SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XIII, NR XXVI, 2020

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII SI SERVICII ", BUZĂU

SCLIPIREA MINTII 26

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XIII, Nr. XXVI, DECEMBRIE 2020, BUZĂU

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII............................ 1
ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE................................ 7
PROBLEME REZOLVATE.............................. 19
PROBLEME PROPUSE 39
QUICKIES 46
CALEIDOSCOP MATEMATIC 50

GÂNDEȘTE CORECT

REDACTIA
Liceul Tehnologic „ Meserii și Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

„O ecuaţie matematică nu înseamnă nimic pentru mine dacă nu exprimă un gând al lui Dumnezeu.”
S. A. Ramanujan(1887-1920)

1. Istoria matematicii

SRINIVASA AIYANGAR RAMANUJAN (1887- 1920)

de **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

În acest an comemorăm o sută de ani de la moartea lui **Srinivasa Aiyangar Ramanujan**, unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al XX-lea.

S-a născut pe 22 decembrie 1887, în mica localitate Erode, statul Tamil Nadu, în sudul Indiei la 400 km de Madras şi s - a stins din viaţă pe 26 aprilie 1920 , în oraşul Kumbakonam situat la 260 km de Madras.

Neavând studii speciale de matematică , Ramanujan a obţinut rezultate deosebite în domeniul analizei matematice, teoriei numerelor, seriilor infinite şi al fracţiilor continue.

Ramanujan a fost educat, mai ales de mama sa, în tradiţia cultului religios brahmanic care recomanda hrana vegetală şi participarea la procesiunile religioase ale templului. Acestea au influenţat formarea şi dezvoltarea ca matematician a tânărului Ramanujan. La vârsta de zece ani a absolvit şcoala primară din Kumbakonam(unde se stabilise cu familia), dovedind aptitudini deosebite pentru matematică, apoi urmează studiile liceale la o şcoală medie din localitate. În anul 1904 se înscrie la Colegiul din Kumbakonam dar după doi ani se retrage , el interesându-se doar de matematică şi neglijând celelalte materii ale programei.

La 13 ani, preocupările lui vizau studiul trigonometriei iar la 15 ani găsea propriile soluţii în rezolvarea ecuaţiilor de gradul trei. La vârsta de 16 ani a intrat în posesia celebrei lucrări „ A Synopsis of Elementary Results in Pure Applied Mathematics”(O sinopsisă a rezultatelor elementare în matematica pură şi aplicaţii) a lui George Shoobridge Carr, o colecţie cu 6165 teoreme şi formule fără dovezi şi explicaţii. Alte cărţi cu puternică influenţă asupra formării lui Ramanujan ca matematician , au fost „Algebra” lui Chrystal şi „Funcţii eliptice” a lui Greenbill , lucrări din care a obţinut informaţii preţioase în teoria numerelor şi teoria funcţiilor analitice.

În 1904, la 17 ani, **Ramanujan** investighează independent numerele lui Bernoulli şi calculează constanta C a lui Euler-Mascheroni cu 15 zecimale exacte.

După obiceiul indian, tânărul **Ramanujan** se căsătoreşte în 1909 cu o fetiţă de 10 ani , Srimithl Janaki(1899-1994), dar ceremonia de căsătorie(la care tatăl său nu participase) a avut doar un fast religios. Pentru întreţinerea familiei oferă meditaţii studenţilor şi interacţionează cu matematicieni conaţionali în cadrul Societăţii indiene de Matematică.

Trebuie să spunem că pentru formulele şi teoremele pe care le exprima verbal sau în scris, Ramanujan nu avea demonstraţii şi justificări, acestea fiind rezultatul intuiţiei sale sub sugestia unei zeiţe brahmane Narnagiri Thayar. El susţinea cu convingere:„***o ecuaţie pentru mine, nu are niciun sens, dacă nu reprezintă un gând al lui Dumnezeu”.***

Prima lucrare oficială a lui **Ramanujan** a apărut în 1911 pentru „Journal of the Indian Mathematics Society” şi în care se prezentau proprietăţi ale numerelor lui Bernoulli(de exemplu numitorii fracţiilor ce reprezintă numere Bernoulli sunt divizibili cu 6. **Ramanijan** a conceput şi o metodă de calcul a numerelor Bernoulli B_n, bazată pe numere Bernoulli anterioare).

În 1913 , **Ramanujan** trimite o scrisoare în Anglia renumitului profesor Godfrey Harold Hardy(1877-1947) de la Colegiul Trinity al Universităţii Cambridge, scrisoare în care menţionează că nu a făcut universitatea şi după şcoala medie studiază matematica singur. În scrisoare ataşează şi 120 de formule necunoscute şi îl roagă pe Hardy să le publice dacă i se par interesante. Între cei doi s-a legat o conversaţie iar Hardy este uimit de potenţialul extraordinar pe care îl conţineau ideile tânărului indian .

Hardy îşi determină colegul John Edensor Littlewood (1885-1977), să-l cheme pe Ramanujan în Anglia, oferindu-i o bursă. Astfel, plin de speranţe, geniul autodidact, în aprilie 1914 la vârsta de 27 de ani, își ia rămas bun de la soție și copil și ajunge în Anglia la Cambridge unde le arată notițele sale lui Hardy și Littlewood. Aceștia ajung la concluzia că unele din teoremele indianului existau deja(deși el nu știa), dar altele erau cu totul noi.

Între anii 1914 și 1919, cât a stat în Anglia , **Ramanujan** și-a publicat, în patru caiete scrise de el de mână, mare parte din lucrările sale, cu sprijinul prietenului Hardy, care spunea : „*Limitările cunoașterii sale sunt tot atât de surprinzătoare ca și profunzimea de care dă dovadă. Acest om care poate rezolva ecuații modulare, teoreme complexe și a cărui abilitate o depășește pe cea a oricărui matematician contemporan , nu poate fi înrolat în sistemul de învățământ și pus să reia matematicile de la început, în mod organizat. Pe de altă parte, sunt anumite aspecte în privința cărora nu are voie să rămână un ignorant. Așa că, încerc să îl învăț și reușesc într-o oarecare măsură, deși recunosc că eu sunt cel care învață mai mult de la el, decât invers*”.

Caietele 1 , 2 și 3 au fost publicate în 1957, la Institutul Tata pentru Cercetări Fundamentale (TIFR) la Mombai în India, iar în 2011 la 125 ani de la nașterea lui Ramanujan, TIFR a publicat caietele color în două volume într-o ediție de colecție.

Grație lucrărilor sale, **Ramanujan** primește diploma universitară în 1916, iar în 1918 absolvă Trinity College cu diploma de doctorand în cercetare. În 1917, la vârsta de 30 de ani este admis în Societatea de Matematică din Londra și apoi este acceptat ca profesor la Trinity College și membru al Royal Society of London. A fost unul dintre cei mai tineri membri ai acestei societăți și primul profesor indian la Trinity College.

Aceste succese au avut un efect negativ asupra sănătății sale (în 1917 se îmbolnăvise grav), şi totuşi la finele anului 1918 a lucrat intens și cu rezultate remarcabile.

În descoperirile sale matematice, **Ramanujan** a obținut peste 4000 de rezultate, majoritatea identități și ecuații, proprietăți ale numerelor compuse foarte mari precum și rezultate originale și neconvenționale cum ar fi numărul prim Ramanujan, funcția theta Ramanujan, constanta Ramanujan, funcția de partiție și asimptotele sale, cercetări asupra funcției gama, formele modulare, seriile divergente, seriile hipergeometrice, multe dintre rezultatele sale deschizând noi domenii de cercetare.

În anul 2002, câțiva matematicieni, folosind aparatură modernă de calcul, au reluat formulele bizare ale lui Ramanujan și au ajuns la concluzia că sunt adevărate și aplicabile. Astfel formulele asimptotice ***Hardy-Ramanujan*** pentru partiții au aplicații în fizică pentru găsirea funcțiilor de partiție cuantică a nucleelor atomice iar cu ajutorul unor rezultate ale lui Ramanujan s-a putut deduce comportamentul găurilor negre în univers, aplicații despre care în 1920 nimeni nu vorbea.

Hardy afirma despre **Ramanujan** că „*nu și-a întâlnit niciodată egalul și nu-l poate compara decât cu Euler sau Jacobi* “ și menționa: „*Se va întoarce în India cu o recunoaștere științifică și o reputație pe care niciun indian nu a mai cunoscut-o până acum și sunt sigur că India îl va aprecia acum la adevărata sa valoare”.*

Într-adevăr , **Ramanujan** s-a întors în India pe 13 martie 1919 și cu sănătatea precară (avea tuberculoză), în ciuda tratamentelor intense și competente aplicate de medicii englezi, se stinge din viață pe 26 aprilie 1920, în Kumbakonam, la vârsta de 32 de ani.

India îl consideră unul dintre marii săi fii și a proclamat ziua nașterii lui, 22 decembrie, ca fiind Ziua Națională a Matematicii.

În continuare prezentăm, fără demonstrații, câteva din rezultatele remarcabile ale geniului indian:

Identități numerice cu radicali sau cu partea întreagă:

$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+.....}}}}=3$ și mai general $\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+.....}}}}=n+1,\ \forall n\geq 2;$

$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+.....}}}}=4,$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1};$

$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right],\ \forall n\in\mathbb{N};$ $\qquad$ $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right],\ \forall n\in\mathbb{N};$

Identități algebrice:

$$(3x^2+5xy-5y^2)^3+(4x^2-4xy+6y^2)^3+(5x^2-5xy-3y^2)^3=(6x^2-4xy+4y^2)^3.$$

În particular pentru x = 1 și y = 0 obținem egalitatea cunoscută $3^3+4^3+5^3=6^3$;

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2+6=\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{y}\right)^2;$$

Egalități trigonometrice numerice:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}; \qquad \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}},\ (*).$$

Expresii numerice prin care se aproximează constanta π și serii numerice care permit aproximări ale lui π :

$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3{,}141640....\cong\pi$, aproximare a lui π cu 3 zecimale exacte;

$\frac{9801\sqrt{2}}{4412}=3{,}1415927300....\cong\pi$, aproximare cu 6 zecimale exacte (**);

$\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=3{,}1415926525......\cong\pi$, aproximare cu 8 zecimale exacte găsită în 1914;

Constanta lui Ramanujan $e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743{,}99999999999925007...$ are o valoare foarte apropiată de numărul natural $262537412640768744=640320^3+744$ (primele 12 zecimale sunt date de cifra 9), deci $e^{\pi\sqrt{163}}\cong 744+640320^3$ şi de aici găsim $\pi\cong\frac{\ln(744+640320^3)}{\sqrt{163}}=3.141592653589793238462643383279720 0...$ adică o aproximare a lui π cu 30 de zecimale exacte;

În **1910** , **Ramanujan** obține seria $\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n\geq 0}\frac{(4n)!(26390n+1103)}{(n!)^4 396^{4n}}=\frac{1}{\pi}$, cu o convergenţă foarte rapidă și acest lucru a reprezentat baza pentru unii dintre cei mai rapizi algoritmi utilizați în prezent pentru calculul valorii lui π Ținând cont de (**), deja din primul termen al acestei serii se găsește o aproximare cu 6 zecimale exacte a lui π ;

Seriile $1-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\cdot\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+....+(-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot......\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot......\cdot(2n)}\right)^3+......=\frac{2}{\pi}$ şi

$$1+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\cdot\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\cdot\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+....+(8n+1)\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot......\cdot(4n-3)}{4n}\right)^4+......=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\ \Gamma^2(\frac{3}{4})},$$

(unde Γ reprezintă funcţia gama) permit de asemenea aproximări pentru π .

Identitățile Rogers(1897)-Ramanujan(1915):

Pentru $|q|\langle 1$ există identitățile:

$$G(q)=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+.....=\frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)....},$$

$$H(q)=1+\frac{q^2}{1-q}+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{12}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+.....=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^7)(1-q^8)....},$$

Interesant că există fracția continuă:

$\frac{H(q)}{G(q)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\dots}}}}$ şi pentru q =1 se obţine numărul de aur $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1{,}618....$

Ramanujan a considerat și fracțiile continue $R(q)=\cfrac{\sqrt[5]{q}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\ldots}}}}$ şi $S(q)=-R(-q)$, unde notațiile ,

unde notațiile R și S semnifică primele litere ale numelui său.
El stabilește egalitățile următoare , în care apar celebrele numere iraționale $\pi,\ e$ şi φ.

$$R(e^{-2\pi})=\sqrt{2+\varphi}-\varphi=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}-\frac{\sqrt5+1}{2} \text{ şi } S(e^{-\pi})=\sqrt{2-\overline{\varphi}}-\overline{\varphi}=\sqrt{2-\frac{1}{\varphi}}-\frac{1}{\varphi}=\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}-\frac{\sqrt5-1}{2}.$$

Altă identitate în care apar $\pi,\ e$ şi suma unei serii cu o fracţie continua infinită este:

$$1+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+......+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+....}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

Teorema lui Hardy-Ramanujan (1918) , pentru partiții:
Numărul p(n), al partițiilor unui număr natural nenul n , este dat de formula:

$$p(n)=A_n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}},$$ unde $$A_n=\frac{1}{2\pi\sqrt2}\left(\frac{\pi}{\sqrt6(n-\frac{1}{24})}-\frac{1}{2(n-\frac{1}{24})^{\frac32}}\right)$$ sau, mai simplu

$p(n)\cong\frac{1}{4n\sqrt3}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{13}}}$. Exemplu: p(5)= 7 deoarece 5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1.

Numărul Hardy –Ramanujan este 1729 și reprezintă cel mai mic număr care se poate scrie în două moduri ca sumă a două cuburi perfecte distincte: $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$.
El mai are și proprietatea că este divizibil cu suma cifrelor deoarece 1+7+2+9=19 și $1729=19\cdot91$.

Ecuația diofantică Ramanujan-Nagel.

În 1913 Ramanujan și în 1948 norvegianul Nagel, au arătat că ecuația diofantică $x^2+7=2^n$, are în numere naturale doar soluțiile $(x;n)\in\{(1;3),(3;4),(5;5),(11;7),(181;15)\}$.

Forma pătratică ternară a lui Ramanujan.

În 1916 , Ramanujan a studiat numerele care se pot exprima în forma pătratică ternară $x^2+y^2+10z^2$ unde $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

El a arătat că numerele pare care nu pot avea această formă , sunt de tipul $4^\lambda(16\mu+6)$ cu $\lambda,\mu\in\mathbb{N}$ și că printre numerele impare care nu pot avea această formă sunt următoarele 16 numere: 3,7,21,31,33,43,67,79,87,133,217,219,223,253,307 și 391. Ulterior s-a descoperit încă două numere impare 679 și 2719 care nu se pot reprezenta în formă ternară **Ramanujan**.

În prezent se știe că orice număr impar de forma 10n+5 este reprezentabil în formă ternară Ramanujan și că există doar un număr finit de întregi impari care nu se pot reprezenta în forma $x^2+y^2+10z^2$. Matematicienii Ken Ono și K.Soundarjan au formulat conjectura că doar cele 18 numere menționate nu sunt reprezentabile în această formă.

S-a mai dovedit că dacă celebra ipoteză a lui Riemann este adevărată, atunci și conjectura Ono-Soundarjan este adevărată.

