mathbb{N}^*\right)$ **obţinem câtul 7 şi restul 12.**

Arătaţi că $70\cdot a-490\cdot b-111$ **este pătrat perfect şi cub perfect.** ***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

Rezolvare: $a=7\cdot b+12,\ b>12$, $70\cdot a-490\cdot b-111=490b+840-490b-111=729$, deci,
$729=27^2$, $729=9^3$.

G:430. **Simplificaţi fracţia:** $\dfrac{\overline{1a}+\overline{1aa}+\overline{1aaa}+...+\overline{1\underbrace{aaa...a}_{9\ cifre}}}{9}$. ***Prof.* Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

Rezolvare: $\overline{1a}+\overline{1aa}+\overline{1aaa}+...+\overline{1\underbrace{aaa...a}_{9\ cifre}}=(10+a)+(100+11a)+(1000+111a)+...+$

$+\left(\underbrace{1000...0}_{9\ cifre}+\underbrace{111...1}_{9\ cifre}a\right)=\left(10+100+1000+...+\underbrace{1000...0}_{9\ cifre}\right)+\left(1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{9\ cifre}\right)a=$

$=\underbrace{1111111110}_{9\ cifre}+123456789a$. Această sumă este divizibilă cu 9, valoarea fracţiei după simplificare fiind
$123456790+13717421a$.

▪ Clasa a VI-a

G:431. **Numerele** $x\rangle y\rangle 0$ **şi** $n\in\mathbb{N}^*$ **verifică egalitatea** $x^{2n+1}-y^{2n+1}=x+y$. **Arătaţi că numărul** $x^{2n}-y^{2n}$ **este supraunitar.** ***Prof.* Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Trebuie să arătăm că $x^{2n}-y^{2n}\rangle 1$ adică

$$x^{2n}-y^{2n}\rangle\frac{x^{2n+1}-y^{2n+1}}{x+y}\Bigg|\cdot(x+y)\Rightarrow\left(x^{2n}-y^{2n}\right)(x+y)\ \rangle\ x^{2n+1}-y^{2n+1}.\ (*)$$

Dar ,

$\left(x^{2n}-y^{2n}\right)(x+y) = x^{2n+1}-xy^{2n}+x^{2n}y-y^{2n+1} = x^{2n+1}-y^{2n+1}+xy(x^{2n-1}-y^{2n-1}))\rangle x^{2n+1}-y^{2n+1}$

deoarece $xy(x^{2n-1}-y^{2n-1})\rangle 0$ pentru $x\rangle y\rangle 0$. Deci, relația (*) este adevărată.

G:432. Să se arate că pentru orice număr natural n numărul $N=2011^n+2013^{n+1}+2015^{n+2}$ nu poate fi pătrat perfect. ***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Pentru n = 0 numărul N = 1 + 2013 + 2015^2 = 1+M4+1+M4+1=M4+3.

Pentru $n\geq 1$ numărul N se scrie: $N=\left(2012-1\right)^n+\left(2012+1\right)^{n+1}+\left(2016-1\right)^{n+2}=$

$(M_4-1)^n+(M_4+1)^{n+1}+(M_4-1)^{n+2} = M_4+(-1)^n+M_4+1+M_4+(-1)^{n+2}=M_4+1+(-1)^n+(-1)^{n+2}$

Pentru n număr par, rezultă N = M4 +3, iar pentru n impar, rezultă N = M4 – 1 = M4 +3. Cum un pătrat perfect nu poate fi de forma M4 +3 , rezultă că N nu poate fi pătrat perfect.

G:433. Determinați numerele naturale x,y,z știind că $\frac{x}{9}=\frac{y}{18}=\frac{12}{z}$.

***Prof.* Doina și Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Din relația dată se obține $y=2x$ și $x\cdot z=108$. Ținând cont de descompunerea în factori a numărului 108, se obțin în final soluțiile

$(x,y,z)\in\{(1,2,108),(2,4,54),(3,6,36),(4,8,27),(6,12,18),(9,18,12),(12,24,9),(18,36,6),(27,54,4)\}$

$\{(27,54,4),(36,72,3),(54,108,2),(108,216,1)\}$.

G:434. Aflați toate numerele de forma $\overline{abca}$ care verifică simultan condițiile :

a) $\overline{abca}\ \vdots$ 11 ; b) Restul împărțirii numărului $\overline{abca}$ la numărul $\overline{ab}$ este un număr cu trei divizori ; c) b <a .

***Prof.* Șerban George-Florin** , Brăila

Rezolvare: Aplicăm criteriul de divizibilitate cu 11

$\overline{abca}\ \vdots$ 11 dacă $(\overline{bca}-a)=\overline{bc0}=10\cdot\overline{bc}\vdots 11$, $\overline{bc}\vdots 11$, b=c

$\overline{abba}=\overline{ab00}+\overline{ba}=100\cdot\overline{ab}+\overline{ba}$, Restul împărțirii numărului $\overline{abca}$ la numărul $\overline{ab}$ este r $=\overline{ba}<\overline{ab}$ deoarece b <a.

Un număr care are 3 divizori are forma d = p^2 (p prim) divizorii sunt 1, p și p^2. Deci $\overline{ba}\in\{5^2,7^2\}$.

Dacă $\overline{ba}$ =25 atunci a=5 , b=c=2 , $\overline{abca}$ = 5225.

Dacă $\overline{ba}$ =49 atunci a=9 , b=c=4 , $\overline{abca}$ = 9229 .

G:435. Dacă $x_1,x_2,...,x_{2010}\in\mathbb{R}^*$ și $\frac{x_1+x_2}{x_1+2010x_2}=\frac{x_2+x_3}{x_2+2010x_3}=....=\frac{x_{2010}+x_1}{x_{2010}+2010x_1}$ atunci avem $x_1=x_2=x_3=.....=x_{2010}$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Folosind proprietatea șirurilor de rapoarte egale se obține, după ce adunăm toți numărătorii respectiv numitorii între ei, că fiecare raport este egal cu $\frac{2}{2011}$.

Din $\frac{x_1+x_2}{x_1+2010x_2}=\frac{2}{2011}\Leftrightarrow x_1=x_2$. Analog, din al doilea raport și $\frac{2}{2011}$ se obține $x_2=x_3$. Procedând analog și pentru celelalte, se obține, $x_1=x_2=x_3=.....=x_{2010}$.

G:436. Determinați cel mai mic număr natural n știind că împărțit la 108, 75, și 90 se obțin resturile 57, 63 respectiv 48. ***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest rezultă $n=108c_1+57\,|-3 \quad\Rightarrow n-3=54\left(2c_1+1\right)$,

$n=75c_2+63\big|-3 \quad \Rightarrow n-3=15(5c_2+4)$, $n=90c_3+48\big|-3 \quad \Rightarrow n-3=45(2c_3+1)$. De aici rezultă, $n-3=c.m.m.m.c(54,15,45)\Rightarrow n-3=135\Rightarrow n=138$.

G:437. a) Calculați numărul $m=\dfrac{2014^{n+3}-2014^{n+1}\left(1+2013\cdot 2015\right)}{2014^n\cdot 2013\cdot 2015}+161;$

b) Să se afle numerele $\overline{abc}$ **scrise în baza zece știind că** $\dfrac{m}{a\cdot b+c\cdot\left(a+c^7\right)}\in\mathbb{N}$, **unde m este numărul determinat la a).**

Prof. Iuliana Trașcă, Olt

Rezolvare: a) Se află m=161;

b) $\dfrac{m}{a\cdot b+c\cdot\left(a+c^7\right)}=\dfrac{161}{a\cdot b+a\cdot c+c^8}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 161\vdots\left(a\cdot b+a\cdot c+c^8\right)$

Dacă $c\geq 2\Rightarrow c^8=2^8=256\rangle 161\Rightarrow c\in\{0;1\}$.

Cazul I: $c=0\Rightarrow 161\vdots(a\cdot b)\Rightarrow a\cdot b\in\{1,\ 7,\ 23,\ 161\}$, deci, $\overline{ab}\in\{11,\ 17,\ 71\}\Leftrightarrow\overline{abc}\in\{110,\ 170,\ 710\}$.

Cazul al II-lea: $c=1\Rightarrow 161\vdots\left[a\cdot(b+1)+1\right]\Rightarrow a\cdot(b+1)+1\in\{1,\ 7,\ 23,\ 161\}$.

Deci, $\overline{ab}\in\{15,\ 22,\ 31,\ 60\}\Leftrightarrow\overline{abc}\in\{151,\ 221,\ 311,\ 601\}$.

G:438. Determinați o infinitate de cvadruple (a,b,c,d) **care sunt soluții ale ecuației** $a^2+b^3+c^4=d^5$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare. Pornind cu identitatea $3^{n+1}=3^n+3^n+3^n$, dorim să găsim un n natural astfel încât $n+1=M5$, $n=M2$, $n=M3$, $n=M4$, i.e. $n+1=M5$ și $n=M12$. Găsim $n=24$. Astfel putem scrie $\left(3^{12}\right)^2+\left(3^8\right)^3+\left(3^6\right)^4=\left(3^5\right)^5$.

Prin înmulțire cu m^{60}, unde m este un număr natural nenul, rezultă că există o infinitate de cvadruple $(a,b,c,d)=(m^{30}3^{12},m^{20}3^8,m^{15}3^6,m^{12}3^5)$ care sunt soluții ale ecuației din enunț.

G:439. Calculați câtul împărțirii numărului $a=\overline{1i,01}+\overline{4i,05}+\overline{7i,09}+...+\overline{43i,57}$ **la 3.**

***Prof.* Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

Rezolvare: $a=\overline{1i}\dfrac{1}{100}+\overline{4i}\dfrac{5}{100}+\overline{7i}\dfrac{9}{100}+...+\overline{43i}\dfrac{57}{100}=10+40+70+...+430+\underbrace{i+i+i+...+i}_{15\ termeni}+$

$+\dfrac{1+5+9+...+57}{100}=10\cdot\dfrac{(1+43)\cdot 15}{2}+15i+\dfrac{(1+57)\cdot 15}{2}\cdot\dfrac{1}{100}=3300+15i+4,35=15i+3304,35.$

Câtul împărțirii numărului a la 3 este $5i+1101,45$.

G:440. Fie A produsul primelor 100 de numere naturale nenule. Determinați numărul B^2 **astfel încât** B^2 **să fie maxim, să dividă numărul A și să nu fie divizibil cu 2 și cu 3.**

***Prof*. Petre Păunescu**, Roșiorii de Vede

Rezolvare: $B^2=5^{24}\cdot 7^{14}\cdot 11^8\cdot 13^6\cdot 17^4\cdot 19^4\cdot 23^4\cdot 29^2\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 41^2\cdot 43^2\cdot 47^2$,

unde fiecare factor trebuie sa aibă exponent maxim posibil, dar par si cel putin 2. Avem: 5▪1=5,5▪2=10,…,5▪5=25,…,5▪10=50,..5▪15=75,..▪.5▪20=100, Exponentul maxim al lui 5 este 20+4(apare dublu în 25,50,75,100).

7▪1=7,7▪2=14,…,7▪7=49,…,7▪14=98, deci exponentul maxim si par este 14.

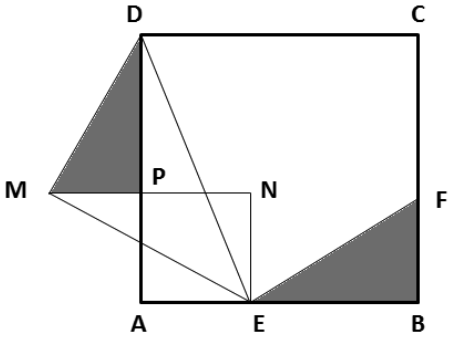
11·1=11,11·2=22,..,11·9=99, 13·1=13,13·2=26,…,13·8=104,

17·1=17,17·2=34,….,17·6=102, 19·1=19,19·2=38,..,19·6=114, la fel pentru 23, 29·1=29,29·2=58,29·3=87,31·1=31,31·2=62,31·3=93, la fel pentru 37, 41,43, 47.

G:441. În pătratul ABCD, se consideră punctele E pe (AB) şi F pe (BC), astfel încât, $\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$**. Arătaţi că** $m(\widehat{ADE})+m(\widehat{BEF})=45^0$**.**

***Prof*. Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Construim, în exteriorul pătratului, triunghiul ΔPDM, congruent cu triunghiul ΔBEF, unde $P\in(AD)$ şi unim M cu E. Dacă N este simetricul lui M faţă de dreapta AD, $\Rightarrow \Delta PDM\equiv\Delta NME$.



Din congruenţele: $\Delta PDM\equiv\Delta NME\equiv\Delta BEF\Rightarrow$

$\Rightarrow [DM]\equiv[EM]$ şi $m(\widehat{DME})=90^0$;

$\Rightarrow m(\widehat{ADE})+m(\widehat{PDM})=45^0$,

$\Rightarrow m(\widehat{ADE})+m(\widehat{BEF})=45^0$.

G:442. Arătaţi că dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu trei numere naturale cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu media aritmetică a celorlalte două , atunci triunghiul are un unghi cu măsura de 60^0**.**

***Prof*. Simion Marin,** Rm. Sărat

Rezolvare: Considerăm triunghiul ΔABC ; fie a , b , c trei numere naturale astfel încât

b = $\frac{a+c}{2}$ şi $\frac{m(\hat{A})}{a}=\frac{m(\hat{B})}{b}=\frac{m(\hat{C})}{c}$.

