SCLIPIREA MINŢII

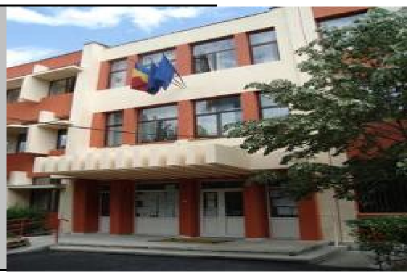
Revistă de cultură matematică, publicaţie semestrială, An III, Nr. V, APRILIE 2010, BUZĂU

CUPRINS

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACTIA

Grupul Şcolar „ Costin Nenițescu”, Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com



’’Oamenii cu inteligenţă mediocră înfierează de obicei tot ce le depăşeşte puterea de înţelegere’’.
La Rochefoucauld

1. Istoria matematicii

140 de ani de la naşterea profesorului ION N. IONESCU

de Roxana Mihaela Stanciu

În cătunul Stoienoaia, comuna Creaţa-Leşile, judeţul Ilfov s-a născut la 22 noiembrie/4 decembrie 1870 cel de al doilea fiu al lui Nicolae şi Maria –Atina Ionescu. Acesta a fost botezat cu numele de Ion. Tatăl, Nicolae, era administratorul moşiei Stoienoaia; mama, Maria-Atina, nascuta Diamandescu, era casnică, o femeie recunoscută pentru hărnicia ei.După Ion, familia a mai avut încă trei copii. Deoarece au rămas orfani de mici, cei cinci fraţi au crescut cu mari greutăţi.

A urmat şcoala primară, liceul Comercial(ca bursier) şi în anul 1889 a reuşit primul la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Obţine diploma de inginer cu nota 18,42(nota maximă, fiind în acele timpuri, egală cu 20) în anul 1894 şi tot în acel an este numit inginer asistent la Direcţia Generală a Căilor Ferate. Ca student se întreţinea din meditaţii la matematică. Atunci el a observat slaba pregătire la matematică a elevilor de liceu şi a colegilor săi de la facultate.

Aceasta l-a determinat sa înfiinţeze **Gazeta Matematică**, împreună cu Victor Balaban, Vasile Cristescu, Mihail Roco, Ion G. Zotta, Emanoil Davidescu, Mauriciu Kinbaum, Nicolae Nicolescu, Tancred Constantinescu şi Andrei Ioachimescu.În septembrie al aceluiaşi an, Ion Ionescu participase ca supraveghetor, la proba scrisă şi concluzia a fost aceeaşi – slaba pregătire la matematică. În ziua de 4 Octombrie 1894 s-a luat o decizie: **„…să căutăm zece persoane care să vrea să dea sumele necesare pentru apariţia revistei în primul an, iar toate veniturile acelui an să se capitalizeze, pentru a se garanta publicarea în anii următori, când unul sau mai mulţi din cei zece nu ar voi să mai dea sumele necesare… dacă nu s-ar găsi alţii cari să-i înlocuiască“**, îşi va aminti Ion Ionescu mai târziu. Primul număr al gazetei apare la 15 septembrie 1895 şi sunt publicate patru articole din care două semnate de Ion Ionescu şi 13 probleme - şase semnate de Ion Ionescu.

A încetat din viaţă la 17 septembrie 1946. Este momentul aici să amintim despre o moştenire testamentară, donaţie a lui Ion Ionescu. Testamentul său stipulează că **„…Averea mea se compune din casele mele din Bucureşti, Str. Răsuri nr. 25, pe care le-am cumpărat…în 1938. Aceste case le las în plină proprietate şi fără nici o sarcină, Societăţii Gazeta Matematică, cu dorinţa expresă de a se înfiinţa în ele o sală de lectură ştiinţifică pentru elevii liceelor din Bucureşti…“** Se precizează clar care camere din casă vor fi afectate pentru lectură, în testament se continuă: **„Actualul dormitor cu dependinţele casei…le las unui membru al Gazetei Matematice, care să se oblige a îngriji de sala de lectură …“. „Casa de citire Ion Ionescu“** a funcţionat până în 1950, când, în acelaşi fel ca şi localul din Calea Griviţei, trece în proprietatea statului. În 1997 Societatea reuşeşte să obţină casa înapoi, dar deteriorată şi cu tot cu chiriaşi(care stau şi acum în ea).

Alături de Gheorghe Lazăr, Gheorghe Asachi, Ion Heliade Rădulescu, Spiru Haret, Petrache Poenaru şi Gheorghe Duca, a fost unul dintre ctitorii învăţământului tehnic românesc. Alături de Vasile Cristescu, Andrei Ioachimescu şi Gheorghe Ţiţeica a format ceea ce se cheamă “Stâlpii Gazetei Matematice”. Crezul său: „Ajungînd profesor . . . eram hotărît: sau fac ce trebuie, sau plec. Principiile care m-au călăuzit se pot rezuma în trei:

1. Profesorul este răspunzător de timpul pe care elevii îl pierd în şcoală la cursurile şi lucrările pe care le fac.
2. Al doilea principiu călăuzitor a fost de a face ca elevii să iasă din şcoală cu încredere deplină în ei înşişi că sunt în stare să facă faţă cerinţelor practicii; să aibă încredere în puterea lor de a concepe şi proiecta lucrări tehnice.
3. Un al treilea principiu călăuzitor a fost seriozitatea în îndeplinirea datoriilor .. ." demonstrează o dată în plus că **Ion Ionescu** a fost un OM de aleasă ţinută spirituală.

BIBLIOGRAFIE

[1] **St.George Andonie, Istoria Matematicii în România**, vol.I, Ed. Ştiinţifică, 1965.
[2] **Florin Diac, *Monografia S.S.M.R., Bucureşti***, 1998, Colecţia Biblioteca S.S.M.R.

Profesor, Liceul cu Program Sportiv, Iolanda Balaş Sötter

’’ A gândi e mai interesant decât a şti – dar nu decât a intui .’’
J. W. Goethe

2. Articole şi note matematice

Asupra unei probleme de minim

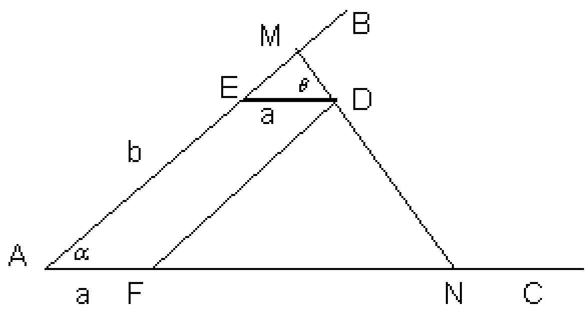
de prof. **Constantin Rusu**

În manualul de “Geometrie şi trigonometrie” – clasa a X-a, ed. 1982, este propusă următoarea problemă(nr.6, pag.15):

“***Se dau: un unghi*** BAC ***şi un punct*** D ***în interiorul lui.O dreaptă prin*** D ***taie laturile unghiului în*** M ***şi*** N ***. Să se determine dreapta*** MN ***astfel încât aria triunghiului*** AMN ***să fie minimă.***”Această problemă a fost dată la examenul pentru obţinerea gradului II în 1982.

În Gazeta Matematică perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică nr.1-2, 1983 pag 13-16 sunt prezentate de dr. *Horia Banea* trei soluţii ale problemei sus menţionate.

În Gazeta Matematică, seria B, nr.10-11, 1983, pg.388 profesorii *Ionela* şi *Marin Popa* din Craiova prezintă încă patru soluţii. Dăm mai jos o nouă soluţie(a opta):



Fie MN o dreaptă variabilă ce trece prin D, $M \in (AB, N \in (AC$ iar DE şi DF dreptele ce trec prin D şi sunt paralele cu laturile unghiului , unde $E \in (AB, F \in (AC$. Conform axiomei lui Pash în triunghiul AMN rezultă că $E \in (AM)$ şi $F \in (AN)$.

Atunci $A_{AMN} = A_{AEDF} + A_{EMD} + A_{FDN}$

Notăm : $m(\widehat{MAN}) = \alpha, m(\widehat{EDM}) = \theta, AE = b,$

$AF = a, \dfrac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} = x$. Se obţine: $A[EMD] + A[FND] = \dfrac{\sin\alpha}{2}\left[\dfrac{a^2\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} + \dfrac{b^2\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta}\right]$.

Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x) = a^2x + \dfrac{b^2}{x}$ .Determinăm mulţimea valorilor acestei funcţii:

$y = a^2x + \dfrac{b^2}{x} \Leftrightarrow a^2x^2 - yx + b^2 = 0$ .Cum $x > 0$ rezultă $\Delta_y = y^2 - 4a^2b^2 \geq 0$, de unde $y \in [2ab, \infty)$.Valoarea minimă a lui $f(x)$ este $2ab$ care se atinge pentru $x = \dfrac{b}{a}$. Teorema sinusurilor în triunghiul EMD ne dă $\dfrac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} = \dfrac{EM}{a}$

Cum $\dfrac{\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} = \dfrac{b}{a}$ rezultă $EM = b$ ceea ce arată că E este mijlocul segmentului $[AM]$ iar D este mijlocul segmentului $[MN]$. Din $EM \| FD, [EM] \equiv [FD]$ rezultă că patrulaterul $EMDF$ este paralelogram şi deci $MN \| EF$.

Profesor, Liceul “Ştefan cel Mare”, Râmnicu Sărat

Aplicaţii practice ale logaritmilor

de prof. **Adrian Stan**


John Neper

În **1614** prin lucrarea ‘’**Mirifici logarithmorum canonis descriptio’’**, **John Neper**(1550-1617) introduce tablele de logaritmi naturali iar în **1624**, Henry Brigs(1556-1630), publică ’’**Arithmetica logarithmica** ‘‘ în care introduce logaritmii zecimali. Apariţia logaritmilor a revoluţionat calculele inginereşti, în general cele foarte complexe când în loc de înmulţiri şi împărţiri se foloseau nişte adunări şi scăderi. Încă de la apariţia logaritmilor ca urmare a dezvoltării societăţii şi a directei sale dependenţe de matematică, prin creşterea interesului faţă de diversele calcule din domeniile geometriei, astronomiei, trigonometriei sau cele negustoreşti, matematicienii **Jost Bürgi** (1552-1632) , **John Neper** şi **Henry Briggs**, cei care au introdus şi dezvoltat calculul cu logaritmi au arătat importanţa acestora şi în alte domenii ale ştiinţelor.

Astfel, ca exemplu, în astronomie se pot lua ca măsură pentru strălucirea unei stele, în chimie se pot utiliza la calculul timpului de înjumătăţire a unei substanţe radioactive, în biologie, la relaţia ce dă creşterea naturală, iar în matematică însăşi la determinarea unor aproximări mai bune. Următoarele exemple vin să reliefeze importanţa calculelor cu logaritmi în diversele domenii ale ştiinţelor.

1. Să se aproximeze media geometrică a numerelor 16, 20 şi 38, fără a folosi calculatorul.

Soluţie: Cum $m_g = \sqrt[3]{16\cdot 20\cdot 38} \Rightarrow m_g{}^3 = 16\cdot 20\cdot 38 \Rightarrow$ $3\lg(m_g) = \lg 16 + \lg 20 + \lg 38.$ Utilizând tabelele de logaritmi se obţine : $\lg(m_g) = \dfrac{1,204+1,301,+1,579}{3} = 1,361 \Rightarrow m_g = 10^{1,361} \approx 22,9$.

2. Să se aproximeze cu o zecimală prin lipsă numărul lg 4.

Soluţie : Se ştie că $10^3 \langle 4^5 \langle 4^6 \langle 10^4 \Rightarrow 3\langle 5\lg 4 \langle 6\lg 4 \langle 4 \Rightarrow$ $\lg 4 \rangle \dfrac{3}{5}$ şi $\lg 4 \langle \dfrac{4}{6} \Rightarrow$ $\lg 4 \rangle 0,60$ şi $\lg 4 \langle 0,67$.

Rezultă, $\lg 4 \in (0,6; 0,67)$ adică **lg 4** =0,6.

3. Să se determine numărul de cifre din care este compus numărul 7^{2010}.

Soluţie : Se observă că $10^2 \le \overline{abc} \langle 10^3$, $10^3 \le \overline{abcd} \langle 10^4$, ……..., $10^{p-1} \le N \langle 10^p$, unde **p** reprezintă numărul de cifre ale lui N şi pe care trebuie să-l determinăm. Logaritmând ultima relaţie se obţine: $p-1 \le \lg N \langle p.$ Pentru N=7^{2010} rezultă lgN=2010**lg**7≈1698,6. Rezultă, că numărul dat este compus din p= 1699 cifre.

4. Să se afle valoarea unui capital de 3000 de lei cu dobânda compusă de 12% pe an, după patru ani.

Soluţie : Fie **d**=0,12 dobânda adusă de **1** leu în timp de un an. Atunci, capitalul iniţial C_0 = 3000 lei după 4 ani în regim de dobândă compusă cu dobânda d se calculează după formula **C= C_0(1+d)^n** = =3000(1+1,12)^4 . $C = 3\cdot 10^3 \cdot (1,12)^4 \Rightarrow \lg C = \lg 3 + \lg 10^3 + \lg(1,12)^4 \Rightarrow$

$\lg C = \lg 3 + 3 + 4\cdot \lg 1,12 \Leftrightarrow$ $\lg C = 0,477 + 3 + 4\cdot 0,049 \Leftrightarrow$ $\lg C = 3,677 \Rightarrow C = 10^{3,677} = 4709,77$.

5. La ce înălţime de sol zboară un avion dacă presiunea aerului care îl înconjoară este p=600 torri, în timp ce o staţie meteorologică de la sol anunţă o presiune p_0= 780 torri ?

Soluţie : Relaţia ce permite aflarea înălţimii este dată de formula $h - h_0 = 18400\cdot(\lg p_0 - \lg p)$ unde h şi h_0 sunt înălţimile deasupra solului corespunzătoare presiunilor p şi p_0 din locurile respective.

În cazul nostru, h_0=0 căci staţia se află la sol, p_0 = 780 torri, p= 600 torri, atunci, înălţimea în metri este egală cu $h = 18400\cdot(\lg 780 - \lg 600) = 18400\cdot(2,892 - 2,778) = 18400\cdot 0,114 m \approx 2098 m$.

6. Dacă aciditatea unei soluţii apoase se măsoară prin $pH = -\lg[H_3O^+]$ unde $[H_3O^+]$ reprezintă concentraţia (în moli/litru) a ionilor H_3O^+. Să se determine concentraţia în ioni a unei soluţii având pH=4.

Soluţie : Dacă pH=4 atunci $4 = -\lg x \Rightarrow x = \lg x^{-1} \Rightarrow x^{-1} = 10^4 \Rightarrow x = (10^4)^{-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{10^4}$ este concentraţia în ioni a soluţiei.

7. Magnitudinea unui cutremur de intensitate I se măsoară pe scara Richter prin $M = \lg \dfrac{I}{I_0}$, unde I_0 este o intensitate considerată de referinţă, adică intensitatea celui mai mic cutremur de pământ numit

cutremur de nivel zero. Stabiliţi pe scara Richter ce magnitudine are un cutremur având intensitatea de $6524360 I_0$.

Soluţie : $I = 6524360 I_0 \Rightarrow M = \lg \dfrac{6524360 I_0}{I_0} = \lg 6524360 \approx 6,8.$

8. Dacă Soarele are o strălucire absolută de M_0=4,8 iar steaua Beta Cantauri are stălucirea de – 5,42 să se determine de câte ori aceasta din urmă radiază mai multă energie decât Soarele.

Soluţie : Cum $M - M_0 = -2,5 \lg \dfrac{I}{I_0}$, unde I_0 respectiv I este energia de radiaţii corespunzătoare unei străluciri M_0 respectiv M, atunci, $-5,42 - 4,8 = -2,5 \lg \dfrac{I}{I_0} \Rightarrow 10,22 = 2,5 \lg \dfrac{I}{I_0} \Rightarrow 4,088 = \lg \dfrac{I}{I_0} \Rightarrow$

$\lg \dfrac{I}{I_0} \approx 10^{4,088} \approx 12246.$ Aşadar, Steaua Beta Cantauri radiază în fiecare secundă de 12246 de ori mai multă energie decât Soarele.

9. Fiind date 20 grame de substanţă radioactivă, acestea scad ca urmare a radioactivităţii la 18,2 grame în şase zile. Să se determine numărul de zile necesar pentru ca jumătate din substanţă să se dezintegreze.

Soluţie : Dintr-o substanţă radioactivă formată dintr-un număr N_0 de nuclee se dezintegrează după un timp t un număr de $N = \lambda N_0$ nuclee cu $\lambda \in (0;1)$ într-o perioadă de timp numită ‘’ timpul de înjumătăţire’’ care este o mărime ce scade exponenţial în timp după formula $\dfrac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$ de unde

$\ln \dfrac{N}{N_0} = \ln e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln \dfrac{1}{2} = -\lambda t \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda t \Rightarrow$ timpul de înjumătăţire se obţine din $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{0,693}{\lambda}$.

De exemplu, la izotopii de carbon C14, timpul de înjumătăţire este de 5730 de ani.

În cazul nostru, N_0= 20 grame, N= 18,2 grame şi t=6 zile şi din $\dfrac{18,2}{20} = e^{-6\lambda} \Rightarrow -6\lambda = \ln(\dfrac{18,2}{20}) \Leftrightarrow -6\lambda = \ln 18,2 - \ln 20 \Rightarrow$

$-6\lambda = -0,0942 \Rightarrow \lambda = 0,0157$. Din $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{0,693}{0,0157} \approx 44,1$, rezultă aşadar că jumătate din substanţa respectivă se va dezintegra în 44,1 zile.