Se știe că funcția zeta, definită prin $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ pentru numerele complexe $s\neq1$ are zerouri în numere întregi pare negative iar acestea se numesc rădăcini triviale.

Ipoteza lui Riemann afirmă că partea reală a oricăror rădăcini netriviale ale funcției zeta a lui Riemann este $\frac{1}{2}$. A fost formulată de marele matematician german Bernard Riemann în anul 1859 și nu a fost demonstrată până în prezent. Este considerată una din cele 7 probleme de matematică ale mileniului iar pentru rezolvarea ei se acordă un premiu de 1 000 000 de dolari de către Institutul Matematic Clay.

Încheiem prin a enunța încă o teoremă a lui Ramanujan din teoria ecuațiilor algebrice și a identităților iraționale:

Dacă ecuația $x^3-ax^2+bx-1=0$ cu $a,b\in\mathbb{R}$ are rădăcinile reale $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, atunci $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=\sqrt[3]{3t+\alpha+6}$, unde $t^3-3(a+b+3)t-(ab+6(a+b)+9)=0$.

Ca o aplicație , ecuația $x^2-3x-1=0$ are rădăcinile reale $\alpha=2\cos\frac{\pi}{9},\ \beta=-2\cos\frac{2\pi}{9}$ și $\gamma=-2\cos\frac{4\pi}{9}$. Aplicând teorema lui Ramanujan se obține egalitatea trigonometrică irațională $\sqrt[3]{2\cos\frac{\pi}{9}}-\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}}-\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}}=\sqrt[3]{6-3\sqrt[3]{9}}$, care este o altă variantă pentru egalitatea (*).

Bibliografie:
1. Miron Oprea- „***Două genii matematice***” , Editura LVS Crepuscul , 2014, Ploiești.
2. Wikipedia

O demonstraţie fără cuvinte

de Titu Zvonaru, Comăneşti

Schur + (AM-GM) $\Rightarrow$ Muirhead

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\quad \textit{(Schur)}$$

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc\quad \textit{(AM-GM)}$$

$$2(a^3+b^3+c^3)\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\quad \textit{(Muirhead)}$$

Dedication

On January 27th, 2021, **Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu** – DMBG, as we calls him - will be 85.

His long career was, and continue to be, extremely fruitful and influential for students and teachers - lovers of mathematics from all over the world.

DMBG always regarded and practical mathematics as a whole – this is a lesson he served us constantly.

The activity of **DMBG** (for more details see the references below) proves that he didn't preach in the desert.

This Issue of this Math Journal is a tribute from members of younger generations who directly or indirectly benefitted from DMBG's passion for mathematics.

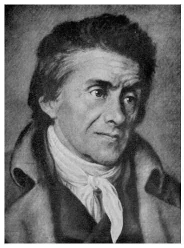
Happy birthday, DMBG !

Editorial board

References

1. M. Bencze, N. Stanciu, N. Ivăşchescu, *Profesorul Dumitru Bătineţu-Giurgiu la 80 de ani*, Alpha, An XXVI, Nr. 1, 2016, 5.
2. M. Bencze, N. Stanciu, *Profesorul Dumitru Bătineţu-Giurgiu la 80 de ani*, Sclipirea Minţii, An IX, Nr. 17, 2016, 9.
3. M. Bencze, N. Stanciu, *Dumitru Bătineţu-Giurgiu*, Octogon Mathematical Magazine,Vol. 19, No. 1, April 2011, pp 125-148.
4. N. Stanciu, *Profesorul D.M. Bătineţu-Giurgiu la 75 de ani*, Gazeta Matematică, seria B, nr. 7-8-9 / 2011.
5. N. Stanciu, *Profesorul D.M. Bătineţu-Giurgiu un matematician notabil*, Revista MateInfo.Ro, noiembrie, 2011.

„ **Intuiţia cea mai complexă se compune din elemente simple.**
De îndată ce cineva le-a înţeles,
studiul cel mai complicat devine simplu .”
J. H. Pestalozzi
(1746- 1827)



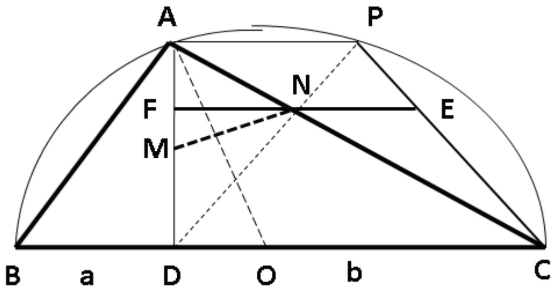
2. Articole şi note matematice

Inegalităţi algebrice demonstrate geometric

de Adrian Stan, Buzău

1. Inegalitatea mediilor $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b} \le \dfrac{a+b}{2},\ \forall a,b\in\mathbb{R}^*_+$.

Demonstraţie:



Vom lua un semicerc de centru O şi rază $\dfrac{a+b}{2}$ în care vom înscrie un triunghi dreptunghic, ABC. Fie $AD\perp BC$ şi notăm $BD=a,\ DC=b$ atunci $AD^2=a\cdot b\Rightarrow AD=\sqrt{ab}$ iar mediana $AO=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a+b}{2}$.

În triunghiul $ADO,\ AO$ este ipotenuză deci $AO\ge AD$ adică $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$. (1).

Fie $AP\,||\,DC$, $AP\equiv BD$ şi $AC\cap DP=\{N\}$ atunci patrulaterul $ABDP$ este paralelogram cu $DN\perp AC$.

În triunghiul ADC fie $F\in[AD]$ astfel încât $FE\,||\,DC,\ N\in[FE]$ şi din $FN\,||\,DC\Rightarrow\dfrac{FN}{DC}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$.

Din $NE\,||\,DC\Rightarrow\dfrac{NE}{DC}=\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{PE}{PC}$.

În trapezul PADC, din $FE\,||\,DC\Rightarrow\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{PE}{PC}\Rightarrow\dfrac{FN}{DC}=\dfrac{NE}{DC}\Rightarrow FN=NE$ (*)

Din $NE\,||\,AP\Rightarrow\dfrac{NE}{AP}=\dfrac{NC}{AC}$ şi $\dfrac{FN}{DC}=\dfrac{AN}{AC}\Rightarrow\dfrac{NE}{a}+\dfrac{FN}{b}=\dfrac{NC}{AC}+\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AC}{AC}=1$.

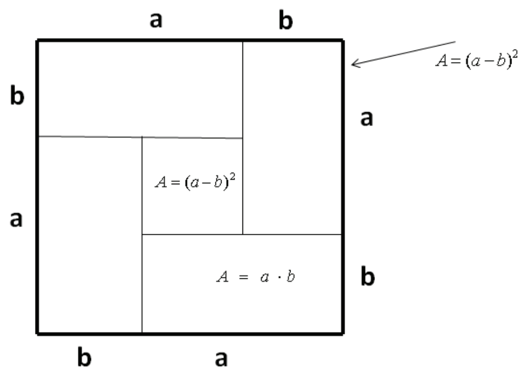
Din (*) rezultă $NE\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1\Rightarrow NE=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\Rightarrow FE=2NE=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$. În triunghiul AND dreptunghic în N fie M mijlocul lui $[AD]$ de unde rezultă NM este mediana în acest triunghi şi $NM=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$.

Cum $NF \le NM \Rightarrow 2NF \le 2NM \Rightarrow \quad FE \le AD \Rightarrow \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.

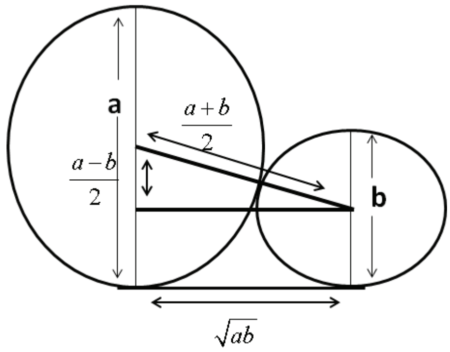
Demonstraţii mai simple au fost date în cartea lui **Roger B. Nelsem**, **''Proofs without word''** de către **Doris Schattschneider** (1) şi **Roland H. Eddy** (2) după cum urmează:

Aici, aria pătratului mare este $(a+b)^2$ iar aria pătratului mic este $(a-b)^2$. Făcând diferenţa dintre ariile celor două pătrate se obţine ariile celor patru dreptunghiuri congruente $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$. Aşadar, aria pătratului mare este evident mai mare decât ariile celor patru dreptunghiuri adică $(a+b)^2 \ge 4ab \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.



(1)

(2).



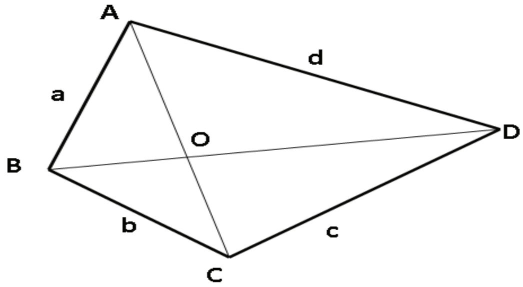
(2)

Dacă notăm cu a diametrul cercului mare şi cu b diametrul cercului mic iar prin centrul cercului mic ducem o paralelă la tangenta comună a cercurilor se obţine un triunghi dreptunghic în care evident ipotenuza în lungime de $\dfrac{a+b}{2}$ este mai mare decât cateta reprezentând distanţa dintre diametre, şi anume $\sqrt{ab}$, deci reyultă că $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ cu egalitate pentru a=b.

2. Să se demonstreze că $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \ge \dfrac{a\cdot c+b\cdot d}{2},\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}_+{}^*$.

Demonstraţie:

Fie a, b, c, d laturile unui patrulater convex ABCD în care au loc relaţiile:



1. $a\cdot c+b\cdot d \ge AC\cdot BD$ deoarece

$S_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD\cdot \sin O}{2} \le \dfrac{AC\cdot BD}{2} \Rightarrow$;

$2S \le AC\cdot BD \Rightarrow a\cdot c+bd \ge 2S$

şi

2. $ad+bc \ge 2S$ deoarece

$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\dfrac{a\cdot d\cdot \sin A}{2}+\dfrac{b\cdot c\cdot \sin C}{2} \le \dfrac{ad}{2}+\dfrac{bc}{2} \Rightarrow 2S \le ad+bc$

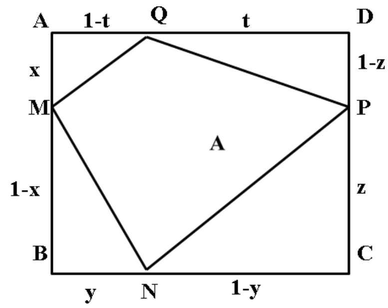
Atunci,

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2=\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^2\geq\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}=\frac{ac+ad+bc+bd}{4}\geq\frac{AC\cdot BD+ad+bc}{4}\geq$$

$$\geq\frac{2S+2S}{4}=S. \text{ Cum } S\leq\frac{ac+bd}{2}\Rightarrow\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\geq\frac{a\cdot c+b\cdot d}{2},\ \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*.$$

3. Să se arate că $x(1-t)+y(1-x)+z(1-y)+t(1-z)\leq 2,\ \forall x,y,z,t\in[0;1]$

Demonstraţie:



Vom considera un pătrat de latură având lungimea 1 şi punctele $M\in[AB],\ N\in[BC],$ $P\in[CD],\ Q\in[DA]$ astfel încât $AM=x,\ BN=y,\ CP=z,\ DQ=t.$

Evident aria pătratului ABCD este egal cu 1 şi avem:

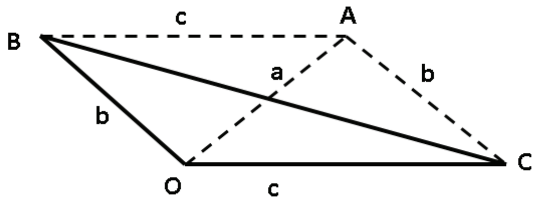
$A_{ABCD}=A_{AMQ}+A_{MBN}+A_{NCP}+A_{PDQ}+A_{MNPQ}$. Atunci, $1=\frac{x(1-t)}{2}+\frac{y(1-x)}{2}+\frac{z(1-y)}{2}+\frac{t(1-z)}{2}+A_{MNPQ}$.

De aici putem obţine că $\frac{x(1-t)}{2}+\frac{y(1-x)}{2}+\frac{z(1-y)}{2}+\frac{t(1-z)}{2}\leq 1$ adică

$x(1-t)+y(1-x)+z(1-y)+t(1-z)\leq 2,\ \forall x,y,z,t\in[0;1]$.

4. Să se arate că $\sqrt{a^2-ac+c^2}+\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq\sqrt{b^2+bc+c^2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie:



Fie OA=a, OB=b, OC=c astfel încât $m(\sphericalangle AOB)=m(\sphericalangle AOC)=60^0$, atunci

Din ΔAOB rezultă: $AB^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^0\Rightarrow\ AB=\sqrt{a^2+b^2-ab}$,

Din ΔAOC rezultă: $AC^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^0\Rightarrow\ AC=\sqrt{a^2+c^2-ac}$,

Din ΔBOC rezultă: $BC^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^0\Rightarrow\ BC=\sqrt{b^2+c^2+bc}$.

Ştiind că într-un triunghi suma a două laturi este mai mare sau egală cu a treia latură adică $AB+AC\geq BC$ cu egalitate când A se află pe BC.

Aşadar, $\sqrt{a^2-ac+c^2}+\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq\sqrt{b^2+bc+c^2}$.

Bibliografie:

Fără autor. Articole şi note matematice. Editura Rafet. 2006.
Colecţia Gazeta Matematică. Seria B.

Altă demonstraţie pentru inegalitatea Iran 1996

de Marius Drăgan, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Dacă $x, y, z > 0$ **, atunci are loc inegalitatea:**

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \ge \frac{9}{4}, \quad \textbf{(I).}$$

Recent, două demonstraţii pentru inegalitatea (I) au fost date în [1].
În cele ce urmează, prezentăm pentru inegalitatea (I) o nouă

Demonstraţie: Notăm:

$$a = \frac{x}{x+y+z}, b = \frac{y}{x+y+z}, c = \frac{z}{x+y+z}, \ \sigma_1 = a+b+c = 1, \sigma_2 = ab+bc+ca, \sigma_3 = abc$$

şi inegalitatea de demonstrat devine

$$4\sum ab\sum\left[(b+c)(c+a)\right]^2 \ge 9\prod(a+b)^2 \Leftrightarrow 4\sum ab\sum\left[(1-a)(1-b)\right]^2 \ge 9\prod(1-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sum ab\sum(c+ab)^2 \ge 9\left(\sum ab - abc\right)^2 \Leftrightarrow 4\sigma_2(\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 6\sigma_3) \ge 9(\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma_2(1 - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3 + 6\sigma_3) \ge 9(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \Leftrightarrow 9\sigma_3^2 - 34\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 17\sigma_2^2 - 4\sigma_2 \le 0.$$

Dar, $\sigma_2^2 \ge 3\sigma_3\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_3 \le \frac{\sigma_2^2}{3}$ şi $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \ge 0 \Leftrightarrow \sigma_3 \ge \frac{4\sigma_2 - 1}{9}$.