Deoarece $\frac{m(\hat{A})}{a}=\frac{m(\hat{B})}{b}=\frac{m(\hat{C})}{c}=\frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})}{a+b+c}=\frac{180^0}{a+c+b}=\frac{180^0}{2b+b}=\frac{180^0}{3b}=\frac{60^0}{b}$

deoarece 2b = a +c . Obţinem $\frac{m(\hat{B})}{b}=\frac{60^0}{b}$, de unde m($\hat{B}$) = 60^0 ; c. c. t. d .

▪ Clasa a VII-a

G:443. Găsiţi $x\in\mathbb{N}$ **astfel ca** $x^2+2x+2012$ **să fie pătrat perfect.**

***Prof*. Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

Rezolvare: $x^2+2x+1+2011=k^2\Leftrightarrow k^2-(x+1)^2=2011\Leftrightarrow(k+x+1)(k-x-1)=2011\Rightarrow$
Deoarece 2011 este prim avem doar posibilitatea k+x+1=2011, k-x-1=1, şi obţinem uşor x=1004.

G:444. Arătaţi că $|x-2009|+|x-2010|+|2x-4015|\geq 4,\forall x\in\mathbb{R}$.

***Prof*. Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Folosind proprietatea $|x|+|y|+|z|\geq|x+y+z|,\forall x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$|x-2009|+|x-2010|+|2x-4015|\geq|x-2009+x-2010-2x+4015|=|-4|=4$.

G:445. Dacă a, b şi c sunt numere reale pozitive să se arate inegalitatea : $(a+b+c)^2\geq 2\sqrt{2}(ab+bc+ac)$**.**

***Prof.* Şerban George-Florin**, Brăila

Rezolvare: Soluția 1. Evident, $(a+b+c)^4=\left[(a+b+c)^2\right]^2=\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\right]^2=$

$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)(2ab+2ac+2bc)+(2ab+2ac+2bc)^2\geq 4(a^2+b^2+c^2)(2ab+2bc+2ac)$

deoarece $A^2+2AB+B^2\geq 4AB,\ \forall A,B\in\mathbb{R}$.

Aşadar, $(a+b+c)^4=\left[(a+b+c)^2\right]^2\geq 8\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)\geq 8\left(a+b+c\right)^2$ de unde rezultă cerința problemei. Am folosit inegalitatea cunoscută $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$. **(*)**

Soluția 2:(Titi Zvonaru)

Folosind inegalitatea **(*)** obținem $a^2+b^2+c^2\geq 3(ab+bc+ac)$. Deoarece $3\rangle 2\sqrt{2}$ rezultă că inegalitatea din enunț este adevarată şi strictă.

G:446. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|\sqrt{\frac{25}{x^2+1}}\in\mathbb{N}\right.\right\}$**. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea** A**, acesta să fie irațional şi strict negativ.** ***Prof.* Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

Rezolvare: : Pentru ca $\frac{5}{\sqrt{x^2+1}}$ să fie natural, trebuie ca $\sqrt{x^2+1}=\frac{5}{p}$, $p\in\mathbb{N}^*$, de unde $x^2=\frac{25}{p^2}-1\ (1)$.

Cum $x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $\frac{25}{p^2}-1\geq 0$, de unde $p^2\leq 25$ şi de aici $p\in\{1,2,3,4,5\}$.

Înlocuind în (1), pe rând , valorile lui p, obținem: $x^2=24$, $x^2=\frac{21}{4}$, $x^2=\frac{16}{9}$, $x^2=\frac{9}{16}$, $x^2=0$.

Rezultă, $A=\left\{-2\sqrt{6},-\frac{\sqrt{21}}{2},-\frac{4}{3},-\frac{3}{4},0,\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{\sqrt{21}}{2},2\sqrt{6}\right\}$. Cazurile posibile ale experimentului sunt elementele mulțimii A. Numărul cazurilor posibile este 9. Cazurile favorabile apariției numerelor iraționale strict negative din mulțimea A sunt $-2\sqrt{6}$, $-\frac{\sqrt{21}}{2}$. Numărul cazurilor favorabile este 2. Probabilitatea cerută este $\frac{2}{9}$.

G:447. Folosind formule de calcul prescurtat, descompuneti în factori numărul $A=\sqrt{420}$ **.**

***Prof.* Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede

Rezolvare: $420=2\cdot\sqrt{3\cdot 5\cdot 7}=2\cdot a\cdot b$. Se iau cazurile:

$a=\sqrt{15},b=\sqrt{7}\Rightarrow\ 420=2\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)^2-\sqrt{22}^2=\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}-\sqrt{22}\right)\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}+\sqrt{22}\right)$

Analog, se ia $a=\sqrt{21},b=\sqrt{5};\ a=\sqrt{3},b=\sqrt{35};\ a=\sqrt{105},b=1;$

G:448. În triunghiul Δ**ABC,** $[AM]$ **este mediană, iar** $P\in(AB)$ **astfel încât** $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$**. Dacă** $AM\cap CP=\{N\}$**, arătați că** $A_{ABC}=4\cdot A_{CMN}$**.** ***Prof* . Gheorghe Dârstaru**, Buzău

Rezolvare: **Soluția 1.** În triunghiul $\Delta\ ABM$ se aplică teorema lui Menelaus pentru transversala P-N-C de unde rezultă $\frac{PA}{PB}\cdot\frac{NM}{NA}\cdot\frac{CB}{CM}=1\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{NM}{NA}\cdot\frac{2}{1}=1\Rightarrow NM=NA\Rightarrow[CN]$ mediană în triunghiul $\Delta\ CAM\Rightarrow\ A_{AMC}=2A_{CMN}$, dar $A_{ABC}=2A_{AMC}\Rightarrow A_{ABC}=4A_{CMN}$.

Soluția 2.(**Titu Zvonaru**) Fie D simetricul lui C față de A; atunci $[BA]$ este mediana în triunghiul ΔBCD, deci P este centrul de greutate al acestui triunghi. Deoarece AM||BD, rezultă că [CP] este mediană în triunghiul ΔABC.

G:449. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ **cu aria** a **(u.a.) şi punctele** M**, respectiv** N **cu** $M\in(AB), N\in(BC)$ **astfel încât aria triunghiului** MND **este** b **(u.a). Determinați minimul sumei** $AM+CN$ **în cazul în care** $a>2b$**.**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București **şi Neculai Stanciu**, Buzău

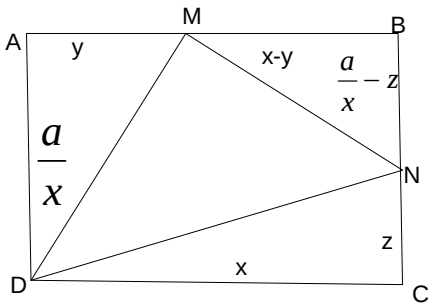
Rezolvare: Din relațiile:(1) $[ABCD]-[MND]=a-b$ şi

(2)$[MBN]+[MAD]+[NCD]=[ABCD]-[MND]$,rezultă,

$$\frac{(\frac{a}{x}-z)(x-y)}{2}+\frac{ay}{2x}+\frac{xz}{2}=a-b\Leftrightarrow a-\frac{ay}{x}-zx+zy+\frac{ay}{x}+xz=2(a-b)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow yz=a-2b$. Din inegalitatea mediilor avem că $y+z$ este minim dacă şi numai dacă $y=z$.Deoarece $\begin{cases}yz=a-2b\\y=z\end{cases}$, rezultă $y=z=\sqrt{a-2b}$.

Obținem aşadar $\min(y+z)=2\sqrt{a-2b}$, unde $a>2b$.



G:450. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului Δ**ABC, în care bisectoarea (BD) este cât (DC) şi** $BA+AD=BC$.

***Prof.* Constantin Apostol**,Rm. Sărat

Rezolvare: Fie E pe (BC), astfel încât, $BE=BA\ \Rightarrow EC=AD$. In plus, din $\Delta\ ABD\equiv\Delta\ EBD\Rightarrow(AD)\equiv(ED)$ şi, deci, $\Delta\ DEC$ este isoscel, cu vârful E;

$\Rightarrow\widehat{EDC}\equiv\widehat{ECD}$. Dacă notăm $m(\widehat{EDC})=m(\widehat{ECD})=a$, $\Rightarrow m(\widehat{BED})=2a$, căci $\widehat{BED}$ este un unghi exterior triunghiului ΔDEC, deci $m(\widehat{BAD})=2a$.

În plus, din faptul că $(BD)\equiv(DC)\Rightarrow m(\widehat{DBC})=m(\widehat{DCB})=m(\widehat{DBA})=a$.

Aşadar, în triunghiul Δ ABC, suma măsurilor unghiurilor este : $2a+2a+a=180^0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5a=180^0\Leftrightarrow a=36^0\ \Rightarrow\ m(\hat{A})=m(\hat{B})=72^0$ şi $m(\hat{C})=36^0$.

G:451. Să se arate că nu există numere naturale nenule şi distincte pentru care suma inverselor cuburilor lor să fie egală cu $\frac{5}{4}$**.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Fie n(n≥ 1) numere naturale nenule distincte între ele şi astfel încât $x_1<x_2<x_3<_{...}<x_n$.

Deducem că $x_1^3\geq 1, x_2^3\geq 8,_{...}, x_n^3\geq n^3$, şi atunci:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^3}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}.$$

Deoarece $\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right)$ deducem că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^3}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)<1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$$

prin urmare suma inverselor cuburilor unor numere naturale distincte nenule nu poate fi egală cu $\frac{5}{4}$.

G:452. Arătați că în orice trapez isoscel ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) , avem relația : h = $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, unde h este lungimea înălțimii iar d lungimea diagonalei trapezului.

***Prof.* Marin Simion**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie ABCD cu AB||CD trapezul dat. Construim înălțimea prin punctul de intersecție a diagonalelor şi din triunghiurile dreptunghice isoscele AOB si DOC rezultă ușor că $OM=\frac{AO}{\sqrt{2}}$, $ON=\frac{OC}{\sqrt{2}}$. Obținem $h=MN=\frac{AO+OC}{\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

▪ Clasa a VIII-a

G:453. Dacă numerele reale nenule a,b, c, d verifică relațiile $a+b+c+d=16$ şi $ab+ac+ad+bc+bd+cd=96$, să se arate că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ este număr natural.

***Prof.* Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Din $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ rezultă $a^2+b^2+c^2+d^2=64$. Cum $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=$ $=3\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=3\cdot 64-2\cdot 96=0$ rezultă că $a=b=c=d=\frac{16}{4}=4$ iar $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4\cdot\frac{1}{4}=1\in\mathbb{N}$.

G:454. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a(a-6)+2b(b+4)+17=0$. Să se calculeze $2\cdot(a-b)^{2015}+(b-a)^{2015}$.

***Prof.* Adrian Stan**,Buzău

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu $(a-3)^2+2(b+2)^2=0\Rightarrow a=3,b=-2$. Atunci, $2\cdot(a-b)^{2015}+(b-a)^{2015}=2\cdot(3+2)^{2015}+2\cdot(-2-3)^{2015}=0$.

G:455. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+12x+32}+\frac{1}{x^2+20x+96}=\frac{3}{13}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: Se pun condițiile de existență a rapoartelor, rezultând $x\in\{-12,-8,-4,0\}$.

Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+12}\right)=\frac{3}{13}$.

Rezultă $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}=\frac{12}{13}\Rightarrow x^2+12x-13=0\Rightarrow x\in\{-13,1\}$.

G:456. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2010$. Determinați funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(g(x))=-7x+4020$.

Prof. Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Cum $f(x)=-x+2010 \Rightarrow f(g(x))=-g(x)+2010$. Din $f(g(x))=-7x+4020$ rezultă $-g(x)+2010=-7x+4020 \Rightarrow g(x)=7x-2010$.

G:457. Dacă x, y şi z sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ atunci arătați că: $\left(x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}\right)(x+y+z)^{2013}=\left(x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}\right)(x+y+z)^{2011}$.

Prof. D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Din $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$, după eliminarea numitorilor , efectuarea calculelor şi simplificări obținem că: $(x+y)(x+z)(y+z)=0$. Deci, $x=-y$ sau $x=-z$ sau $y=-z$.
În fiecare dintre cele trei cazuri obținem că :

$x^n+y^n+z^n=(x+y+z)^n \Leftrightarrow \frac{x^n+y^n+z^n}{(x+y+z)^n}=1$, pentru orice $n=impar$.

Aşadar: $\frac{x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}}{(x+y+z)^{2011}}=\frac{x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}}{(x+y+z)^{2013}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}\right)(x+y+z)^{2013}=\left(x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}\right)(x+y+z)^{2011}$.□

G:458. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-2}{2016}\right]+\left[\frac{x-4}{2016}\right]+\left[\frac{x-6}{2016}\right]+...+\left[\frac{x-2014}{2016}\right]=1$. unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Prof. Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Cazul I. Pentru $x \le 2014$ rezultă

$\frac{x-2014}{2016} \le \frac{x-2012}{2016} \le ... \le \frac{x-2}{2016}<1$ şi atunci: $\left[\frac{x-2014}{2016}\right] \le \left[\frac{x-2012}{2016}\right] \le ... \le \left[\frac{x-2}{2016}\right] \le 0$,

şi ecuația nu are soluții.

Cazul II. Dacă $x>2014$ atunci:

$0<\frac{x-2014}{2016} \le \frac{x-2012}{2016} \le ... \le \frac{x-2}{2016} \Rightarrow 0 \le \left[\frac{x-2014}{2016}\right] \le \left[\frac{x-2012}{2016}\right] \le ... \le \left[\frac{x-2}{2016}\right]$,

şi atunci ecuația este verificată numai dacă $\left[\frac{x-2}{2016}\right]=1$ şi $\left[\frac{x-2k}{2016}\right]=0, \forall k=\overline{2,1007}$, şi atunci:

$1 \le \frac{x-2}{2016}<2; 0 \le \frac{x-2k}{2016}<1, \forall k=\overline{2,1007} \Leftrightarrow x \in [2018,4034) \bigcap_{k=2}^{1007} [2k, 2k+2016)$.