Observaţie : Procesul de dezintegrare radioactivă este unul continuu şi se referă la timpul necesar ca jumătate din atomii unei cantităţi de material radioactiv să se dezintegreze, aceasta nepresupunând ca substanţa să dispară complet.

10. Să se determine vârsta unui os de animal dacă acesta conţine în prezent 80% din cantitatea de Carbon 14 de când a murit.

Soluţie : Procesul datării cu carbon 14 constă în determinarea perioadei de la care animalul a murit, cu ajutorul carbonului 14 care este radioactiv. Astfel, când animalul moare(t=0), cantitatea de carbon 14 este N_0, urmând ca aceasta să scadă . Această descreştere exponenţială are la bază formula $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, unde t se ia perioada de înjumătăţire a elementului carbon 14, şi anume, **t = 5730** iar $N = \dfrac{1}{2} N_0$ Atunci, $\dfrac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}$. După logaritmare rezultă $-\lambda \cdot 5730 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda = 0,000121$. Pentru a determina timpul **t** în ani pentru ca N= 0,80N_0 se foloseşte relaţia $0,8 N_0 = N_0 e^{-0,000121 t} \Rightarrow -t = \dfrac{\ln 0,8}{0,000121} \Rightarrow t = \dfrac{0,223}{0,000121} \approx 1842$ ceea ce înseamnă că animalul a murit acum 1842 de ani .

Bibliografie : 1. Mică enciclopedie matematică. Editura Tehnică.Bucureşti. 1980.

Profesor, Grupul Şcolar “ Costin Neniţescu”, Buzău

Matematica şi ştiinţele biologice

de prof. **Florentina Popescu**

Una dintre caracteristicile prin care putem aprecia stadiul de dezvoltare al unei discipline ştiinţifice este gradul său de matematizare. In acest sens putem cita pe Galileo Galilei, după care: **“ Marea carte a naturii poate fi citită numai de acela care cunoaşte limba în care este scrisă această carte şi această limbă este matematica**”

Prin aceasta înţelegem amploarea folosirii în perspectivă, interdisciplinară a ideilor şi tehnicilor matematicii. Evident, din punct de vedere al disciplinei ştiinţifice în cauză, un înalt grad de matematizare nu indică o valoare intrinsecă mare.

Se pot distinge patru etape ale contribuţiei matematicii la dezvoltarea unei discipline ştiinţifice:

Etapa I: Strângerea datelor, analiza şi interpretarea acestora.

Această sarcină este una fundamentală iar absenţa unor date esenţiale poate întârzia dezvoltarea generală a unei discipline ştiinţifice şi în particular, matematizarea acesteia. Din punct de vedere al interacţiunii cu matematica, strângerea datelor şi analiza acestora ţin de domeniile statisticianului şi informaticianului. Multe cercetări matematice au fost provocate de probleme ridicate de prelucrarea unor date reale.

Etapa a II-a: Formularea cantitativă pe principii ştiinţifice şi legi empirice.

Aceasta semnifică punerea în evidenţă a unor „**legi empirice**”- observaţii deduse pe baza observării unor regularităţi remarcabile ale colecţiilor de date strânse. Pentru un matematician, acestea pot fi punctul de declanşare a interesului său în problematica domeniului şi în realizarea unui model matematic care să explice fenomenele sau procesele concrete.

Etapa a III-a: Modelarea matematică.

Unul din marile avantaje ale modelării matematice este faptul că acea structură sau unele similare pot să apară în contexte ştiinţifice total diferite. Si o problemă care poate fi lipsită de semnificaţie într-un context, poate fi de importanţă excepţională în altul. In acest fel dezvoltarea unui model din cele de necesităţile imediate, nu reprezintă o muncă imediată şi nu este cazul să se arunce asupra acelor matematicieni care ar dezvolta aşa zisa parte inaplicabilă a matematicilor aplicate.

Valoarea unui model în raport cu contribuţia sa la studiul situaţiei concrete modelate este determinată de gradul său de adecvare, adică de modul de care predicţiile modelului concordă cu observaţiile. Construirea unui model este un proces dialectic. O primă variantă a modelului care se dovedeşte neadecvată este modificată, iar noile predicţii confruntate cu realitatea. Această rafinare a modelului poate avea loc de mai multe ori înainte de a obţine o adecvare convenabilă. Rolul matematicianului în această etapă se restrânge practic la dezvoltarea matematică a modelului.

Etapa a IV-a: Utilizarea modelelor matematice în cunoaşterea ştiinţifică

Un model matematic odată construit şi predicţiile sale deduse prin raţionament ne putem întreba cum putem folosi acest material din cele de simplă adecvare a modelului. In multe cazuri modelul şi predicţiile sale ne pot conduce fie la descoperirea unor aspecte necunoscute ale ştiinţei, situaţiei concrete fie clarificarea unor aspecte parţial cunoscute.

În ştiinţele biologice, modelele care conduc la progresul cunoaşterii ştiinţifice sunt extrem de rare. Un exemplu în acest sens este constituit de legile lui Mendel din genetică, care au permis să se pătrundă adânc în mecanismul eredităţii atât pentru individ cât şi pentru populaţii. In fapt majoritatea cercetărilor în ştiinţele biologice se află în etapele I şi II. Există controverse privind măsura în care matematica va fi cândva la fel de eficientă ca limbaj al altor ştiinţe, aşa cum s-a dovedit pentru fizică.

Nu este exclus ca răspunsul la această întrebare să fie negativ şi astfel să fie nevoie de crearea unui nou tip de structuri matematice capabile să dezvolte instrumentele necesare modelării în ştiinţelor biologice. Dar, indiferent de răspuns este o realitate că astăzi ştiinţele vieţii încep să joace pentru matematică rolul de generator de probleme, rol îndeplinit până acum de ştiinţele fizice. În continuare, prezentăm o serie de contribuţii semnificative ale utilizării modelelor matematice în cadrul ştiinţelor biologice.

Curbele de creştere. Unul din succesele timpurii ale matematicii în biologie, constând în stabilirea **curbelor de creştere** a folosit expresii matematice, pentru a reprezenta mărimea creşterii organismelor, ca funcţie de timp, de exemplu funcţia exponenţiala, logistică sau autocatalitică, sau corespondenţa dintre două organe (formule alometrice). Adesea a fost obţinută o corespondenţă rezonabilă. Majoritatea cercetărilor care au utilizat aceste formule de creştere au fost efectuate de biologi, mai de grabă decât de matematicieni iar adecvarea fericită a fenomenelor generale de creştere la formule s-a făcut să nu-şi dea seama că nu au înţeles cu adevărat fenomenul creşterii, de exemplu ca proces celular. Astăzi singura utilizare a acestor formule este în scopuri pur descriptive, de exemplu în cercetările piscicole când vrem să corectăm diferenţa de greutate dintre peştii de diferite vârste.

Un alt exemplu în care modelul matematic a nedreptăţit biologia este furnizată de un "model matematic al chimiei sistemului respirator extern" elaborat de un colectiv de la corporaţia RAND şi publicat într-o serie de comunicaţii tehnice şi articole, având o publicare mai definitivă la al patrulea Simpozion Buteley. El se ocupă de trei compartimente (1) aerul din sacii pulmonari, (2) plasma sangvină şi (3) globulele roşii din sânge. Modelul enumără compuşii chimici de interes din procesul respirator (compuşi parţiali diferiţi din compartimente diferite) şi încearcă să determine teoretic concentraţia acestor compuşi în cele trei compartimente.

Printre valorile care rezultă, unele sunt bune altele sunt slabe. Raportul concentraţiilor de CO_2 şi H_2CO_3 este coborât cu un factor de 10^A; care este cauza acestui eşec? Abordarea problemei se bazează pe rezultatul termodinamicii de echilibru a sistemelor închise iar sistemul plămân-sânge, nu este unul închis şi nu este în echilibru. Într-adevăr, însăşi esenţa necesarului de respiraţie defineşte sistemul ca fiind unul deschis, se ia oxigen în plămâni şi se răspândeşte în organism, se ia bioxid de carbon din organism şi se răspândeşte în plămâni. Rezultatul termodinamicii de echilibru (minimalizarea energiei libere a lui Gibbs), care constituie baza tratării lor, nu mai este valabil în termodinanica de non echilibru.

Spre deosebire de aceste intervenţii mai puţin izbutite ale metodelor matematice în problemele biologice, există o serie de exemple de succes deosebit. Iată de exemplu cazul geneticii. Chiar de la început, gândirea genetică s-a întrepătruns cu matematica, această tendinţă continuând şi azi, atât în genetica populaţiilor cât şi în studiul eredităţii organismelor individuale, mai ales în privinţa unor fenomene cum sunt legăturile (linkage) şi încrucişările (crossing-over), precum şi hărţile cromozomiale (chromosome mappings) (de exemplu, Bailey, 1961). Nu este surprinzător aşadar că metodele statistice au o importanţă mare în cercetarea genetică (de exemplu Elandt – Johusan, 1971, Kempthame, 1957). Toate acestea au contribuit desigur la descoperirile în domeniul geneticii.

Demografia este de neconceput fără matematică. De la primele cercetări când Lotka consacra noţiunea de distribuţie slabă vârstei şi elabora ecuaţia integrală de reînnoire pentru rata globală a natalităţii (vezi Lotka, 1939) precum şi în ultimii ani când Leslie, predat de alţii, a publicat modelul discret pentru studiul distribuţiilor de vârstă şi până la momentul actual, când modelele permit elaborarea ratelor vitale sunt studiate alte trăsături decât numerele în clasele de vârstă şi se introduce un grad tot mai mare de sofisticare matematică. Matematica a jucat un rol esenţial în demografie, trebuie menţionate utilizările în studiul populaţiilor animale, studierea recoltării optime . În sfârşit se aşteaptă şi se speră ca modelel matematice să joace un rol important în prevederea consecinţelor reducerii ratelor natalităţii.

Cinetica acţiunii enzimatice este un alt domeniu puternic întrepătruns cu domeniile matematice (vezi Laidler şi Buntering, 1973). Majoritatea activităţii experimentale s-a concentrat doar asupra unui aspect al teoriei relevante, adică constantă lui Michaeljs, acelaşi lucru este valabil pentru numeroase alte părţi ale teoriei.

Un model matematic care contribuie la descoperirile biologice, constă din ecuaţiile Volterra. Acesta nu a elaborat aceste ecuaţii pentru că era în căutarea unei aplicaţii a talentelor sale matematice, ci pentru că un biolog de vază (ginerele său U d'Ancena) i s-a adresat, în legătură cu o problemă privind crescătoriile de peşti. Deşi ecuaţiile erau în stare brută(neprelucrate) şi înglobând relativ puţine date, biologic ele au condus la o cantitate enormă de activitate experimentală. Întâiul a fost Gause(1934), a cărui activitate a fost în mod explicit impulsionată de publicaţiile lui Volterra, iar ideea de mai sus(a necoexistenţei a două specii concurente) a devenit cunoscută sub denumirea de "principiul de excludere prin concurenţă"(uneori denumit principiul lui Gausse). Uimitor este faptul că acest concept îşi are originea într-un model matematic extrem de brut, însă care a prins aceea ce s-a dovedit a fi problema centrală în conceptul de concurenţă între specii.

Experienţele biologice care au urmat au condus, la rândul lor, la analiza conceptului de concurenţă, la descoperirea că, cu modificări relativ mici ale condiţiilor de mediu (cum ar fi temperatura) specia înainte predominantă poate să-şi piardă supremaţia; precum şi la nenumărate alte descoperiri: importanţa diferenţelor genetice, a separării spaţiului fizic în arii de răspândire diferite, a mediilor neomogene şi toate acestea datorită a două mici ecuaţii; nu e rău drept contribuţie la descoperirile biologice.

Bibliografie : **R. Burlacu, A. Cavache, I. Surdu.** *Funcţii de creştere aplicate în ştinţele vieţii.* Editura Cartea Universitară, Bucuresti. 2004.

Profesor, Grup Şcolar „ Costin Nenitescu", Buzău

Metoda falsei ipoteze

de inst. **Bănulescu Geanina**, inst. **Bănulescu Marian Lucian**

Orice problemă ale cărei date sunt mărimi proporţionale poate fi rezolvată prin metoda falsei ipoteze. În general, se porneşte de la întrebarea problemei şi se face o presupunere aleatorie asupra uneia dintre datele necunoscute, refăcându-se problema pe baza presupunerii. Prin refacerea problemei, se ajunge la un rezultat care nu concordă cu cel real din problemă, acesta fiind ori mai mare, ori mai mic decât valoarea dată în enunţ. Rezultatul obţinut pe baza ipotezei arbitrare este comparat cu cel real şi se observă „de câte ori” s-a greşit prin presupunerea făcută. Se obţine un număr cu ajutorul căruia se corectează presupunerea făcută în sensul micşorării sau măririi de acest număr de ori. Spre exemplu:

„Un elev a cumpărat 12 caiete, unele de 24 de file şi altele de 48 de file, care au împreună 408 file. Câte caiete de fiecare fel a cumpărat elevul?”

Rezolvare: **Prima ipoteză**: Presupunem că toate caietele ar fi fost de 48 de file. Atunci numărul total al filelor ar fi fost: 12x48=576 (de file). Se observă că numărul filelor din enunţul problemei este mai mic cu: 576-408=168 (de file). Această diferenţă provine din faptul că printre caietele luate în considerare se află şi unele care au 24 de file. Deoarece fiecare caiet de 48 de file are cu 24 de file mai multe decât un caiet de 24 de file (48-24=24), rezultă că numărul caietelor de 24 de file este: 168: 24= 7. Deci sunt 7 caiete de 24 de file. Numărul total al caietelor fiind de 12, obţinem: 12- 7= 5 (caiete de 48 de file).

A doua ipoteză: Presupunem că toate caietele ar fi fost de câte 24 de file. Atunci numărul total al filelor caietelor ar fi fost: 24x12=288 (de file).

Observăm că numărul filelor din enunţul problemei este mai mare cu: 408-288=120 (de file). Această diferenţă provine din faptul că printre caietele luate în considerare se află şi unele care au câte 48 de file. Cum fiecare caiet de 48 de file are cu: 48-24=24 de file mai mult decât un caiet de 24 de file, rezultă că numărul caietelor de 48 de file este 120: 48= 5. Deci, sunt 5 caiete de 48 de file. Ştiind că numărul total al caietelor este 12, obţinem 12- 5 = 7 (caiete de 24 de file).

Concluzionăm: elevul a cumpărat 7 caiete de 24 de file şi 5 caiete de 48 de file.

False probleme de „FALSĂ IPOTEZĂ”

Există o categorie de probleme care au un enunţ înşelător, în sensul că elevii sunt tentaţi să le considere ca fiind probleme de falsă ipoteză. Ele nu pot fi rezolvate, însă, prin aplicarea algoritmului acestei metode, deoarece specificul problemelor de falsă ipoteză se regăseşte doar aparent în enunţ. De exemplu:

„Daria a cumpărat ciocolate mari şi mici, care cântăresc în total 260g. O ciocolată mare cântăreşte 70g, iar una mică 50g. Câte ciocolate de fiecare fel a cumpărat?”

Rezolvare: Dacă ar fi fost precizat numărul total de ciocolate cumpărate, ar fi putut fi rezolvată problema utilizând metoda falsei ipoteze. În acest caz, însă, se poate rezolva doar prin încercări succesive, existând două „variante”:

Varianta 1. Se pleacă de la ciocolatele mari, astfel:

Dacă ar fi fost cumpărată doar o ciocolată mare, ar fi cântărit 70g, rămânând 190g (260-70=90), număr care nu se împarte exact la 50 (190:50=3 rest 40), deci varianta nu este acceptabilă.

Dacă ar fi fost cumpărate două ciocolate mari, ar fi cântărit 140g (2x70=140), rămânând 120g (260-140=120), număr care nu se împarte exact la 50 (120:50=2 rest20), deci varianta nu este acceptabilă.

Dacă ar fi fost cumpărate trei ciocolate mari, ar fi cântărit 210g (3x70=210), rămânând 50g (260-210=50). 50:50= 1, deci au fost cumpărate 3 ciocolate mari şi o ciocolată mică.

Verificare: 3x70g+1x50g=260g

Varianta2. Se pleacă de la ciocolatele mici, astfel

Dacă ar fi cumpărat o ciocolată mică, ar fi cântărit 50g, rămânând 210g (260-50=210), care se împarte exact la 70 (210:70=3), deci varianta convine.

Dacă ar fi cumpărat două ciocolate mici ar fi cântărit 100g (2x50=100), rămânând 160g (260-100=160g), număr care nu se împarte exact la 70 (160:70=2 rest 20), deci varianta nu convine.

Dacă ar fi fost cumpărate trei ciocolate mici, ar fi cântărit 150g (3x50=150), rămânând 110g, număr care nu se împarte exact la 70 (110:70=1 rest 40), deci varianta nu convine.

Se constată că nu există decât o singură soluţie posibilă, care verifică datele problemei.

Răspuns: S-au cumpărat 3 ciocolate mici şi o ciocolată mare.