Definim funcţia: $f : \left[\frac{4\sigma_2 - 1}{9}, \frac{\sigma_2^2}{3}\right] \to R$, $f(t) = 9t^2 - 34\sigma_2 t - 4\sigma_2^3 + 17\sigma_2^2 - 4\sigma_2$.

Pentru a demonstra inegalitatea este suficient să demonstrăm că: $f\left(\frac{4\sigma_2 - 1}{9}\right) \le 0$ şi $f\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) \le 0$.

Avem: $f\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) = \sigma_2\left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\right)(\sigma_2^2 - 15\sigma_2 + 12)$, iar deoarece $3\sigma_2 \le \sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_2 \le \frac{1}{3}$, pentru a demonstra că $f\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) \le 0$ este suficient să demonstrăm că $\sigma_2^2 - 15\sigma_2 + 12 > 0$.

Deoarece: $\sigma_2 \le \frac{1}{3} < \frac{15 - \sqrt{177}}{2}$ rezultă că $\sigma_2^2 - 15\sigma_2 + 12 > 0$. Am demonstrat $f\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) \le 0$.

Avem: $f\left(\frac{4\sigma_2 - 1}{9}\right) = \frac{1}{9}(36\sigma_2^3 - 33\sigma_2^2 + 10\sigma_2 - 1) = -\frac{1}{3}\left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\right)(12\sigma_2^2 - 7\sigma_2 + 1) =$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\right)^2\left(\sigma_2 - \frac{1}{4}\right).$$

Pentru $\sigma_2 \ge \frac{1}{4}$, problema este rezolvată. Rămâne cazul $\sigma_2 < \frac{1}{4}$, în care definim funcţia: $f : \left[0, \frac{\sigma_2^2}{3}\right] \to R$,

$$f(t) = 9t^2 - 34\sigma_2 t - 4\sigma_2^3 + 17\sigma_2^2 - 4\sigma_2.$$

De asemenea $f(0) = -\sigma_2(4\sigma_2^2 - 17\sigma_2 + 4) = \sigma_2(\sigma_2 - 4)\left(\sigma_2 - \frac{1}{4}\right) < 0$ şi problema este rezolvată.

Cazul de egalitate are loc pentru $\sigma_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z$.

Bibliografie:

1. Marius Drăgan, Neculai Stanciu, ***Asupra unei inegalităţi propuse în Iran 1996***, **Gazeta Matematică - Seria B, nr. 6-7-8, 2020, 289-291.**

Triangle inequalities of Bătinețu's type

by D. M. Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru and **Neculai Stanciu**

In this paper we present a class of certain inequalities in triangle.

Let be a triangle ABC with usual notations: $a = BC, b = CA, c = AB$, R circumradius, r inradius, r_a, r_b, r_c exradii, s the semiperimeter and F the area of triangle.

1. If $u, v, w > 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{v+w}{u}\cdot a+\frac{w+u}{v}\cdot b+\frac{u+v}{w}\cdot c\ge 4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}, \text{ (1).}$$

Proof. $\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a \overset{AM-GM}{\ge} 2\cdot\sum_{cyc}\frac{\sqrt{vw}}{u}a \overset{AM-GM}{\ge} 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod_{cyc}\left(\frac{\sqrt{vw}}{u}a\right)} = 6\cdot\sqrt[3]{abc} = 6\cdot\sqrt[3]{4RF} =$

$= 6\cdot\sqrt[3]{8\cdot\frac{R}{2}\cdot F} = 12\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\frac{R}{2}}\cdot\sqrt{\frac{R}{2}}\cdot F} \overset{Euler}{\ge} 12\cdot\sqrt[3]{\sqrt{r}\cdot\sqrt{\frac{R}{2}}\cdot F} \overset{Mitrinovic}{\ge} 12\cdot\sqrt[3]{\sqrt{r}\cdot\sqrt{\frac{s}{3\sqrt{3}}}\cdot F} =$

$= 12\cdot\sqrt[3]{\sqrt{r}\cdot\sqrt{s}\cdot\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\cdot F} = 12\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\cdot F\cdot\sqrt{F}} = \frac{12\cdot\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}} = 4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}$, Q.E.D.

2. If $u, v, w > 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)+\frac{w+u}{v}\cdot(c+a)+\frac{u+v}{w}\cdot(a+b)\ge 8\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}, \text{ (2).}$$

Proof.

$\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}(b+c) = \sum_{cyc}\frac{v+w}{u}b + \sum_{cyc}\frac{v+w}{u}c \overset{(1)}{\ge} 4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F} + 4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F} = 8\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}$, Q.E.D.

3. If $u, v, w > 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{v+w}{u}\cdot bc+\frac{w+u}{v}\cdot ca+\frac{u+v}{w}\cdot ab\ge 8\sqrt{3}\cdot F, \text{ (3).}$$

Proof.

$\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}bc \overset{AM-GM}{\ge} 2\sum_{cyc}\frac{\sqrt{vw}}{u}bc \overset{AM-GM}{\ge} 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod_{cyc}\left(\frac{\sqrt{vw}}{u}bc\right)} = 6\cdot\sqrt[3]{(abc)^2} \overset{Carlitz}{\ge} 6\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot F = 8\sqrt{3}\cdot F$,

4. If $u, v, w > 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{v+w}{u}\cdot r_a+\frac{w+u}{v}\cdot r_b+\frac{u+v}{w}\cdot r_c\ge 6\cdot\sqrt[3]{sF}, \text{ (4).}$$

Proof. $\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}r_a \overset{AM-GM}{\ge} 2\sum_{cyc}\frac{\sqrt{vw}}{u}r_a \overset{AM-GM}{\ge} 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod_{cyc}\left(\frac{\sqrt{vw}}{u}r_a\right)} = 6\cdot\sqrt[3]{r_a r_b r_c} = = 6\cdot\sqrt[3]{sF}$, Q.E.D.

5. If $x, y, z > 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot a^2+\frac{z+x}{y}\cdot b^2+\frac{x+y}{z}\cdot c^2\ge 8\sqrt{3}\cdot F, \text{ (B-G,1).}$$

Proof. We denote $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}, w = \sqrt{z}$, then

$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}a^2 = \sum_{cyc}\frac{v^2+w^2}{u^2}a^2 \overset{Bergstrom}{\ge} \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}a\right)^2 \overset{Bergstrom}{\ge} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a\right)^2 =$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a\right)^2\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{6}\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^2=\frac{16}{6}\cdot\sqrt{27}\cdot F=8\sqrt{3}\cdot F\text{, Q.E.D.}$$

6. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot a^3+\frac{z+x}{y}\cdot b^3+\frac{x+y}{z}\cdot c^3\geq 16\cdot\sqrt[4]{3}\cdot F\cdot\sqrt{F}\text{, (5).}$$

Proof. We denote $u^3=x, v^3=y, w^3=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}a^3=\sum_{cyc}\frac{v^3+w^3}{u^3}a^3\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^2}\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}a\right)^3\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a\right)^3\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{36}\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^3=\frac{1}{36}\cdot 4^3\cdot\sqrt[4]{3^9}\cdot\left(\sqrt{F}\right)^3=16\cdot\sqrt[4]{3}\cdot F\cdot\sqrt{F}\text{, Q.E.D.}$$

7. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot a^4+\frac{z+x}{y}\cdot b^4+\frac{x+y}{z}\cdot c^4\geq 32\cdot F^2\text{, (B-G,2).}$$

Proof. We denote $u^4=x, v^4=y, w^4=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}a^4=\sum_{cyc}\frac{v^4+w^4}{u^4}a^4\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}a\right)^4\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a\right)^4\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2^3\cdot 3^3}\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^4=32\cdot F^2\text{, Q.E.D.}$$

8. If $x,y,z>0, m\geq 0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot a^{m+1}+\frac{z+x}{y}\cdot b^{m+1}+\frac{x+y}{z}\cdot c^{m+1}\geq 2^{m+2}\cdot 3^{\frac{3-m}{4}}\cdot F^{\frac{m+1}{2}}.$$

Proof. We denote $u^{m+1}=x, v^{m+1}=y, w^{m+1}=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}a^{m+1}=\sum_{cyc}\frac{v^{m+1}+w^{m+1}}{u^{m+1}}a^{m+1}\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}a\right)^{m+1}\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{3^m}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}a\right)^{m+1}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2^m\cdot 3^m}\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^{m+1}=2^{m+2}\cdot 3^{\frac{3-m}{4}}\cdot F^{\frac{m+1}{2}}\text{, Q.E.D.}$$

9. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot(b+c)^2+\frac{z+x}{y}\cdot(c+a)^2+\frac{x+y}{z}\cdot(a+b)^2\geq 32\cdot\sqrt{3}\cdot F\text{, (M. Chirciu).}$$

Proof. We denote $u^2=x, v^2=y, w^2=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}\cdot(b+c)^2=\sum_{cyc}\frac{v^2+w^2}{u^2}\cdot(b+c)^2\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)\right)^2\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)\right)^2\overset{(2)}{\geq}\frac{1}{6}\cdot\left(8\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^2=32\cdot\sqrt{3}\cdot F\text{, Q.E.D.}$$

10. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot(b+c)^4+\frac{z+x}{y}\cdot(c+a)^4+\frac{x+y}{z}\cdot(a+b)^4\geq 512\cdot F^2\text{, (M. Chirciu).}$$

Proof. We denote $u^4=x, v^4=y, w^4=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}\cdot(b+c)^4=\sum_{cyc}\frac{v^4+w^4}{u^4}\cdot(b+c)^4\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)\right)^4\overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)\right)^4\overset{(2)}{\geq}\frac{1}{2^3\cdot3^3}\cdot\left(8\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{F}\right)^4=512\cdot F^2\text{, Q.E.D.}$$

11. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot b^2c^2+\frac{z+x}{y}\cdot c^2a^2+\frac{x+y}{z}\cdot a^2b^2\geq 32\cdot F^2\text{, (M. Chirciu).}$$

Proof. We denote $u^2=x,v^2=y,w^2=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}\cdot b^2c^2=\sum_{cyc}\frac{v^2+w^2}{u^2}\cdot b^2c^2\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}\cdot(b+c)\right)^2\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}\cdot bc\right)^2\overset{(3)}{\geq}\frac{1}{2\cdot3}\cdot\left(8\cdot\sqrt{3}\cdot F\right)^2=32\cdot F^2\text{, Q.E.D.}$$

12. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot b^4c^4+\frac{z+x}{y}\cdot c^4a^4+\frac{x+y}{z}\cdot a^4b^4\geq\frac{512}{3}\cdot F^4.$$

Proof. We denote $u^4=x,v^4=y,w^4=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}\cdot b^4c^4=\sum_{cyc}\frac{v^4+w^4}{u^4}\cdot b^4c^4\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}\cdot bc\right)^4\overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}\cdot bc\right)^4\overset{(3)}{\geq}\frac{1}{2^3\cdot3^3}\cdot\left(8\cdot\sqrt{3}\cdot F\right)^4=\frac{512}{3}\cdot F^4\text{, Q.E.D.}$$

13. If $x,y,z>0$, then in any triangle ABC is true the following inequality

$$\frac{y+z}{x}\cdot r_a^2+\frac{z+x}{y}\cdot r_b^2+\frac{x+y}{z}\cdot r_c^2\geq 6\cdot\sqrt{3}\cdot F\text{ , (M. Chirciu).}$$

Proof. We denote $u^2=x,v^2=y,w^2=z$, then

$$\sum_{cyc}\frac{y+z}{x}\cdot r_a^2=\sum_{cyc}\frac{v^2+w^2}{u^2}\cdot r_a^2\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{v+w}{u}\cdot r_a\right)^2\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{v+w}{u}\cdot r_a\right)^2\overset{(4)}{\geq}\frac{1}{2\cdot3}\cdot\left(6\cdot\sqrt[3]{sF}\right)^2=6\cdot\sqrt[3]{s^2F^2}=6\cdot\sqrt[3]{s\cdot s\cdot F^2}\overset{Mitrinovic}{\geq}$$

$$\overset{Mitrinovic}{\geq}6\cdot\sqrt[3]{s\cdot(3\sqrt{3}r)F^2}=6\cdot\sqrt{3}\cdot F\text{, Q.E.D.}$$

References:

1. D. M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Proofs for old and new triangle inequalities*, The Teaching of Mathematics, Vol. 23, No.1, 2020, 30-34.

2. M. Chirciu, *About Bătineţu's inequalities*, Romanian Mathematical Magazine (R.M.M.), No. 28, Spring Edition, 2021, pp. 4-10.

Comparing the numbers a^b and b^a

by Dorin Mărghidanu, Corabia

Abstract. In this note we will be interested in comparing numbers of the form a^b and b^a Sui-generis comparison conditions are highlighted , for which Euler's inequality and Steiner's inequality are particularly remarkable cases. Various other examples and applications are also presented.
Keywords: comparison , Steiner's inequality , Euler inequality , means inequality
MSC : 26A06 , 26D15.

In many circumstances - imposed by the practice or mathematical theory , but also as a simple scientific curiosity - the question arises : who is bigger , a^b or b^a ?
Perhaps the best-known comparison of this kind is Euler's inequality, in which they occur two of the famous constants of mathematics , e and π – namely , $e^{\pi} > \pi^{e}$.
More information about this inequality are presented in papers [2], [5], [7], [8], [15].
In the following, we will mention explicit conditions under which one or the other of numbers : a^b or b^a - is greater. Examples and applications of the results obtained will also be given. The main result has the following statement :

Proposition. a) If $0 < a < b \le e$, then $a^b < b^a$, (1).
b) If $e \le a < b$, then $a^b > b^a$, (2).

Proof 1. Let $f:(0,\infty) \to R,\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, with derivative $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

It turns out that $x_0 = e$ is abscissa for its only maximum point of f and that f is strictly increasing on the interval $(0,e)$ and is strictly decreasing in the interval (e,∞) , as can be seen in the variation table of the function f .

x	//////	0		1		e		∞
$f'(x)$	//////	+ + + + + +				0	– – – – – – –	
$f(x)$	//////	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

a) How the function is increasing on $(0,e)$ we have

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow b\ln a < a\ln b \Leftrightarrow \ln a^b < \ln b^a \Leftrightarrow a^b < b^a .$$

b) Using the fact that f is decreasing over the interval (e , ∞) , the demonstration proceeds as in point a), but with inverted inequalities - starting with the second .

Proof 2. Consider the function $f:(0,\infty) \to R,\quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ with $f'(x) = f(x)\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ and then as in Proof 1 , $x_0 = e$ is a maximum point . Hence: If $0 < x \le e \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \Rightarrow f$ increasing on $(0,e] \Rightarrow$ if $0 < a < b \le e \Rightarrow a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}} \Rightarrow a^b < b^a$;

If $x \ge e \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreasing on $[e,\infty) \Rightarrow$ if $e \le a < b \Rightarrow a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}} \Rightarrow a^b > b^a$ **Remarks** a) Regarding the comparison of the numbers a^b and b^a (under the conditions in the statement), in the paper [16] the following mnemonic formulation is issued: “is bigger the one who has at base the number closer to e ”.

b) In general , we cannot compare the values of the two powers a^b and b^a when $a \in (0,e)$ and $b \in (e,\infty)$, because the function f is not injective on $(1,\infty)$; there are therefore

values $a_0 \in (1,e)$ and $b_0 \in (e,\infty)$ so that $a_0^{b_0} = b_0^{a_0}$, for example $2^4 = 4^2$.
But there are also pairs of values where between the two powers there is either the sign ''<'' (for example $2^3 < 3^2$), or the sign ''>'' (for example $2^5 > 5^2$).
c) A somewhat excepted, but certain situation (and which is in a situation of intersection with the one discussed above) - but in which we change the landmark e with the landmark 1, is the following :
If $a < 1 < b$, then $a^b < b^a$, (3).
Indeed, in the given conditions we have : $a^b < 1 < b^a$.