Rezultă, mulțimea soluțiilor S = [2018,2020).

G:459. Arătați că $\frac{26\underbrace{99...9}_{3n}}{\underbrace{299...9}_{n}} \in \mathbb{N}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

***Prof.* Şerban George-Florin**, Brăila

Rezolvare: Folosim formula $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$.

$26\underbrace{99....9}_{3n}=26\underbrace{99....9}_{3n}+1-1=27\underbrace{00....0}_{3n}-1=3^3\cdot 10^{3n}-1=\left(3\cdot 10^n\right)^3-1=(3\cdot 10^n-1)(9\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^n+1)$

$2\underbrace{99...9}_{n}=2\underbrace{99...9}_{n}+1-1=3\underbrace{00...0}_{n}-1=3\cdot 10^n-1$, atunci, $\frac{26\underbrace{99....9}_{3n}}{2\underbrace{99....9}_{n}}=9\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^n+1 \in \mathbb{N}$.

G:460. Pe perpendiculara în A, pe planul dreptunghiului ABCD, se consideră punctul M. Ştiind că laturile triunghiului MBD sunt proporționale cu numerele $\sqrt{34}$, $\sqrt{25}$ şi $\sqrt{41}$ şi că $MC=15\sqrt{2}$ cm, calculați dimensiunile dreptunghiului şi lungimea segmentului (MA).

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare:

Notăm lungimile segmentelor (MA), (AB) şi (AD) cu x, y, respectiv, z. Din proporționalitatea dată, vom avea : $\frac{MB}{\sqrt{34}}=\frac{BD}{\sqrt{25}}=\frac{MD}{\sqrt{41}}$ şi, deci, $\frac{MB^2}{34}=\frac{BD^2}{25}=\frac{MD^2}{41}$. Ținând seamă de faptul că (MB), (BD) şi (MD) sunt ipotenuze în triunghiurile dreptunghice Δ MAB, Δ BAD şi Δ MAD, vom putea scrie :

$$\frac{x^2+y^2}{34}=\frac{y^2+z^2}{25}=\frac{x^2+z^2}{41}=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{100}==\frac{x^2+y^2+z^2}{50}.$$

Dar, din triunghiul MAC, deducem că $MC^2=x^2+AC^2=x^2+y^2+z^2=\left(15\sqrt{2}\right)^2=450$. Aşadar,

$\frac{x^2+y^2+z^2}{50}=\frac{450}{50}=9$. Astfel, deducem că au loc egalitățile : $\begin{cases}x^2+y^2=306\\x^2+z^2=225\\y^2+z^2=369\end{cases}$, deci, $\begin{cases}x=9cm\\y=15cm\\z=12cm\end{cases}$

Evident, din faptul că nu se precizează care laturi ale triunghiului ΔMBD sunt proporționale cu numerele date, putem avea trei cazuri :

I) dimensiunile dreptunghiului sunt de 15cm şi 12cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 9cm ;
II) dimensiunile dreptunghiului sunt de 9cm şi 12cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 15cm ;
III) dimensiunile dreptunghiului sunt de 9cm şi 15cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 12cm

G:461. Pe planul triunghiului ΔABC având m($\hat{A}$) = 90^0, AB = 6 cm şi m($\hat{C}$) = 30^0 se ridică perpendiculara AM. Să se determine lungimea acestei perpendiculare ştiind că măsura unghiului diedru format de planele (MBC) şi (ABC) este de 60^0.

***Prof.* Marin Simion**, Rm. Sărat

Rezolvare :

Deoarece $AM\perp(ABC)\Rightarrow\Delta MAD$ dreptunghic,unde $AD\perp BC$; conform teoremei celor trei perpendiculare, deoarece $MA\perp(ABC)$ şi $AD\perp BC\Rightarrow MD\perp BC$, de unde deducem că

m($\widehat{MDA}$) =m$\left(\widehat{(MBC),(ABC)}\right)$ ($\widehat{MDA}$ este unghiul plan corespunzător diedrului)

În triunghiul dreptunghic ΔABC avem:AB=6cm şi m($\hat{C}$)=30^0 rezultă ca BC=12cm căci AB=$\frac{BC}{2}$; cu teorema lui Pitagora se obține AC=$6\sqrt{3}$ cm şi AD =$\frac{AC}{2}$=$3\sqrt{3}$ cm (în triunghiul dreptunghic ΔADC unghiul C are 30^0). Din triunghiul dreptunghic ΔMAD obținem tg $\widehat{D}=\frac{AM}{AD}\Leftrightarrow$

tg 60° =$\frac{AM}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{AM}{3\sqrt{3}}$ de unde AM=$3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=9$ cm.

▪ Clasa a IX-a

L:307. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(m+1)x^2+(2m-1)x+m-1}{x^2+2mx+m+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\geq 0$ pentru orice x număr real.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Atât numărătorul cât şi numitorul trebuie să aiba acelaşi semn ; dacă numitorul are semn constant, acest semn nu poate fi decât plus. Punem condițiile ca discriminanții funcțiilor de gradul doi de la numitor şi numărător să fie negativi, precum şi condiția $m+1\rangle 0$.

Pentru numărător se obține $(2m-1)^2-4(m+1)(m-1)\le 0\Rightarrow m\ge\frac{5}{4}$; (1)

Pentru numitor se obține: $(2m)^2-4(m+1)\le 0\Rightarrow 4(m^2-m-1)\le 0\Leftrightarrow m\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. (2)

Din (1) si (2) rezultă $m\in\left[\frac{5}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

L:308. Dacă în triunghiul ABC avem $m(\hat{A})\le m(\hat{B})\le m(\hat{C})$ şi $a^2+b^2=2Rc$ să se calculeze $m(\hat{C})$.

***Prof.* Marcel Chiriță,** Bucureşti

Rezolvare: Avem m(A) < m(B) < 90°. Din $a^2 + b^2 = 2Rc \Rightarrow 4R^2\sin^2A + 4R^2\sin^2B = 4R^2\sin C \Rightarrow$ $\sin^2A + \sin^2B = \sin C \Rightarrow \sin^2A + \sin^2B = \sin(A+B) \Rightarrow \sin^2A + \sin^2B = \sin B\cos A+\sin A\cos B$ $\Rightarrow \sin A(\sin A -\cos B) = \sin B(\cos A -\sin B)$.

Avem de analizat următoarele cazuri:

a) Dacă $0 < \cos B < \sin A$ şi $0 < \sin B < \cos A \Rightarrow \sin^2B + \cos^2B < \sin^2A+\sin^2A \Rightarrow 1<1$, fals.
b) Dacă $0 < \sin A < \cos B$ şi $0 < \cos A < \sin B \Rightarrow \sin^2A + \cos^2A < \sin^2B+\sin^2B \Rightarrow 1<1$,fals.
c) Dacă $\sin A = \cos B$ şi $\cos A = \sin B \Rightarrow A + B = 90^o \Rightarrow C = 90^o$.

L:309. Arătați că în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea $\sum\frac{a^2}{p-a}\ge 4p$.

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: Cu inegalitatea lui Harald Bergström obținem:

$$\sum\frac{a^2}{p-a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3p-a-b-c}=\frac{4p^2}{p}=4p\text{ , Q.E.D.}$$

L:310. Dacă $2^a=3{,}3^b=4{,}4^c=5{,}5^d=6{,}6^e=7{,}7^f=8$, cât este valoarea produsului $abcdef$?

***Prof.* D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti **şi Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: $2^{abcdef}=(2^a)^{bcdef}=3^{bcdef}=(3^b)^{cdef}=4^{cdef}=(4^c)^{def}=$
$=5^{def}=(5^d)^{ef}=6^{ef}=(6^e)^f=7^f=8=2^3$. Astfel că $abcdef=3$.□

L:311. Să se arate că în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{\frac{3(r+4R)}{2R}}$, cu notațiile cunoscute. (In legătură cu problema C;2742, GM nr. 4/2004,Dinu Teodoresu, Pucioasa**)**

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Conform identității $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}\Leftrightarrow\sum\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=1+\frac{r}{R}\Leftrightarrow\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}$,

şi inegalității dintre mediile pătratică şi aritmetică $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ge\frac{a+b+c}{3}$, obținem:

$\sqrt{\frac{\sum\cos^2\frac{A}{2}}{3}}\ge\frac{\sum\cos\frac{A}{2}}{3}\Leftrightarrow\frac{\sum\cos\frac{A}{2}}{3}\le\sqrt{\frac{2+\frac{r}{2R}}{3}}=\sqrt{\frac{r+4R}{6R}}$, de unde rezultă imediat inegalitatea propusă.

Egalitatea are loc, atunci când triunghiul este echilateral.

Observație: Deoarece $\sqrt{\frac{3(r+4R)}{2R}} \le \frac{p}{\sqrt{2rR}}$, inegalitatea propusă este mai "tare" decât inegalitatea din problema C:2742/GM nr.4/2004.

L:312. În interiorul triunghiului ABC ascuțitunghic se consideră un punct K. Arătați că dacă: $A(\Delta BKC) = \frac{R^2 \sin 2A}{2}$ şi $A(\Delta CKA) = \frac{R^2 \sin 2B}{2}$, atunci K aparține mediatoarei segmentului $[AB]$.

***Prof.* Constantin Rusu**, Rm. Sărat

Rezolvare: Avem $A(\Delta BOC) = \frac{R^2 \sin 2A}{2} \Rightarrow A(\Delta BKC) = A(\Delta BOC) \Rightarrow OK \| BC$ şi $A(\Delta COA) = \frac{R^2 \sin 2B}{2} \Rightarrow A(\Delta CKA) = A(\Delta COA) \Rightarrow OK \| AC$. Deoarece punctele B, A, C nu sunt coliniare rezultă că $K = O$ şi deci mediatoarea segmentului $[AB]$ trece prin punctul K, q.e.d.

L:313. Să se arate că există $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\frac{\cos 25^0 + x \cdot \sin 25^0}{\cos 35^0} \in \mathbb{N}$.

***Prof.* Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Scriem $F(x) = \frac{\cos(30^0 - 5^0) + x \cdot \sin(30^0 - 5^0)}{\cos(30^0 + 5^0)} =$

$$= \frac{\cos 30^0 \cdot \cos 5^0 + \sin 30^0 \sin 5^0 + x \sin 30^0 \cos 5^0 - x \cos 30^0 \sin 5^0}{\cos 30^0 \cos 5^0 - \sin 30^0 \sin 5^0} =$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \cos 5^0 - \sin 5^0 - x\sqrt{3} \sin 5^0 + 2 \sin 5^0 + x \cos 5^0}{\sqrt{3} \cos 5^0 - \sin 5^0} = 1 + \frac{-x\sqrt{3} \sin 5^0 + 2 \sin 5^0 + x \cos 5^0}{\sqrt{3} \cos 5^0 - \sin 5^0}.$$

Se observă că pentru $x = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\sqrt{3}) = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$.

L:314. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A = 90^0)$ şi l_a, m_a, h_a sunt bisectoarea , mediana respectiv înălțimea corespunzatoare ipotenuzei . Dacă $l_a^2 \ge m_a \cdot h_a$ atunci ΔABC este dreptunghic isoscel .

***Prof.* Şerban George-Florin ,** Brăila

Rezolvare: Notăm AB=c , AC=b si BC=a . Atunci $m_a = \frac{a}{2}$, $h_a = \frac{bc}{a}$

$l_a = \frac{2bc \cdot \cos(\frac{A}{2})}{b+c} = \frac{2bc \cdot \cos(45^0)}{b+c} = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. Înlocuim în relația dată şi obținem

$\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2} \ge \frac{abc}{2a} = \frac{bc}{2} \Leftrightarrow \frac{2bc}{(b+c)^2} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow (b-c)^2 \le 0$, dar $(b - c)^2 \ge 0$ atunci b-c=0 , b=c şi rezultă că ΔABC este dreptunghic isoscel .

▪ Clasa a X-a

L:315. Să se arate că dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sunt termenii unei progresii aritmetice cu termenii strict pozitivi şi cu raţia pozitivă atunci : $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_3}}\rangle\frac{1}{\sqrt[n]{a_2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_4}}$, oricare ar fi $n\in N$, $n\geq 2$.

Prof. **Chiriţă Marcel**, Bucureşti

Rezolvare: Fie $a_1 = a$, $a_2 = a+r$, $a_3 = a+2r$, $a_4 = a+3r$ cu $a,r > 0$.

Avem $\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}}+\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_3}} = \sqrt[n]{\frac{a+r}{a}}+\sqrt[n]{\frac{a+r}{a+2r}} \geq 2\sqrt{\sqrt[n]{\frac{a+r}{a}\cdot\sqrt[n]{\frac{a+r}{a+2r}}}} = 2\sqrt[2n]{\frac{a^2+2ar+r^2}{a^2+2ar}} =$

$= 2\sqrt[2n]{1+\frac{r^2}{a^2+2ar}} > 2$ de unde rezultă: $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_3}}\rangle\frac{1}{\sqrt[n]{a_2}}$ (1)

În mod analog obţinem: $\frac{1}{\sqrt[n]{a_2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_4}}\rangle\frac{1}{\sqrt{a_3}}$ (2)

Din (1) şi (2) se obţine cerinţa problemei cu egalitate când $r = 0$.