Bibliografie :

1. **Rusu, E.** Matematica. Manual pentru liceele pedagogice. Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti. Bucureşti. 1970

Institutori, Şcoala cu clasele I-VIII, Plevna, Buzău

” Ce-i foloseşte ştiinţa celui fără minte ?
Ce-i foloseşte oglinda celui care n-are ochi ?

Canakya

3. Probleme rezolvate

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:113. Într-o cutie am 7 mere şi 3 gutui. Dacă se scot la întâmplare 7 fructe, câte mere şi câte gutui pot fi scoase din cutie? ***Înv.* Florica Anton, Rm. Sărat**

Rezolvare : Există posibilităţile : 7 mere şi nicio gutuie sau 6 mere şi o gutuie, 5 mere şi 2 gutui, 4 mere şi 3 gutui .

P:114. La o librărie s-au adus 23 de truse conţinând 53 de creioane colorate. Sunt truse de câte 2 creioane şi de câte 3 creioane. Câte truse de fiecare fel s-au adus?

***Inst.* Bănulescu Geanina, Plevna**

Rezolvare: Presupunem că toate trusele au câte două creioane. În total vor fi: 23 x 2 = 46 (de creioane). Diferenţa de 7 creioane (53-46= 7) provine de la faptul că printre trusele luate în considerare există şi truse cu câte 3 creioane. Fiecare trusă cu trei creioane are cu câte un creion mai mult decât o trusă cu două creioane (3- 2= 1). Diferenţa se regăseşte în: 7 : 1= 7(truse cu câte 3 creioane). Deci, sunt 7 truse cu câte 3 creioane şi 23- 7=16 truse cu câte 2 creioane. Verificare: 7x 3+16x 2=53(creioane)
Răspuns: S-au adus 7 truse cu câte 3 creioane şi 16 truse cu câte 2 creioane.

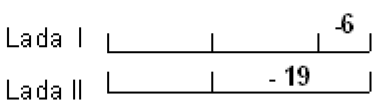
P:115. La un spectacol s-au vândut bilete de câte 4 lei şi 5 lei bucata. În total s-au vândut 210 bilete şi s-au încasat 940 de lei. Câte bilete de fiecare fel s-au vândut?

***Inst.* Bănulescu Marian Lucian, Plevna**

Rezolvare: Presupunem că biletele au costat fiecare câte 5 lei. În total ar fi costat 210 x 5 = 1050 lei.
Diferenţa de 110 lei (1050-940=110) provine din faptul că au fost vândute şi bilete de câte 4 lei fiecare.
Diferenţa dintre un bilet care costă 5 lei şi un bilet care costă 4 lei este de un leu (5- 4= 1).
S-au vândut 110: 1=110 bilete de câte 4 lei, iar bilete de câte 5 lei, 210-110=100 (bilete de câte 5 lei).
Verificare:110x 4lei+100x 5lei=940lei
Răspuns: S-au vândut 110 bilete de câte 4 lei fiecare şi 100 bilete de câte 5 lei.

P:116. Două lăzi aveau aceeaşi cantitate de pere, în total 64 kg pere. Când din prima ladă s-au vândut 6 kg, iar din a doua 19 kg, în prima ladă au rămas de două ori mai multe kg decât în a doua ladă. Câte kg de pere au fost în fiecare ladă ?

***Înv.* Doina Vizitiu, Măgura**



Rezolvare : 64 – (6+19)=64- 25 = 39, acestea reprezentând cele trei segmente, prin urmare valoarea unui segment înseamnă 39 : 3 = 13 kg. Atunci prima ladă are 13 +13+6 = 32 kg pere iar a doua are 13+19= 32 kg pere.

P:117. Găsiţi numărul $\overline{abcd}$:2 ştiind că cifrele sale verifică relaţiile:
$(1)a+b+c+d=11,(2)b+c+d=7,(3)c+d=7,(4)d=2a-2$. ***Prof.* Roxana Stanciu, Buzău**

Rezolvare : Dacă scădem relaţiile (1) şi (2) obţinem $a=4$, apoi scădem relaţiile (2) şi (3) şi rezultă $b=0$.Din (4) avem $d=6$, iar din (2) $c=1$.De aici obţinem $\overline{abcd}=4016$. Numărul căutat este 2008.

P:118. Suma a trei numere consecutive pare este 36. Află numerele. **Inst. Axente Mirela, Berca**
Rezolvare: 2 + 2 + 2 = 6 ; 36 - 6 = 30 ; 30 : 3 = 10 ; 10 + 2 = 12 ; 12 + 2 = 14 .
Aşadar, numerele sunt: 10, 12, 14.

P:119. Din Cluj doi fraţi vor să ajungă la Constanţa. Fratele mai mare pleacă la ora 8 cu un camion ce merge cu o viteză de 45 km/h, iar fratele cel mic pleacă la ora 10 cu un automobil care merge cu o viteză de 60 km/h.
a) La ce oră fratele mai mic îl ajunge pe cel mare?
b) La ce distanţă de Cluj are loc întâlnirea celor doi fraţi?

***Prof*. Brânză Cristian Cosmin, Bădila, Pârscov**

Rezolvare : a) 2 x 45 = 90 km (este distanţa pe care fratele mai mic trebuie să o recupereze)
60 - 45 = 15 km (distanţa dintre cei doi fraţi se micşorează într-o oră cu 15 km)
T = 90 : 15 = 6 ore (este timpul în care fratele mai mic recuperează cei 90 de km). Plecând de la ora 10, înseamnă că întâlnirea are loc la: 10 + 6 = 16
Răspuns: fratele mai mic îl ajunge pe cel mare la ora 16.
b) Fratele cel mic se deplasează cu 60 de km/h şi îl ajunge pe fratele său în 6 ore:
D=Vx t =60 x 6= 360 km Răspuns: întâlnirea are loc la 360 de km

P:120. La o florărie erau 25 de aranjamente cu câte 7 şi 9 flori. Numărul total al florilor era 201. Câte aranjamente cu 7 flori erau şi câte cu 9 flori? ***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi, Berca**

Rezolvare: Presupunem că toate aranjamentele aveau 7 flori: 25 x 7 = 175 (de flori)
Diferenţa 201 - 175 = 26 provine de la diferenţa de 2 flori dintre numărul de flori din cele 2 categorii de aranjamente. 26 : 2 = 13 (aranjamente cu 9 flori) 25 - 13 = 12 (aranjamente cu 7 flori)

P:121. Într-un bloc sunt 44 de apartamente cu trei sau patru camere. Ştiind că în total sunt 150 de camere în acel bloc, aflaţi câte apartamente sunt cu trei şi câte sunt cu patru camere. ***Inst.* Lupşan Mirela, Buzău**

Rezolvare: Presupunem ca toate apartamentele au 4 camere.
44 x 4 = 176 camere 176 – 150 = 26 apartamente cu 3 camere 44 – 26 = 18 apartamente cu 4 camere

P:122. Aflaţi suma dintre dublul succesorului celui mai mare număr par de trei cifre consecutive şi jumătatea predecesorului celui mai mic număr impar de trei cifre consecutive.

***Prof*. Lupşan Nicoleta - Gabriela, Berca**

Rezolvare: Cel mai mare număr par de 3 cifre consecutive este 678. Dublul succesorului este:
679 x 2 = 1358. Cel mai mic număr impar de 3 cifre consecutive este 123. Jumătatea predecesorului este 122 : 2 = 61. Suma căutată este: 1358 + 61 = 1419.

P:123. Baza mică a unui trapez este o treime din numărul 63. Baza mare este dublul bazei mici. Lungimea fiecărei laturi neparalele este jumătate din lungimea laturilor unor pătrate ce au perimetrul de 48 m, respectiv 72 m. Aflaţi perimetrul trapezului.

Inst. Lupşan Nicuşor - Octavian, Buzău

Rezolvare:
Aflăm lungimea bazei mici 63 : 3 = 21 Baza mică are 21 m.
Aflăm lungimea bazei mari 21 × 2 = 42 Baza mare are 42 m.
Aflăm lungimile laturilor neparalele (48 m : 4) : 2 = 6 m (72 m : 4) : 2 = 9 m
Lungimile laturilor neparalele sunt 6 m, respectiv 9 m.
P = 6m + 9m + 21m + 42m P = 78m

P:124. Dacă adun 3/5 din 35 cu 3/7 din 84, obţin un număr cu 33 mai mare decât efectivul clasei mele. Ştiind că 2/3 suntfete, câţi băieţi sunt în clasa mea? **Prof. Marinescu Gabriela - Stănceşti, Vadu Pasii**

Rezolvare: Notez cu *a* efectivul clasei; Adun 3/5 x 35 + 3/7 x 84 = *a* + 33.
21 + 36 = *a* + 33.
a = 57 – 33
a = 24 (efectivul clasei) Câte fete sunt în clasă? 2/3 x 24 = 16
Câţi băieţi sunt în clasă? 24 – 16 = 8

P:125. La o fermă sunt 520 păsări. Jumătate din sfert sunt găini, raţe cu 82 mai multe decât cel mai mic număr impar de trei cifre, gâşte de 3 ori mai puţine decât raţe, iar restul curci. Câte curci sunt?

Înv. Răican Georgeta, Berca

Rezolvare :
520 : 4 = 130 (sfertul numărului de păsări) ; 130 : 2 = 65 (găini)
101 – cel mai mic număr impar de trei cifre ; 101 + 82 = 183 (raţe)
183 : 3 = 61 (gâşte) ; 65 + 183 + 61 = 309 (găini, raţe, gâşte) ; 520 – 309 = 211 (curci).

P:126. **La un chioşc sunt ziare şi reviste, în total 576. Vânzătorul a vândut toate ziarele şi tot atâtea reviste. Câte ziare şi câte reviste au fost la chioşc, dacă au rămas 46 reviste?** **Înv. Rotărescu Viorel, Vadu Paşii**
Rezolvare:
576-46=530 (ziare şi reviste vândute în mod egal) 530 : 2 =265 (ziare) 265+46=311 (reviste)

P:127. **Pe trei rafturi sunt 434 cărţi. Pe primul şi pe al doilea raft sunt 356 cărţi, iar pe al treilea cu 49 cărţi mai puţine decât pe primul. Câte cărţi sunt pe fiecare raft?** **Înv. Rotărescu Viorica, Vadu Paşii**
Rezolvare:
434-356=78 (cărţi pe al treilea raft) 78+49=127 (cărţi pe primul raft) 356-127=229 (cărţi pe al doilea raft)

P:128. **Trei copii au o sumă de bani. Dacă al doilea copil i-ar da primului 3 lei, iar al treilea ar avea triplul sumei sale, atunci cei trei copii ar avea sume egale, reprezentând triplul numărului 765. Ce sumă are fiecare copil?** **Înv. Vrabie Marioara, Berca**
Rezolvare:
765 x 3 = 2 995 ; 2 995 : 9 = 225 (banii celui de-al treilea copil) ; 225 x 3 + 3 = 678 (banii celui de-al doilea copil) ; 225 x 3 - 3 = 672 (banii primului copil)

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:119 . Să se împartă numărul 900 în patru părţi astfel încât dacă la prima parte se adaugă 2, din a doua se va scădea 2, a treia parte se va înmulţi cu 2 iar a patra parte se va împărţi la 2, părţile obţinute vor fi egale.

***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare **:** Fie a,b,c,d numere naturale astfel încât a+b+c+d=900. Conform enunţului avem: a+2 = b-2 = c$\cdot$2 = d:2 . Notăm cu x valoarea comună . Obţinem : a = x-2 , b = x+2 , c = x:2 şi d = x$\cdot 2 = 2\cdot x$. Obţinem ecuaţia : x-2 + x + 2 + $\frac{x}{2}$ +2$\cdot$x = 900 . Rezultă că x=200 . Numerele sunt : a=198, b=202, c=100 şi d=400.

G:120 . a)Să se determine restul împărţirii numărului a= 5^{1990} + 5^{1991} +5^{1992} +……+5^{2009} la numărul 39;
b) Să se arate că a este divizibil cu 10. ***Prof.* Adrian Stan**
Rezolvare :
a) $a=\underbrace{5^{1990}+5^{1991}+5^{1992}+...+5^{2009}}_{20\ termeni}$ = 5^{1990} $(1+5+5^2+5^3)$ + …+ 5^{2006} $(1+5+5^2+5^3)$ = 156 $(5^{1990}+…+5^{2006})$ care este divizibil cu 39.
b) Se arată că ultima cifră a lui **a,** $u(a)=u(20\cdot5)=u(100)=0$ prin urmare, **a** este divizibil cu 10.

G:121 . Arătaţi că orice putere naturală nenulă a lui 13 se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte .
***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare: $13= 4+9 = 2^2 +3^2$
$13^2 = 169 = 25+144 = 5^2 +12^2$
$13^3 = 13\cdot 13^2 = (2^2 +3^2)\cdot 13^2 = (2\cdot 13)^2 +(3\cdot 13)^2$
$13^4 = 13^2 \cdot 13^2 = (5^2 +12^2)\cdot 13^2 = (5\cdot 13)^2 +(12\cdot 13)^2$
....
$13^{2\cdot n+1} = 13\cdot 13^{2\cdot n} = (2^2 +3^2)\cdot 13^{2\cdot n} = (2\cdot 13^n)^2 + (3\cdot 13^n)^2$
$13^{2\cdot n+2} = 13^2 \cdot 13^{2\cdot n} = (5^2 + 12^2)\cdot 13^{2\cdot n} = (5\cdot 13^n)^2 + (12\cdot 13^n)^2$, n$\in \mathbb{N}^*$

G:122 . Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ dacă $\overline{abc}$ - $\overline{cba}$ =693, unde a, b, c sunt cifre distincte.
***Prof.* Gheorghe Dârstaru**

Rezolvare: $\overline{abc}$ - $\overline{cba}$ =693 $\Leftrightarrow$ 100a +10b+c – 100c – 10b - a = 693 $\Leftrightarrow$ a – c = 7 Atunci, pentru a = 9 şi c = 2 $\Rightarrow \overline{abc}\in\{902;912;932;942;952;962;972;982;\}$ şi pentru a = 8 şi c = 1

$\Rightarrow \overline{abc} \in \{801;821;831;841;851;861;871;891\}$. S-a ţinut cont de faptul că cifrele a, b, c sunt distincte.

G:123 . Arătaţi că fracţia $\frac{a^2b+ab^2}{c^2d+cd^2}, (\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^*)$ **este reductibilă. Generalizaţi rezultatul.**

***Prof.* Neculai Stanciu**

***Rezolvare*:**

Fracţia este reductibilă deoarece numărătorul şi numitorul fracţiei sunt divizibile cu 2 întrucât numerele de forma $a^2b+ab^2=ab(a+b)$ sunt pare.

Generalizare: Fractia $\frac{a_1^2b_1+a_1b_1^2+a_2^2b_2+a_2b_2^2+...+a_n^2b_n+a_nb_n^2}{c_1^2d_1+c_1d_1^2+c_2^2d_2+c_2d_2^2+...+c_m^2d_m+c_md_m^2}$ este reductibilă,

$(\forall a_i, b_i \in \mathbb{N}^*, c_j, d_j \in \mathbb{N}^*, i \in \{1,2,...,n\}, j \in \{1,2,...,m\})$

G:124 . Determinaţi cifrele a,b,c în sistemul zecimal astfel încât numerele $\overline{aab}$ şi $\overline{caab}$ să fie simultan pătrate perfecte. ***Prof.* Luca Tuţă**

***Rezolvare*:** Numerele $\overline{aab}$ pătrate perfecte sunt 225 şi 441. Dintre numerele $\overline{c225}$, $\overline{c441}$ pătrate perfecte sunt doar 4225 şi 7225. Aşadar, a = 2, b = 5, c = 4 sau c = 7.

G:125 . Ştiind că: $\overline{abc}$ + $\overline{bca}$ + $\overline{cab}$ = 1221. Calculaţi a + b + c. ***Prof.* Rodica Lupşan**

***Rezolvare*:**

$\overline{abc}$ + $\overline{bca}$ + $\overline{cab}$ = 1221 $\Leftrightarrow$ 100 a + 10 b + c + 100 b + 10 c + a + 100 c + 10 a + b = 1221

111 a + 111 b + 111 c = 1221 $\Rightarrow$ a + b + c = 11 .

G:126 . Calculaţi în două moduri: (2+4+6+...+ 1000) - (1+3+5+...+999). ***Prof.* Rodica Lupşan**

***Rezolvare*:** (2+4+6+...+ 1000) - (1+3+5+...+999)= 2-1+4-3+6-5+….1000-999= 1+1+1+….+ 1= 500.

sau 2(1+2+3+…+500) – 500^2= 500(501-500) = 500.

G:127 . Mulţimile A şi B au ca elemente numere naturale nenule . Elementele mulţimii B sunt succesivele elementelor mulţimii A. Dacă suma tuturor elementelor este 21, determinaţi aceste mulţimi.

***Prof.* Ion Stănescu**

***Rezolvare*:** Deducem că mulţimile au acelaşi cardinal. Considerăm că ele au câte un element, a şi a+1. Obţinem 2a+1=21, a=10. Atunci A={10}, B={11}.Presupunem că mulţimile au câte două elemente. Găsim 2a+2b+2=21. Imposibil. Mulţimile nu pot avea număr par de elemente. Dacă mulţimile au câte 3 elemente, obţinem variantele: 1) A={1,2,6}, B={2,3,7},2) A={1,3,5}, B={2,4,6}, 3) A={2,3,4}, B={3,4,5}. Mulţimile nu pot avea mai mult de 3 elemente.