Application 1: Taking in (2) $a = e, b = \pi$, we get well-known Euler's inequality ([6], [12])

$e^{\pi} > \pi^{e}$, (4). Other 7 demonstrations of inequality (4) can be found in [6].

Remarks a) The numerical values for the two powers - confirm the inequality given above : e^{π} = 23,14069263... , π^e = 22,45915772... (see [2] , [3]).

b) For e^{π} , the russian mathematician Alexandr Gelfond showed in 1934 that it is transcendent number . About the number π^e is not known so far - neither if it is an algebraic number or a transcendent number , nor even if it is a rational or irrational number ([3], [4]) .

There is even more than Euler's inequality , namely the following inequality that was first highlighted by Jacob Steiner in [14] (analyzed in detail in [7] ; see also [1], [5] , [15] , [16]) .

Corollary (Steiner's inequality). For $x > 0$ we have $e^x > x^e$, (5).

Proof. Indeed: if $x \in (0, e]$, then by Proposition a) $a = x \le b = e$ results $x^e \le e^x$; if $x \in [e, \infty)$, with the choice in Proposition b) $e = a \le b = x$ results $e^x \ge x^e$. In both cases there is the conclusion from the statement. Equality occurs only for $x = e$. In [7] for the inequality from relation (5) the name of - Steiner's inequality - is explicitly proposed - and 11 other demonstrations are offered (different from the above), as well as some of its consequences .

Remark. Inequality (5) can also be obtained using the function $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ from the proof of Proposition, in which $x = e$ is its absolute maximum , as can be seen from the table of variation table . Then we will have, successively :

$$f(e) \ge f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e} \ge \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow x \ge e \ln x \Leftrightarrow \ln e^x \ge \ln x^e \Leftrightarrow e^x \ge x^e.$$

Application 2. $\sqrt{2} < \sqrt{3} < e$, then by (1) , results $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, (6).
Analogously in [9] it is required to compare numbers $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}, \sqrt{5}^{\sqrt{3}}$ - with the same kind of solution.
More generally, in [13] it is required to compare numbers $\sqrt{n}^{\sqrt{n+2}}, \sqrt{n+2}^{\sqrt{n}}$.

Application 3. $e < 3{,}14 < \pi$, then from (2) yields that $3{,}14^{\pi} > \pi^{3{,}14}$, (7), (see [10]).

Application 4. If we consider $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, since $e_n < e$ by Proposition a) or Corollary yields (see also [10]) $e_n^e \le e^{e_n}$, (8), i.e. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{ne} < e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Application 5. We can consider the other sequence also due to Euler , $E_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Both sequences have the number e as their limit , but they have different monotony : $(e_n)_{n\geq 1}$ is increasing and $(E_n)_{n\geq 1}$ is decreasing. For $m < n$ we have $e_m < e_n < e$, then by Proposition a) we obtain $\boldsymbol{e_m^{e_n} < e_n^{e_m}}$, (9); $e < E_n < E_m$, then by Proposition b) we deduce $E_n^{E_m} > E_m^{E_n}$, (10), (see [10]).

Application 6. If $a_1, a_2, ..., a_n$ are positive real numbers, with the notations well-known for arithmetic , geometric and harmonic means : $A_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$, $G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$, $H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$, it is known that the famous inequality of means $H_n \leq G_n \leq A_n$.

We will have the following two statements regarding to means powers :

a) If $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, e]$, then $0 \leq H_n \leq G_n \leq A_n$ and by Proposition it follows both $H_n^{G_n} \leq G_n^{H_n}$, (11) , and $G_n^{A_n} \leq A_n^{G_n}$, (12).

b) If $a_1, a_2, ..., a_n \in [e, \infty)$, then $e \leq H_n \leq G_n \leq A_n$ and from (2), the reverse inequalities of (11) and (12) holds .

Obviously, many other examples of the Proposition can be given .

References

1. Dörrie Heinrich , *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publ. Inc. , New York , 1965, p. 359 . (Originally published in German under the title Triumph der Mathematik , © 1958 by Physica-Verlag , Würzburg .)

2. Hill I. D. , *Which is bigger – e^{π} or π^{e} ?* , The Mathematical Gazette , Vol. 70 , No. 452, Jun. 1986 .

3. Le Lionnais François (avec la collaboration de Jean Brette), *Les nombres remarquables* , Hermann , Paris , 1983 .

4. Maor Eli , *e - the story of a number*, Princeton University Press, Princeton,New Jersey 1994.

5. Just Erwin , Schaumberger Norman , *Two More Proofs of a Familiar Inequaliy*, The Two- Year College Mathematics Journal , Vol. 6 , No. 2 (May , 1975) .

6. Mărghidanu Dorin, *Şapte demonstraţii pentru inegalitatea $e^{\pi} > \pi^{e}$*, Revista MINUS, no. 3 , pp. 21-23 , 2009 .

7. Mărghidanu Dorin , *O inegalitate a lui Jacob Steiner*, G. M. seria B , Anul CXVI , pp. 61-68 , nr. 2 / 2011

8. Mărghidanu Dorin, *Compararea numerelor a^{b} şi b^{a}*, Revista de Matematică "GRIGORE MOISIL", (Alexandria) , pp. 2 - 5 , Anul V , nr. 2 , 2011 .

9. Mărghidanu Dorin , Proposed problem ,RMM , https://www.facebook.com/photo.php?fbid=2535150920148036&set=gm.1710651482392457&type=3&theater

10. Mărghidanu Dorin, Proposed Problem , Easy Beautiful Math , https://www.facebook.com/groups/524902277701521/

11. Mărghidanu Dorin, Proposed problem , 'Mathematical inequalities' https://www.facebook.com/photo.php?fbid=3248663965192689&set=gm.2607275956227116&type=3&theater&ifg=1

12. Niven Ivan , *Which is Larger , e^{π} or π^{e}* , The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 3 , No. 2 , 1972 .

13. Ровшан Пиркулиев , *Generalization of the problem of Dorin Marghidanu* , RMM, https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1431280133721654&set=gm.1711271622330443&type=3&theater&ifg=1

14. Steiner Jacob , *Über das größte Product der Theile oder Summanden jeder Zahl*, Journal für die reine und angewandte Mathematik , vierzigster Band , p.208 ,Berlin.

15. Varner III John T., *Comparing a^{b} and b^{a} Using Elementary Calculus*, The Two-Year College Mathematics Journal , Vol. 7 , No. 4 (Dec. , 1976) .

16. Vernescu Andrei , *Numărul e şi matematica exponenţialei*, Editura Universităţii din Bucureşti , 2004 .

Inegalitatea mediilor şi aplicaţii

Gabriela Gogan, Suceava

Inegalitatea mediilor (aritmetică şi geometrică) este una dintre cele mai importante inegalităţi, fiind foarte des utilizată în demonstrarea altor inegalităţi. Aceasta este atribuită matematicianului francez Augustin-Louis Cauchy, care s-a remarcat în aproape toate ramurile matematicii.

Inegalitatea mediilor pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive, $n \in \mathbb{N}$, $n\geq 2$, este

$$\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ....\cdot a_n}$$

Demonstraţie: Demonstrăm mai întâi prin inducţie următoarea propoziţie :

P(n): Dacă $x_i>0$, $i=1,2,...,n$ şi $x_1x_2x_3\ldots x_n=1$, atunci $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n\geq n$.

P(1) este adevărată, $x_1=1$.

Presupunem P(n) adevărată, adică inegalitatea este adevărată pentru n numere. Din $x_1x_2x_3\ldots x_{n+1}=1$, rezultă că există două numere x_i, x_j astfel încât $x_i\geq 1$, $x_j\leq 1$. Fără a particulariza, luăm $x_1\geq 1$, $x_2\leq 1$. Deci $(x_1-1)(x_2-1)\leq 0$ $\Rightarrow x_1x_2+1\leq x_1+x_2 \Rightarrow 1+x_1x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}\leq x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}$

Cum $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ sunt n numere cu produsul egal cu 1 $\Rightarrow x_1x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}\geq n$. Înlocuind în relaţia precedentă, se obţine $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}\geq n+1$.

Deci $P(n) \to P(n+1)$ este adevărată, deci P(n) este adevărată pentru orice $n\in N$, $n\geq 1$.

Notăm acum $x_1=\frac{a_1}{m_g}$, $x_2=\frac{a_2}{m_g}$, ….., $x_n=\frac{a_n}{m_g}$ unde $m_g=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ....\cdot a_n}$.

Deoarece $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot ....\cdot x_n=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ....\cdot a_n}{m_g{}^n}=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+....+x_n\geq n \Rightarrow$

$$\frac{a_1}{m_g}+\frac{a_2}{m_g}+......+\frac{a_n}{m_g}\geq n \Rightarrow \frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ....\cdot a_n}.$$

Aplicaţii

Să se demonstreze inegalităţile:

1. $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}\rangle 2,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

Demonstraţie:

Din $\sqrt{\frac{b+c}{a}\cdot 1}\leq \frac{\frac{b+c}{a}+1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{b+c}{a}}\leq \frac{a+b+c}{2a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq \frac{2a}{a+b+c}$. Analog, $\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq \frac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq \frac{2c}{a+b+c}$. Adunând cele trei relaţii obţinem

$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}\rangle 2,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+$ inegalitatea fiind strictă, deoarece în caz contrar se obţine b+c=a, c+a=b, a+b=c, adică a=b=c=0 – imposibil.

2. $(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)\geq 81abcd$, $(\forall)a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie:

Din $b+c+d\geq 3\cdot\sqrt[3]{bcd}$, $a+c+d\geq 3\cdot\sqrt[3]{acd}$, $a+b+d\geq 3\cdot\sqrt[3]{abd}$, $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$

prin înmulţire se obţine $(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)\geq 81abcd$, $(\forall)a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

3. $(a+b)^6+(b+c)^6+(c+a)^2 \geq 192a^2b^2c^2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+.$

Demonstraţie:

Din $a+b \geq 2\sqrt{ab},\ b+c \geq 2\sqrt{bc},\ c+a \geq 2\sqrt{ca},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$, prin ridicare la puterea a şasea a fiecărei inegalităţi, se obţine:

$$(a+b)^6 \geq 64a^3b^3,\ (b+c)^6 \geq 64b^3c^3,\ (c+a)^6 \geq 64c^3a^3.$$

Adunând membru cu membru inegalităţile rezultă

$$(a+b)^6+(b+c)^6+(c+a)^6 \geq 64(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3).$$

Dar $\dfrac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^6b^6c^6} = a^2b^2c^2 \Rightarrow$

$$(a+b)^6+(b+c)^6+(c+a)^2 \geq 192a^2b^2c^2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+.$$

4. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$

Demonstraţie:

Din $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 2ab \Rightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b} \Rightarrow \dfrac{4}{a+b} \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$. Analog pentru celelalte. Adunând membru cu membru toate inegalităţile, obţinem

$$\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a} \leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \text{c.c.t.d}$$

5. $\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\dfrac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\dfrac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \dfrac{3}{2},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$.

Demonstraţie:

Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $\dfrac{a}{a+b}$ şi $\dfrac{a}{a+c}$. Rezultă

$\sqrt{\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{a}{a+c}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)$. Analog, $\sqrt{\dfrac{b}{b+c}\cdot\dfrac{b}{b+a}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{b}{b+a}\right)$,

$\sqrt{\dfrac{c}{c+a}\cdot\dfrac{c}{c+b}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{c}{c+b}\right)$. Adunând toate trei relaţiile, obţinem inegalitatea dorită.

6. $\dfrac{\log_b a^2}{a+b}+\dfrac{\log_c b^2}{b+c}+\dfrac{\log_a c^2}{c+a} \geq \dfrac{9}{a+b+c},\ \forall a,b,c \in (1;\infty)$.

Demonstraţie:

$\dfrac{\log_b a^2}{a+b}+\dfrac{\log_c b^2}{b+c}+\dfrac{\log_a c^2}{c+a} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\log_b a^2\cdot\log_c b^2\cdot\log_a c^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}}$. Cum $\log_b a \cdot\log_c b \cdot\log_a c = 1$ şi

$\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)} \leq \dfrac{2a+2b+2c}{3}$ rezultă $\dfrac{\log_b a^2}{a+b}+\dfrac{\log_c b^2}{b+c}+\dfrac{\log_a c^2}{c+a} \geq 6\cdot\dfrac{3}{2a+2b+2c} \Rightarrow$ c.c.t.d

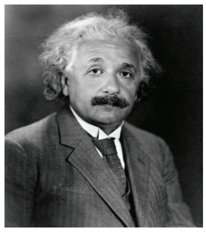
Bibliografie:

1. Coşniţă, C., Turtoiu, F., "*Probleme de algebră*", Editura Tehnică, Bucureşti, 1972
2. Dăncilă, I., "*Algebra examenelor*", Editura All, Bucureşti, 1994
3. Stamate, I., Stoian, I., "*Culegere de probleme de algebră*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971

Prof. Şcoala Gimnazială "Nicolae Labiş" Mălini, Suceava

„ Secretul creativităţii stă în a şti cum să-ţi ascunzi sursele.”

Albert Einstein
(1879-1955)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:944. Arătați că numărul 5^{2n+4} se scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural n.

Gobej Ștefan, elev , Curtea de Argeș

Rezolvare:

Avem $5^{2n+4}=5^{2n}\cdot 5^4$. Cum $5^4=625=400+225=256+144+225=16^2+12^2+15^2$, obținem $5^{2n+4}=5^{2n}\left(12^2+15^2+16^2\right)=\left(5^n\cdot 12\right)^2+\left(5^n\cdot 15\right)^2+\left(5^n\cdot 16\right)^2$.

G:945. Un dreptunghi are mărimile lungimea L, lăţimea i. 1) Dacă mărim L cu 1, apoi îl micşorăm cu 1, cât va fi suma ariilor noilor figuri ? 2) Aceeaşi întrebare, dacă mărirea (micşorarea) se face cu n < L.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: 1) Aria iniţială, $A=L\cdot i$. După operare, obţinem $A_1=(L+1)\cdot i=L\cdot i+i$, $A_2=(L-1)\cdot i=L\cdot i-i$, $A_1+A_2=2A$. **2)** $A_1+A_2=A+ni+A-ni=2A$.

G:946. Să se determine numerele naturale prime *a*, *b*, *c*, *d* pentru care avem:
$2a+5b+50c+250d=2020$

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:

Din $2a+5b+50c+250d=2020$ cu a, b prime rezultă $a=5$, $b=2$. Rezultă c+d = 40 de unde c=5 şi d=7.

G:947. Aflați ultimele patru cifre ale numărului $n=2\cdot 8^{672}-2\cdot 4^{1005}-2^{2010}$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$n=2\cdot(2^3)^{672}-2\cdot(2^2)^{1005}-2^{2010}=2^{2017}-2^{2011}-2^{2010}=2^{2010}\cdot 125=2^{2007}\cdot 1000$ și deci ultimele trei cifre sunt 000. Cum ultima cifră a numărului 2^{2007} este $U(2^{2007})=8$ rezultă că ultimele patru cifre ale lui n sunt 8,0,0,0.