L:316. Pentru $p\in\mathbb{N}^*$, se consideră suma $S(p)=\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot C_{n+3}^{k+3}$. Să se rezolve ecuaţia $S(p)+2p=15$.

Prof. Ionel Tudor, Prof. Stelian Pişcan, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Folosind recurenţa $C_{n+1}^{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\cdot C_n^k$, putem scrie $C_{n+3}^{k+3}=\frac{n+3}{k+3}\cdot C_{n+2}^{k+2}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(k+3)(k+2)(k+1)}C_n^k$ şi atunci

$\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot C_{n+3}^{k+3}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+....+C_n^n=2^n.$

Aşadar, $S(p)=\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{m}2^n=\sum_{m=0}^{p}\frac{2^{m+1}-1}{2-1}=\sum_{m=0}^{p}(2^{m+1}-1)=\sum_{m=0}^{p}2^m\cdot 2-(p+1)=2(1+2+...+2^p)-(p+1)$

Rezultă $S(p)=2^{p+2}-p-3$ si deducem uşor că ecuaţia din enunţ are rădăcina p=2.

L:317. Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este definit prin $a_0=1$, $a_{503}=0$ şi pentru orice $n\geq 1$, termenii a_{n-1}, a_1a_n şi a_{n+1} sunt în progresie aritmetică, atunci determinaţi a_{2012}.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare. Deoarece termenii a_{n-1}, a_1a_n şi a_{n+1} sunt în progresie aritmetică rezultă recurenţa $a_{n+1}=2a_1a_n-a_{n-1}$, $\forall n\geq 1$, cu ecuaţia caracteristică $r^2-2a_1r+1=0$.

Deci, a_n este dat de $a_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$, unde constantele c_1 şi c_2 se determină din condiţiile iniţiale: $c_1+c_2=a_0=1$ şi $c_1r_1+c_2r_2=a_1$. Se obţine uşor că $c_1=c_2=\frac{1}{2}$.

Aşa că, $a_n=\frac{r_1^n+r_2^n}{2}$, $\forall n\geq 0$. Deoarece $r_1>0, r_2>0$ avem contradicţie cu faptul că $a_{503}=0$. Aşadar, $|a_1|\leq 1$, ceea ce ne permite să punem $a_1=\cos\alpha$.

Atunci, rezultă uşor prin inducţie că $a_n=\cos n\alpha$, $\forall n\geq 0$. În particular avem din ipoteză $a_{503}=\cos 503\alpha$. Apoi, din formula $\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$ şi faptul că $2012=4\cdot 503$ rezultă că $a_{2012}=8\cos^4(503\alpha)-8\cos^2(503\alpha)+1=1$. □

L:318. **Fie** $a,b,c\in(0;1)$ **astfel încât** $arctga+arctgb+arctgc=\frac{\pi}{2}$.

Să se demonstreze că : $8abc\geq 3\sqrt{3}(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$.

Prof. **Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Rezolvare :

Notăm $\frac{2a}{1-a^2}=tgA,\frac{2b}{1-b^2}=tgB,\frac{2c}{1-c^2}=tgC$ şi inegalitatea din enunț devine

$\frac{2a}{1-a^2}\cdot\frac{2b}{1-b^2}\cdot\frac{2c}{1-c^2}\geq 3\sqrt{3}\Leftrightarrow tgAtgBtgC\geq 3\sqrt{3}$, care este adevărată deoarece:

$tgA+tgB+tgC\geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}\Leftrightarrow tgAtgBtgC\geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tgAtgBtgC\geq 3\sqrt{3}$. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Condiția $a,b,c\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ asigură $tgA>0,tgB>0,tgC>0$ iar condiția $arctga+arctgb+arctgc=\frac{\pi}{2}$ asigură că A,B,C sunt unghiurile unui triunghi.

L:319. **Dacă** $x_i,\alpha_i>0,i=\overline{1,n},n\in N^*,m\in N,m\geq 3,$ **atunci are loc inegalitatea:**

$$\frac{x_1^m}{\alpha_1}+\frac{x_2^m}{\alpha_2}+...+\frac{x_n^m}{\alpha_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^m}{\left(\sqrt[m-1]{\alpha_1}+\sqrt[m-1]{\alpha_2}+...+\sqrt[m-1]{\alpha_n}\right)^{m-1}}.$$

Prof. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Vom demonstra că inegalitatea propusă este "mai tare" decât inegalitatea (2), Propoziția 1:

$\frac{x_1^m}{\alpha_1}+\frac{x_2^m}{\alpha_2}+...+\frac{x_n^m}{\alpha_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^m}{n^{m-2}(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)}$, din articolul:*Asupra unei inegalități* de Dorinel Anca,G.M., nr. 2/2003, pg.56-59. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că:

$\left(\sqrt[m-1]{\alpha_1}+\sqrt[m-1]{\alpha_2}+...+\sqrt[m-1]{\alpha_n}\right)^{m-1}\leq n^{m-2}(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\geq\left(\frac{\sqrt[m-1]{\alpha_1}+\sqrt[m-1]{\alpha_2}+...+\sqrt[m-1]{\alpha_n}}{n}\right)^{m-1}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[m-1]{\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}}\geq\frac{\sqrt[m-1]{\alpha_1}+\sqrt[m-1]{\alpha_2}+...+\sqrt[m-1]{\alpha_n}}{n}.$$

Ultima inegalitatea este adevărată, deorece considerând funcția concavă $f:[0,\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt[m-1]{x},m\in N,m\geq 3$, aceasta este imediată.

Observație. Inegalitatea din enunț, este adevărată, fiind de fapt o variantă a inegalității lui Radon.

L:320. **Să se arate că** $\sqrt{3n+5}+\sqrt{5n+15}\leq 2\sqrt{4n+10},\forall n\in\mathbb{N}.$

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Prin ridicare la puterea a doua obținem: $3n+5+5n+15+2\sqrt{(3n+5)(5n+15)}\leq 4(4n+10)$ de unde se obține $\sqrt{(3n+5)(5n+15)}\leq 4n+10$. Ridicând din nou la puterea a doua, rezultă $(3n+5)(5n+15)\leq(4n+10)^2\Rightarrow n^2+10n+25\geq 0\Leftrightarrow(n+5)^2\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}$. S-a obținut o propoziție adevărată ceea ce implică faptul că inegalitatea dată este adevărată.

L:321. **Fie** $a,b\in\mathbb{R}_+$ **cu suma 1. Arătați că** $a^2\cdot b\leq\frac{4}{27}$**, precizați când are loc egalitatea.**

Prof. **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: $\frac{a^2\cdot b}{4}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b\le\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\Rightarrow a^2\cdot b\le\frac{4}{27}$, egalitatea are loc dacă $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$.

▪ Clasa a XI-a

L:322. Determinați matricile $A,B\in M_n(\mathbb{Z})$ pentru care $A+B=AB$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $A+B=AB\Leftrightarrow AB-A-B+I=I\Leftrightarrow(A-I)(B-I)=I$.

Deoarece matricile A şi B au elementele întregi avem că $\det(A-I)$ şi $\det(B-I)$ sunt numere întregi. Ultima ecuație implică $\det(A-I)=\det(B-I)=\pm1$. Avem două cazuri:

1) $\det(A-I)=\det(-I)=-1\Rightarrow A=B=O$; **2)** $\det(A-I)=\det I=1\Rightarrow A=B=2I$. □

L:323. Să se studieze convergența șirului : $a_n=\frac{(-1)^n n^2+1}{n^2+(-1)^n n^\alpha+1}$, $\alpha\in R$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Rezolvare : Considerăm subșirurile $(a_{2n})_{n\ge0},(a_{2n+1})_{n\ge0}$ a căror convergență o studiem

$$a_{2n}=\frac{4n^2+1}{4n^2+(2n)^\alpha+1}=\begin{cases}1,\text{ pt. }\alpha\in[0,2)\\ \frac{1}{2},\text{ pt.}\alpha=2\\ 0,\text{ pt. }\alpha>2\\ 1,\text{ pt.}\alpha<0\end{cases};\qquad a_{2n+1}=\frac{-(2n+1)^2+1}{(2n+1)^2-(2n+1)^\alpha+1}=\begin{cases}-1,\text{ pt. }\alpha\in[0,2)\\ -\infty,\text{ pt.}\alpha=2\\ 0,\text{ pt. }\alpha>2\\ -1,\text{ pt.}\alpha<0\end{cases}.$$

Şirul a_n va fi convergent dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}$ ceea ce se întâmplă numai dacă $\alpha>2$.

L:324. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ cu proprietatea $x_n\rangle0$ şi $x_1+x_2+x_3+....+x_n=\frac{x_n(x_n+2)-x_1}{4},\forall n\ge1.$

a) Să se determine $x_1,x_2,x_3,.....x_n$;

b) Să se arate că $\sqrt{x_1+x_2+x_3+....+x_n+1}\in\mathbb{N}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: a) Pentru n=1 din relația dată se obține $4x_1=x_1^2+2x_1-x_1\Rightarrow x_1(x_1-3)=0\Rightarrow x_1=3.$

Analog, pentru n=2, se obține $3+x_2=\frac{x_2(x_2+2)-3}{4}\Rightarrow x_2=5$. Prin inducție se arată că

$x_n=2n+1,\forall n\ge1.$

b) $\sqrt{x_1+x_2+x_3+....+x_n+1}=\sqrt{3+5+...+2n+1+2n+3+1}=\sqrt{\frac{(n+3)(2n+2)}{2}+1}=\sqrt{n^2+4n+4}=n+2.$

L:325. Într-un sistem de coordonate XOY se consideră punctele $A(2;3)$, $B(-3;-2)$, $C(0;c),c\in\mathbb{R}$. Să se găsească poziția punctului C astfel încât suma AC + BC să fie minimă.

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: $AC+BC$ este minim dacă $C(0;c)\in AB\cap Oy$. Ecuația dreptei AB este $x-y+1=0$, deci cum x = 0 rezultă c = 1. Aşadar, $C(0;1)$.

L:326. Dacă $A \in M_2(R)$ şi $\det(A + I_2) = \det(A^2 + I_2)$ atunci $\det(A)$ şi $Tr(A)$ iau valori în intervale de aceeaşi lungime, unde $\det(A)$ şi $Tr(A)$ sunt determinantul, respectiv, urma matricei A.

***Prof.* Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare:

Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$ se verifică uşor prin calcul relația: $\det(A + I_2) = Tr(A) + \det(A) + 1$. (1)

Fie $d = \det(A)$ şi $t = Tr(A)$ şi atunci: $\det(A + I_2) = d + t + 1$, $A^2 = tA - dI_2$ (relația Hamilton-Cayley).

Relația (1) pentru matricea A^2 eeste: $\det(A^2 + I_2) = Tr(A^2) + \det(A^2) + 1$.

Cum $Tr(A^2) = Tr(tA - dI_2) = t^2 - 2d$ se obține: $\det(A^2 + I_2) = t^2 - 2d + d^2 + 1$.

Relația din ipoteză devine: $t^2 + d^2 - 3d - t = 0$.

Considerând relația ca o ecuație în $t(t = Tr(A) \in \mathbf{R})$ avem că realizantul $\Delta = 1 - 4d^2 + 12d \geq 0$, de unde: $4d^2 - 12d - 1 \leq 0 \Leftrightarrow d \in \left[\frac{3-\sqrt{10}}{2}, \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right]$, iar dacă considerăm relația ca o ecuație în d, atunci $\Delta = 9 - 4t^2 + 4t$ şi obținem $t \in \left[\frac{1-\sqrt{10}}{2}, \frac{1+\sqrt{10}}{2}\right]$.

Cum lungimea celor două intervale este $\sqrt{10}$, problema este rezolvată.

L:327. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, inversabile şi care verifică relația $A + B = AB$ atunci $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = I_n$.

***Prof.* Marcel Chiriță**, București

Rezolvare: Vom demonstra mai întâi că $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = A(A+B)^{-1}B$. (1)

Avem $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)\left[A(A+B)^{-1}B\right] = (A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B =$

$= \left[I_n + B^{-1}A\right]\left[(A+B)^{-1}B\right] = \left(B^{-1}B + B^{-1}A\right)\left[(A+B)^{-1}B\right] = B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B = I_n$.

Analog, $\left[A(A+B)^{-1}B\right](A^{-1} + B^{-1}) = A(A+B)^{-1}BA^{-1} + A(A+B)^{-1} =$

$= A(A+B)^{-1}(BA^{-1} + I_n) = A(A+B)^{-1}(BA^{-1} + AA^{-1}) = A(A+B)^{-1}(A+B)A^{-1} = I_n$.

În (1) ținând cont de relația dată obținem $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = I_n$

L:328. Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$ o matrice astfel încât $A^2 = O_2$. Arătați că $\forall B \in M_2(\mathbb{Q})$, numărul $N = \sqrt{\det(A + AB + BA)}$ este rațional.