Clasa a VI – a

G:128 . Să se determine toate perechile (a;b), de cifre din sistemul zecimal, ştiind că au loc, simultan, egalităţile:

a = $\frac{\overline{a6}}{\overline{1b}}$ **şi b =** $\frac{\overline{b6}}{\overline{1a}}$**. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009)**

***Prof.* Constantin Apostol**

***Rezolvare*:** Din condiţiile date în enunţ se obţin $a=\frac{10a+6}{10+b}$ şi $b=\frac{10b+6}{10+a}$ de unde rezultă

$a \cdot b = 6 \Leftrightarrow (a;b) \in \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$.

G:129 . Numerele naturale a+6, b+10 respectiv c+12 sunt direct proporţionale cu numerele 3, 5 respectiv 6. Aflaţi numerele a, b, c ştiind că 3a+5b+6c=699930. ***Prof.* Ion Radu**

***Rezolvare*:** $\frac{a+6}{3}=\frac{b+10}{5}=\frac{c+12}{6}=\frac{3a+18}{9}=\frac{5b+50}{25}=\frac{6c+72}{36}=\frac{3a+5b+6c+140}{70}=10001$, de unde se obţine: a = 29997 , b = 49995 , c = 59994.

G:130 . Aflaţi şapte numere naturale care au suma 2009 şi sunt direct proporţionale cu şapte numere naturale consecutive. ***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare : Fie a,b,c,d,e,f,g cele şapte numere naturale care au suma 2009 iar x-3,x-2,x-1,x,x+1,x+2 şi x+3 cele şapte numere naturale consecutive (x>4). Din enunţ avem :

$$\frac{a}{x-3}=\frac{b}{x-2}=\frac{c}{x-1}=\frac{d}{x}=\frac{e}{x+1}=\frac{f}{x+2}=\frac{g}{x+3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g}{x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3}=$$

$\frac{2009}{7x}=\frac{287}{x}$. Cum a,b,c,d,e,f,g $\in\mathbb{N}\Rightarrow x\,|\,287\Rightarrow x\in\{1,7,41,287\}$ căci 287=$7\cdot 41$; dar x>4 $\Rightarrow x\in\{7,41,287\}$.

1) Pentru x = 7 obţinem numerele :164,205,246,287,328,369 şi 410.
2) Pentru x = 41 obţinem numerele :266.273,280,287,294,301 şi 308.
3) Pentru x = 287 obţinem numerele :284,285,286,287,288,289 şi 290.

G:131. Fie numărul $n=2006^{2006}+2007^{2007}$. Determinaţi restul împărţirii lui n prin 5.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare **:** Se calculează ultima cifră a lui n , $u(n)=9$. Avem că $n=M_5+9$, de unde rezultă că restul împărţirii lui **n** prin 5 este 4.

G:132. Împărţind numerele naturale a şi b la 502 şi respectiv la 402, se obţin câturi egale şi resturile 375, respectiv 300. Aflaţi restul împărţirii numărului 4a + 5b la 2009. (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009) ***Prof.* Nicoleta Iordache şi *prof.* Cătălin Iordache**

Rezolvare **:** Conform Teoremei împărţirii cu rest, $a=502\cdot c_1+375\,|\cdot 4$, $b=402\cdot c_2+300\,|\cdot 5$ şi cum $c_1=c_2$ rezultă $4a+5b=2\cdot 2009c+3000$. Aşadar, restul împărţirii lui 4a+5b la 2009 este 991.

G:133. Măsura unghiului format de bisectoarea complementului şi bisectoarea suplementului unui unghi ascuţit dat nu depinde de măsura acestuia. ***Prof.* Ion Stănescu**

Rezolvare **:** Fie $\widehat{AOB}$ unghiul dat. Atunci , $\widehat{BOC}$ este complementul său iar $\widehat{BOD}$ suplementul său. Dacă $[OE$ este bisectoarea complementului iar $[OF$ bisectoarea suplementului unghiului dat şi dacă notăm cu $x=m(\widehat{AOB})$, se obţine : $m(\widehat{EOF})=\frac{180^0-x}{2}-\frac{90^0-x}{2}=45^0$.

G:134. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{2,(3)}{3,(6)}$. Să se afle măsurile celor două unghiuri. ***Prof.* Luca Tuţă**

Rezolvare **:** Se calculează $\frac{2,(3)}{3,(6)}=\frac{23-2}{36-3}=\frac{21}{33}=\frac{7}{11}$. Notăm cu x şi y măsurile celor două unghiuri. Atunci, $x+y=90^0$ şi $\frac{x}{y}=\frac{7}{11}\Rightarrow\frac{x}{7}=\frac{y}{11}=\frac{x+y}{7+11}=\frac{90^0}{18}=5^0$. Rezultă, $x=35^0$, $y=55^0$.

G:135. Fie segmentul AB=2^{2009} cm. Dacă A_1 este mijlocul segmentului [AB], A_2 mijlocul lui [BA_1], A_3 mijlocul lui [AA_1], A_4 mijlocul lui [BA_2], A_5 mijlocul lui [AA_3] şi aşa mai departe. Se cere:
a) Să se calculeze lungimea segmentului [BA_{2008}];
b) Să se arate că $AA_{2009}+AA_{2007}+AA_{2005}+\ldots+AA_1=AB-A_{2009}A_{2007}$.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**

Rezolvare **:** a) $AA_1=BA_1=2^{2009}:2=2^{2008}cm$, $AA_3=A_1A_3=BA_2=A_2A_1=2^{2008}:2=2^{2007}cm.\ etc.$

$BA_{2008}=A_{2006}A_{2008}=2^{1004}=AA_{2009}=A_{2009}A_{2007}$.

b) $2^{1004}+2^{1005}+2^{1006}+\ldots+2^{2008}=2^{1004}(1+2+2^2+\ldots+2^{1004})=2^{1004}(2^{1005}-1)$.

Clasa a VII – a

G:136. Să se demonstreze că numărul $2009^{2009} + 2011^{2011}$ este divizibil cu 2010. Generalizare.

Prof. Adrian Stan

Rezolvare **:** $2009^{2009} + 2011^{2011} = (2010-1)^{2009} + (2010+1)^{2011} = M_{2010} -1+ M_{2010} +1 = M_{2010}$, unde M_{2010} este un multiplu de 2010. Generalizare : $(2n-1)^{2n-1} +(2n+1)^{2n+1}$ este divizibil cu 2n deoarece $(2n-1)^{2n-1} +(2n+1)^{2n+1} = M_{2n} -1 + M_{2n} +1= M_{2n}$.

G:137. Determinaţi media aritmetică a numerelor naturale nenule, x, y, z, ştiind că $\frac{x}{z+1} = \frac{x-1}{y} = \frac{z}{11}$.

(Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009). ***Prof.*** **Valerica Roşu**

Rezolvare : Notând cu k şirul de rapoarte se obţine : $x = k \cdot y + k$, $x-1 = y \cdot k$, $y = 11k$. Cum x, y z sunt naturale atunci din ultima relaţie rezultă $k = \frac{1}{11}$ sau $k \in \mathbb{N}$. Convine doar $k \in \mathbb{N}$ şi din a doua relaţie se obţine k = 1 de unde x = 12 , y =z =11. $m_a = \frac{x+y+z}{3} = \frac{12+11+11}{3} = \frac{34}{3} = 11,(3)\cdot$

G:138. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât raportul $\frac{n-3}{2n+7}$ să se poată simplifica. ***Prof.*** **Ion Stănescu**

Rezolvare **:** Dacă raportul se poate simplifica, atunci există $d \in \mathbb{N}$, $d \neq 1$ astfel încât $\begin{cases} d \mid n-3 \\ d \mid 2n+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2n-6 \\ d \mid 2n+7 \end{cases} \Rightarrow d \mid 2n+7-2n+6 \Rightarrow d \mid 13$. Cum $n-3 = dk, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 3+13k,\ k \in \mathbb{N}^*.$

G:139. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât a,b sunt invers proporţionale cu c,d .
Să se arate că $m_a(a,b) \cdot m_g(c,d) - m_a(c,d) \cdot m_g(a,b) = 0$, unde prin $m_a(x,y)$ respectiv, $m_g(x,y)$ am notat media aritmetică respectiv, media geometrică a numerelor x şi y. ***Prof.*** **Neculai Stanciu**

Rezolvare: Relaţia de demonstrat este echivalentă cu $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$.

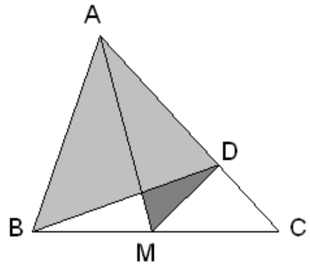
G:140. Arătaţi că, dacă un număr este suma a două pătrate, atunci dublul şi pătratul lui sunt de asemenea suma a două pătrate. ***Prof.*** **Luca Tuţă**

Rezolvare: Fie $A = a^2 + b^2$ un număr care este suma a două pătrate. Atunci, $2A = 2a^2 + 2b^2 =$
$= (a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2 + b^2 - 2ab) = (a+b)^2 + (a-b)^2.$

$$A^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + 4a^2b^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)^2.$$

G:141. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii [BC] şi D un punct oarecare pe latura [AC]. Arătaţi că $A_{ABD} = 2A_{AMD}$. ***Prof.*** **Ion Radu**

Rezolvare: Se foloseşte proprietatea medianei referitoare la aria triunghiului şi obţinem relaţiile:



$S_{ABM} = S_{AMC}$; $S_{BDM} = S_{DMC}$; $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC} = S_{ABD} + 2S_{DMC}$; (1)

$S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2S_{ADM} + 2S_{DMC}$.(2) Din (1) şi (2) rezultă, $S_{ABD} = 2S_{AMD}$

G:142. Arătaţi **că orice patrulater convex în care măsurile unghiurilor, luate în ordine, sunt direct proporţionale cu patru numere naturale consecutive, este trapez.**

Prof. **Simion Marin**

Rezolvare: Fie ABCD un patrulater convex în care $m(\widehat{A}), m(\widehat{B}), m(\widehat{C}), m(\widehat{D})$ sunt direct proporţionale cu n, n+1, n+2, n+3, unde $n \in N^*$. Atunci, $\frac{m(\widehat{A})}{n} = \frac{m(\widehat{B})}{n+1} = \frac{m(\widehat{C})}{n+2} = \frac{m(\widehat{D})}{n+3} = \frac{360^0}{4n+6} = \frac{180^0}{2n+3}$ (1). Pentru a arăta că ABCD este trapez, trebuie să demonstrăm că $AB \parallel CD$ şi $AD \nparallel BC.$ Pentru aceasta vom

arăta că $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^0.$ Din (1) rezultă $\frac{m(\widehat{A})}{n} = \frac{m(\widehat{D})}{n+3} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2n+3} = \frac{180^0}{2n+3}$ de unde rezultă

că $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^0$ şi $\frac{m(\widehat{A})}{n} = \frac{m(\widehat{B})}{n+1} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2n+1} \neq \frac{180^0}{2n+3}$ adică $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) \neq 180^0$, prin urmare $AD \nparallel BC$ iar patrulaterul ABCD este trapez.

G:143. Pe segmentul [AB] se ia punctul C şi de aceeaşi parte a dreptei AB se iau punctele D, E, F astfel încât, triunghiurile ACD, BCE şi ABF să fie echilaterale.

a) Arătaţi că triunghiurile DCE şi EFD sunt congruente

b) **Stabiliţi valoarea raportului $\frac{AC}{CB}$, ştiind că DE || AB.** (Dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului,4 septembrie 2009)

***Prof.* Grigori Marin**

Rezolvare : a) Din faptul că triunghiurile ACD, BCE, ABE sunt echilaterale, atunci laturile [DF] şi [FE] ale triunghiului DCE sun în prelungirea laturilor [AD] respectiv [BE] şi cum $m(\widehat{F}) = 60^0$ şi $AF = FB$ $\Rightarrow [AD] \equiv [FE], [FD] \equiv [FB].$ De aici, conform cazului (L.U.L) rezultă că $\Delta DCE \equiv \Delta EFD$.

b) Dacă DE || AB, rezultă AC= CB iar raportul este egal cu 1.

G:144. Arătaţi că dacă în triunghiul ABC măsurile unghiurilor exterioare cu vârfurile în A , B şi C sunt direct proporţionale cu numerele 15 , 20 şi respectiv 25 , atunci BC = 2AB . ***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare : Conform enunţului avem : $\frac{180^0 - m(\widehat{A})}{15} = \frac{180^0 - m(\widehat{B})}{20} = \frac{180^0 - m(\widehat{C})}{25} =$

$= \frac{180^0 - m(\widehat{A}) + 180^0 - m(\widehat{B}) + 180^0 - m(\widehat{C})}{15+20+25} = \frac{360^0}{60} = 6^0$.

Obţinem : $m(\widehat{A}) = 90^0,\ m(\widehat{B}) = 60^0,\ m(\widehat{C}) = 30^0 \Rightarrow\ AB = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow BC = 2AB$.

G:145. În triunghiul ABC, [AM] şi [BN] sunt mediane astfel încât triunghiul GBM este echilateral de latură 6 cm unde {G} este centrul de greutate al triunghiului. a) Calculaţi perimetrul şi aria triunghiului ABC;

b) Arătaţi că $A_{GMCN} = \frac{A_{ABC}}{3}$. ***Prof.*Gheorghe Dârstaru**

***Rezolvare*:** a)Se află BC= 12 cm, AM= 18 cm, AG= 12 cm, GN= 3cm, $\widehat{BGM} \equiv \widehat{AGN} = 60^0.$

$A_{AGN} = \frac{AG \cdot GN \cdot \sin(AGN)}{2} = \frac{12 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3}cm^2$. Fie $AP \perp GN$. Din $A_{AGN} = \frac{GN \cdot AP}{2}$ se obţine $AP = 6\sqrt{3} \Rightarrow GP = 6cm, PN = 3cm, AN = 3\sqrt{13}$.

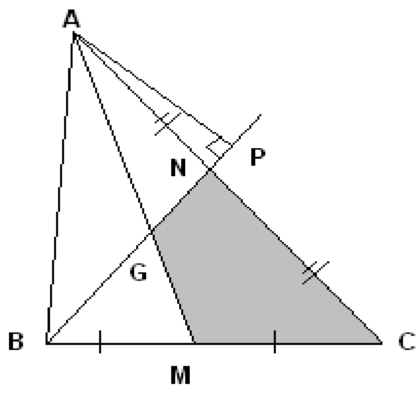
$AC = 6\sqrt{13},\ AB = 6\sqrt{7} \Rightarrow P_{ABC} = 6(\sqrt{7} + \sqrt{13} + 2)$

Fie Q mijlocul lui [AG], deci AQ=QG=GM şi

$A_{GCM} = A_{BGQ} = A_{BQA} = 9\sqrt{3},\ A_{ABM} = 27\sqrt{3};$

$A_{ABC} = 54\sqrt{3}cm^2.$

b) $A_{GMCN} = A_{ABC} - A_{ABM} - A_{AGN} = 18\sqrt{3} = \frac{A_{ABC}}{3}.$



Clasa a VIII- a

G:146. Arătaţi că următoarea egalitate este adevărată pentru orice a număr real:

$$\frac{1+2+......+2008}{1004}+a^2+2a\sqrt{2009}+(3+a+\sqrt{2009})^2+(5+a+\sqrt{2009})^2+(6+a+\sqrt{2009})^2=$$
$$(1+a+\sqrt{2009})^2+(2+a+\sqrt{2009})^2+(4+a+\sqrt{2009})^2+(7+a+\sqrt{2009})^2.$$

***Prof.* Ion Radu**

***Rezolvare* :**

$$\frac{1+2+3+...+2008}{1004}+a^2+2a\sqrt{2009}=\frac{2008.2009}{2.1004}+a^2+2a\sqrt{2009}=$$

$=\sqrt{2009}^{\,2}+2a\sqrt{2009}+a^2=(a+\sqrt{2009})^2$. Notam cu $b=a+\sqrt{2009}$ si obtinem egalitatea

$b^2+(b+3)^2+(b+5)^2+(b+6)^2=(b+1)^2+(b+2)^2+(b+4)^2+(b+7)^2$
$b^2+b^2+6b+9+b^2+10b+25+b^2+12b+36=b^2+2b+1+b^2+4b+4+b^2+8b+16+b^2+14b+49$, ceea ce este adevărat.

G:147. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+$. Să se arate că $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\ge 27abc.$

***Prof.* Adrian Stan**

***Rezolvare* :** Inegalitatea dată se obţine din $a^2+a+1\ge 3a \Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$ cu egalitate, pentru a = 1. Analog pentru celelalte paranteze.

G:148. Să se arate că $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot(4+2\sqrt{3})\cdot(6-2\sqrt{5})\cdot 8^{-1}\in\mathbb{N}.$

***Prof.* Simion Marin**

***Rezolvare* :** Raţionalizăm numitorii celor două fracţii şi obţinem

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2};$$

analog $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$.În plus $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2; 6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$.

În final se obţine $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\cdot\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1}\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{1}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2^2\cdot 4^2}{64}=1\in\mathbb{N}$.