G:948. Determinați $n\in\mathbb{N}$ care verifică ecuația $n^{n^2}=4294967296$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se dau valori lui n și se obține soluție doar pentru n=4.

$n^{n^2}=4^{4^2}=4^{16}=\left(4^2\right)^8=\left(16^2\right)^4=256^4=65536^2=4294967296$.

Dacă $n\geq 5\Rightarrow n^{n^2}\geq 5^{5^2}>4^{4^2}=429467296\Rightarrow n^{n^2}>429467296$.

G:949. Aflați numărul $\overline{abc}$ pentru care $a\cdot\left(\overline{bb}^b+13^b+c^b+c\right)=2019$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

$2019=3\cdot 673\Rightarrow a=3$; Pentru b=2 $\Rightarrow 22^2+13^2+c^2+c=673\Rightarrow c^2+c=20\Rightarrow c=5\Rightarrow\overline{abc}=325$.

G:950. **Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte şi o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Pentru orice număr natural nenul n avem

$$\left(3^{3n+2}\right)^2 = 3^{6n+4} = 3^{6n+3}\cdot 3 = 3^{6n+3} + 3^{6n+3} + 3^{6n+3} = \left(3^{2n+1}\right)^3 + \left(3^{2n+1}\right)^3 + \left(3^{2n+1}\right)^3,$$

deci există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
Pentru orice număr natural nenul n avem

$$\left(3^{2n+1}\right)^3 = 3^{6n+3} = 3^{6n+2}\cdot 3 = 3^{6n+2} + 3^{6n+2} + 3^{6n+2} = \left(3^{3n+1}\right)^2 + \left(3^{3n+1}\right)^2 + \left(3^{3n+1}\right)^2,$$

deci există o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

▪ Clasa a VI-a

G:951. **Comparaţi numerele** $2020^{n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1}\right)}$ **şi** $2020^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+....+\frac{n}{n+1}\right)}$ **cu** $n \in \mathbb{N}$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

Cum $n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1}\right) = 1+1+1+ .... +1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}- .... -\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+ .... +\frac{n}{n+1}$ rezulă că cele două numre sunt egale.

G:952. **Să se afle numărul n, ştiind că** $\frac{17}{1\cdot 4}+\frac{41}{4\cdot 7}+\frac{83}{7\cdot 10}+...+\frac{3917}{61\cdot 64}=\frac{505}{16}-\frac{n}{2^6}$.

Iuliana Traşcă, Olt

Rezolvare:

Suma are 21 de termini. Notăm cu S suma din enunț $S=\frac{1\cdot 4}{1\cdot 4}+\frac{13}{1\cdot 4}+\frac{4\cdot 7}{4\cdot 7}+\frac{13}{4\cdot 7}+...+\frac{61\cdot 64}{61\cdot 64}+\frac{13}{61\cdot 64}$

$$S=\underbrace{1+1+...+1}_{21 ori}+13\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{61\cdot 64}\right).$$

Termenii sumei de mai sus sunt de forma $\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$. Atunci,

$S=21+\frac{13}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{64}\right)\Rightarrow S=\frac{1617}{64}$. Rezultă n= 403.

G:953. **Se consideră mulțimile** $A=\left\{x=2019n+n^2 \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ **şi** $A=\left\{y=2019n^2+n+1 \mid n\in\mathbb{N}\right\}$. **Calculați** $A\cap B$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare: Studiem $x\in A \Rightarrow x=2018n+n+n^2=2018n+n(n+1)$ e par. Studiem $y=B\Rightarrow y=2018n^2+n^2+n+1=2018n^2+n(n+1)+1$ e număr impar. Așadar, $A\cap B=\varnothing$.

G:954. **Aflați produsul ultimelor trei cifre ale numărului** $n=30!+961$, **unde** $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot x,\ x\in\mathbb{N}^*$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Numărul de zerouri ale numărului $1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot 29\cdot 30$ este dat de exponentul lui 5 din acest produs și anume $N=\left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{30}{25}\right]=6+1=7$, așadar, ultimele 7 cifre sunt zero. Prin urmare ultimele trei cifre ale lui $n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 29\cdot 30+961$ sunt 9, 6, și 1 iar produsul lor este $9\cdot 6\cdot 1=54$.

G:955. **Să se demonstreze că numărul 2^n nu se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural par nenul n.**

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

Fie $2^n=a^2+b^2$, deci a şi b au aceeaşi paritate

- Dacă a şi b sunt impare, atunci $a^2, b^2 \equiv 1 (\bmod 4)$, deci $a^2+b^2 \equiv 2 (\bmod 4)$, contradicţie cu $2^n \equiv 0 (\bmod 4)$;

- Dacă a şi b sunt pare, atunci $a=2a_1, b=2b_1$, deci $2^{n-2}=a_1^2+b_1^2$. Aşadar dacă 2^n poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte, atunci $2^{n-2}, 2^{n-4}, \ldots$ pot fi scrise de asemenea ca sumă de două pătrate perfecte. Deoarece 2^2 nu poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte rezultă că pentru n par, 2^n nu poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

G:956. ***Să se arate că numărul*** $n=\dfrac{7^{2020}-7}{6}$ ***este natural și să se afle ultimele două cifre ale sale.***

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

$$n=\frac{7^{2020}-7}{6}=\frac{7(\cancel{7-1})(7^{2018}+7^{2017}+\ldots+7+1)}{\cancel{6}}=7(7^{2018}+\ldots+7+1)\in\mathbb{N}.$$

$$n=7+7^2+7^3+\ldots+7^{2018}+7^{2019}=1+7+7^2+7^3+7^4(1+7+7^2+7^3)+\ldots+7^{2016}(1+7+7^2+7^3)-1=$$

$=400(1+7^4+7^8+7^{12}+\ldots+7^{2016})-1=M_{400}-1$, așadar ultimele două cifre ale lui n sunt 99.

G:957. **Rezolvați ecuația** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{x+2018}\right)=2020$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x+2019}{x+2018}=2020 \Rightarrow \dfrac{x+2019}{x}=2020 \Rightarrow$

$x+2019=2020x \Rightarrow 2019=2019x \Rightarrow x=1$. $S=\{1\}$.

G:958. **Fie** $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ..., $\widehat{HOA}$ **opt unghiuri în jurul punctului O astfel încât** $m(\widehat{AOB})=x^0$, $m(\widehat{BOC})=x^0+6^0$, $m(\widehat{COD})=x^0+2\cdot 6^0$, $m(\widehat{DOE})=x^0+3\cdot 6^0$, **etc.**

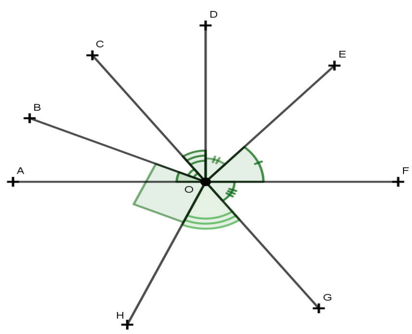
a) Aflaţi măsurile celor opt unghiuri.

b) Arăţi că unghiul $\sphericalangle BOH$ este drept.

c) Arăţi că punctele A, O, F sunt coliniare.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare:



a) Din ipoteză

$m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})+m(\widehat{COD})+\ldots+m(\widehat{HOA})=360^0 \Rightarrow$

$x^0+\left(x^0+6^0\right)+\left(x^0+2\cdot 6^0\right)+\left(x^0+3\cdot 6^0\right)+\ldots+\left(x^0+7\cdot 6^0\right)=360$

$8x+6\cdot\dfrac{7\cdot 8}{2}=360^0$ de unde obţinem că $x=24^0$ şi atunci

$m(\widehat{AOB})=24^0$, $m(\widehat{BOC})=30^0$,

$m(\widehat{COD})=36^0, \ldots m(\widehat{HOA})=66^0$.

b) $m(\widehat{BOH}) = m(\widehat{BOA}) + m(\widehat{HOA}) = 24^0 + 66^0 = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle BOH$ este drept.

c) $m(\widehat{AOF}) = m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COF}) = 36^0 + 42^0 + 48^0 = 180^0$, deci punctele A, O, F sunt coliniare.

▪ Clasa a VII-a

G:959. Să se arate că nu există numerele naturale a,b,c astfel încât $(a+b)(a+c)(b+c) = 28920$.

elevi **Carina Viespescu, Mihai Ionescu**, Craiova

Rezolvare:

$28920 = 120 \cdot 241$. Fără a restrânge generalitatea presupunem $a \le b \le c \Rightarrow b + c \ge 241 \Rightarrow$ $a + b \le 120,\ a + c \le 120 \Rightarrow 2a + b + c \le 240 \Leftrightarrow 2a + 241 \le 240$ ceea ce este o contradicție prin urmare nu există a, b, c naturale care să verifice relația dată.

G:960. Rezolvați ecuația $x + 30 \cdot \{x\} = [x],\ x \in \mathbb{Q}$, unde $[x]$ respectiv $\{x\}$ reprezintă partea întreagă respectiv partea fracționară a lui x.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Cum $x = [x] + \{x\},\ \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ ecuația dată devine $\{x\} + [x] + 30 \cdot \{x\} = [x]$ $\Rightarrow 31\{x\} = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. $S = \mathbb{Z}$.

G:961. Reconstituiți înmulțirea: $a \cdot \overline{ab} = \overline{(a-1)ba}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

Cum ultima cifră a membrului drept este a atunci și membrul stâng are ultima cifră a adică $u(a \cdot \overline{ab}) = a \Rightarrow u(\overline{ab}) = 1 \Rightarrow b = 1$. Pentru b=1 rezultă $a \cdot \overline{a1} = \overline{(a-1)1a} \Rightarrow$

$a(10a+1) = (a-1) \cdot 100 + 10 \cdot 1 + a \Leftrightarrow 10a^2 = (a-1) \cdot 100 + 10 \,|\, :10 \Rightarrow$

$a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow (a-9)(a-1) = 0 \Rightarrow$ a=9 convine pentru problema dată. Rezultă $9 \cdot 91 = 819$.

G:962. Să se arate că pentru n > 3 nu există pătrate perfecte de forma $n^4 - 6n^3 + 8n^2 - 6n + 4$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Se va observa că $n^4 - 6n^3 + 8n^2 - 6n + 4 = (n^2 - 3n + 1)^2 + 3$. Dar singurele pătrate perfecte care au diferența egală cu 3 sunt 1 și 4. Cum n > 3, rezultă că nu putem avea niciun pătrat perfect de forma dată.

G:963. Determinați restul împărțirii numărului $N = 8^{2020} - 7^{2020}$ la 56.

Ionel Morozenco, Tulcea

Rezolvare:

Evident, $N = 8^{2020} - 7^{2020} = (7+1)^{2020} - 7^{2020} = M_7 + 1$ și $N = 8^{2020} - (8-1)^{2020} = M_8 + 1$. Din cele două relații rezultă $N - 1 = M_7 \Rightarrow 7 \,|\, N - 1$ și $N - 1 = M_8 \Rightarrow 8 \,|\, N - 1$ și cum 7 și 8 sunt prime între ele rezultă $56 \,|\, N - 1 \Rightarrow N = 56c + 1$ adică restul împărțirii lui N la 56 este 1.

G:964. Se consideră numerele $a = \sqrt{505 + \frac{\sqrt{x}}{2}}$ și $b = \sqrt{505 - \frac{\sqrt{x}}{2}}$. Să se determine numărul real x astfel încât a și b să aibă sens și să se arate că dacă $a + b = \sqrt{2020}$, atunci a – b este natural.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Evident $x \geq 0;\ 505+\frac{\sqrt{x}}{2} \geq 0;\ 505-\frac{\sqrt{x}}{2} \geq 0 \Rightarrow x \in \left[0;1010^2\right]$.

Din $a+b=\sqrt{2020}\,\middle|\,()^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=2020 \Rightarrow 505+\frac{\sqrt{x}}{2}+505-\frac{\sqrt{x}}{2}+2\sqrt{505^2-\frac{x}{4}}=2020 \Rightarrow$

$2\sqrt{505^2-\frac{x}{4}}=1010\,|()^2 \Rightarrow 1010^2-x=1010^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow a=b=\sqrt{505} \Rightarrow a-b=0 \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{G:965}}$. **Determinaţi perechile (x,y) de numere naturale nenule cu proprietatea că $x^{2014}=y^x$.**

Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Observăm că $(x,y)=(1,1)$ este soluţie. Presupunem că $x \geq 2 \Rightarrow y \geq 2$. Evident că x şi y au aceiaşi divizori numere prime.

Fie deci $x=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ şi $y=p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$. Rezultă (*) $2014\alpha_i=x\beta_i, i=\overline{1,n}$.

Dacă $(p_i,2014)=1$ din (*) avem că $p_i|\alpha_i$ (chiar $p_i^{\alpha_i}|\alpha_i$), numai că $2^k>k, \forall k \in N^*$ implică $p_i^{\alpha_i} \geq 2^{\alpha_i}>\alpha_i$, contradicţie! Deci, $(p_i,2014)=p_i$.

Avem că $2014=2\cdot19\cdot53 \Rightarrow x=2^a\cdot19^b\cdot53^c$.

Procedând ca mai sus din (*) pentru $a>0$, rezultă că $2^a|a$ pentru $a=1$.

Analog $b \in \{0,1\}$şi $c \in \{0,1\}$. Deci $x|2014$. Fie $2014=kx$.

Din $x^{2014}=y^x$ avem că $x^{2014}=y^x \Leftrightarrow y=x^k$, unde $k=\frac{2014}{x}$.

Aşadar, soluţiile ecuaţiei sunt:

$(x,y) \in \{(1,1),(2,2^{1007}),(19,19^{106}),(38,38^{53}),(53,53^{38}),(106,106^{19}),(1007,1007^2),(2014,2014)\}$.

$\boxed{\text{G:966}}$. **Arătaţi că: $\frac{a}{\sqrt{673\cdot875-b}} \rangle 1$, unde $a=27\sqrt{27}+48\sqrt{48}+75\sqrt{75}+\sqrt{1875}$ iar**

$b=\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2018}\right)$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

Rezolvare: Obţinem $a=27\sqrt{27}+48\sqrt{48}+75\sqrt{75}+25\sqrt{3}=673\sqrt{3}$ şi

$b=\frac{7}{5}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{10}{8}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{2020}{2018}=\frac{2019\cdot2020}{5\cdot6}=673\cdot202$. Atunci,

$$\frac{a}{\sqrt{673\cdot875-b}}=\frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673\cdot875-673\cdot202}}=\frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673\cdot673}}=\sqrt{3}\rangle\ 1$$

$\boxed{\text{G:967}}$. **Rezolvaţi sistemul de ecuaţii** $\begin{cases}\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot x-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\\ \sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot x-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot y=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{cases}$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$ **,** $\Rightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$;

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Atunci, sistemul dat devine $\begin{cases}\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot x-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot y=\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot x-\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot y=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{cases}$ care prin scăderea ecuaţiilor conduce la 2x+2y = 0, x = -y, x = 1, y = -1.