***Prof.* Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare :

Vom folosi următorul rezultat:

Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ atunci, $Tr(X) \cdot Tr(Y) = Tr(X \cdot Y) \Leftrightarrow \det(X + Y) = \det(X) + \det(Y)$, (1)

Deoarece $A^2 = O_2 \Rightarrow TrA = \det A = 0$. Astfel, avem

$Tr\left[A(AB + BA)\right] = Tr(A^2B + ABA) = Tr(A^2B + A^2B) = 0$ si $TrA \cdot Tr(AB + BA) = 0 \Rightarrow$

$Tr\left[A(AB + BA)\right] = TrA \cdot Tr(AB + BA) \Rightarrow \det(A + AB + BA) = \det A + \det(AB + BA) \Rightarrow$

$\det(A + AB + BA) = \det(AB + BA)$. Folosind **1)**, putem scrie

$$\det(A + AB + BA) = \frac{1}{2}\left[\left(Tr(AB + BA)\right)^2 - Tr(AB + BA)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4\left(TrAB\right)^2 - 2Tr(AB)^2 - 2Tr(A^2B^2)\right] =$$

$$= 2\left(Tr(AB)\right)^2 - Tr(AB)^2 = \left(Tr(AB)\right)^2 + 2\left(\frac{\left(Tr(AB)\right)^2 - Tr(AB)^2}{2}\right) = \left(Tr(AB)\right)^2 + 2\det(AB) =$$

$$= \left(Tr(AB)\right)^2 \Rightarrow N = \sqrt{\det(A + AB + BA)} = \sqrt{\left(Tr(AB)\right)^2} = \left|Tr(AB)\right| \in \mathbb{Q}.$$

▪ Clasa a XII-a

L:329. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4x^3+8x+5$.

a) Să se rezolve ecuația f(x)=0;

b) Arătați că există $a\in\mathbb{R}$ **pentru care** $f(1+a)=f(1-a)=1$;

Prof. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $f(x)=x^4-4x^3+8x+5=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+4+1=(x^2-2x-2)^2+1\rangle 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ ecuația f(x)=0 nu are soluții în $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=(x^2-2x-2)^2+1=\left[(x-1)^2-3\right]^2+1\Rightarrow f(1+a)=f(1-a)=(a^2-3)^2+1\Rightarrow$

$f(1+a)=f(1-a)=1\Leftrightarrow a^2-3=0\Leftrightarrow a\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$.

L:330. Calculați: $\int_0^1 x^{2013}(1-x)^{2014}dx$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Demonstrăm un rezultat mai general: $(*)\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

Soluția 1. Se aplică inducția după n.

Dacă $n=0$, se verifică uşor că $\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}=\frac{m!0!}{(m+1)!}$. Presupunem rezultatul adevărat pentru $n-1$ şi observăm că:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx-\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{m!(n-1)!}{(m+n)!}-\frac{(m+1)!(n-1)!}{(m+n+1)!}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

Soluția 2. Aplicăm inducția după m.

Dacă $m=0$, se verifică uşor că $\int_0^1(1-x)^n dx=\frac{1}{n+1}=\frac{0!n!}{(n+1)!}$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $m-1$. Integrăm prin părți şi obținem:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx=\frac{m}{n+1}\cdot\frac{(m-1)!(n+1)!}{(m+n+1)!}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Aplicăm (*) şi avem: $\int_0^1 x^{2013}(1-x)^{2014}dx=\frac{2013!\cdot 2014!}{(2\cdot 2014)!}$. □

L:331. **Se consideră o funcție** $f:[0,a]\to[0,\infty)$**, derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că există** $c\in[0,a]$ **astfel încât să avem:** $\int_0^a f(x)dx\ge a\left(f(a)-\frac{af'(c)}{2}\right)$.

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare : Cu metoda de integrare prin părți avem: $\int_0^a f(x)dx=\left(xf(x)\right)\Big|_0^a-\int_0^a xf'(x)dx$.

Deoarece funcția f' este continuă pe $[0,a]$ rezultă conform teoremei lui Weirstrasse că este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[0,a]$. Deci există $c\in[0,a]$ astfel încât

$$f'(x)\le M=f'(c)\Leftrightarrow xf'(x)\le xf'(c)\Rightarrow\int_0^a xf'(x)dx\le\int_0^a xf'(c)dx\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_0^a xf'(x)dx \le \left(f'(c)\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a \Leftrightarrow \int_0^a xf'(x)dxdx \le \frac{a^2}{2} f'(c)$. Prin urmare:

$\int_0^a f(x)dx \ge af(a) - \frac{a^2}{2} f'(c) \Leftrightarrow \int_0^a f(x)dx \ge a\left(f(a) - \frac{af'(c)}{2}\right)$, q.e.d.

L:332. Să se calculeze integrala: $\int \frac{tg2015x\cos 2013x}{\cos x\cos 2014x}dx$, **pe un interval pe care are sens funcția de integrat.**

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Avem:

$\frac{tg2015x\cos 2013x}{\cos x\cos 2014x} = \frac{\cos(2014x-x)}{\cos x\cos 2014x} tg2015x = \frac{\cos 2014x\cos x+\sin 2014x\sin x}{\cos x\cos 2014x} tg2015x =$

$\frac{2\cos 2014x\cos x-\cos 2014x\cos x+\sin 2014x\sin x}{\cos x\cos 2014x} tg2015x = \frac{2\cos 2014x\cos x-\cos 2015x}{\cos x\cos 2014x} tg2015x =$

$2tg2015x - \frac{\cos 2015x}{\cos x\cos 2014x} tg2015x = 2tg2015x - \frac{\sin 2015x}{\cos x\cos 2014x} = 2tg2015x - \frac{\sin(2014x+x)}{\cos x\cos 2014x} =$

$2tg2015x - tg2014x - tgx.$ Integrala dată I, devine:

$I = \int (2tg2015x - tg2014x - tgx)dx = -\frac{2}{2015}\ln|\cos 2015x| + \frac{1}{2014}\ln|\cos 2014x| - \ln|\cos x| + C.$

L:333. Ştiind că $a\rangle 0$ **şi** $c\langle 0$**, stabiliți care este numărul de rădăcini reale pozitive ale polinomului** $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Fie $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Cum $f(0) = c\langle 0$ şi $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ înseamnă că f are o rădăcină reală pozitivă. Fie x_1 aceasta. Dacă x_2, x_3 sunt complexe nereale, se încheie rezolvarea.

Dacă $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ din $x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -c\rangle 0 \Rightarrow x_2, x_3$ sunt ambele pozitive sau ambele negative. Însă $x_1 + x_2 + x_3 = -a\langle 0$ prin urmare ambele negative. Astfel, polinomul are o rădăcină reală pozitivă.

L:334. Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}_+^*$ **o funcție derivabilă de două ori, cu** $f''(x)$ **continuă şi pozitivă pe** $[a;b]$**. Dacă f este strict crescătoare, arătați că:**

$$2\int_a^b \frac{\sqrt{f''(x)}}{f(x)}dx \le \min\left\{ \frac{f(b)-f(a)}{f(a)\cdot f'(a)} + \frac{f'(b)-f'(a)}{f(b)}, \frac{f(b)-f(a)}{f(a)\cdot f(b)} + \frac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)}\right\}.$$

***Prof.* Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare : Deoarece f este strict crescatoare $\Rightarrow$ $f'(x)\rangle 0$, $\forall x\in[a;b]$ iar din inegalitatea mediilor avem $\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \ge 2\sqrt{\frac{f''(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$, $\forall x\in[a;b]$

$\Rightarrow \int_a^b\left(\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)dx \ge 2\int_a^b\sqrt{\frac{f''(x)}{f^2(x)}}dx \Rightarrow 2\int_a^b\frac{\sqrt{f''(x)}}{f(x)}dx \le \int_a^b\frac{f''(x)}{f'(x)}dx + \int_a^b\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx \Rightarrow$

$2\int_a^b\frac{\sqrt{f''(x)}}{f(x)}dx \le \ln f'(x)\Big|_a^b - \frac{1}{f(x)}\Big|_a^b = \ln\frac{f'(b)}{f'(a)} - \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \le \frac{f'(b)}{f'(a)} - 1 - \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}$

După ce se aduce la acelaşi numitor în dreapta, rezultă

$$\int_a^b \frac{\sqrt{f''(x)}}{f(x)}dx \le \frac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(a)}{f(a)f(b)}+\frac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)}\right).$$

(am mai folosit inegalitatea $\ln x \le x-1,\ \forall x>0$. Pe de alta parte, folosind inegalitatea Cauchy-Schwartz si inegalitatea mediilor reiese concluzia.

L:335. Să se determine un polinom P(X) cu coeficienți întregi astfel încât 3^n + P(n) să fie divizibil cu 32 pentru orice n∈N∗.

Prof. **Marcel Chiriță**, București

Rezolvare: Avem $32 = 2^5$. Notăm cu f(n) =3^n + P(n) . Deoarece

$3^n = (2+1)^n = 2^n + C_n^1 2^{n-1} + ... + C_n^{n-5}2^5 + C_n^{n-4}2^4 + C_n^3 2^3 + C_n^2 2^2 + C_n^1 2 + 1 =$

$= M_{32} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}2^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^3 + \frac{n(n-1)}{2}2^2 + 2n + 1.$

Fie P(X) = $-\frac{2}{3}$X(X-1)(X-2)(X-3) - $\frac{4}{3}$X(X-1)(X-2) –2X(X-1) –2n –1.

Pentru $n \in \{0;1;2;3;4\} \Rightarrow f(n) = 3^n + P(n) = 0$.

Pentru n ≥5 f(5) = $M_{32} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}2^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^3 + \frac{n(n-1)}{2}2^2 + 2n + 1$

$-\frac{2}{3}$n(n-1)(n-2)(n-3) - $\frac{4}{3}$n(n-1)(n-2) –2n(n-1) –2n –1 =0.

CUGETĂRI DESPRE MATEMATICĂ

“ Lumea este condusă de numere ”.

Pitagora

“ Cu intuiția descoperi, cu logica stabileşti ”.

J. Hadamard

“ Matematician nu este cel ce ştie matematica, ci cel ce creează matematică ”.

Grigore Moisil

“ Nu îndrăznim nu pentru că problemele sunt dificile, ci fiindcă nu îndrăznim, ele sunt dificile ”.

Seneca

“ Interesul pentru matematică se naşte şi se dezvoltă o dată cu înțelegerea tot mai clară şi cu pătrunderea tot mai adâncă în lumea adevărurilor ei ”.

Simion Stoilov

„ Adevărul matematic există într-o lume independentă de om şi mintea recunoaşte aceste adevăruri prin contemplare ”.
Platon

4. Probleme propuse

▪ Învăţământ primar

P:303. Sunt 15 băieți într-o clasă, 10 blonzi şi 11 cu ochi căprui. Câți din ei sunt blonzi şi cu ochi căprui?
Prof. Gheorghe Struțu, Buzău

P:304. Să se grupeze numerele 1,2,3,...,20 în 4 grupe de câte 5 numere, astfel încât, sumele numerelor din fiecare grupă să fie 4 numere consecutive. **Elevă Alexia Dragan,** Bucureşti

P:305. Suma a patru numere naturale este egală cu cel mai mare număr natural de patru cifre . Aflați numerele, ştiind că primul este jumătate din al doilea, al doilea este o treime din al treilea, iar al treilea este un sfert din al patrulea . **Prof. Marcela Marin,** Rm . Sărat

P:306. Două creioane şi cinci pixuri costă 61 lei, iar trei pixuri şi şapte creioane costă 54 lei. Aflați prețul unui creion si prețul unui pix. **Prof. Iuliana Traşcă** , Olt

P:307. Suma a trei numere diferite este 1443. Dacă primul număr se înmulțeşte cu 3 şi se adună cu dublul celui de-al doilea îl obținem pe cel de-al treilea număr. Aflați cele trei numere ştiind că primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea. **Înv. Lupşan Ion**, Berca

P:308. Doi copii au acelaşi număr de mere. Dacă primul mănâncă jumătate din ele, iar al doilea îşi dublează numărul, au acum împreună 80 de mere. Câte mere au avut împreună cei doi copii?
Prof. Vrabie Marioara, Berca

P:309. Un motociclist a parcurs un traseu în 5 zile, astfel: în prima zi - o cincime din lungimea traseului, a doua zi un sfert din restul drumului, în cea de-a treia zi o treime din distanța rămasă, în a patra zi, jumătate din rest, iar în ultima zi restul de 55 de km. Care este lungimea totală a traseului? În ce zi a parcurs distanța cea mai mare? **Prof. Marinescu Gabriela**, Vadu Paşii

P:310. La un meci de fotbal, primul gol s-a înscris în minutul 9 şi 30 de secunde din repriza a doua. În ce minut al partidei s-a marcat golul? **Prof. Ticea Daniela** , Buzău

P:311. Într-o cutie sunt bile de trei culori: albe, galbene şi roşii. Ştiind că 28 nu sunt albe, 25 nu sunt galbene, iar 23 nu sunt roşii, aflați câte bile de fiecare fel sunt în cutie.
Prof. Lupşan Cristian-Cosmin, Buzău

P:312. Un om urcă un şir de trepte ale unei scări după regula: urcă trei trepte, coboară două trepte, urcă din nou cinci trepte şi coboară o treaptă. a) Pe ce treaptă se află omul după 736 de paşi?
b) După câți paşi ajunge el pe treapta 736? (Un pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte.)
Prof. Lupşan Nicoleta-Gabriela, Berca

▪ Clasa a V-a

G:462. Determinați numărul natural care admite patru divizori, ştiind că produsul divizorilor săi este 3845521.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:463. a) Arătați că există o infinitate de numere naturale, care împărțite la 7, dau restul 5 şi, împărțite la 6, dau restul 4.

b) Ce rest dau aceste numere, dacă le împărțim la 42 ?

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:464. Verificați dacă există numerele naturale $\overline{aa}$ şi $\overline{abc}$, astfel încât, $\overline{aa}^{a} = \overline{abc}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:465. Arătați că ecuația $y^2 + y + 5x = 2014$ nu are soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:466. Aflați ultimele cinci cifre ale numărului $a = 3\cdot 5^{2014} - 13\cdot 5^{2013} + 6\cdot 5^{2012}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:467. Arătați că numărul A, care verifică relația :
$A\cdot 2014^{1008} - 2014 = 2013\cdot\left(2014 + 2014^2 + 2014^3 + ... + 2014^{2012} + 2014^{2013}\right)$, este pătrat perfect.