G:149. Să se rezolve în NxNxN sistemul: $\frac{x(y+1)}{x-1}=\frac{y(z+1)}{y-1}=\frac{z(x+1)}{z-1}=6$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

***Rezolvare* :** Ţinând seama de faptul că dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie, atunci orice permutare circulară a numerelor x_0, y_0, z_0 este de asemenea o soluţie. Din cele trei ecuaţii obţinem:

$(1)\begin{cases}6=1+y+\frac{y+1}{x-1},\ 6=1+z+\frac{z+1}{y-1},\ 6=1+x+\frac{x+1}{z-1}\end{cases}$, deducem că numerele

$(2)\begin{cases}a=\frac{y+1}{x-1},\ b=\frac{z+1}{y-1},\ c=\frac{x+1}{z-1}\end{cases}$ trebuie să fie naturale. Observăm că :

$a\cdot b\cdot c=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{y+1}{y-1}\cdot\frac{z+1}{z-1}>1$ de unde rezultă că cel puţin unul din numerele a,b,c este deci mai mare decât 1. Să presupunem, pentru fixarea ideilor $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 2$

Aceste inegalităţi se mai pot scrie $y\ge x-2, z\ge y-2, x\ge 2z-3$ din care deducem $x\ge 2(y-2)-3=2y-7\ge 2(x-2)-7=2x-11$ sau $x\le 11$.

Rezultă apoi $11 \geq 2z-3, z \leq 7, 7 \geq y-2, y \leq 9$. Printr-un număr finit de încercări pentru $x \leq 11, y \leq 9, z \leq 7$ obţinem soluţiile: $(x,y,z) \in \{(2,2,2),(3,3,3)\}$.

G:150. Determinaţi mulţimea A= $\left\{x \middle| x = \sqrt{n^2+7n+10} \in Q, n \in \mathbb{N}\right\}$ (dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009). ***Prof.* Dumitru Samoilă**

Rezolvare : $n^2+6n+9 < n^2+7n+10 < n^2+8n+16 \Leftrightarrow (n+3)^2 < n^2+7n+10 < (n+4)^2$

$\Rightarrow n^2+7n+10 \neq k^2 \Rightarrow A = \varnothing$.

G:151. Aflaţi $x \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$**, ştiind că** $\left[\frac{2x}{3}\right] = \frac{x+1}{x-1}$**, unde [a] este partea întreagă a numărului a. (dată la concursul taberei de matematică de la Poiana Pinului, 4 septembrie 2009).** ***Prof.* Gabriela Toader**

Rezolvare :

$$\left[\frac{2x}{3}\right] = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)|(x+1) \\ (x-1)|(x-1) \end{cases} \Rightarrow (x-1)|(x+1)-(x-1)$$ rezultă

$(x-1)|2 \Rightarrow x-1 \in \{-1,1,-2,2\} \Rightarrow x \in \{2,0,3,-1\}$. Soluţia care ne convine este doar x=3.

G:152. În tetraedrul ABCD se cunosc AC=CB=BD=DA=10 cm, M mijlocul lui [AB], măsura unghiului diedru format de planele (ACD) şi (MCD) este de 30⁰ şi distanţa dintre dreptele AB şi CD este de $4\sqrt{3}$ **cm. Se cere:**

a) Aria şi volumul tetraedrului; **b)** $\sin[m(\widehat{(ABC);(ABD)})]$. ***Prof.* Gheorghe Dârstaru**

***Rezolvare*:** a)Fie N mijlocul lui [CD]. Triunghiurile ABC, şi ABD sunt isoscele şi M mijlocul lui [AB] implică $CM \perp AB$ şi $DM \perp AB \Rightarrow AB \perp (CMD)$. $MN \subset (CMD) \Rightarrow AB \perp MN$ (1)

Analog, $MN \perp CD$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $d(AB;CD) = MN = 4\sqrt{3}cm$. În triunghiul dreptunghic obţinem: $\cos(N) = \frac{MN}{AN} \Rightarrow AN = 8, AM = 4 \Rightarrow AB = 8$. Fie O mijlocul lui [BN]. Atunci, se arată că $AO \perp (BCD)$ şi $MC = MD = 2\sqrt{21}$, $CN = 6$, $DC = 12$, $AO = 4\sqrt{3}$.

Se calculează $A_{ABCD} = 2A_{BCD} + 2A_{ABC} = 16(6+\sqrt{21})cm^2$. $V_{ABCD} = \frac{A_{ABCD} \cdot AO}{3} = 64\sqrt{3}cm^3$.

Cum $(\widehat{(ABC);(ABD)}) = (\widehat{MC;MD}) = \widehat{CMD} \Rightarrow \sin[m(\widehat{(ABC);(ABD)})] = \sin[m(\widehat{CMD})] = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

G:153. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu latura de lungime 2a se ridică în punctul A perpendiculara SA = a. Să se calculeze:
a) distanţa de la punctul A la planul (SBC);
b) măsura unghiurilor diedre formate de planele (SBD) şi (SBC) cu planul bazei.

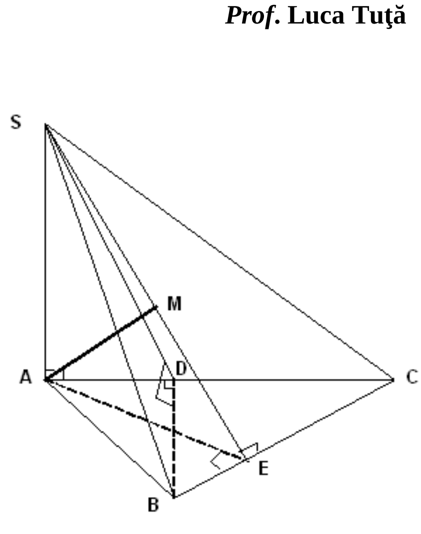
***Rezolvare*:** ***Prof.* Luca Tuţă**

a) Fie [AE] înălţime în triunghiul echilateral ABC. Atunci, $AE = a\sqrt{3}$.
Din triunghiul dreptunghic SAE, SE=2a iar distanţa de la A la planul (SBC) este $AM = \frac{SA \cdot AE}{SE} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Avem $(SBD) \cap (ABC) = BD$; $AD \perp BD$; $AD \subset (ABC)$

$SA \perp (ABC), AD \perp BD, BD \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} SD \perp BD$. Cum

$SD \subset (SBD) \Rightarrow (\widehat{SBD);(ABC)} = (\widehat{SD,AD}) = \widehat{SDA}$.



Cum triunghiul SAD este dreptunghic isoscel, rezultă că $m(\widehat{SDA}) = 45^0$.

Analog, se arată că $\widehat{(SBC); (ABC)} = (\widehat{SE, AE}) = \widehat{AES} \Rightarrow m(\widehat{AES}) = 30^0$.

G:154. Considerăm tetraedrul VABC şi tetraedrul determinat de centrele de greutate ale feţelor sale, $G_1G_2G_3G_4$. Aflaţi raportul lungimilor muchiilor corespunzătoare celor două tetraedre.

***Prof.* Ion Stănescu**

Rezolvare: Fie M respectiv N mijloacele laturilor [AB] respective [BC]. În triunghiul VMN se obţine: $G_1G_2 = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ .Analog, în triunghiul VMC : $G_1G_4 = \frac{1}{3}VC;\ G_4G_2\ \frac{1}{3}VA;\ G_4G_3 = \frac{1}{3}VB.$

- **LICEU**

Clasa a IX- a

L:69. Dacă $a,b \in \mathbb{R}^*$ **şi** $9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-60\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+118 \le 0$ **atunci, să se arate că a=3b sau b=3a .**

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Se face notaţia $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=t$ după care inegalitatea dată este echivalentă cu $(3t-10)^2 \le 0 \Rightarrow t=\frac{10}{3}$.

Aşadar, cum $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{10}{3}$ şi $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, rezultă $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\ sau\ \frac{a}{b}=3$ adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

L:70. Arătaţi că 2009 divide $1^{2007}+2^{2007}+...+2008^{2007}$ **.** ***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: Din identitatea $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...-xy^{n-2}+y^{n-1})$, valabilă pentru orice n impar avem că $x+y$ divide x^n+y^n. Acum, deoarece fiecare dintre numerele $1^{2007}+2008^{2007}, 2^{2007}+2007^{2007},...,1004^{2007}+1005^{2007}$ se divide cu 2009 rezultă concluzia.

L:71. Fie numărul $a=\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2+\underbrace{222...22}_{2010 cifre}{}^2+...+\underbrace{999...99}_{2010 cifre}{}^2$. **Să se demonstreze că** $134a \vdots 2010$.

(enunţ modificat). ***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare : Întrucât $a=\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2+2^2\cdot\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2+...+9^2\cdot\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2=$

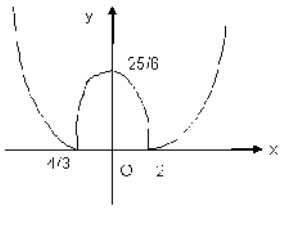
$=(1^2+2^2+3^2+...+9^2)\cdot\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2$. Cum $1^2+2^2+3^2+...+9^2=\frac{9\cdot10\cdot19}{6}=285 \vdots 15$ iar

$\underbrace{111...11}_{2010 cifre}{}^2 \vdots 3^2$ rezultă că $134a \vdots 2010$.

L:72. Pentru fiecare număr $x \in \mathbb{R}$**, se consideră în planul raportat la un sistem de coordonate XOY punctele $A_x(0,x+1)$, $B_x(0,-2x-3)$, $C_x(x-2,0)$. Se cere:**
a) Reprezentaţi grafic funcţia f: R→ R , f(x)=aria $A_xB_xC_x$; b) Aflaţi aria triunghiului $A_1B_2C_1$.

***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare : a) $f(x)=\frac{A_xB_x\cdot C_xO}{2} \Rightarrow f(x)=\left|\frac{3}{2}x^2-x-4\right|$ cu graficul în figura alăturată.



b) $A_{A_1B_2C_1} = \frac{C_10\cdot A_1B_2}{2} = \frac{1\cdot 9}{2} = \frac{9}{2}$.

L:73. Să se demonstreze că primele n cifre de după virgulă ale numărului $\sqrt{\underbrace{999.....9}_{n\ cifre}\underbrace{c_1c_2...c_n}_{n\ cifre}}$ **, unde c_1, c_2, …**

…..,c_n poate fi orice cifră nenulă, se pot calcula cu relaţia $\frac{c_i+9}{2}, 1\le i\le n.$ ***Prof.* Ciprian Cheşcă**

Rezolvare : Fie $B=\underbrace{99...9}_{n\ cifre}\underbrace{c_1c_2...c_n}_{n\ cifre}$ şi $A=\underbrace{99...9}_{n\ cifre}\underbrace{d_1d_2...d_n}_{n\ cifre}$ numărul obţinut prin extragerea rădăcinii pătrate din B, înmulţit cu 10^n . Deoarece relaţia $d_i=\frac{c_i+9}{2}$ se poate rescrie de forma $2d_i+1=\overline{1c_i}$ putem demonstra identitatea $2A=10^{2n}+B-1$ care revine la a demonstra inegalitatea $A\langle 10^n\sqrt{B}\langle A+1.$

Astfel, $2A+1=10^{2n}+B\rangle 2\sqrt{10^{2n}B}\Rightarrow 10^n\sqrt{B}\langle A+\frac{1}{2}\langle A+1$. Pentru a demonstra că $10^n\sqrt{B}\rangle A$ îl înlocuim pe B cu $2A-10^{2n}+1$ şi obţinem: $10^{2n}(2A-10^{2n}+1)\rangle A^2\Leftrightarrow(10^{2n}-A)^2\langle 10^{2n}\Leftrightarrow A\rangle 10^{2n}-10^n$. Însă $10^{2n}-10^n=\underbrace{999...9}_{n\ cifre}\underbrace{000...0}_{n\ cifre}$.

L:74. Să se rezolve ecuaţia $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$ ***Prof.* Gabriel Andrei**

Rezolvare: Scăzând din prima fracţie pe c, din a doua pe a şi din a treia pe b, rezultă :

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=0\Rightarrow x=ab+ac+bc.$$

Clasa a X- a

L:75 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}=6\\ x^2+y^2-z^2=64\\ 3^{\lg|y|-\lg z}=1.\end{cases}$ ***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare: Din ecuaţia a treia rezultă $|y|=z\rangle 0$ după care se înlocuieşte în a doua ecuaţie obţinându-se $x=\pm 8.$ Singurele soluţii bune sunt $(x;y;z)\in\{(8;1;1),(-8;17;17)\}.$

L:76. Pentru $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$**, arătaţi că** $(1+\cos x)^{2009}+(1-\cos x)^{2009}\le 2^{2009}$**.** ***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare: Dezvoltând după binomul lui Newton, se obţine

$$(1+\cos x)^{2009}+(1-\cos x)^{2009}=2+2C_{2009}^2\cos^2 x+...+C_{2009}^{2008}\cos^{2008}x\le$$
$$\le 2+2C_{2009}^2+...+2C_{2009}^{2008}=2\cdot 2^{2008}=2^{2009}.$$

L:77. Să se arate că $(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\ge 48(\sqrt[3]{abc})^4,\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+.$ ***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Se folosesc formulele $x+y\ge 2\sqrt{xy}$, $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ şi

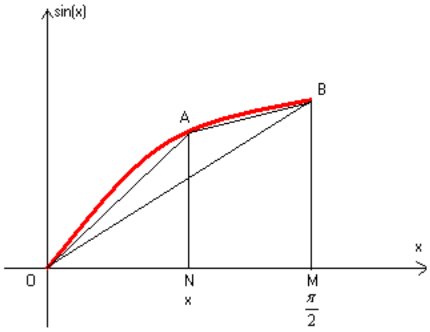
$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$.

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\ge 2^4[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2]\ge 16abc(a+b+c)\ge 16abc\cdot 3\sqrt[3]{abc}$$

L:78. **Să se arate că în orice triunghi ascuţit unghic există relaţia** $\sin A + \sin B + \sin C \rangle 2$ **.**

***Prof.* Ciprian Cheşcă**

Rezolvare :



Fie f: $[0,\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1,1]$ f(x) = sin(x) cu graficul în figura alăturată. Din S_{OAN} + $S_{ANMB} \geq S_{OBM}$ rezultă

x sin x + (1 + sin x) $(\frac{\pi}{2} - x) \geq \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2}$ sin x $\geq$ x $\Leftrightarrow$ şi de aici se obţine faptul că $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$. Atunci, şi $\sin(A) \geq \frac{2A}{\pi}$; $\sin(B) \geq \frac{2B}{\pi}$; $\sin(C) \geq \frac{2C}{\pi}$ de unde prin însumarea lor rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

L:79. **În reperul cartezian XOY se consideră punctul A(4;0) şi dreptele de ecuaţii: (d1): 2x+y+2=0 şi (d2): 3x-y-2=0. Să se găsească punctele** $B \in d_1$, $C \in d_2$ **astfel încât** d_1 **să fie înălţime iar** d_2 **să fie mediană în triunghiul ABC.**

***Prof.* Gabriel Andrei**

Rezolvare : Se obţine $B(k;-2k-2) \in d_1,\ k \in \mathbb{R}$, şi $C(l;3l-2) \in d_2,\ l \in \mathbb{R}$.

Din $m_{d_1} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$ este ecuaţia dreptei AC. $C \in AC \Rightarrow l = 0 \Rightarrow C(0;-2)$.

$B \in d_1 \Rightarrow$ d_2 trece prin mijlocul $M(\frac{4+k}{2}, -k-1)$ al lui [AB]. Rezultă, $B(-2;2)$.

L:80. Fie $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(\frac{1}{1-10^{x-1}}) = x-1,\ \forall x \in R \setminus \{1\}$. **Să se calculeze f(2)+f(3)+…+f(100).**

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare : Se face notaţia $\frac{1}{1-10^{x-1}} = t \Rightarrow x = \lg(1-\frac{1}{t}) + 1 \Rightarrow f(t) = \lg(1-\frac{1}{t}),\ \forall t \in \mathbb{R}\setminus[0;1]$. Atunci,

f(2)+f(3)+…+f(100)= $\lg(1-\frac{1}{2}) + \lg(1-\frac{1}{3}) + ... + \lg(1-\frac{1}{100}) = \lg\frac{1}{100} = -2$.

L:81. Să se calculeze expresia $E = \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}\right)^{-1}$ **pentru** $a = 1-\sqrt{2}$ **şi** $a = 1+\sqrt{2}$.

Prof. Natalia Pleşu

Rezolvare **:** $E = \frac{ab(a^2+b^2-ab)}{(b^2+ab+b^2)(a-b)(a+b)}$. Pentru $a = 1-\sqrt{2}$ şi $a = 1+\sqrt{2}$ rezultă $E = \frac{7\sqrt{2}}{40}$.

L:82. Să se rezolve în $\mathbb{R}^+$**:** $\sqrt{2\cdot x} + \sqrt{3\cdot(x+1)} + \sqrt{4\cdot(x+2)} + ... + \sqrt{2010\,(x+2008)} = \frac{2009}{2}(x+2010)$.

Prof. Gheorghe Struţu, Ligia Struţu

Rezolvare:

Aplicăm inegalitatea mediilor: $\sqrt{a\cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ perechilor $(2,x);(3,x+1);....;(2010,x+2008)$:

$$\left\{\sqrt{2x} \leq \frac{2+x}{2};\ \sqrt{3(x+1)} \leq \frac{3+x+1}{2};.......;\ \sqrt{2010(x+2008)} \leq \frac{2010+x+2008}{2}\right.,$$

prin adunare membru cu membru rezultă:

$$\sqrt{2\cdot x} + \sqrt{3\cdot(x+1)} + \sqrt{4\cdot(x+2)} + ... + \sqrt{2010\cdot(x+2008)} \leq \frac{2+4+...+4018+2009x}{2} =$$

$= \frac{2009(x+2010)}{2}$. Avem egalitate dacă $x = 2, x+1 = 3, ..., x+2008 = 2010$; Aşadar, soluţia este 2.