G:968. **Să se determine $m,n\in\mathbb{N}$ și numărul prim a, știind că $\sqrt{a^m+a^{2n}}$ este număr rațional.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

$\sqrt{a^m+a^{2n}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{a^m+a^{2n}}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow a^m+a^{2n}=p^2, p\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(p-a^n)(p+a^n)=a^m\Rightarrow$

$\begin{cases}p-a^n=a^s\\ p+a^n=a^t\end{cases}, s,t\in\mathbb{N},\ s\langle t,\ s+t=m\Rightarrow a^t-a^s=2a^n\Leftrightarrow a^s\left(a^{t-s}-1\right)=2a^n.$

Pentru $a\neq2\Rightarrow a^s=a^n, a^{t-s}-1=2\Rightarrow s=n,\ a=3\ si\ m=2n+1$.

Pentru $a=2\Rightarrow\ 2^s(2^{t-s}-1)=2^{n+1}\Rightarrow s=n+1, t-s=1\Rightarrow m=2n+3$.

G:969. **În triunghiul ΔABC cu $m(\widehat{A})=15^0$ și $m(\widehat{B})=90^0$ se consideră punctele $D\in\left(AC\right)$ și $E\in\left(AB\right)$ astfel încât $m(\widehat{ABD})=15^0$ și $m(\widehat{ACE})=30^0$. Se duce $EF\perp AC,\ F\in(AC)$ și fie $(BD)\cap(EF)=\{M\},\ (BD)\cap(CE)=\{N\}$.**

a) Să se arate că triunghiul ΔMEN este echilateral;

b) Calculați $m(\widehat{BDE})$;

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Se află $m(\widehat{C})=75^0$ și $m(\widehat{CEF})=180^0-m(\widehat{ECF})-m(\widehat{EFC})=60^0=m(\widehat{MEN})$.

În triunghiulΔ DBC, $m(\widehat{DBC})=m(\widehat{B})-m(\widehat{ABD})=90^0-15^0=75^0=m(\widehat{C})$.

În triunghiul ΔDMF, $m(\widehat{DMF})=180^0-m(\widehat{MDF})-m(\widehat{DFM})=180^0-30^0-90^0=60^0$.

Deci $m(\widehat{EMN})=m(\widehat{DMF})=60^0$(opuse la vârf) și în triunghiul ΔMEN am găsit $m(\widehat{MEN})=m(\widehat{EMN})=60^0$ și atunci triunghiul ΔMEN este echilateral.

b) Fie Q mijlocul lu (MN), O mijlocul lui (CE) și $\{P\}=(BO)\cap(AC)$. În triunghiul echilateral MEN, mediana $[EQ]$ este și înălțime, deci $EQ\perp MN$ și cum B, N, M, D sunt coliniare, avem $EQ\perp BD$.

Cum triunghiul EBC este dreptunghic isoscel ($m\left(\widehat{EBC}\right)=90^0, m\left(\widehat{BCE}\right)=m(\widehat{C})-m\left(\widehat{ACE}\right)=45^0$) rezultă că $[BO]$ este mediană și înălțime în triunghiul ΔEBC, deci $BO=\frac{CE}{2}=OE=OC$.

Se obține că triunghiul ΔBOE este dreptunghic isoscel, deci $m\left(\widehat{EBO}\right)=45^0$. Rezultă $m\left(\widehat{DBP}\right)=m(\widehat{DBO})=m\left(\widehat{EBO}\right)-m\left(\widehat{EBD}\right)=45^0-15^0=30^0$. Se obține că triunghiul PBD este isoscel iar înălțimea din P este perpendiculară pe $[BD]$ în Q deoarece $m\left(\widehat{BPQ}\right)=60^0$ și $m\left(\widehat{PBQ}\right)=30^0$ în ΔBQP.

Din unicitatea perpendicularei $EQ\perp BD\Rightarrow$ E, Q, P sunt coliniare. Atunci, în triunghiul isoscel PBD, înălțimea $[PQ]$ este și mediană, deci BQ=QD. Obținem MD=DQ-MQ=BQ-NQ=BN.

Din $\Delta DME\equiv\Delta BNE\left(Caz.L.U.L\right)$ deoarece ME=NE, $\widehat{EMD}\equiv\widehat{ENB}$ $\left(m(\widehat{EMD})=180^0-60^0=120^0\right)$

şi MD=BN rezultă $[DE]\equiv[BE]$, deci triunghiul EBD este isoscel şi

$m\left(\widehat{BDE}\right)=m\left(\widehat{DBE}\right)=m\left(\widehat{ABD}\right)=15^0 \Rightarrow$. Aşadar, $m\left(\widehat{BDE}\right)=15^0$.

$\boxed{\text{G:970}}$. **În triunghiul ABC cu $m(\widehat{A})=90^0$ avem AB=4 cm. Bisectoarea AD, $D\in(BC)$ a unghiului $\widehat{BAC}$ are lungimea $3\sqrt{2}$ cm. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului ABC.**

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

Rezolvare:

Lungimea bisectoarei din A este $l_A=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\left(\dfrac{\widehat{A}}{2}\right) \Rightarrow 3\sqrt{2}=\dfrac{8b}{4+b}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b=12$. Conform teoremei lui Pitagora, $BC^2=4^2+12^2\Rightarrow BC=4\sqrt{10}$. Atunci, $S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{4\cdot 12}{2}=24\ cm^2$,

$P_{ABC}=AB+AC+BC=4+12+4\sqrt{10}=4(4+\sqrt{10})cm.$

▪ Clasa a VIII-a

$\boxed{\text{G:971}}$. **Să se arate că numărul $(2n^2+2n)^2+(2n^2-2n)^2+(n^2+2)^2$ este pătrat perfect pentru orice n natural; Să se găsească trei numere naturale distincte care au suma pătratelor egală cu 133225.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Prin ridicare la pătrat se obţine

$4n^4+8n^3+4n^2+4n^4-8n^3+4n^2+n^4+4n^2+4=9n^4+12n^2+4=(3n^2+2)^2$.

$133225=25\cdot 5329=5^2\cdot 73^2=365^2=(3\cdot 11^2+2)^2$ şi conform cu cele de mai sus se obţine

$133225=(11^2+2)^2+(2\cdot 11^2-2\cdot 11)^2+(2\cdot 11^2+2\cdot 11)^2=123^2+220^2+264^2$. Rezultă că cele trei numere pot fi 123, 220, 264.

$\boxed{\text{G:972}}$ **Determinaţi toate perechile de numere întregi (x,y) care verifică relaţia**

$$2x^3+x^2y+xy^2+2y^3=0.$$

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Ecuaţia dată se scrie $(x+y)(2x^2+2y^2-xy)=0$; rezultă soluţia $(k,-k)$, cu $k\in Z$, arbitrar. Rămâne de rezolvat ecuaţia $2x^2+2y^2=xy$.

-Dacă x,y au semne diferite, atunci membrul stâng este pozitiv, în timp ce membrul drept este negativ;

-Dacă x,y au acelaşi semn, le putem considera pe ambele pozitive (altfel luăm $x'=-x$, $y'=-y$ şi obţinem aceeaşi ecuaţie).

În acest caz avem $2x^2+2y^2\geq 4xy$ şi nu obţinem soluţii.

$\boxed{\text{G:973}}$. **Pentru care $x\in\mathbb{R}$, E(x) este minimă , unde**

$E(x)=(4x^2-12x+5)\cdot\left(\dfrac{1}{2x-5}-\dfrac{1}{2x-1}\right)\cdot(4x^2-12x+13),\ x\neq\dfrac{1}{2},x\neq\dfrac{5}{2}.$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $\dfrac{1}{2x-5}-\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{4}{4x^2-12x+5}$. Atunci,

$E(x)=4\left[\left(2x-3\right)^2+4\right]$ este minima pentru 2x-3=0 adică $x=\frac{3}{2}$ iar minimul lui E(x) este 16.

G:974. Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}{x^2-x+1}$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Se observă că f(x) se poate scrie și astfel $f(x)=x^2-x+1+\frac{1}{x^2-x+1}$. Dar $x^2-x+1>0$ pentru orice x real și aplicând inegalitatea mediilor avem că $f(x)\geq 2$, valoarea minimă 2 fiind atinsă atunci când $x^2-x+1=\frac{1}{x^2-x+1}$, adică atunci când $(x^2-x+1)^2=1$, deci pentru x=0 și x=1.

G:975. Arătați că numerele de forma $4(4n^2+5)$ se pot scrie ca sumă de patru pătrate perfecte de numere naturale impare consecutive pentru orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

$$4(4n^2+5)=16n^2+20=(4n^2+4n^2+4n^2+4n^2)+(-12n+12n-4n+4n)+(3^2+1^2+1^2+3^2)=$$
$$=(4n^2-12n+3^2)+(4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)+(4n^2+12n+3^2)=\ (2n-3)^2+(2n-1)^2+$$
$$+(2n+1)^2+(2n+3)^2.$$

G:976. Fie $A=2019^{2019}$. Calculați produsul dintre media aritmetică și media armonică a tuturor divizorilor naturali ai numărului A.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

Rezolvare: $A=2019^{2019}=\left(3\cdot 673\right)^{2019}=3^{2019}\cdot 673^{2019}$ și cum 3 și 673 sunt prime rezultă că A are $(2019+1)(2019+1)=2020^2$ divizori naturali.

Divizorii lui A sunt $d_1,d_2,d_3,\ldots\ldots,d_{2020^2}$ dar și $\frac{A}{d_1},\frac{A}{d_2},\frac{A}{d_3},\ldots\ldots,\frac{A}{d_{2020^2}}$.

Deci $m_a\cdot m_h=\frac{d_1+d_2+\ldots+d_{2020^2}}{2020^2}\cdot\frac{2020^2}{\frac{d_1}{A}+\frac{d_2}{A}+\ldots+\frac{d_{2020^2}}{A}}=A$.

G:977. Să se determine n numere întregi consecutive pentru care suma cuburilor lor este egală cu pătratul sumei lor.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare:

Fie a număr natural și $a,\ a+1,\ a+2,\ldots\ldots,a+n-1$ cele n numere întregi. Atunci

$$a^3+(a+1)^3+\ldots+(a+n-1)^3=(a+a+1+\ldots..+a+n-1)^2\Leftrightarrow$$

$$na^3+3a^2\left(1+2+3+\ldots+n-1\right)+3a\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=\left[na+\frac{n(n-1)}{2}\right]^2\Rightarrow$$

$$na^3+3a^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3a\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n^2(n-1)^2}{4}=n^2a^2+an^2(n-1)+\frac{n^2(n-1)^2}{4}\Leftrightarrow$$

$a\left[2a^2+(n-3)a-n+1\right]=0\Rightarrow$ Pentru a = 0 numerelel sunt **0, 1, 2, ..., n-1**;

Pentru $a=1$ numerele sunt 1, 2, 3, ..., n . Pentru $a=\frac{-n+1}{2}\in\mathbb{N}$ rezultă n impar în acest caz numerele sunt 1, 2,3 ...., n respectiv $-\frac{n-1}{2},-\frac{n-3}{2},\ldots\ldots,-1,0,1,\ldots.,\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2}$ cu n impar.

G:978. **Fie $A=1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1943!\cdot 1944!$. Să se extragă un număr k! din produsul A astfel încât numărul rămas să fie pătrat perfect și să se arate că A nu poate fi pătrat perfect.**

Gabriela și Răzvan Drînceanu, Craiova

Rezolvare:

Știind că $n!=(n-1)!\cdot n$ și scriind pentru fiecare termen par al lui A obținem

$A=1!\cdot 1!\cdot 2\cdot 3!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1943!\cdot 1943!\cdot 1944=(1!)^2\cdot(3!)^2\cdot(5!)^2\cdot\ldots\cdot(1943!)^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1944=$

$A=\left(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1943!\right)^2\cdot 2^{972}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 972=\left(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1943!\cdot 2^{486}\right)^2\cdot 972!$, așadar numărul scos va fi 972! , iar numărul A nu este pătrat perfect deoarece 972 ! nu este pătrat perfect.

▪ Clasa a IX-a

L:763. **Să se determine funcția $f:[0;\infty)\to[0;\infty)$ care satisface proprietatea**

$f^2(x+2020)=(x+2019)^2+2(x+2019)+1,\ \forall x\ge -2020$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Observăm că

$f^2(x+2020)=(x+2019+1)^2=(x+2020)^2\Rightarrow f(x+2020)=|x+2020|,\ \forall x\ge -2020\Rightarrow$

$f(x+2020)=(x+2020)\Rightarrow f(y)=y,\forall y\ge 0$. Așadar, $f(x)=x,\forall x\ge 0$.

L:764. **Dacă S_n este suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, să se arate că $\frac{3}{5}S_{5n}=S_{4n}-S_n$.** **Petre Rău**, Galați

Rezolvare: Fie $S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)\cdot r\right]$ suma primilor n termeni și $r\in\mathbb{R}^*$ rația progresiei aritmetice. Atunci

$$S_{4n}-S_n=\frac{n}{2}\cdot\left\{4\left[2a_1+(4n-1)\cdot r\right]-\left[2a_1+(n-1)r\right]\right\}=\frac{n}{2}\left[6a_1+(15n-3)r\right]=\frac{3n}{2}\left[2a_1+(5n-1)r\right]=\frac{3}{5}S_{5n}$$

L:765. **Fie $\lambda>0$. Să se demonstreze că $\frac{(\lambda x^2+y^2)(\lambda y^2+x^2)}{xy}\ge(\lambda^2+1)xy+\lambda(x^2+y^2)$, $\forall x,y>0$.**

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Inegalitatea din enunţ se scrie succesiv

$\lambda(x^4+y^4)+(\lambda^2+1)x^2y^2\ge(\lambda^2+1)x^2y^2+\lambda xy(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4\ge xy(x^2+y^2)\Leftrightarrow(x^3-y^3)(x-y)\ge 0$, adevărată.

L:766. **Fie $n\in\mathbb{N}$ și $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât $a^{2n+1}+b^{2n+1}=2a^nb^n$. Să se arate că $1-ab$ este pătratul unui număr rațional.** **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Ridicând la pătrat relația din enunț, obținem: $a^{4n+2}+b^{4n+2}+2a^{2n+1}b^{2n+1}=4a^{2n}b^{2n}$ (1)

Din (1), deducem : $a^{4n+2}+b^{4n+2}-2a^{2n+1}b^{2n+1}=4a^{2n}b^{2n}-4a^{2n+1}b^{2n+1}\Leftrightarrow$

$\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)^2=4a^{2n}b^{2n}(1-ab)$. Dacă $ab=0$, cerința este îndeplinită, iar pentru $ab\neq 0$,

$$1-ab=\left(\frac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{2a^nb^n}\right)^2=q^2,$$

L:767. **Fie** $a,b>0$**. Numerele reale** $x_1,x_2,...,x_n \ge \frac{b-a}{2a}$ **verifică relația** $x_1+x_2+...+x_n=n$**. Arătați că** $\frac{1}{ax_1^2+b}+\frac{1}{ax_2^2+b}+...+\frac{1}{ax_n^2+b}\ge \frac{n}{a+b}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

Avem $\frac{1}{ax^2+b}\ge \frac{3a+b-2a\cdot x}{(a+b)^2} \Leftrightarrow 2ax^3-(3a+b)x^2+2bx+a-b\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2ax+a-b)\ge 0$,

evident pentru $x\ge \frac{b-a}{2a}$.