Iuliana Traşcă, Olt

G:468. Dacă diferența dintre restul si câtul împărțirii a două numere naturale este un pătrat perfect, atunci şi restul împărțirii primului număr la consecutivul celui de-al doilea număr este acelaşi pătrat perfect.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:469. Câți divizori ai numărului 30^{2011} nu sunt divizori ai numărului 20^{2010} ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:470. Se dau numerele 18, 12 şi 15.

a) Să se calculeze $\mathrm{d} = (18,12,15)$, $\mathrm{m} = [18,12,15]$ şi să se arate că $\left[\frac{18}{d}, \frac{12}{d}, \frac{15}{d}\right] = \frac{m}{d}$;

b) Să se demonstreze că oricare ar fi $a_1, a_2, a_3, ... a_n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea :

$\left[\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, ..., \frac{a_n}{d}\right] = \frac{m}{d}$, unde $\mathrm{d} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_n)$ şi $\mathrm{m} = [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_n]$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:471. Aflați ultimele două cifre ale celui mai mic număr natural care are exact 2014 divizori.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:472. Împărțiți numărul 30 în 3 părți direct proporționale cu numerele : media aritmetică a ultimelor două, media aritmetică a primului şi al ultimului, media aritmetică a primelor două.

Ion Stănescu, Smeeni

G:473. **18)** Calculați $S = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + ... + 1960\cdot 1960! + 1961\cdot 1961!$, unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:474. Arătați că :

a) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_{2014}}$ atunci 11 divide $\overline{a_{2014}a_{2011}...a_1}$;

b) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_{2013}}$ atunci 11 divide $\overline{a_{2013}a_{2010}...a_1}$;

c) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_n}$ atunci 11 divide $\overline{a_na_{n-1}...a_1}$;

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

G:475. Determinați numerele $a,b\in\mathbb{N}$ ştiind că $4\cdot[a;b]+5\cdot(a;b)=2009$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:476. Determinați numerele $\overline{abcd}$ formate din cifre prime, pentru care, ad + bd + 2cd + a = 15d + 2.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:472. Fie $2\cdot 8^a=(16^2)^2$. Calculați $A=\dfrac{(a^2\cdot a^n)^3}{a^{n+3}\cdot(a^{n-1})^2}, n\in\mathbb{N}^*$.

Eliza Chile, Craiova

G:473. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ puncte pe o dreaptă d, astfel încât, $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=.....=A_{n-1}A_n=1$. Există un punct $M\notin d$ astfel încât distanțele $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ să se exprime prin numere naturale ?

Lucian Tuțescu, Craiova, Aurel Chiriță, Slatina

▪ Clasa a VII-a

G:474. Determinați numerele naturale x şi y astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:475. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\frac{x-2}{2007}+\frac{x-4}{2005}+\frac{x-6}{2003}+\frac{x-8}{2001}+\frac{x-10}{1999}=\frac{x-2007}{2}+\frac{x-2005}{4}+\frac{x-2003}{6}+\frac{x-2001}{8}+\frac{x-1999}{10}.$$

Mircea Mario Stoica, Arad

G:476. Găsiți numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică egalitatea $b\cdot c=\sqrt{\overline{abc}}+c$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:477. Scrieți fracția $\dfrac{2014}{14097}$ ca o sumă de două fracții diferite cu numărătorii 1.

Cornelia Gurău, Moineşti

G:478. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD, ştiind că:

$m(\hat{A})=m(\hat{B})\cdot x=m(\hat{C})\cdot x^2=m(\hat{D})\cdot x^3$, $x\in\mathbb{N}^*$ şi $m(\hat{A})=4\cdot m(\hat{C})$.

Marin Simion, Rm. Sărat

G:479. Într-un trapez isoscel ABCD notăm baza mare (AB), cu m, baza mica, cu n, şi înălțimea, cu h. Arătați că:

a) $h=\dfrac{2}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$, dacă $tg(ABC)=\dfrac{3}{2}$ şi $tg(ABD)=\dfrac{3}{4}$;

b) $h=\sqrt{mn}$, dacă $tg(ABC)=\dfrac{3}{4}$ şi $tg(ABD)=\dfrac{3}{5}$;

c) $h=\dfrac{m+n}{2}$, dacă $tg(ABD)=1$;

d) $h=\sqrt{\dfrac{m^2+n^2}{2}}$, dacă $tg(ABC)=\dfrac{5}{3}$ şi $tg(ABD)=\dfrac{5}{4}$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:480. Fie ABCD un trapez dreptunghic în A. Paralela prin D la BC intersectează AB în E; AC∩ DE= ={O}, iar paralela prin O la AB intersectează AD în punctul F. Dacă AD este medie proporțională între AB şi CD, arătați că dreptele BD şi EF sunt paralele.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:481. În triunghiul ABC, medianele (BB_1) şi (CC_1) sunt perpendiculare şi au lungimile m_1 şi m_2.

a) Calculați lungimea medianei (AA_1);

b) Calculați lungimile laturilor triunghiului ABC ;

c) Calculați aria triunghiului ABC ;

d) Arătați că raportul $\dfrac{AB^2+AC^2}{BC^2}$ este constant ;

e) Arătați că orice triunghi median al triunghiului ABC este dreptunghic .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

▪ Clasa a VIII-a

G:482. Descompuneți în factori numărul $P(a,b,c)=2b^2-2ac-a^2+bc-c^2+ab,\ a,b,c\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:483. Arătați că oricare ar fi numerele întrgi m şi n, de parități diferite, există numerele întregi nenule a şi b, astfel încât, să aibă loc egalitatea : $a(a+m)=b(b+n)$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:484. Este $2011^{2012}+4^{2013}$ număr prim ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu**, Buzău

G:485. Fie $a>0$ şi $x,y\in[0;a]$. Arătați că $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-y^2}\geq\sqrt{a^2-(x+y-a)^2}$. În ce caz avem egalitate ?

Dorina Goiceanu şi Nicoleta Bran, Craiova

G:486. Fie $a=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{12}(\sqrt{4}+\sqrt{3})}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Determinați n astfel încât $a=\frac{2013}{2014}$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:487. Arătați că dacă $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}=\frac{1}{4}$, atunci $\frac{a}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{c}{c+3}=\frac{9}{4}$.

Marin Simion , Rm. Sărat

G:488. Determinați numerele naturale n pentru care are loc inegalitatea: $(n+1)^{n+3}<n^{n+1}(n+3)^n$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:489. Arătați că nu există un număr prim $p>5$ care să reprezinte numărul de diagonale ale unui poligon convex. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

G:490. Piramida triunghiulară regulată, VABC, are înălțimea 10 cm,. La ce distanță de vârf trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât cele 2 corpuri să aibă volumele direct proporționale cu 8 şi 19.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:491. Se dă cubul ABCDEFGH, M, mijlocul laturii [FG] şi O, centrul bazei ABCD. Arătați că:
a) Triunghiul EOM este isoscel;
b) $EO\perp OI$, unde I este simetricul punctului H față de G.

Ion Radu, Bozioru, Buzău

G:492. Rezolvați în $\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\frac{x+1}{x^3+1}+x^2+\sqrt{y}=\frac{19}{3}\\ \frac{1}{x^2-x+1}+|x-y+z|=\frac{7}{3}\\ x^2+\sqrt{y}+|x-y+z|=\frac{24}{3}\end{cases}$$

Mariana Mitea, Cugir

G:493. Rezolvați ecuația : $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\cdot\sqrt{6x}=\sqrt{\sqrt{9n+n}+\sqrt{9n}}$.

Petre Păunescu, Roşiorii de Vede

▪ Clasa a IX-a

L:336. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația $f(x+1)-2f(0)=2x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(0)=-1$; b) Arătați că $f(x)=2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) Calculați suma $S=\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+.....+\frac{1}{f(2013)\cdot f(2014)}+\frac{1}{f(2014)\cdot f(2015)}$.

Generalizare; **Constantin Dinu**, Buzău

L:337. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte care sunt simultan şi numere triunghiulare (se numeşte număr triunghiular un număr de forma $\frac{t(t+1)}{2}, t\in N^*$).

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:338. Rezolvați ecuația $x+[x]=11\cdot\{x\},\ x\in\mathbb{Q}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă şi $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

L:339. Fie $a,b,c,d\rangle 0$ astfel încât $abc+abd+acd+bcd=4$. Arătați că $a^2(bc+cd+db)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)+d^2(ab+bc+ca)\geq 12abcd$.

Teodora Rădulescu , Lucian Tuțescu, Craiova

L:340. Demonstrați că $\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+...+\frac{1}{n^3}\langle \frac{n}{3n+3},\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 5$.

Ionuț Ivănescu, Liviu Smarandache, Craiova

L:341. Fie $a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+.....+\frac{1}{1+3+5+...+2n-1}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2\cdot a_{k+1}\cdot a_k}\langle \frac{n}{n+4}$.

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

L:342. Arătați că numărul n = 1016064 este soluție a ecuației $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=2014$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:343. Determinați:

$\min(\sqrt{x^2+y^2+4x-4y+8}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+8}+\sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8})$, pentru orice numere reale x şi y.

Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi **Nela Ciceu,** Bacău

L:344. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{10r+4R}{\sqrt{3}}\geq\frac{p^2+27r^2}{p}$,

unde **r,R,p** sunt notațiile consacrate într-un triunghi.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:345. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{3+\sin^2 A}+\frac{1}{3+\sin^2 B}+\frac{1}{3+\sin^2 C}\geq\frac{4}{5}.$$

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:346. Se considera $ABCD$ un patrulater inscriptibil, iar $\Omega_i, i=\overline{1,4}$, sunt centrele cercurilor mediale ale triunghiurlor $ABC, BCD, CDA,$ respectiv $DAB.$ Arătați că

a) $\overrightarrow{A\Omega_1}+\overrightarrow{B\Omega_2}+\overrightarrow{C\Omega_3}+\overrightarrow{D\Omega_4}=\vec{0}$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

▪ Clasa a X-a

L:347. Rezolvați ecuația $161\cdot\lg^2(x^5)-1961\cdot\lg x^2-103=0$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

L:348. Să se demonstreze inegalitatea: $2^{\sqrt{\log_2 3}}+3^{\sqrt{\log_3 2}}<5$. **Florin Nicolaescu**, Balş, Olt

L:349. Să se demonstreze inegalitatea $2\cdot(\log_2 2014)\cdot\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}+13\cdot(\log_{2014}2)\cdot\sum_{k=1}^{10}k>100$

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

L:350. Demonstrați egalitatea: $\frac{\sqrt[5]{3+2\sqrt[4]{5}}-\sqrt[5]{4-4\sqrt[4]{5}}}{\sqrt[5]{3+2\sqrt[4]{5}}+\sqrt[5]{4-4\sqrt[4]{5}}}=2+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{125}$.

Martin Hriňák, Slovakia

L:351. Să se rezolve ecuația $x^{\log_a(\log_a x)}=\left(\log_b x\right)^{2\log_a x}$, $\forall a,b\in(1;\infty)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:352. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=2(x^2+y^2)\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=y^2-x^2\end{cases}$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:353. Calculați partea întreagă a numărului $E=\sqrt{\frac{7+14\sqrt[3]{n^2+1}+8\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{1+2\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}}$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:354. Dacă $a_1,a_2,...,a_{2k}$ sunt cifre consecutive în ordine crescătoare într-o bază mai mare ca a_{2k}, atunci: $a_{k+1}^{\overline{a_k a_{k-1}...a_1}}<a_k^{\overline{a_{k+1}a_{k+2}...a_{2k}}}$, unde $k\geq 4$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:355. a) Fie $a\rangle b\rangle c\rangle d\rangle 0$. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}$ este injectivă.

b) Rezolvați ecuația $9^x+25^x=15^x+\frac{19}{225}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, **Lucian Tuțescu,** Craiova

L:356. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), n \geq 3$ astfel încât

$\sin(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_2 + x_3) \cdot ..... \cdot \sin(x_{n-1} + x_n) \cdot \sin(x_n + x_1) \rangle\ 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot .... \cdot \sin x_n$.

Aurel Chiriță, Slatina, Aurel Oporanu, Craiova

▪ Clasa a XI-a

L:357. Rezolvați ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 64 & 84 \\ 112 & 148 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{Z})$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

L:358. Fie familiile de puncte $A_n(4n+3; 2n^2+5n), \forall n \in N^*$, $B_n(8n+7; 4n^2+11n), \forall n \in N^*$, $C_n(12n+11; 6n^2+17n), \forall n \in N^*$. Să se demonstreze că punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n \in N^*$ sunt coliniare.

Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

L:359. Se consideră matricele $A = (a_{i,j})$ de tip $(m+1, n+1)$ şi $B = (b_{i,j})$ de tip $(n+1, m+1)$ având elementele $a_{ij} = C_n^{ij-1}$, $\forall i = \overline{1, m+1}$, $\forall j = \overline{1, n+1}$, $b_{ij} = C_m^{ij-1}$, $\forall i = \overline{1, n+1}$, $\forall j = \overline{1, m+1}$.

a) Stabiliți dacă matricea AB este inversabuilă.

b) Calculați Tr(AB) şi determinați $\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} C_m^i C_n^j$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:360. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1 = 2$ şi $\ln \sqrt{x_{n+1}} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, \forall n \geq 1$. Să se arate că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:361. Să se studieze natura şirului precizând limita în caz de convergență: $a_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$, $a_1 = 1$.