Clasa a XI-a

L:83. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ **şi mulţimea** $E = \{X(a) | X(a) = I_2 + aA\}, \forall a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1)-1), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot .... \cdot X(2009)$. ***Prof.* Adrian Stan**

***Rezolvare* :**

a) Se observă că $A^2 = A$, atunci, $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b+ab+1-1)A =$

$= X((a+1)(b+1)-1)$.

b) Prin inducţie matematică se arată că $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot .... \cdot X(2009) = X(2 \cdot 3 \cdot ... 2010 - 1) =$
$= X(2010! - 1)$.

L:84. Un determinant de ordinul trei are -1 pe diagonala principală, iar suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este -2. Determinaţi valoarea maximă posibilă a acestui determinant.

***Prof.* Constantin Dinu**

***Rezolvare* :** Notând cu x elementul de pe linia întâi, coloana a doua, din condiţiile problemei se obţine $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & x & -1-x \\ -1-x & -1 & x \\ x & -1-x & -1 \end{vmatrix} = -6x^2 - 6x - 2$, care are valoarea maximă $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{2}$ pentru $x = \frac{-1}{2}$.

L:85. Să se scrie ecuaţiile laturilor unui pătrat ABCD ştiind că punctul A este de coordonate A(2;0), B este situat pe dreapta OY şi centrul său este situat pe prima bisectoare. ***Prof.* Manuela Apostol**

***Rezolvare* :** Dacă M este centrul pătratului

$\Rightarrow x_M = y_M \Rightarrow M(x_M, x_M); M(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) = M(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}) \Rightarrow$

$x_M = \frac{2 + x_C}{2} = \frac{0 + x_D}{2}, x_M = \frac{0 + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow x_D = x_C + 2, y_C = x_D, y_C = y_B + y_D$;

$AB = AD \Rightarrow (2-0)^2 + y_B{}^2 = (2 - x_D)^2 + y_D{}^2 \Rightarrow (y_B - y_D)(y_B + y_D) = (x_C - 2)(x_C + 2) \Rightarrow$

$y_B - y_D = x_C - 2 \Rightarrow \quad y_D = 2, x_C = y_B, y_C = y_B + 2$; se notează

$y_B = a \Rightarrow$ A(2,0),B(0,a),C(a,a+2),D(a+2,2),după care se pot scrie ecuaţiile laturilor în funcţie de a;

L:86. Un triunghi are un vârf A(0;2) şi două mediane de ecuaţii 2x+y+1=0 şi 5x+4y+1=0. Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului. ***Prof.* Manuela Apostol**

***Rezolvare* :** Fie triunghiul ABC,

$d_1 : 2x + y + 1 = 0, B \in d_1, d_2 : 5x + 4y + 1 = 0, C \in d_2, \{B'\} = d_1 \cap AC, B'(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow B'(\frac{x_C}{2}, \frac{2 + y_C}{2}); B' \in d_1 \Rightarrow 2x_C + y_C + 1 = 0; C \in d_2 \Rightarrow 5x_C + 4y_C + 1 = 0 \Rightarrow C(-1,1)$;

$\{C'\} = d_2 \cap AB \Rightarrow \Rightarrow C'(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) \Rightarrow C'(\frac{x_B}{2}, \frac{2 + y_B}{2}); C' \in d_2 \Rightarrow$

$5x_B + 2y_B + 10 = 0; B \in d_1 \Rightarrow \quad 2x_B + y_B + 1 = 0 \Rightarrow B(-8,15)$. Se obţin ecuaţiile:

(AB): 13x+8y-16=0; (AC): x-y+2=0; (BC): 2x+y+1=0.

L:87. **Fie funcţia** $f : D \subset R \to R,\ f(x) = \dfrac{3-x}{5-3x}$, **unde x este ales astfel încât să aibă sens** $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ factori})(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$. **Să se determine $f_n(x)$.** ***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare : Funcţia din enunţ este o funcţie omografică.Se ştie că prin compunerea unei funcţii omografice cu ea însăşi , se obţine tot o funcţie omografică. Dacă $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d \in R$, atunci $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, unde a_n, b_n, c_n, d_n sunt elementele matricei $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Deci, problema revine la a calcula A^n, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + \det A = 0$, adică $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.În continuare considerăm $A^n = \lambda_1{}^n \cdot B + \lambda_1{}^n \cdot n \cdot C$, unde $B, C \in M_2(C)$ se determină pentru $n = 1$ şi $n = 2$.

Obţinem sistemul: $\begin{cases} 2B + C = A \\ 4B + 4C = A^2 \end{cases}$, care rezolvat dă $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Deci $A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2-3n & 3n \\ -3n & 3n+2 \end{pmatrix}$, adică $f_n(x) = \dfrac{(2-3n)\cdot x + 3n}{-3n \cdot x + 3n + 2}$.

L:88. **Fie A,B două matrice pătratice de ordinul trei cu proprietatea că A+B=A·B. Să se demonstreze că A·B= B·A.** **Prof. Daniela Dibu**

Rezolvare **: Din** $(I_3 - A)(I_3 - B) = I_3 - B - A + AB$ şi din A+B=A·B rezultă $(I_3 - A)(I_3 - B) = I_3$.
De aici rezultă că $\det(I_3 - A) \neq 0$ şi $\det(I_3 - B) \neq 0 \Rightarrow$ inverse lui $I_3 - A$ este $I_3 - B$ adică $(I_3 - B)(I_3 - A) = I_3 \Rightarrow B \cdot A = A + B$. Dar $A \cdot B = A + B$ deci $A \cdot B = B \cdot A$.

L:89. **Să se calculeze limita:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 + 4k + 5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+2)!}$. **Prof. Gheorghe Strutu, Ligia Struţu**

Rezolvare:
Se utilizează faptul că $(k+3)(k+2)! = (k+3)!$, apoi se descompune suma dată şi se obţine:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+4k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)!} - \frac{1}{(k+2)(k+3)!}\right) = \frac{1}{2\cdot 3!} - \frac{1}{(n+2)(n+3)!}.$$

S-a utilizat faptul că $\sum\limits_{k=1}^{n} (T_k - T_{k+1}) = T_1 - T_{n+1}$. Limita cerută este deci $\dfrac{1}{12}$.

Clasa a XII – a

L:90. **Fie** $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2008 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007$. **Arătaţi că** 2009 **divide pe** N. **Generalizaţi rezultatul.** ***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2008 \equiv [(-2007)\cdot(-2005)\cdot(-2003)\cdot ... \cdot(-3)\cdot(-1)] \mathrm{mod}(2009)$
$\equiv (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007) \mathrm{mod}(2009)$. Rezultă $N \equiv 0 \,\mathrm{mod}(2009)$.

L:91. Se consideră funcţia continuă f:[1;9]→ R , care satisface egalitatea
$\int_1^3 f^2(x^2)dx - 2\int_1^3 f(x^2)dx = \int_1^9 f(x)dx - \dfrac{56}{3}$. **Să se calculeze** $\int_1^3 [f(x^2) - (x+1)]^2 dx$. ***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare:

$$\int_1^3 [f(x^2)-(x+1)]^2dx=\int_1^3[f^2(x^2)-2f(x^2)(x+1)+(x+1)^2]dx=\int_1^9 f(x)dx-2\int_1^3 f(x^2)xdx=0$$

după ce în prealabil s-a făcut notaţia $x^2=t$, $2xdx=dt$.

L:92. Fie a un număr real pozitiv şi nenul. Să se demonstreze că $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$. *Prof.* **Ciprian Cheşcă**

Rezolvare : Se face schimbarea de variabilă $\frac{1}{x}=t\Rightarrow I=-I\Rightarrow I=0.$

L:93. Fie f: R→ R astfel încât $2f(x^2-3x+2)-f(x^2+3x+2)=4x^2-12x+7,\ \forall x\in R.$ **Să se calculeze** $f(1)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^{-1}$. *Prof.* **Adrian Stan**

Rezolvare **:** Notăm x = - t . Rezultă, $f(t^2-3t+2)=2(t^2-3t+2)$ şi $f(t^2+3t+2)=2(t^2+3t+2)$.

Aşadar, $f(y)=2y,\ (\forall)y\in R.$ Cum f(1) = 2 şi $\int_0^1 2xdx=1$ atunci, $f(1)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^{-1}=2\cdot1=2.$

L:94. Să se calculeze: $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)}dx$**.** *Prof.* **Neculai Stanciu**

Rezolvare : Fie $f,g:[0,2\pi]\to R,\ f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x},\ g(x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$.

Se observă că $f(\pi-x)=f(\pi+x)$, adică este $\pi-$pară şi $g(\pi-x)=-g(\pi+x)$ adică este $\pi-$impară.

Funcţia $h:[0,2\pi]\to R$, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ este $\pi-$impară şi avem

$$\int_0^{2\pi}h(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)}dx=0.$$

L:95. Să se calculeze integralele: a) $\int_1^e\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{2\ln x+\frac{1}{x}}dx$; **b)** $\int_0^1\frac{25^x}{(5+5^x)^{2009}}dx$; *Prof.* **Adrian Stan**

Rezolvare **: a)** $\int_1^e\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{2\ln x+\frac{1}{x}}dx=\int_1^e\left(x\cdot e^{2\ln x+\frac{1}{x}}\right)'dx=x\cdot e^{2\ln x+\frac{1}{x}}\Big|_1^e=e^{\frac{1}{e}}(e^3-1).$

b) Se face substituţia $5+5^x=t\Rightarrow dx=\frac{dt}{5^x\ln 5}$, atunci

$$\int_0^1\frac{25^x}{(5+5^x)^{2009}}dx=\frac{1}{\ln 5}\int_6^{10}\frac{t-5}{t^{2009}}dt=\frac{1}{\ln 5}\left(\int_6^{10}\frac{1}{t^{2008}}dt-\int_6^{10}\frac{5}{t^{2009}}dt\right)=\frac{1}{\ln 5}\left(\frac{-1}{2007}\cdot\frac{1}{t^{2007}}+\frac{5}{2008}\cdot\frac{1}{t^{2008}}\right)\Bigg|_6^{10}$$. Mai

de parte se calculează după formula lui Leibniz- Newton.

L:97. Se dă funcţia $f:D\to\mathbb{R},\ D\subset R,\ f(x)=\sqrt{8+x-6\sqrt{x-1}}.$

a) Să se determine D; b) Să se găsească o primitivă F a funcţiei f cu proprietatea 3F(2)+F(13)=1+$16\sqrt{3}$ **.**

Prof. Daniela Dibu

Rezolvare : a) $D=[1;+\infty)$;

b) $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{x-1}, & x\in[1;10]\\ \sqrt{x-1}-3, & x\in(10;\infty)\end{cases}$. Atunci, $F(x)=\begin{cases}3x-\frac{2x-2}{3}\sqrt{x-1}+c_1, & x\in[1;10]\\ \frac{2x-2}{3}\sqrt{x-1}-3x+c_2, & x\in(10;\infty)\end{cases}$.

Din condiţia de continuitate a lui F rezultă $c_2=c_1+24$ şi din relaţia 3F(2)+F(13)=1+$16\sqrt{3}$ se obţine

c_1 =0, prin urmare, o primitivă a lui f este de forma

$$F(x)=\begin{cases} 3x-\dfrac{2x-2}{3}\sqrt{x-1}, & x\in[1;10] \\ \dfrac{2x-2}{3}\sqrt{x-1}-3x+24, & x\in(10;\infty) \end{cases}.$$

’’ Cel mai bun mijloc de a înţelege este de a face.’’
Immanuel Kant

3. *Probleme propuse*

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:129. Aflaţi produsul dintre suma şi diferenţa numerelor „a” şi „b” ştiind că:
a= (180-3x10):5+24x9-(120-312:12)
b= 255:(65-50)-(180:4-256x0):3

***Înv.* Florica Anton, Rm. Sărat**

P:130. Ordonează crescător, apoi descrescător toate numerele de două cifre distincte care se pot forma cu cifrele 1, 3, 5.

***Inst.* Anton Maria, Berca**

P:131. Aflǎ cele trei numere ştiind cǎ: cel de-al treilea este sfertul primului număr, al doilea este jumătatea primului, iar diferenţa dintre primul şi ultimul număr este 16.

***Inst.* Axente Mirela, Berca**

P:132. Distanţa dintre oraşele A şi B este de 105 km. Doi biciclişti pornesc în acelaşi timp unul spre celălalt. Cel care porneşte din oraşul A spre oraşul B are viteza de deplasare de 10 km/h, iar cel care se deplasează din oraşul B spre oraşul A are viteza de deplasare de 11 km/h.
a) După cât timp se întâlnesc cei doi biciclişti ?
b) La ce distanţă de oraşul A are loc întâlnirea ?

***Prof.* Brânză Cristian Cosmin, Bădila, Pârscov**

P:133. Pe un lac erau 26 de raţe albe şi negre. Dacă ar fi de două ori mai multe raţe albe, atunci numărul raţelor negre ar fi cu 2 mai mare decât al celor albe. Câte raţe albe şi câte raţe negre sunt pe lac?

***Înv.* Ion Daniela, Berca**

P:134. Mă gândesc la un număr, dacă din întreitul sfertului său scad jumătate din pătrimea inversului celui mai mare număr impar de două cifre care are cifra zecilor egală cu a opta parte din 48 obţin 72. La ce număr m-am gândit?

***Înv.* Ion Daniela, Berca**

P:135. Două surori au împreună 200 de lei. Dublul sumei uneia dintre ele este egal cu triplul sumei celeilalte. Câţi lei are fiecare fată?

***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi, Berca**

P:136. Suma a trei numere este 1728. Suma primelor două numere este cu 213 mai mare decât a ultimelor două, iar al doilea este jumătate din al treilea.Aflaţi numerele.

***Inst.* Lupşan Mirela, Buzău**

P:137. Aflaţi trei numere ştiind că primul este o treime din al doilea şi dublul celui de-al treilea, iar diferenţa dintre al doilea şi al treilea este jumătatea celui mai mic număr de patru cifre.

***Prof.* Lupşan Nicoleta-Gabriela, Berca**

P:138. Un număr este cu 428 mai mare decât altul. Împărţind suma la diferenţa lor, obţinem câtul 7 şi restul 24. Aflaţi numerele.

***Inst.* Lupşan Nicuşor-Octavian, Buzău**

P:139. Aleg un număr şi-l împart la 2. Câtul îl împart din nou la 2 şi obţin un cât cu 3 mai mare decât împărţitorul. Ce număr am ales?

***Înv.* Marchidanu Florica, Berca**

P:140. La aniversarea zilei de naştere, Alina a adus un platou cu prăjituri. Dacă toţi prietenii ar servi câte patru bucăţi, ar mai rămâne o bucată, dacă ar servi câte trei bucăţi, ar mai rămâne treizeci şi unu de bucăţi. Câte prăjituri erau pe platou şi câţi prieteni are Alina ?

***Prof.* Marinescu Gabriela, Stănceşti, Vadu Pasii**

P:141. Suma dintre un număr, dublul predecesorului său şi triplul succesorului său este 967. Aflaţi numărul.

***Inst.* Marin Marcela, Rm. Sărat**

P:142. Ioana citeşte o carte de 108 pagini. În prima zi citeşte o şesime din numărul total de pagini, a doua zi două cincimi din rest, iar a treia zi patru noimi din cât a citit în primele două zile la un loc. Câte pagini mai are de citit?

***Înv.* Răican Georgeta, Berca**

P:143. În 3 lăzi erau 96 kg de cireşe. După ce s-a vândut o doime din prima ladă, 3/4 din a doua ladă şi 5/6 din a treia ladă, în cele trei lăzi au rămas cantităţi egale. Câte kg de cireşe au fost în fiecare ladă?

***Înv.* Rotărescu Viorel, Vadu Paşii**

P:144. Într-o tabără sunt de 2 ori mai mulţi băieţi decât fete. După ce au plecat 35 băieţi şi au venit 28 fete, numărul băieţilor a devenit egal cu numărul fetelor. Câte fete şi câţi băieţi au fost la început în tabără?

***Înv.* Rotărescu Viorica, Vadu Paşii**

P:145. La o oră de sport participă elevi din clasa a III-a şi elevi din clasa a IV-a, în total 46.
Profesorul aşează elevii pe un rând astfel încât între doi elevi de clasa a IV-a să se afle doi elevi de clasa a III-a. Să se afle câţi elevi sunt în clasa a III-a şi câţi elevi sunt în clasa a IV-a.

***Prof.* Stanciu Roxana, Buzău**

P:146. Andrei are 11 ani, tatăl său are de 4 ori mai mult. Peste câţi ani vârsta tatălui va fi dublul vârstei lui Andrei?

***Înv.* Vrabie Marioara, Berca**

P:147. George a lucrat 21 de zile, iar Eugen 15 zile. Pentru munca lor ei au fost plătiţi cu 825 lei. Cât a primit pe zi fiecare din ei, dacă George a câştigat cu 5 lei mai mult decât Eugen ?

***Înv.* Doina Vizitiu, Măgura**

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:155. Se dă suma : $a \cdot 2^{n+1} \cdot 3^{2n+1} + b \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^{n+1}$.

a) Să se scoată factorul comun;
b) Ce număr se obţine dacă n = 2 ?
c) Să se arate că dacă n= 1 , a = 220 şi b= 318 numărul care se obţine, este şi pătrat perfect şi cub perfect..