Sumând $\frac{1}{ax^2+b}\ge \frac{3a+b-2a\cdot x}{(a+b)^2}$ și folosind $x_1+x_2+...+x_n=n$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=1$.

Notă.

Pentru $a=3$, $b=5$ și $n=4$ se obține Problema IX.486 din RMT 3/2018, propusă de Vasile Giurgi, Sighetu Marmației

L:768. **Dacă** $a,b,c>0$ **astfel încât** $a+b+c=3$ **arătați că:** $\frac{a}{b^3+b^2+b}+\frac{b}{c^3+c^2+c}+\frac{c}{a^3+a^2+a}\ge 1$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

$$\frac{1}{x^2+x+1}\ge \frac{-x+2}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)\ge 0$$

$$\sum \frac{a}{b(b^2+b+1)}\ge \sum \frac{a(-b+2)}{3b}=-\frac{1}{3}\sum a+\frac{2}{3}\sum \frac{a}{b}\ge -1+\frac{2}{3}\cdot 3\cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

L:769. **Se consideră în R, inecuația:** $1+[x]+\left[\frac{2x+3}{3}\right]\le 3x$**. Arătați că dacă x este soluție , atunci** $x\rangle 0$**. Determinați mulțimea S a soluțiilor inecuației date. (**$[a]$ **este partea întreagă a numărului a).**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Folosind proprietatea $[m+a]=m+[a],\ \forall m\in\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{R}$ inecuaţia dată devine

$1+[x]+\left[\frac{2x}{3}\right]+1\le 3x \Rightarrow [x]+\left[\frac{2x}{3}\right]\le 3x-2$. (*).

Cum $a-1\ \langle\ [a]\le a,\ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow\ x-1\ \langle\ [x]\le x,$ și $\frac{2x}{3}-1\ \langle\ \left[\frac{2x}{3}\right]\le\frac{2x}{3}$ prin adunarea celor

două relaţii rezultă $\frac{5x}{3}-2\ \langle [x]+\left[\frac{2x}{3}\right]\le\frac{5x}{3}$ (**)

Dacă **x** este soluție , ținând cont de (*) și (**) , avem $\frac{5x}{3}-2\ \langle [x]+\left[\frac{2x}{3}\right]\le 3x-2$ de unde

$\frac{5x}{3}-2\ \langle 3x-2\Rightarrow 5x\langle 9x\Rightarrow x\rangle 0$.

Pentru x care verifică inegalitatea $\frac{5x}{3}\ \langle 3x-2\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}$, din (**) avem

$[x]+\left[\frac{2x}{3}\right]\le\frac{5x}{3}\le 3x-2\Rightarrow[x]+\left[\frac{2x}{3}\right]\le 3x-2\Rightarrow x\in\left[\frac{3}{2};\infty\right)$ verifică inecuaţia dată.

Dacă $1\le x\langle\frac{3}{2}\langle 2\Rightarrow 0\langle\frac{2x}{3}\langle 1\Rightarrow[x]=1$ şi $\left[\frac{2x}{3}\right]=0\Rightarrow[x]+\left[\frac{2x}{3}\right]=1\le 3x-2,\ \forall x\ge 1.$

Deci, $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right)$ este soluţie a inecuaţiei date.

Pentru $\frac{2}{3}\le x\langle 1\Rightarrow\frac{4}{9}\le\frac{2x}{3}\langle\frac{2}{3}\langle 1\Rightarrow[x]=\left[\frac{2x}{3}\right]=0\Rightarrow[x]+\left[\frac{2x}{3}\right]=0\le 3x-2\Rightarrow x\in\left[\frac{2}{3};1\right)$ verifică inecuaţia dată. Alte situaţii nu convin. Aşadar, $x\in\left[\frac{2}{3};1\right)\cup\left[1;\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2};\infty\right)$.

L:770. Fie $a_k\in\mathbb{N},\ k=\overline{1,n}$ distincte două câte două. Dacă $a=\max(a_1,a_2,...,a_n)$, atunci are loc inegalitatea $\sum_{k=1}^{n}a^2_k\le(a-n)\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}k\cdot a_k$. Când are loc egalitatea? **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare:

Presupunem că $a_1\langle a_2\langle....\langle a_n$ **şi atunci** $a=\max(a_1,a_2,....,a_n)=a_n$ și

$a_1+n-1\le a_2+n-2\le....\le a_{n-1}+1\le a_n$ **(*)**

Scriind ultimele inegalități sub forma:

$a_1\le a-(n-1)|\cdot a_1$

$a_2\le a-(n-2)|\cdot a_2$

....

$a_n\le a|\cdot a_n$

. Însumând inegalitățile se obține: $\sum_{k=1}^{n}a^2_k\le a\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}(n-k)a_k\Leftrightarrow$

$\sum_{k=1}^{n}a^2_k\le(a-n)\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}k\cdot a_k$. Avem egalitate când $a_1+1=a_2,\ a_2+1=a_3$, .., $a_{n-1}+1=a_n$.

L:771. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\cdot\sqrt{S}}{16}\rangle\frac{\min\left\{\frac{-a+b+c}{2},\frac{a-b+c}{2},\frac{a+b-c}{2}\right\}}{a+b+c}.$$

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare: Folosind formula $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},cu\ 2p=a+b+c$ obținem

$\sqrt{S}=\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}\rangle\min\{p,p-a,p-b,p-c\}=$

$=\min\left\{\frac{a+b+c}{2},\frac{-a+b+c}{2},\frac{a-b+c}{2},\frac{a+b-c}{2}\right\}\Rightarrow\sqrt{S}\rangle\min\left\{\frac{-a+b+c}{2},\frac{a-b+c}{2},\frac{a+b-c}{2}\right\}$. (1)

Se observă ușor din inegalitatea mediilor că:

$$\frac{p+p-a+p-b+p-c}{4}\rangle\frac{4}{\frac{1}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}\Leftrightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\rangle\frac{8}{p}=\frac{16}{a+b+c}. \quad (2)$$

Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) dă concluzia.

L:772. **Într-un triunghi de laturi** a,b,c **notăm cu** m_a, w_a **lungimile medianei , respectiv bisectoarei interioare aferente laturii** a **, etc , celelate notații fiind cele uzuale . Demonstrați că :**

$$\frac{R}{2r} \geq \sum_{ciclic} \frac{bc}{ab+bc+ca} \cdot \frac{m_a^2}{w_a^2}.$$

Vasile Jiglău , Arad

Rezolvare:. Cu formulele uzuale , avem $\frac{R}{2r} = \frac{abcp}{8S^2}$, respectiv $\frac{m_a^2}{w_a^2} = \frac{(2b^2+2c^2-a^2)(b+c)^2}{16bcp(p-a)}$, astfel că inegalitatea din enunț devine imediat echivalentă cu

$: 2abcp(ab+bc+ca) \geq \sum (p-a)(p-b)(a+b)^2(2a^2+2b^2-c^2)$

Cu substituțiile $x = p-a, y = p-b, z = p-c$, inegalitatea de mai sus devine echivalentă , după efectuarea înmulțirilor (sumele de mai jos sunt ciclice) , cu :

$$2\sum x^5y + 2\sum x^5z + 10\sum x^4y^2 + 10\sum x^4z^2 + 20\sum x^4yz + 16\sum x^3y^3 + 52\sum x^3y^2z + 52\sum x^3yz^2 + 84x^2y^2z^2 \geq$$
$$\geq \sum x^5y + \sum x^5z - 2\sum x^3y^3 + 32\sum x^4yz + 64\sum x^3y^2z + 64\sum x^3yz^2 + 96x^2y^2z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum x^5y + \sum x^5z + 10\sum x^4y^2 + 10\sum x^4z^2 + 18\sum x^3y^3 \geq 12\sum x^4yz + 12\sum x^3y^2z + 12\sum x^3yz^2 + 12x^2y^2z^2$$

care , cum x, y, z sunt pozitive , rezultă imediat din însumarea următoarelor inegalități , aplicații ale lemei lui Muirhead și ale inegalității mediilor , astfel :

$$\sum x^5y + \sum x^5z \geq \sum x^3y^2z + \sum x^3yz^2; 10\sum x^4y^2 + 10\sum x^4z^2 \geq 10\sum x^3y^2z + 10\sum x^3yz^2; 12\sum x^3y^3 \geq 12\sum x^4yz;$$
$$\sum x^3y^3 \geq \sum x^3y^2z; \sum x^3y^3 \geq \sum x^3yz^2; 4\sum x^3y^3 \geq 12x^2y^2z^2$$

▪ Clasa a X-a

L:773. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **ecuația :** $9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} = \dfrac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}$ **.**

Gobej Adrian , Curtea de Argeș

Rezolvare:

Evident $x, y > 0$. Cum $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}} = 3$, rezultă $\dfrac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}} \leq 27$

$$9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \geq 3\sqrt[3]{9^{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}}} \geq 3\sqrt[3]{9^3} = 27 \Rightarrow \quad 9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + \frac{1}{9^{\sqrt{xy}}} = \frac{81}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}} = 27$$

Egalitatea are loc pentru $9^{\sqrt{x}} = 9^{\sqrt{y}} = 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$ deci $x = y = 1$

L:774. **Să se rezolve ecuația:** $\dfrac{7^x}{x} + x \cdot 7^{\frac{1}{x}} = 14$ **.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$14=\frac{7^x}{x}+x\cdot 7^{\frac{1}{x}}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{7^x}{x}\cdot x\cdot 7^{\frac{1}{x}}}=2\cdot\sqrt{7^{x+\frac{1}{x}}}\geq 2\cdot\sqrt{7^2}=2\cdot 7=14\Rightarrow\sqrt{7^{x+\frac{1}{x}}}=7\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=1.$$

L:775. Dacă z este o rădăcină de ordinul 5 a unităţii, să se arate că numărul $E(z)=\frac{z}{z^2+1}+\frac{z^2}{z^4+1}$ **este un număr real.**

Petre Rău, Galaţi

Rezolvare: Dacă z este o rădăcină de ordinul 5 a unităţii, atunci $z^5=1$ şi $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

(a doua relaţie este adevărată doar dacă z nu este 1). Efectuând calculele în expresia dată găsim că

$$E(z)=\frac{z}{z^2+1}+\frac{z^2}{z^4+1}=\frac{z(z+1)(z^3+1)}{(z^2+1)(z^3+1)}=\frac{z^5+z^4+z^2+z}{z^6+z^4+z^2+1}=\frac{z^4+z^2+z+1}{z^4+z^2+z+1}=1.$$

L:776. Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Arătaţi că

$$\left(\frac{a}{4-a^2}\right)^n+\left(\frac{b}{4-b^2}\right)^n+\left(\frac{c}{4-c^2}\right)^n\geq\frac{3}{3^n},$$ **unde $n\in\mathbb{N}$.**

Marin Chirciu, Piteşti

Rezolvare: Demonstrăm rezultatul ajutător:

Lemă.

Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Arătaţi că $\frac{a}{4-a^2}+\frac{b}{4-b^2}+\frac{c}{4-c^2}\geq 1$.

Soluţie.

Există ΔXYZ ascuţitunghic astfel încât $a=2\cos X, b=2\cos Y, c=2\cos Z$.

Într-adevăr: $a^2+b^2+c^2=4\sum\cos^2 X=4\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}=2\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}$ şi

$$abc=8\prod\cos X=8\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}=2\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2},$$

de unde $a^2+b^2+c^2+abc=2\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}+2\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2}=4$.

Cu substituţia $a=2\cos X, b=2\cos Y, c=2\cos Z$ obţinem:

$$\frac{a}{4-a^2}+\frac{b}{4-b^2}+\frac{c}{4-c^2}=\sum\frac{a}{4-a^2}=\sum\frac{2\cos X}{4-4\cos^2 X}=2\sum\frac{\cos X}{\sin^2 X}=2\cdot\frac{p^4-8p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{4p^2r^2}=$$

$=\frac{p^4-8p^2Rr-r^2(4R+r)^2}{2p^2r^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{2R}{r}\overset{Euler}{\geq}4$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $p^2\left(p^2-12Rr\right)\geq r^2(4R+r)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2\geq\frac{r(4R+r)^2}{R+r}$.

Rămâne să arătăm că: $\frac{r(4R+r)^2}{R+r}\left(16Rr-5r^2-12Rr\right)\geq r^2(4R+r)^2\Leftrightarrow R\geq 2r$,(inegalitatea lui Euler).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă ΔXYZ este echilateral, adică $a=b=c=1$.

Să trecem la rezolvarea inegalităţii din enunţ. Folosind Lema şi inegalitatea lui Hölder obţinem:

$$\left(\frac{a}{4-a^2}\right)^n+\left(\frac{b}{4-b^2}\right)^n+\left(\frac{c}{4-c^2}\right)^n\geq\frac{\left(\sum\frac{a}{4-a^2}\right)^n}{3^{n-1}}\geq\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{3^n},$$ pentru $n\geq 2$.

Pentru $n=1$ se obţine Lema, iar pentru $n=0$ se obţine egalitatea 3=3.

L:777. **Să se determine numerele naturale** $a \langle b \langle c$ **ştiind că sunt în progresie geometrică iar** $c \le 1 + a + 2\log_2 a$**.**
Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare:

Fie $b - a = m,\ c - a = n \Rightarrow\ (a+m)^2 = a \cdot (a+n) \Rightarrow n = 2m + \dfrac{m^2}{a}$ cu $a \le m^2,\ n \ge 2m+1$. Din $c \le 1 + a + 2\log_2 a \Rightarrow n \le 1 + 2\log_2 a \Rightarrow\ 1 + 2\log_2 a \ge 2m+1 \Rightarrow a \ge 2^m$. Rezultă $2^m \le a \le m^2 \Rightarrow m \in \{2;3;4\}$.

Pentru m=2 rezultă a=4 şi progresia este: 4; 6; 9.
Pentru m=3 rezultă a = 8 sau a =9. Convine doar a=9 si progresia este 9;12; 16.
Pentru m= 4 rezultă a =16 şi progresia este 16, 20, 25.

L:778. **Fie** $x, y, z > 0$**. Să se demonstreze că** $\dfrac{y-z}{z^2(x+y)} + \dfrac{z-x}{x^2(y+z)} + \dfrac{x-y}{y^2(z+x)} \ge 0$**.**
D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare : Avem : $\dfrac{y-z}{z^2(x+y)} + \dfrac{z-x}{x^2(y+z)} + \dfrac{x-y}{y^2(z+x)} \ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2y^2(y^2-z^2)(z+x) + y^2z^2(z^2-x^2)(x+y) + z^2x^2(x^2-y^2)(y+z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^4z + x^3y^4 - x^2y^2z^3 - x^3y^2z^2 + xy^2z^4 + y^3z^4 - x^3y^2z^2 - x^2y^3z^2 +$$
$$+ x^4yz^2 + x^4z^3 - x^2y^3z^2 - x^2y^2z^3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2z(y^2-xz)^2 + xy^2(z^2-xy)^2 + yz^2(x^2-yz)^2 \ge 0$$

L:779. **Dacă** $a,b,c \in (1;\infty)$ **sau** $a,b,c \in (0;1)$ **atunci are loc inegalitatea:**
$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c \ge \log_{a^2bc} bc + \log_{ab^2c} ca + \log_{abc^2} ab$.
Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Trecând în baza 10 inegalitatea dată devine

$$\sum \frac{\lg a}{\lg bc} \ge \sum \frac{\lg bc}{\lg a^2bc} \Leftrightarrow \sum \frac{\lg a}{\lg b + \lg cc} \ge \sum \frac{\lg b + \lg c}{\lg a^2 + \lg b + \lg c} \Leftrightarrow \sum \frac{\lg a}{\lg b + \lg cc} \ge \sum \frac{\lg b + \lg c}{2\lg a + \lg b + \lg c}$$

$\Leftrightarrow \sum \dfrac{x}{y+z} \ge \sum \dfrac{y+z}{2x+y+z}$ (*) unde $\lg a = x,\ \lg b = y,\ \lg c = z$ şi $x, y, z \rangle 0$ sau $x, y, z \langle 0$.