Camelia Dana, Ileana Didu, Craiova

L:362. Să se determine funcția derivabilă $f : (1; \infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $x \cdot f'(x) \cdot \ln x + f(x) = x^2$ şi $f(e) = \frac{e^2}{2}$.

Adrian Stan, Buzău

L:363. Se consideră funcția $f_k : (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$, $f_k(x) = \sqrt{x^2 - x} - kx$, k număr real fixat.

a) Calculați $\lim_{x \to \infty} \frac{f_{2014}}{f_{2015}}$; b) Să se arate că $\lim_{x \to \infty} f_k(x) = -\frac{1}{2}$;

Constantin Dinu, Buzău

L:364. Să se determine funcția derivabilă $f : [0,1] \to R$, pentru care avem: $\sqrt[3]{|(x+1) f'(x) - f(x)|} \leq x + 1 \leq \frac{2(f'(x) - f(x))}{(2-x)(x+1)}, (\forall) x \in [0,1]$. si $f(0) = \frac{1}{2}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

L:365. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgxtg2x...tgnx-n!x^n}{x^{n+2}}, n\in N^*$. (In legătură cu problema 25549/GM/11/2006, Sever Pop, Baia Mare) **Gheorghe Ghiță,** Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:366. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x\circ y = xy-4x-4y+20$. Fie $M=(-\infty;3]\cup[5;\infty)$. Demonstrați că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție dată şi să se determine elementele inversabile ale monoidului $(M,\circ)$.

Constantin Dinu, Buzău

L:367. Calculați restul împărțirii numărului $(2009^{2010})^{2011}$ la numărul 2011^2.

Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

L:368. Împărțind polinomul $f=X^m-X^n+8$ la X-3 şi la X-9 se obțin resturile 26, respectiv 656. Determinați câtul şi restul împărțirii lui f la X+5. **Adrian Stan,** Buzău

L:369. Determinați toate funcțiile diferențiabile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, care verifică relația :

$$f''(x)=\frac{(f'(x))^2}{f(x)}-\frac{f'(x)}{x}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:370. Fie f:[0;a]$\to$ **R** continuă şi convexă pe [0; a], a>0. Dacă b$\in$[0;a], atunci $\int\limits_b^a f(x)dx\le\frac{b(a-b)}{a}f(a)+\left(\frac{a-b}{a}\right)^2\int\limits_0^a f(x)dx.$ (In legătură cu problema 23733, GM 4-5/1997, pg. 199)

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:371. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $x^2f(x)\ge e^{\frac{1}{x}},\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Să se demonstreze că funcția f nu admite primitive. **Florin Nicolaescu,** Balş, Olt

L:372. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încat $\int\limits_0^1 f(x)dx=f(1)=1$. Arătați că există $c\in(0;1)$ astfel încât $f(c)-f'(c)=1$. **Florin Stănescu,** Găeşti, Dâmbovița

L:373. Se consideră funcția $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, f continuă cu proprietatea $f(x)+f(-x)=\frac{x^2}{1+x^2},\ \forall x\in[-1;1]$. Să se calculeze integrala $I=\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$.

Adrian Stan, Buzău

L:374. Calculați $\int\limits_{\log_3 2}^{\log_3 5}\frac{1}{3^x+2}dx$; **Constantin Dinu,** Buzău

" The book of nature is written in the characters of geometry ".
Galileo Galilei

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before January 31, 2015.

PROPOSALS - QUICKIES

Q13. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Calculate $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2(n+1)]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot (n+1)}-\sqrt[2n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n}\right)\sqrt{n}$.

Q14. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.
Prove that $\left(1+\frac{8}{\sum\frac{a}{b}}\right)\left(1+\frac{8}{\sum\frac{b}{a}}\right)\geq\frac{121}{\sum\frac{a}{c}\sum\frac{c}{a}}$ for any positive real numbers a,b and c.

Q15. Proposed by Neculai Stanciu, Buzău, Romania.
Prove that in any triangle ABC holds
$(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)\leq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Q16. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.
Prove that in a any triangle ABC holds $\sqrt{\frac{a}{p-a}}+\sqrt{\frac{b}{p-b}}+\sqrt{\frac{c}{p-c}}\geq 3\sqrt{2}$.
(related to problem 26737 from G.M-B.–No. 3 / 2013)

SOLUTIONS – QUICKIES

Q9. Proposed by Nela Ciceu, Roşiori, Bacău, Romania.
Let A,B,C be three collinear points and M be any point in the plane of the points A,B,C. The symmedian from A in triangle ABM intersect MB in the point P, and the symmedian from A in triangle ACM intersect MC in the point Q. Prove that the line PQ passes through a fixed point.
Solution of Q9 by author and Marius Drăgan, Bucharest. Denoting with $T=AC\cap PQ$, and because AP and AQ are symmedians we have: $\frac{PB}{PM}=\frac{AB^2}{AM^2};\frac{QC}{QM}=\frac{AC^2}{AM^2}$. By Menelaus theorem in triangle MBC with transversal $T-P-Q$ yields $\frac{TB}{TC}\cdot\frac{QC}{QM}\cdot\frac{PM}{PB}=1\Leftrightarrow\frac{TB}{TC}=\frac{AB^2}{AC^2}$, and because the points A,B,C are fixed, we obtain that the point T is fix.

Q10. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, and Neculai Stanciu, Romania.

If $a,b,x,y \in R_+^*$ and $m \in R_+$, then prove that $\frac{x^{m+2}}{(ax+by)^m}+\frac{y^{m+2}}{(ay+bx)^m} \geq \frac{x^2+y^2}{(a+b)^m}$.

Solution of Q10 by author and Marius Drăgan, Bucharest. We have

$$\frac{x^{m+2}}{(ax+by)^m}+\frac{y^{m+2}}{(ay+bx)^m}=\frac{(x^2)^{m+1}}{(ax^2+bxy)^m}+\frac{(y^2)^{m+1}}{(ay^2+bxy)^m} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(x^2+y^2)^{m+1}}{\left(a(x^2+y^2)+2bxy\right)^m} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{(x^2+y^2)^{m+1}}{\left(a(x^2+y^2)+b(x^2+y^2)\right)^m}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)^{m+1}}{(a+b)^m(x^2+y^2)^m}=\frac{x^2+y^2}{(a+b)^m}.$$

Q11. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Prove that if a,b and c are the lenghts of the sides of a triangle, then

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}-2\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2\right]\geq 3.$$

Solution of Q11 by author. We prove first the equality

$$\left(\sum\frac{a}{b+c-a}\right)-3=2\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}$$

We denote $b+c-a=x, c+a-b=y$ and $a+b-c=z$. If we taking account the triangle' s inequality we have $x,y,z>0$. So the identity to prove becomes

$$\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{y+z}{x}-3=\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{(x-y)^2}{xy}\Leftrightarrow\sum\frac{y+z}{x}-6=\sum\frac{(x-y)^2}{xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)=\sum\frac{(x-y)^2}{xy}\Leftrightarrow\sum\frac{(x-y)^2}{xy}=\sum\frac{(x-y)^2}{xy},\text{ evidentely.}$$

We use the proved equality and given inequality becomes

$\sum\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}\geq\sum\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$, and for prove the last inequality is sufficient to show that

$\frac{1}{(b+c-a)(c+a-b)}\geq\frac{1}{(a+b)^2}$, which is equivalent with

$(a+b)^2\geq c^2-(a-b)^2\Leftrightarrow(a+b+c)(a+b-c)+(a-b)^2\geq 0$, which is true because a,b and c are the lenght of the sides of a triangle.We have equality if and only if $a=b=c$.

Solution of Q11 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania

We have $\sum\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=\sum\left(1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\right)=3-4\sum\frac{ab}{(a+b)^2}$. Then,

$$\sum\frac{a}{b+c-a}-2\sum\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\geq 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum\frac{a}{p-a}+8\sum\frac{ab}{(a+b)^2}\geq 9.$$

Using the **AM-HM Inequality** and the equality $\sum\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{2Rr}$, we get

$$\sum \frac{ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{\sum \frac{(a+b)^2}{ab}} = \frac{18Rr}{p^2+r^2+10Rr}.$$

Using the equality $\sum \frac{a}{p-a} = \frac{2(2R-r)}{r}$ it is enough to prove that

$$\frac{R}{r} + \frac{72Rr}{p^2+r^2+10Rr} \geq 5.$$

Using the **Gerretsen Inequality** $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ it is enough to prove that

$$\frac{R}{r} + \frac{36Rr}{2R^2+7Rr+2r^2} \geq 5.$$

After some easy calculations this yields

$$2R^3-3R^2r+3Rr^2-10r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R^2+Rr+5r^2) \geq 0.$$

But this follows immediately from the **Euler Inequality** $R \geq 2r$.

Q12. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that in all acute triangle ABC, holds

$$\sqrt{3}(\sum tgA)(\sum ctgA) \geq 9\sqrt{3} \geq 4(\sum \sin A)(\sum \cos A).$$

Solution of Q12 by author and Marius Drăgan, Bucharest. We use the following inequalities

$$\sum \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},\ \sum \cos A \leq \frac{3}{2},\ \sum tgA \geq 3\sqrt{3} \text{ and } \sum ctgA \geq \sqrt{3}.$$

Hence, $\sqrt{3}(\sum tgA)(\sum ctgA) \geq 9\sqrt{3} \geq 4(\sum \sin A)(\sum \cos A)$, Q.E.D.

Solution of Q12 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania

We have $\sqrt{3}(\sum tgA)(\sum ctgA) \geq 9\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sum tgA)\left(\sum \frac{1}{tgA}\right) \geq 9$.

But this follows immediately from the **AM-HM Inequality**. Using the equalities

$\sum \sin A = \frac{p}{R}$ and $\sum \cos A = \frac{R+r}{R}$, we have

$9\sqrt{3} \geq 4(\sum \sin A)(\sum \cos A) \Leftrightarrow 4p(R+r) \leq 9\sqrt{3}R^2$.

Using the inequality $p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}$ and the **Euler Inequality** $R \geq 2r$, we get

$$4p(R+r) \leq 6\sqrt{3}R\left(R+\frac{R}{2}\right) = 9\sqrt{3}R^2, \text{ and this ends the proof.}$$

" Mathematics bring into play powers of the soul that are not much different from those solicited poetry and arts ".

Dan Barbilian

“ Îndepărtarea minții de la simțuri şi abaterea gândirii de la rutină denotă un spirit mare “.
Cicero

6. Caleidoscop matematic

1. În G.M.-B nr. 12/2013, *D.M. Batineţu-Giurgiu* şi *Neculai Stanciu* au propus următoarea problemă:

’’Determinati două numere naturale $\overline{abcde}$ ***şi*** $\overline{fghij}$ ***astfel încât*** $2\cdot\overline{abcde}=\overline{fghij}$ ***şi în scrierea celor două numere să se utilizeze toate cifrele de la 0 la 9.’’***

În numărul 6-7-8/2014 al aceleiaşi reviste a apărut soluția acestei probleme, obținându-se exemplul $2\times 13485 = 26970$. Iată toate soluțiile:

$2\times 13485 = 26970$	$2\times 13548 = 27096$	$2\times 14538 = 29076$
$2\times 14685 = 29370$	$2\times 14835 = 29670$	$2\times 14853 = 29706$
$2\times 14865 = 29730$	$2\times 15486 = 30972$	$2\times 16485 = 32970$
$2\times 18546 = 37092$	$2\times 18645 = 37290$	$2\times 20679 = 41358$
$2\times 20769 = 41538$	$2\times 20793 = 41586$	$2\times 23079 = 46158$
$2\times 26709 = 53418$	$2\times 26907 = 53814$	$2\times 27069 = 54138$
$2\times 27093 = 54186$	$2\times 27309 = 54618$	$2\times 29067 = 58134$
$2\times 29073 = 58146$	$2\times 29307 = 58614$	$2\times 30729 = 61458$
$2\times 30927 = 61854$	$2\times 31485 = 62970$	$2\times 32079 = 64158$
$2\times 32709 = 65418$	$2\times 32907 = 65814$	$2\times 34851 = 69702$
$2\times 35148 = 70296$	$2\times 35481 = 70962$	$2\times 38145 = 76290$
$2\times 38451 = 76902$	$2\times 45138 = 90276$	$2\times 45186 = 90372$
$2\times 45381 = 90762$	$2\times 46851 = 93702$	$2\times 48135 = 96270$
$2\times 48351 = 96702$	$2\times 48513 = 97026$	$2\times 48516 = 97032$
$2\times 48531 = 97062$	$2\times 48615 = 97230$	$2\times 48651 = 97302$

Un rezultat interesant dedus din tabelul de mai sus: $\{1,4,5,8\}\subset\{a,b,c,d,e\}$ sau $\{1,4,5,8\}\subset\{f,g,h,i,j\}$, $\{0,2,7,9\}\subset\{a,b,c,d,e\}$ sau $\{0,2,7,9\}\subset\{f,g,h,i,j\}$.

Metoda folosită în găsirea soluțiilor de mai sus a fost răbdarea combinată cu unele observații care sunt mai uşor de aplicat decât de explicat. De exemplu, nu exista numere $\overline{abcd}$ care incep cu 12, 24, 25, 37, 49. Sau faptul că dacă 9 este una dintre cifrele a,b,c,d, ea nu poate fi urmată de o cifră mai mare strict decat 3.