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:156. Împărţind un număr mai mic decât 1778, pe rând la 11, 5 şi 6 se obţin resturile 1, 2 şi 0. Aflaţi numerele care satisfac această condiţie.

***Prof.* Viorel Ovidiu Ignătescu,** Măteşti, Buzău

G:157. Să se rezolve ecuaţia: $\overline{0,(1x1)} + \overline{0,(2x2)} + ... + \overline{0,(9x9)} = x$.

Prof.* Corbu Violeta, *Buzău

G:158. Determinaţi numărul $\overline{abcd}$ ştiind că : 5+10+15+….+ $\overline{abcd} = \overline{abcd000}$.

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

G:159. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|2^{6n-3}\langle x\le 3^{4n+2}\right\},B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|3^{4n}\le y\langle 2^{6n+3}\right\}$. Care dintre mulţimile A şi B are mai multe elemente ?

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

G:160. Găsiţi numerele prime $\overline{aa},\ \overline{ab},\ \overline{ba}$, care verifică relaţia : $\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{ba}=\overline{cc}$.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:161. Scrieţi numărul 13^{2010} ca sumă de trei pătrate perfecte. Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca, Buzău

G:162. Sã se afle x şi y numere naturale astfel încât fracţia $\frac{3}{(x-1)(y-2)}$ să fie echiunitară.

Prof. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:163. Se consideră şirul de numere naturale 11,19,27,…. a) Aflaţi numărul de pe locul 2010.
b) Arătaţi că suma primilor 2010 termeni este divizibilă cu 8047. ***Prof.*** **Ion Stănescu,** Smeeni

Clasa a VI – a

G:164. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ ecuaţia: $\frac{1}{3x}+\frac{1}{5y}=\frac{1}{6}$.

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

G:165. Arătaţi că numărul A = $7^{2011}+8^{2011}+9^{2011}$ este divizibil cu 12.

Prof. **Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

G:166. Se dau mulţimile: $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\frac{3x+2}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\frac{5x+7}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$.

G:167. Să se determine $A\cup B; A\cap B; A-B; B-A$. ***Prof.*** **Viorel Ovidiu Ignătescu,** Măteşti, Buzău

G:168. Fie $N=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2007}{2008}$. Arătaţi că $44<\frac{1}{N}<2009$. ***Prof.*** **Neculai Stanciu,** Buzău

G:169. Să se arate că în şirul $x_n=\underbrace{55...5}_{n}1$, $n\in\mathbb{N}$ există o infinitate de numere compuse.

Prof. **Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

G:170. Găsiţi perechile de numere întregi (x,y) care verifică ecuaţia 1+6x+8y=xy.

Prof. **Andrei Octavian Dobre,** Ploieşti, Prahova

G:171. Să se compare numerele:

$$A=\frac{4^{1006}}{(5\cdot5^2\cdot5^3\cdot\ldots\cdot5^{63}):125},\quad B=\frac{8^{670}}{(5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010})\cdot25}$$

prof. **Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

G:172. Fie a, b, c, d, e, f , g şapte numere întregi distincte între ele care verifică relaţia:
(7-a)·(7-b)·(7-c)·(7-d)·(7-e) ·(7-f) ·(7-g)=180. Arătaţi că a+b+c+d+e+f+g=44.

Insp. Prof. **Naidin Delia,** Olt

G:173. Să se determine numărul natural $\overline{xyzt}$ ştiind că $\frac{\overline{abcd}+\overline{bcda}+\overline{cdab}+\overline{dabc}}{a+b+c+d}\cdot\overline{xyzt}$ este un pătrat perfect.

Prof. **Corbu Violeta**, Buzău

G:174. Pe mediana (AM) a triunghiului ABC cu AB = AC se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_{12}$ astfel încât $\widehat{A_1BA} \equiv \widehat{A_1BC}$, $\widehat{A_2BA_1} \equiv \widehat{A_2BC}, ..., \widehat{A_{12}BA_{11}} \equiv \widehat{A_{12}BC}$. Ştiind că $m(\widehat{A_{12}BC}) = 1'4''$, calculaţi $m(\widehat{BAC})$.

Prof. **Simion Marin**, Rm. Sărat

G:175. Pe o dreaptă d se iau punctele A, B, C, D astfel incât $AB = a, AC = b,$ $BC = a + b, CD = a + b - c$ si $AD = c - a$, iar a, b, c îndeplinesc condiţiile: $c > a$ si $a + b > c$. Să se stabilească în ce ordine sunt asezate aceste puncte.

Prof. **Constantin Eugen Păduraru,** Bacău

G:176. Punctul P este situat în interiorul unghiului AOB şi se află la distanţe egale de laturile (OA, (OB. El are aceleaşi proprietăţi faţă de unghiul COD. (OA este situată în interiorul unghiului BOC. Dacă $m(\widehat{POA}) = 3m(\widehat{AOC})$, $m(\widehat{COD}) = 120^0$, aflaţi $m(\widehat{BOD})$.

Prof. **Ion Stănescu,** Smeeni

Clasa a VII – a

G:177. Arătaţi că $\sqrt{10n^2 + 10n + 3}$ este număr iraţional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Prof. **Marin Simion**, Rm Sărat

G:178. Aflaţi $x, y \in \mathbb{R}$ ştiind că $\sqrt{4032089 + 4016x - x^2} - 5 = \sqrt{y^2 - 4020y + 4040100}$.

Prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:179. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi pozitive ecuaţia: $7^{x^2+y-1} - 7^{x^2+1} = 2352$.

Prof. **Viorel Ovidiu Ignătescu**, Măteşti, Buzău

G:180. Pentru $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$ avem $\frac{1}{x} - y = \frac{1}{y}$. Arătaţi că $\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}} \in \mathbb{Q}$.

Prof. **Gheorghe Dârstaru,** Berca, Buzău

G:181. Se dau numerele întregi nenule a,b,c,d astfel încât

$$\frac{a+b+c-3d}{d} = \frac{b+c+d-3a}{a} = \frac{c+d+a-3b}{b} = \frac{d+a+b-3c}{c}.$$

Să se determine valoarea produsului $\frac{a+b+c}{d} \cdot \frac{b+c+d}{a} \cdot \frac{c+d+a}{b} \cdot \frac{d+a+b}{c}$.

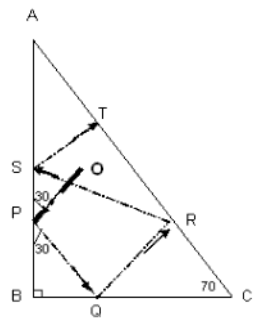
Prof. **Violeta Corbu**, Buzău

G:182. În triunghiul ABC se construieşte înălţimea AD, $D \in (BC)$. Aflaţi lungimea segmentelor AD, AB, BC, AC ştiind că sunt exprimate prin numere naturale consecutive în această ordine .

Prof. **Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti

G:183. Un fascicol luminos OP este reflectat de o suprafaţă netedă cu un unghi egal cu unghiul de incidenţă, adică unghiul format de rază cu suprafaţa fiind de 30^0 şi egal cu unghiul de reflexie, ca în figura alăturată unde $AB \perp BC$ şi $m(\hat{C}) = 70^0$. Ştiind acest lucru şi faptul că drumul razei de lumină, PQRST continuă să se reflecte în acelaşi mod, se cere să se arate că triunghiurile ABC şi ATS sunt asemenea.

Prof. **Adrian Stan** , Buzău



G:184. Se consideră un patrulater convex ABCD şi punctele

$M, N \in Ext(ABCD)$ astfel încât $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{DCA})$, $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{CAD})$, $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{BCA})$, $m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{BAC})$. Să se arate că $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ dacă şi numai dacă triunghiul ANM este isoscel.

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

Clasa a VIII – a

G:185. Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^5 = z^3$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

G:186. Să se arate că dacă numerele naturale a şi b dau resturi diferite nenule prin împărţirea la 3, atunci numărul $a^3 + b^3$ este divizibil cu 9.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:187. Fie a, b, c > 0 cu a + b + c = 1. Arătaţi că $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \le \frac{1}{2}$.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca, Buzău

G:188. Sã se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} < 0{,}2.$$

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

G:189. Descompuneţi în factori numărătorul şi numitorul expresiei de mai jos, iar apoi simplificaţi expresia şi gãsiţi valoarea finală.

$$E = \frac{\left(10^4 + 10^2 + 1\right) \cdot \left(12^4 + 12^2 + 1\right) \cdot \left(14^4 + 14^2 + 1\right)}{\left(11^4 + 11^2 + 1\right) \cdot \left(13^4 + 13^2 + 1\right) \cdot \left(15^4 + 15^2 + 1\right)}.$$

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

G:190. Determinaţi măsura unghiului format de două diagonale nesituate pe aceeaşi faţă a unui cub . (diagonale pentru feţe).

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

G:191. În vârful A, al trapezului isoscel ABCD cu $AC \perp BC$, se ridică perpendiculara pe planul său, pe care se ia un punct P astfel încât PA= 8. Se ştie că AB = 8, CD = 4 şi că diagonalele determină pe linia mijlocie a trapezului trei segmente congruente, $[ME] \equiv [EF] \equiv [FN]$.

a) Să se arate că $PE \perp BC$;

b) Să se calculeze aria triunghiurilor PFB şi PEF.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

- LICEU

Clasa a IX– a

L:98. Fie $A = \frac{\sqrt{\sqrt{2010} - 1} - \sqrt{\sqrt{2010} + 1}}{\left(\sqrt{2010} - 1\right)^2 - \left(\sqrt{2010} + 1\right)^2}$. Se cere să se arate că : a) $\sqrt{2010} - \sqrt{2009} \langle 1$;

b) $A^2 \langle \frac{1}{2^{13}}$;

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L :99. Demonstrati că $\forall a,b,c \rangle 0 \Rightarrow$

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\leq 1.$$

Prof. **Andrei Octavian Dobre,** Ploieşti, Prahova

L :100. Arătaţi că $x^4+10x^3-3x^2-140x+2009>0, \forall x\in\mathbb{R}$. ***Prof.*** **Ligia Struţu,** Buzău

L :101. Să se determine minimul sumei $x+y+z$, ştiind că :
$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{30}+\sqrt{35}+\sqrt{42}=20,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$. ***Prof.*** **Gheorghe Struţu**, Buzău

L :102. Fie $A_n=a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $a_1=1+2+3+...+7$, $a_2=2+3+4+...+8$, $a_3=3+4+5+...+9;..........$. Se cere: a) Determinaţi a_n; b) Arătaţi că A_{10} nu este pătrat perfect.

Prof. **Constantin Dinu**, Buzău

L :103. Să se arate că oricare ar fi ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu $a>0$, are rădăcini reale, dacă $a+b+c\leq 0$. Propoziţia reciprocă este adevărată ?

Prof. **Constantin Apostol**, Rm. Sărat

L :104. Să se arate că ecuaţia $2x^3+2y^3+z^3+t^3+w^5=20$ are o infinitate de soluţii în $(\mathbb{Z}^*)^5$

Prof. **Ovidiu Ţâţan,** Rm. Sărat

L :105. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $4\{x\}^2+[x]=([x]+\{x\})^2+\{x\}$, unde $\{x\}$este partea fracţionară a lui x şi $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca, Buzău

L :106. Să se demonstreze că următoarea inegalitate $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-12}+\sqrt{264-3x}\leq 16\sqrt{3}$ are loc pentru toate valorile lui x pentru care membrul stâng are sens şi să se precizeze aceste valori.

Prof. **Iuliana Traşcă,** Olt

L :107. Dacă avem un triunghi, cu lungimile laturilor numere naturale, perimetrul P şi aria A, atunci au loc relaţiile: $a) A<\frac{P^2}{4}$; $b) A\leq\frac{\sqrt{3}}{36}P^2$. ***Prof.*** **Neculai Stanciu**, Buzău

L :108. Să se arate că $\forall a\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow$ $\sin^2 2a\cdot\cos^3(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6})\cos^3(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6})>\frac{27}{64}\sin a\cdot\sin 3a$.

Prof. **Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Clasa a X – a

L :109. Fie f : $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)+3f(\frac{1}{x})=x^2+\frac{3}{x^2}+8$. Calculati : $S=\sum_{k=3}^{2010}\frac{4}{f(k)-6}$.

Prof. **Ligia Strutu**, Buzău

L :110. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $9^{\log_3(3^x-2^x)}=4^x$ pentru $x>1$. Prof. Gheorghe Dârstaru, Buzău

L :111. Să se arate că numărul $A=\overline{11}_x\cdot\overline{12}_x\cdot\overline{13}_x\cdot\overline{14}_x\cdot\overline{15}_x\cdot\overline{16}_x\cdot\overline{17}_x\cdot\overline{18}_x\cdot\overline{19}_x$ nu poate fi cub perfect oricare ar fi baza de numeraţie x.

Prof. **Neculai Stanciu,** Buzău

L :112. Să se arate că :

$$\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}+(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})^{n}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n}}\right|\le 2,\ (\forall)x\in[-1;1].$$

***Prof.* Neculai Stanciu**, Buzău

L :113. Fie $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}.$ Să se rezolve ecuaţia $f(\lg x)=1$

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L :114. Să se rezolve ecuaţia : $(2^{2x}-2^x+1)(2^{2x}-2^x+2)=12$.

***Prof.* Andrei Octavian Dobre**, Ploieşti, Prahova

Clasa a XI – a

L :115. Se consideră matricea: $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ Să se calculeze $A^n, n\in N$ şi limita fiecărui element a lui A^n pentru $n\to\infty$.

***Prof.* Lenuta Pirlog**, Buzău

L :116. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & 1 & a\\ a-1 & a & a+1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se arate că ecuaţia $x^{2010}+x^{2008}=A^{2009}$, nu are soluţii în $M_3(\mathbb{R})$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L :117. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}x & y & z & v\\ y & x & v & z\\ z & v & x & y\\ v & z & y & x\end{vmatrix}$;

b) Să se demonstreze că dacă numerele $\overline{abcd}$, $\overline{badc}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dcba}$ se divid cu numărul prim p, atunci cel puţin unul din numerele a+b+c+d, a+d-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d, se divid cu p.

***Prof.* Gheorghe Bodea,** Buzău

L :118. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}=4\\ x^2+y^2+z^2=9\\ xyz=\frac{9}{2}\end{cases}$

Prof.* Neculai Stanciu, *Buzău

L :119. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+[x]}{|x|+x-[x]+2}$.

***Prof.* Florentina Popescu,** Buzău

L :120. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(5x+1,2x-3)$.

***Prof.* Natalia Pleşu,**Buzău

L :121. Determinaţi numerele naturale a,b,c astfel încât triunghiul determinat de punctele $A(a;b),\ B(b;c),\ C(c;a)$ să aibă aria egală cu $\dfrac{3}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului ABC să fie punctual $G(3;3)$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Clasa a XII – a

L :122. Sa se calculeze: $\displaystyle\int \frac{x}{2009(1+x)+2010e^{x}}\,\mathrm{dx}$; $\mathrm{x}\in(0,\infty)$

***Prof.* Struţu Gheorghe,** Buzău

L :123. Să se calculeze: $\displaystyle I=\int_1^e \frac{x^2\ln x+2x-1}{x(x\ln x+1)}\,dx$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

L :124. Ştiind că pentru orice funcţie de gradul al doilea are loc relaţia:

$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx=m\cdot f(-2)+n\cdot f(0)+p\cdot f(2)$, să se determine m^3+n^2+p.

***Prof.* Naidin Delia ,** Olt

L :125. Să se arate că $\displaystyle\frac{579}{650}<\int_2^5\frac{3x-4}{4x+5}\mathrm{dx}<\frac{33}{25}$, fără a calcula integrala.

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

L :126. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-3x^2+3x+7=0$. Să se arate că A nu este inversabilă .

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

’’ Caracterul fără inteligenţă poate mult, dar inteligenţa fără caracter nu valorează nimic.’’

CICERO

’’ Rădăcinile învăţăturii sunt amare, dar fructele ei sunt dulci’’

proverb rusesc

5. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA

SCLIPIREA MINTII

În data de **28 Noiembrie 2009**, la Grupul Şcolar ‘’ Costin Neniţescu » a avut loc a patra ediţia a concursului judeţean de matematică “ **Sclipirea Minţii** ”, ce a reunit elevi şi profesori de la 15 şcoli din judeţul Buzău.