Faptul că nu putem avea în cuprinsul numărului $\overline{abcde}$ succesiunile 95, 96, 97, 98 e clar, dar nu putem avea nici succesiunea 94. De asemenea nu putem avea succesiunile 01,02,03,04, iar dacă numărul $\overline{abcde}$ începe cu 1, atunci nu contine cifra 0. Alt exemplu: numerele care încep cu 30, 31, 32, 34 nu pot conține cifra 6 şi nu se pot termina în 8, iar numerele care încep cu 40, 41, 42, 43 nu conțin cifra 8, şi nu se pot termina în7 sau 9.

Altă posibilitate pentru aflarea tuturor soluțiilor de mai sus ar fi forța brută a calculatorului, pentru care numărul de încercări este mic.

de Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi ***Nela Ciceu,*** Roşiori, Bacău.

2. Se consideră expresia $\frac{\square}{\square\,\square}+\frac{\square}{\square\,\square}+\frac{\square}{\square\,\square}=1$.

Puneți în pătratele din stânga expresiei , toate cifrele de la 1 la 9 o singură dată astfel încât să se obțină o relație adevărată. Cele două pătrate de la numitor reprezintă numere de două cifre.

3. Cu cât este egal produsul

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot(x-y)\cdot(x-z)\,?$$

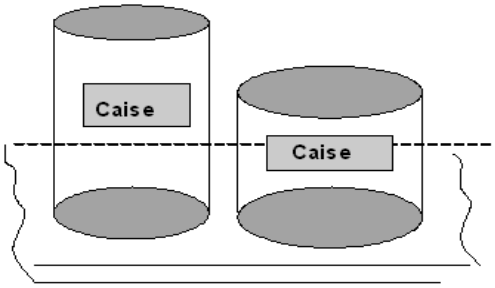
(Răspunsuri la pagina 48)

Rezolvările problemelor din numărul trecut.

1. Aranjează cele patru fructe în toate modurile posibile. Câte astfel de moduri există ?



2. Două borcane cu gem de caise de aceeaşi calitate stau pe raftul unui magazin. Borcanul mai înalt este cu două treimi mai înalt decât celălalt şi are diametrul jumătate din diametrul borcanului mai scurt. Dacă borcanul mai înalt costă 5 lei iar cel mai scurt, 9 lei, care cumpărătură este mai avantajoasă ?

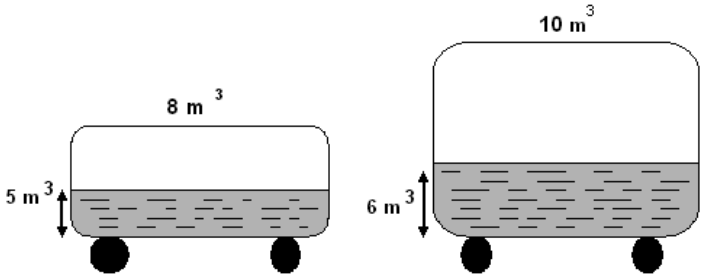


3. Din vârful A al pătratului ABCD de latură 16 m, pleacă simultan un melc şi o furnică. Dacă viteza melcului este de 2,5 cm/s şi a furnicii de 320 mm/s, să se găsească ce distanță va fi între cei doi după 3 minute.

4. Am mai multe pixuri care scriu colorat: 3 cu roşu, 4 cu albastru, 5 cu verde şi 2 cu negru. În câte moduri pot scrie o scrisoare doar cu două culori.

5. Într-o grădină zoologică trăiesc 4 lei, 5 tigri şi 6 pantere. Dacă vrem să alegem un leu, un tigru şi două pantere, în câte moduri o putem face ?

6. Două cisterne au capacitatea de 8 m^3, respectiv 10 m^3 şi sunt încărcate cu 5 m^3, respectiv 6 m^3 de benzină pentru a fi transportate la o stație. Să se determine care cisternă este mai bine folosită în raport cu capacitatea sa.



7. Cinci bărbați îşi lasă la garderobă pălăriile care seamănă între ele însă doamna de la garderobă nu le aranjează în ordinea în care le-a primit. Care este probabilitatea ca fiecare dintre cei cinci să-şi primească propria pălărie ?

8. Avem un dulap cu opt sertare încuiate iar cheile nu sunt numerotate ca să ştim cărui sertar îi corespunde fiecare cheie. Câte încercări trebuie să facem pentru a deschide toate sertarele?

9. Într-un şifonier se află 18 mănuşi: 4 perechi negre, 3 perechi verzi şi 2 roşii. Pe întuneric, câte mănuşi trebuie să alegi ca să fii sigur că printre acestea se află cel puțin două de aceeaşi culoare ?

Răspunsuri:

1. Sunt 4·3·2·1=24 moduri. Sunt patru moduri în care punem un fruct pe primul loc. La fiecare din acestea mai rămân trei moduri de punere a celorlalte fructe pe locul doi. Mai departe, rămân două fructe care pot ocupa locul al treilea şi la sfârşit rămâne un singur fruct pentru ultimul loc.
2. Observăm că masa fiecărui borcan este echivalentul volumului unui cilindru. Ştim că raza borcanului mai scurt este 2r iar raza celui mai inalt este r. De asemenea, înălțimea borcanului mai înalt este h +2/3h und h este înălțimea borcanului mai scurt.
În aceste condiții, volumul borcanului mai scurt este :
$V^{'} = \pi(2r)^2 h = 4\pi r^2 h$ iar a borcanului mai înalt este

$V = \pi r^2 (h + \frac{2}{3}h) = \pi r^2 h + \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{4\pi r^2 h}{3}$.

Aşadar, este evident că mai avantajos de cumpărat este borcanul mai scurt căci are masa de trei ori mai mare ca a celuilalt.
3. Cum viteza melcului este 2,5cm/s = 0,025m/s atunci el parcurge în 3 minute(180 secunde) o distanță egală cu $0,025 \cdot 180 = 4,5m$. Viteza furnicii este de 320mm/s = 0,32 m/s şi în cele trei minute ea va parcurge o distanță egală cu $0,32 \cdot 180 = 57,6m$. Cum lungimea drumului ABCD adică perimetrul pătratului este 64 m atunci, distanța rămasă între cei doi va fi de 64- 4,5- 57,6 = 1,9 m.
4. Există situațiile: Roşu cu Albastru, Roşu cu Verde, Roşu cu Negru, Albastru cu Verde, Albastru cu Negru, Verde cu Negru.
5. Leii îi putem alege în patru moduri. La acestea vin cele cinci moduri în care putem alege un tigru şi pentru fiecare mod de până acum vin 15 de moduri de alegere a două pantere din cele şase.

$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 300$ moduri.

6. În raport de capacitatea fiecărei cisterne se obține că benzina din prima cisternă reprezintă $x = \frac{5 \cdot 100}{8} = 62,5\%$ din capacitatea acesteia, iar benzina din cisterna a doua reprezintă $y = \frac{6 \cdot 100}{10} = 60\%$ din capacitatea acesteia. Prin urmare, prima cisternă deşi are capacitatea mai mică decât cea de a doua, este mai bine folosită decât aceasta.
7. Cum cele cinci pălării pot fi aranjate între ele într-un număr de 5 ! moduri adică 120 atunci probabilitatea cerută este $P = \frac{1}{120}$.
8. Sunt 8 +7+6+5+4+3+2+1 = 36 de încercări.
9. Sunt necesare 4 mănuşi căci dacă am scoate doar trei este posibil ca să fie câte una din fiecare culoare, dar dacă scoatem patru atunci obligatoriu cea de a patra va avea aceeaşi culoare cu una deja extrasă.

Stiați că ...

Ecuațiile diofantice de tipul $x^2 - ny^2 = 1$ au fost numite ecuații *Pell* de către *Euler* în mod eronat, care a făcut o confuzie cu Lord Brouncker (vezi link-ul: **http://en.wikipedia.org/wiki/Lord_Brouncker),** primul matematician europen care a găsit o metodă de determinare a soluției generale pentru ecuația de mai sus. Primul matematician care a rezolvat ecuația de mai sus a fost însă matematicianul Indian Brahmagupta(în anul 628). Metoda descoperită de Brahmagupta a fost tradusă în arabă(în anul 773) şi latină(în anul 1126). Însă ecuația $x^2 - 2y^2 = 1$ a fost studiată în acelaşi timp în Grecia şi India mult mai devreme în timpul lui Pitagora.



„ Minţile luminate discută idei, minţile mediocre discută evenimente, minţile mici discută oamenii ”.
Eleanor Roosevelt

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 14** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

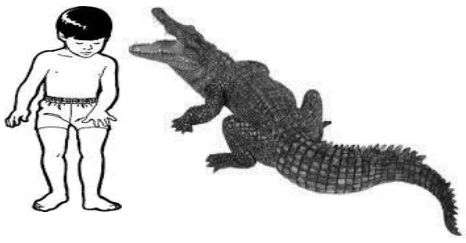
Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 15** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2015**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



Răspunsuri de la Caleidoscop matematic:

1. $\frac{9}{12}+\frac{5}{34}+\frac{7}{68}=1$**;** **2.** 0 deoarece x – x = 0 şi se găseşte în produs.

PARADOXUL CROCODILULUI



Un crocodil fură un copil de la tatăl său şi îi promite că îl va da înapoi nevătămat, doar dacă va ghici ce va urma să facă cu fiul său, să-l păstreze sau să îl înapoieze.

Ce se întâmplă dacă tatăl ghiceşte că animalul nu-i va returna copilul?

Răspuns: În această situaţie, nu există nicio soluţie deoarece, dacă crocodilul vrea să păstreze copilul îşi încalcă propria regulă, căci tatăl a ghicit ce vrea animalul. Dacă vrea să dea copilul înapoi, îşi încalcă propria regulă căci tatăl afirmă că animalul nu-i va returna copilul. Aşadar, situaţia nu are rezolvare, adică este un paradox.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Scoala cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moineşti, Bacău
Clasa a V-a: 14p. Bolohan Tudor, Lupu Ioana. **Clasa a VI-a** : 28p. Paduraru Catalin, Dobrovat Alina, Munteanu Diana,18p. Ailincai Iulian, Ciubotariu Costin. **Clasa a VII-a**: 53p. Maziliu Alexandra.
Clasa a VIII-a : 65p. Munteanu Gheorghe, Lila Ionut. **Prof. Cornelia Gurău;**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba
Clasa a VI-a: 35p. Bel Luana;
Clasa a VIII-a:75p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeț Dragoş, Sideriaş Alexandru; **Prof. Mariana Mitea.**

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VI-a: 24p. Ducu Sabina, Troana Adriana.
Clasa a VIII-a: 65p. Traşcă Ionuț- Vlăduț, Ene Daniela- Iuliana, Moisescu Denis , Foltrauer Robert, Vochin Ioan – David, 54p , Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**

Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu", Buzău
Clasa a IX-a: 10p. Cană Cornel, Manea Irina, Grigore Daniel, Anton Mădălin, Anița Ramona, Dumitrescu Alin, Pisău paul, Toboş Valentin,Păunoiu Mihai, Beganu Nicoleta, Băețelu Mădălina. **Clasa a X-a:** 20p. Preda Mădălin, Petrache Maria, Dinu Cristina Bianca. **Clasa a XI-a :**25p. Ilie Ştefania, Marin Valentina, Ion Mihaela,Costache Adrian, Roman Corina, Stupinaru Cosmin, Zincă Andreea, Costea Oana. **Clasa a XII-a**: 70p. Stoian Cristina, Nicu Alexandra, Pascu Iuliana, Sterpu Denisa, Sandu Cristina, Tureac Andrei, Dragomir Ionuț, Tudose Andreea, **Prof. Stan Adrian.**

Şcoala Şerban Cioculescu, Găeşti, Dâmbovița
Clasa a VIII-a: 28p. Maierean Alex, Petre Adriana, Tudor Georgiana, Mihalache Alexandra, Badea Valeria; **Prof. Florin Stănescu**

Colegiul Economic Buzău
Clasa a X-a: 20p. Stere Elena, Dodan Marius, **Prof. Constantin Dinu.**

Liceul Tehnologic "Sfântul Mucenic Sava", Berca
Clasa a III-a: 14p. Hoacă Ştefan, Tudor Irina, Calaican Costin, Oprea mara, Duran Bianca, **Prof. Gabriela- Nicoleta Lupşan;**

Scoala Gimnazială „ Căpitan Aviator M. T. Bădulescu", Buzău
Clasa a III-a: Păunescu Andrei, Nicola Ana Maria, Răpițeanu Carol, Coman Călin, Zevedei Ariana, **Prof. Cristian Cosmin Lupşan.**

Liceul Tehnic IAR "Pogoneanu", Pogoanele.
Clasa a V-a: 14p. Paraschiv Alina, Ichim Mihai, Calotă Ioana;
Clasa VI-a: 15p. Toader Radiana, Istrate Emanuel, Păun Alexandra; **Prof. Stanescu Ion.**



REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 14 ANUL VII - 2014

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

Cuprins

1. Istoria matematicii
- Istoria unei prietenii de *prof. Adrian Stan* 1

2. Articole şi note matematice
- Proprietăți şi aplicații ale funcțiilor integrabile de prof. Lenuța Pîrlog 3
- Altă metodă de calcul al unor integrale definite de prof. Constantin Rusu 5
- În legătură cu problema IX.370 din RMT 3/2013 de Marius Drăgan, Bucureşti, Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru 7
- Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul "formulei de integrare prin părți" de prof. Elena şi Constantin Ciobîcă 9
- An elementary proof of one Wallis-type limit By D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania And Neculai Stanciu, Buzău, Romania..... 11

3. Probleme rezolvate 12

4. Probleme propuse 33

5. Quickies 42

6. Caleidoscop matematic 45

7. Poşta redacției 48

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

LEI 11 RON