Premiile s-au acordat în funcţie de numărul de participanţi şi în funcţie de punctajul obţinut. Astfel, la clasa a V-a au participat un număr de 67 de elevi, 30 la clasa a VI-a, 53 la clasa a VII-a, 21 la clasa a VIII-a, 34 la clasa a IX-a, 20 la clasa X-a, 22 la clasa a XI-a, 17 la clasa a XII-a. Rezultatele obţinute sunt :

Gimnaziu:

Clasa a V-a: **Locul I** – Vlad Mădălin, Grup Şcolar Tehnic « Sf. Mucenic Sava », Berca, Albu Andreea Ruxandra, Şcoala nr. 1 , Nehoiu; **Locul II** - Bratu Raluca, Berca, Paţurcă Florina, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat , Neagu Valentin, Liceul de Artă “Margareta Sterian”, Buzău, Trandafir Dorinel, Şcoala Potoceni, Mărăcineni ; **Locul III** - Neacşu Teodor, Leiţoiu Adrian, Muşat Cătălin, Berca, Stan Andra, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat, Velea Roxana, Liceul de Artă “Margareta Sterian”, Buzău, Curcă Cristian Vlăduţ, Şcoala Bălăneşti, Cozieni, Maican Vlad, Liceul Pedagogic “ Spiru Haret”, Buzau, Ezaru Marius, Scoala nr.8, »Valeriu Sterian» Rm. Sărat, Ungureanu Daniel, Şcoala nr. 1 , Nehoiu

Clasa a VI-a: **Locul I**- Mancu Oana, Borjoc Miruna , Liceul Pedagogic “ Spiru Haret”, Buzau; **Locul II** - Popescu Andreea, Şcoala nr.1 Nehoiu, Vasile Ştefan, Liceul Pedagogic “ Spiru Haret”, Buzau; **Locul III** - Stanciu Adelina, Cristea Irina , Liceul de Artă “ Margareta Sterian”, Buzău, Tudorache Alina, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat, Solomon Miruna, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat, Câmpeanu Cristina, Păduraru Alexandra , Scoala Potoceni, Mărăcineni, Irimia Mălina Ana, Şcoala nr.1 Nehoiu, Gavrilă Vlad, Liceul Pedagogic “ Spiru Haret”, Buzau, Bănică Cosmin, Panaet Nicoleta Alexandra, Liceul cu Program Sportiv « Iolanda Balaş Söter »,

Clasa a VII- a: **Locul I**- Pîslaru Monica, Şcoala nr.8, “ Valeriu Sterian”, Rm. Sărat, Galan Lorena, Şcoala nr.6, Buzău; **Locul II**- Tatu Horaţiu Ştefan, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat, Axinte Alin Petrică, Şcoala Bălăneşti, Cozieni, Dinică Mariana, Şcoala nr.8, “ Valeriu Sterian”, Rm. Sărat, Argăseală Ciprian, Şcoala nr.6, Buzău; **Locul III**- Rînciog Cătălina, Şcoala nr.15, “George Emil Palade”, Buzău, Despescu Diana Elena, Şcoala nr. 1, Nehoiu, Soare Georgiana Anelis, Scoala Potoceni, Mărăcineni;

Clasa a VIII-a: **Locul I** – Dragomir Florin, Grup Şcolar Tehnic ’’Sf. Mucenic Sava’’, Berca, Aktug Nebahat, Şcoala nr.8, “ Valeriu Sterian”, Rm. Sărat; **Locul II**- Coman Eleonora, Berca, Iuga Alexandru Costin, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat, Zăinescu Dana, Şcoala nr.15, "George Emil Palade", Buzău, Târhoacă Ana Maria, Scoala nr.5, »V.Cristoforeanu » Rm. Sărat; **Locul III**- Dodan Bogdan, Dogaru Iulian Alexandru, Grup Şcolar Tehnic ''Sf. Mucenic Sava'', Berca, Petre Antonia, Răduca George , Şcoala nr. 1, Nehoiu;

Liceu:

Clasa a IX-a: **Locul I**- Tabără Ştefan, Grupul Şcolar '' Costin Neniţescu'', , Trestianu Daniel, Grupul Şcolar Agricol, Rm. Sărat; **Locul II**- Jugănaru Mădălina, Grigore Ştefan Alexandru, Liceul cu Program Sportiv « Iolanda Balaş Söter », Buzău, Mândruţă Alina, Colegiul Economic ; **Locul III**- Dumitrache Emanuel, Mititelu Aurora, Liceul de Artă "M. Sterian", Tăbăcaru Maria, Colegiul Economic , Modoran Mădălina, Grup Şc. Th. « Sf. Mc Sava », Berca, Nica Georgian Valentin, L P S « Iolanda Balaş Söter », Lăteaţă Mădălina, Olteanu Cosmin Robert, Gr Şc '' Costin Neniţescu''.

Clasa X-a: **Locul I-** Nicolae Elena, Chiriţă Oana, Colegiul Economic Buzău,; **Locul II** - Mînzală Andra, Colegiul Economic, Gogoci Miruna Cristina, L P S « I B Söter »; **Locul III** - Vlad Iulian , Gr Şc '' C. Neniţescu'', Ciomag Alina, Costache Raluca , Liceul de Artă, Rînceanu Alexandra, Stan Nicolaie, Colegiul Economic, Vergu Mihai Florin, L P S ''I. B. Söter'' .

Clasa a XI-a: **Locul I**- Iordache Mariana, Gr Şc '' C. Neniţescu'', Verche Adina Mihaela, L P S ''I. B. Söter'' ; **Locul II** - Gherasim Andrei, Colegiul Economic, Mihalache Roxana, Stanga Florentina, L P S ''I. B. Söter''; **Locul III**- Anghel Cristina, Gr Şc '' C. Neniţescu'', Dascălu Ramona, Colegiul Economic, Silivăstru Florin, Stanciu Mădălina, L P S ''I. B. Söter'' .

Clasa a XII-a: **Locul I**- Păduraru Georgiana, Colegiul Economic, Burlacu Alexandra Monica, Gr Şc '' C. Neniţescu''; **Locul II**- Briceag Cristian, Androne Cătălina, Gr Şc '' C. Neniţescu'', Stere Silvia, Colegiul Economic, Popescu Emilia, L P S ''I. B. Söter'' ; **Locul III**- Ene Laurenţiu, Gr Şc '' C. Neniţescu'', Nechifor Elena, Constantin Larisa, Colegiul Economic. De asemenea s-au acordat şi o serie de menţiuni.

Următoarea ediţie a concursului se va desfăşura în data de **6 Noiembrie 2010** la una din şcolile partenere.

'' Omul inteligent are ochii unui elefant.''
proverb bengalez

6. Caleidoscop matematic

O problemă de magie-matematică

Pentru orice dată din calendar, notată de exemplu x, avem ca corespondent una şi numai una din zilele Luni, Marţi, Miercuri, Joi, Vineri, Sâmbătă şi Duminică, notate de exemplu y. Rezultă că putem defini o funcţie $y = y(x)$.

Se cere:

a) să găsiţi formula $y = y(x)$;

b) să determinaţi ziua în care "pică" data de 20.05.1941 (ziua de naştere a domnului profesor Constantin Apostol), respectiv data 10.04.1942 (ziua domnului prof. Rusu Constantin);

c) să determinaţi ziua în care v-aţi născut şi să întrebaţi părinţii(sau oricine ştie, sau vezi telefonul mobil) pentru confirmare.

propusă de prof. Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie.

a) Avem şapte zile(Luni, Marţi, Miercuri, Joi, Vineri, Sâmbătă şi Duminică), doisprezece luni şi mulţi ani(dintre care unii bisecţi). Formula căutată trebuie să ţină seamă de toate acestea:

(1) $y \equiv \left(A + \left[\frac{A}{4}\right] + L + Z\right)(\bmod 7)$, pentru anii 1900,…,1999;

(2) $y \equiv \left(A + \left[\frac{A}{4}\right] + L + Z - 1\right)(\bmod 7)$, pentru ani 2000,…,2099; unde am notat prin $A =$ numărul natural format din ultimile două cifre ale anului căutat; $\left[\frac{A}{4}\right]$ = partea întreagă a numărului $\frac{A}{4}$; $Z =$ numărul natural care reprezintă cifra căutată şi

Luna	Ian	Feb	Mar	Apr	May	Iun	Iul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
L	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

$L =$ cifra corespunzătoare lunii căutate(vezi tabelul alăturat.

(3)

Tabelul de mai sus se poate reţine uşor: 144 - pătrat perfect; 025 – pătrat perfect; 036 – pătrat perfect; 146=144+2.
Deoarece y este congruent modulo 7, avem $y \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

(4). Facem asocierea: $0 \to$ Sâmbătă; $1 \to$ Duminică; $2 \to$ Luni; $3 \to$ Marţi; $4 \to$ Miercuri; $5 \to$ Joi; $6 \to$ Vineri.
Remarcă. În anii bisecţi, ziua din lunile ianuarie, respectiv, februarie corespunde cifrei $y-1$.
b) Se aplică metoda descrisă la punctul a). Ziua corespunzătoare datei 20.05.1941 se află astfel:
restul împărţirii: $\frac{41+10+2+20}{7}=\frac{73}{7}$, este $y=3$, iar din (4) şi remarcă, rezultă, că ziua căutată este **Marţi .**
iar ziua corespunzătoare datei 10.04.1942 se află astfel:
restul împărţirii: $\frac{42+10+0+10}{7}=\frac{62}{7}$, este $y=6$, iar din asocierea (4) rezultă că ziua căutată este **Vineri**

Calendarul gregorian, pe care îl folosim în prezent, a fost introdus în Europa în 1582. Conform acestuia, Pământul face o orbită completă în 365,25 de zile, cu o eroare de 0,0003 %, o măsurătoare destul de exactă, având în vedere că a avut loc în urmă cu 400 de ani. **Calenadrul mayaş** este derivat din cel al predecesorilor lor, **olmecii**, a căror cultură datează cu 3000 de ani mai devreme. Aceştia, fără a avea la îndemână instrumentele secolului XVI european, au reuşit să aproximeze un an în 365,2420, deci cu o eroare de 0,0002 %, o măsurătoare mult mai precisă şi, mai ales, făcută mult mai devreme.
Notă. Cele două formule de calcul (calendarul perpetuu) au fost date de cel mai mare geniu al omenirii în sensul că a avut cel mai mare IQ (între 250 şi 300)- **William James Sidis(**1898 – 1944).Se pare că după unii cel mai mare IQ printre matematicieni l-a avut **Gottfried Willhelm von Leibniz – 210** iar după alţii că IQ-ul cel mai mare dintre matematicieni l-ar fi avut **Srinivasa Ramanujan (**1887 – 1920) – numai că nu a putut fi determinat deoarece era foarte slab la orice altceva în afară de matematică.

„ Un om care nu munceşte, nu ştie să preţuiască munca altuia. ''
Alexandru Vlahuţă

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut al cincilea număr al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Elevii care doresc să trimită rezolvările problemelor, trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar în funcţie de posibilităţi, elevii cu cele mai mari punctaje vor fi premiaţi cu diplome şi cărţi.

Facem pe această cale o invitaţie către toţi profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, iar cei cărora li se publică articole să comande un număr mai mare de exemplare, circa 15-20 de reviste.

Data finală până când profesorii şi elevii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru numărul **6** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **5 Octombrie 2010**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Redacţia

Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău **Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău, Filiala Rm. Sărat**

Invitaţie

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA

SCLIPIREA MINTII

Ediţia a V-a

Clasele V-XII **6 Noiembrie 2010**

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII “Vasile Cristoforeanu” Rm. Sărat:
Clasa a VI-a : 28p-Buterez David, Sîrbu Claudiu, 20p- Chiriac Andrei,Doni Alina, 18p- Pârlog Valentin, Baciu Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena ,Vlad Oana Andreea, Taşcă Valentin, 10p- Banu Calinuţ ; **Clasa a VII-a :** 19p- Sitaru Bogdan, Andronescu Alexandra, 16p- Tatu Horaţiu Ştefan, Ursică Bogdan, Chiriac Corina, Barbu Ionelia; **Clasa a VIII-a** : 16- Iuga Alexandru Costin, Alexandrescu Mihai,Ţurloiu Sergiu,Zamfir Ionuţ,Tatu Alexandru, **Prof. Marin Simion;**

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 8, “ Valeriu Sterian”Rm. Sărat:
Clasa a VII-a: 19p-Alecu Cristian, Dumitru Dragoş, 17p-David Alexandra, Ionescu Cătălin; **Clasa a VIII-a:** 23p-Aktug Nebahad, Untea Alice**, Prof Panaitescu Ana.**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 15, „George Emil Palade”, Buzău:
Clasa a VII-a: 17p-Adam Anca Nicoleta, Aldea Teodora, Clinceanu Loredana, Enică Sebastian, Grozea Cosmin, Lişman Simona, Marin Andrei ; **Clasa a VIII-a**: 20p-Ene Cătălin, Radu Jonathan, Roşu Florin, Drăguşin Gabriela, **Prof. Stanciu Neculai.**
Scoala cu clasele I-VIII, Smeeni, Buzău:
Clasa a V-a: 15p- Bulgarea Andreea,Ciurea Monica, 14p- Paun Dragos, Dumitrascu Nicolae. **Clasa a 6- a**: 18 p- Scarlat Roxana, 16 p- Vasile Cristina, Popa Ramon, Velicu Gabriel, Marin Valentina, Minea Diana. **Clasa a 7-a**: 19p Dragomir Alexandru, Cristea Maria, Barzoi Madalina. **Clasa a 8-a**: 22p- Buzatu Camelia, 21p- Marin Ana, Dumitru Cristina, Stan Marieta**.** **Prof. Stănescu Ion**

Şcoala cu clasele I-VIII, nr.1 Nehoiu:
Clasa a VIII-a: 18p- Petre Antonia; **Clasa a VI-a**: 18p- Irimia Mălina, **Prof. Prefac Vasile.** 19p-Petre Andreea, **Prof. Prefac Maritanţa.**

Liceul de Artă „ Margareta Sterian”, Buzău:
Clasa a V-a: 17 p- Constantin Alexandra, Ţuclea Laura, Argăseală Gabriela, Velea Roxana, Stanciu Georgian, **Clasa a VI-a**: 20p- Cristea Irina, Stanciu Adelina; **Clasa a IX-a**: 18 p- Dumitrache Emanuel, Mititelu Aurora, Enescu George, Vasile Smaranda, **Clasa a X-a**: 15p- Ciomag Alina, Costache Raluca, **Prof. Dibu Daniela**.

Şcoala cu clasele I-VIII Potoceni:
Clasa a V-a: 16p- Anton Cristina, Bereveanu Anca, Catinca Andreea; **Clasa a VI-a**: 18p- Câmpeanu Bianca Andreea,Luntraru Denisa, Păduraru Alexandra, Scântei Bianca, Caloian Bogdan; **Clasa a VII-a**: 19p- Câmpeanu Iulian, Popescu Mirela, Sava Ionuţ, Soare Anelis, **Prof. Moise Violeta**

Colegiul Economic Buzău:

Clasa a IX-a: 19 p- Marin Adina, Mândruţă Alina; **Clasa a XII-a**: 18 p- Păduraru Georgiana, **Prof. Dinu Constantin**.

Grupul Şcolar „ Costin Neniţescu", Buzău:

Clasa a IX-a: 20p- Zaharia Mădălina, Şolcă Claudia, Bisoceanu Aura, Soare Manuela **Prof. Stan Adrian**. Borcău Georgiana, **Prof. Pleşu Natalia**, Olteanu Robert, Frăţiloiu Adrian, Bucur Liviu, Feraru Viorel, **Prof. Popescu Florentina**. **Clasa a X-a**: 18p- Vlad Iulian, , Dinu Alin, Antemir George, 14p- Vlad Ana Maria, Dima Octavian, Hurloi Maria, Anghel Sorin, Cojanu Maria, Nica Elena, Berechet Ionut, **Prof. Stan Adrian**. 16p- Iordache Mariana, Ispas Alina, Semian Ionela, Iordache Ioana, Anghel Cristina, **Prof. Pleşu Natalia**; **Clasa a XII-a**: 17p-Burlacu Alexandra, Tudor Maria, Ungureanu Florin, **Prof. Pleşu Natalia**;

Grupul Şcolar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava", Berca:

Clasa a V-a: 16p- Neacşu Teodor, Dascălu Andreea, Vlad Mădălin, Pascu Bianca, Ţiboacă Doina, Neagu Cezar, Bratu Raluca, Bahudu Roxana, Vasile Nichi, Panaete Alexandra, Dinu Andrei, Alecsandrescu Daniel, Leiţoiu Elena, Leiţoiu Adrian, **Prof. Lupşan Rodica.** **Clasa a VIII-a:** 24p**-** Dragomir Florin, Anton George, Dogaru Iulian, Coman Eleonora, Ciocan Marian **Prof. Dârstaru Gheorghe.**

Şcoala cu clasele I-VIII " Gh. Popescu", Mărgineni – Slobozia, Olt:

Clasa a V-a: 8p- Ene Denis, Troană Valentina, Traşcă Cătălina, Ghiţă Alin, Anca Ionela**; Clasa a VI-a**: 10p- Marinescu Dorina, Matei Petrişor; **Clasa a VIII-a**: 10p – Duţu Cristina, **Prof. Iuliana Traşcă**.

Scoala cu clasele I – VIII "Ion Creangă" Bacău:

Clasa a V-a : 8p **-** Popescu Cezara, Chiper Raluca, Herciu Mădălina, Mocanu Alexandru; **Clasa a VII-a: 10p -** Moruz Alexandru, Militaru Elena, Popa Dragoş **Prof. Constantin Eugen Păduraru.**

Colegiul Naţional " Fraţii Buzeşti", Craiova:

Cl. a VI-a : 8 p- Vârlan Leonard, **prof. Mioara Ionescu**; Clasa a VII-a: 8p- Ene Cristina, **Prof. Drd. Ramona Bălăşoiu**;

Şcoala cu clasele I-VIII, "Traian", Craiova:

Cl. a VI-a : 8p- Sima Oana , Ţuculină Gabriel , **prof. Basarab Constantin**; **Clasa a VII-a** : 8p- Vuple Vlad, **Prof. Basarab Marlena;**

Colegiul Naţional " Carol I", Craiova:

Cl. a VIII-a – Rădulescu Adrian – C.N. "Carol I" – **prof. Carmen Georgescu.**