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} \ge \frac{2(x+y)}{x+y+2z} \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y + x^2z - xy^2 + y^2z - 2xyz \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y+z) \ge 0$$

adevărată pentru orice x,y,z pozitive. Pentru x, y, z negative se vor înlocui x, y, z cu opusele lor şi se obţine aceeaşi inegalitate pentru numere pozitive.
Scriind şi celelalte inegalităţi analoage şi însumându-le obţinem inegalitatea (*).

L:780. **Pentru un număr natural *k*, notăm prin S(k) suma cifrelor. Să se arate că:**
Dacă numărul a= $(n!)^n$ are *n* cifre zecimale , atunci S(a) este pătrat perfect.
Dacă numărul b= $(n!)^4$ are 2*n* cifre zecimale , atunci S(b) este pătrat perfect.
Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Folosim faptul că numărul cifrelor în baza zece , ale unui număr $m \in \mathbb{N}^*$ este $1 + [\lg m]$ unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Dacă $a = (n!)^n$ are n cifre, atunci $n = 1 + [\lg a]$ de unde $n - 1 \le \lg a \langle n$,

$10^{n-1} \le a \langle 10^n \Rightarrow 10^{n-1} \le (n!)^n \langle 10^n \Rightarrow n! \langle 10$, adevărat pentru $n \in \{1,2,3\}$.

Dar inegalitatea $10^{n-1} \le (n!)^n$ se verifică pentru $n \in \{1;3\}$.

Dacă $b = (n!)^4$ are 2n cifre se impune $n \ge 1$ şi $2n = 1 + [\lg b] \Rightarrow 2n - 1 \le \lg b\ \langle\ 2n$.

Obținem dubla inegalitate $10^{2n-1} \le (n!)^4 < 10^{2n}$ (*).

Pentru $n \in \{1;2;3;4;5\}$ se constată că $(n!)^4 < 10^{2n-1}$, deci nu se verifică prima inegalitate în (*).

Pentru n=6 obţinem $(6!)^4 = 720^4 = 268738560000$ şi avem

$10^{11} = 100000000000 < 268738560000 < 1000000000000 = 10^{12}$, deci se verifică inegalităţile (*)

Prin inducţie matematică se arată că pentru $n \ge 7$, avem $(n!)^2 > 10^n$ (**) şi atunci $10^{2n} \le (n!)^4$ $\forall n \ge 7$
Deci a doua inegalitate în (*) este falsă.

Presupunem adevărată inegalitatea (**) şi să arătăm că $((n+1)!)^2 > 10^{n+1}$,$\forall n \ge 7$.

Într-adevăr $((n+1)!)^2 = (n!)^2(n+1)^2 > 10^n \cdot (n+1)^2 > 10^n \cdot 10 = 10^{n+1}$ deoarece $(n+1)^2 > 10$ pentru $n \ge 7$.

Conform metodei inducției matematice avem (**), $\forall n \ge 7$.

Rezultă că inegalitățile (*) sunt adevărate numai dacă *n*=6.

Atunci numărul $b = (6!)^4 = 268738560000$ cu 12 cifre are S(b)=45 şi deci S(S(b))=S(45)=9=3^2 e pătrat perfect.

L:781. Pentru $a,b \in (1;\infty)$ **cu** $\{\log_a b\} + \{\log_b a\} = 1$ **atunci să se arate că** $\{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Florică Anastase, Lehliu Gară

Rezolvare: Fie $S_n = (\log_a b)^n + (\log_b a)^n$. Atunci,

$S_1 = \log_a b + \log_b a = [\log_a b] + [\log_b a] + \{\log_a b\} + \{\log_b a\} = [\log_a b] + [\log_b a] + 1 \in \mathbb{Z}$.

Presupunem $S_{n-1}, S_n \in \mathbb{Z}$. Din $S_1 \cdot S_n = S_{n+1} + S_{n-1} \Rightarrow S_{n+1} = S_1 S_n - S_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Atunci $\{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} = S_n - [\log^n{}_a b] - [\log^n{}_b a] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} \in \{0;1\}$

Dacă $\{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} = 0 \Rightarrow \log^n{}_a b, \log^n{}_b a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \log^n{}_a b = \pm 1 \Rightarrow \{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} = 0$, absurd cu ipoteza.

Deci, $\{\log^n{}_a b\} + \{\log^n{}_b a\} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

L:782. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, respectiv G centrul de greutate al triunghiului. Știind că $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{32}$**, arătați că** $\sum_{cyc} \frac{AI \cdot AG^2}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 11R^3$**.**

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare: $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $AG^2 = \frac{4}{9}m_a^2$. Rezultă $\frac{AI \cdot AG^2}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{r \cdot m_a^2}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{r \cdot m_a^2}{\frac{4}{4R}} = \frac{16R}{9} \cdot m_a^2$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{AI \cdot AG^2}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{16R}{9} \cdot \sum_{cyc} m_a^2 = \frac{16R}{9} \cdot 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = \frac{32R^3}{3}(1 + \frac{1}{32}) = 11R^3.$$

▪ Clasa a XI-a

L:783. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos^2 x + 5\sin x - 4}{4\cos^2 + 6\sin x - 6}$;

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos^2 x+5\sin x-4}{4\cos^2+6\sin x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4}{4(1-\sin^2 x)+6\sin x-6}=\lim_{x\to\frac{\pi 1}{6}}\frac{-(2\sin^2 x-5\sin x+2)}{-(4\sin^2 x-6\sin x+2)}=$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{2t^2-5t+2}{4t^2-6t+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{2(t-2)(t-\frac{1}{2})}{4(t-1)(t-\frac{1}{2})}=\frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{L:784}}$. Arătaţi că dacă numerele a şi b verifică $2\langle a\langle b\sqrt{e}\ (e=2,71...)$**, atunci**

$(x+a)(y+a)\langle b^2e^{\frac{x+y+2}{2}},\ \forall x,y\geq 0.$ **Ionel Tudor,** Călugăreni

Rezolvare:

Funcţia $f:[0;\infty)\to(0;\infty),\ f(x)=\frac{(x+a)^2}{e^x}$ este derivabilă şi are derivata

$f^{I}(x)=\frac{2(x+a)e^x-(x+a)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{-(x+a-2)(x+a)}{e^x}\ \langle\ 0,\forall x\geq 0$ şi $a\langle 0$, deci funcţia este strict descrescătoare şi atunci $f(0)\geq f(x)\rangle\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Obţinem $0\langle f(x)\leq a^2,\ \forall x\geq 0$ de unde $(x+a)^2\leq a^2e^x,\ \forall x\geq 0$ şi $(y+a)^2\leq a^2e^y,\forall y\geq 0.$

Rezultă

$$0\langle(x+a)^2(y+a)^2\leq a^2e^{x+y}=\left(a^2e^{\frac{x+y}{2}}\right)^2\Rightarrow 0\langle(x+a)(y+a)\leq a^2e^{\frac{x+y}{2}}\langle b^2\cdot e\cdot e^{\frac{x+y}{2}}=b^2\cdot e^{\frac{x+y+2}{2}},\forall x,y\geq 0.$$

$\boxed{\text{L:785}}$. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix}a & d & 0\\ 0 & b & 0\\ e & f & c\end{pmatrix},a\neq b\neq c\neq a$. **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare:

Observăm $A^2=\begin{pmatrix}a^2 & ad+bd & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ ae+ce & de+bf+cf & c^2\end{pmatrix}$,

$A^3=\begin{pmatrix}a^3 & a^2d+abd+a^2 & 0\\ 0 & b^3 & 0\\ a^2e+ace+c^2e & ade+cde+bde+b^2f+bcf+c^2f & c^3\end{pmatrix}$, şi atunci se demonstrează prin inducţie

că $A^n=\begin{pmatrix}a^n & x_n & 0\\ 0 & b^n & 0\\ y_n & z_n & c^n\end{pmatrix}$, unde $x_n=d\frac{b^n-a^n}{b-a}$, $y_n=e\frac{c^n-a^n}{c-a}$, $z_n=\frac{de}{c-b}\left(\frac{c^n-a^n}{c-a}-\frac{b^n-a^n}{b-a}\right)$.

$\boxed{\text{L:786}}$. Se consideră sistemul: $\begin{cases}x+y-z=0\\ x+13y-5z=0\\ x-11y+3z=0\end{cases}$, unde x, y, z $\in\mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.
b) Să se rezolve sistemul.
c) Să se găsească o soluţie $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ **a sistemului pentru care**

$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2-y_0+39$. **Iuliana Traşcă,** Olt

Rezolvare:

a) det A$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 13 & -5\\ 1 & -11 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -4 & 8 & -5\\ 4 & -8 & 3\end{vmatrix}=0$, deci rang A<3.

Deoarece există un minor de ordinul doi nenul, de exemplu $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 13\end{vmatrix}=12\neq 0$ rangA=2

b) Alegem x, y necunoscute principale, iar $z=\lambda\in\mathbb{R}$, necunoscută secundară.

Avem: $\begin{cases}x+y=\lambda\\ x+13y=5\lambda\end{cases}$, $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 13\end{vmatrix}=12\neq 0$

Găsim $x=\frac{2\lambda}{3}$, $y=\frac{\lambda}{3}$ şi $z=\lambda$, deci soluţia sistemului este $\left(\frac{2\lambda}{3},\ \frac{\lambda}{3},\ \lambda\right)$

c) $(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0^2+y_0^2-z_0^2-y_0+39 \Leftrightarrow 6x_0+9y_0-2z_0=15$

În relaţia de mai sus înlocuim $x_0=\frac{2\lambda}{3}$, $y_0=\frac{\lambda}{3}$ şi $z_0=\lambda$, deci $4\lambda+3\lambda-2\lambda=15$, adică $\lambda=3$ şi soluţia cerută este: (2, 1, 3)

L:787. Fie a, b, c laturile unui triunghi oarecare cu $2(ab+bc+ac)\leq 3$. Să se arate că $\frac{\sin(a^2+b^2+c^2)}{\sin(ab+bc+ac)}\rangle\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}\cdot\cos(ab+bc+ca)$. **Emil C. Popa**. Sibiu

Rezolvare:

Din $\sum a(b+c-a)\rangle\ 0\Rightarrow\sum a^2\langle\ 2\sum ab\Rightarrow\ 0\ \langle\sum a^2\langle\ 2\sum ab\langle 3\ \langle\pi$. Funcţia

$\varphi:(0;\pi)\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$ este strict descrescătoare pe $(0;\pi)$ deoarece $\varphi'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\langle 0,\ x\in(0;\pi)$.

Din $\frac{\sin(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}\rangle\frac{\sin(2(ab+bc+ca))}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\sin(ab+bc+ca)\cdot\cos(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}$ rezultă concluzia.

L:788. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale cu termeni pozitivi şi $x_1+x_2+......+x_n=\ln(1-x_{n+1}),\ n\geq 1$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$. **Florică Anastase**, Lehliu Gară

Rezolvare:

Din condiţiile de existenţă se obţine că $x_n\in(0,1),\forall n\in\mathbb{N},n\geq 1$.

$x_{n+1}=(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})-(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\ln\left(\frac{1-x_{n+2}}{1-x_{n+1}}\right)\Rightarrow\frac{1-x_{n+2}}{1-x_{n+1}}=e^{x_n}>1$ de unde se obţine că $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton descrescător şi cum este mărginit, el este convergent.

Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Atunci din relaţia $\frac{1-x_{n+2}}{1-x_{n+1}}=e^{x_n}$, obţinem că $x_n\to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{(1-x_{n+1})-(1-x_n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}-e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{e^{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}}\cdot\frac{x_n}{e^{x_n}-1}\right)=0.$$

L:789. Pentru $n,k\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ cu $k\langle n$ să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\sqrt[n]{k}}{n^2}\right)$.

Florică Anastese, Lehliu Gară

Rezolvare:

Folosind inegalitatea dublă $\frac{x+1}{x} \langle \ln(1+x) \langle x, \ \forall x \in (0;\infty)$ obţinem

$e^{\frac{x+1}{x}} \langle 1+x \langle e^x, \ \forall x \in (0;\infty)$ şi punând $x = \frac{\sqrt[n]{k}}{n^2} \Rightarrow \quad e^{\frac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{k}+n^2}} \langle 1 + \frac{\sqrt[n]{k}}{n^2} \langle e^{\frac{\sqrt[n]{k}}{n^2}} \Leftrightarrow$

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{k}+n^2}} \langle \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{k}}{n^2}\right) \langle e^{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{k}}.$$

Cum $\sqrt[n]{k} \langle \sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{k}+n^2 \langle \sqrt[n]{n}+n^2 \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{n}+n^2} \langle \frac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{k}+n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}+2n+1} = 0. \quad \text{Deci, } \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{k}}{n^2}\right) = 1$$

▪ Clasa a XII-a

L:790. Să se arate că dacă a, b, c și d sunt numere reale, cu a+b+c+d=0, atunci avem $12(a^6+b^6+c^6+d^6) = 3(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 + 4(a^3+b^3+c^3+d^3)^2$.

Petre Rău, Galați

Rezolvare: Fie a, b, c și d rădăcinile ecuației $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Avem că $a + b + c + d = 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = p$, $abc + abd + acd + bcd = -q$ și $abcd = r$. Fie $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k$. Atunci calculăm și găsim următoarele exprimări: $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, $S_3 = -3q$, $S_4 = 2p^2$, $S_5 = 5pq$, $S_6 = -2p^3+3q^2$, $S_7 = -7p^2q$. Relația din enunț se mai scrie astfel: $12S_6 = 3S_2^3 + 4S_3^2$. Cu cele de mai sus, relația se demonstrează ușor.

L:791. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ f(x)=\cos x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt, \ \forall x\in\mathbb{R}$ și f(0)=0.

Ionel Morozenco, Tulcea

Rezolvare: Din x-t =u avem:

$$f(x)=\cos x-\int_x^0 e^{u-x}f(u)du=\cos x+e^{-x}\cdot\int_0^x e^u f(u)du, \ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad e^x\cdot f(x)=e^x\cos x+\int_0^x e^u\cdot f(u)du.$$

Prin derivare se obține $e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f^I(x)=e^x\cos x-e^x\sin x+e^x f(x)\Rightarrow \quad f^I(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow$ $f(x)=\sin x+\cos x+C$. Cum f(0)=0 rezultă C=1 atunci $f(x)=\sin x+\cos x+1$.

L:792. Să se calculeze. $\int\frac{1}{x(1+x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}})}dx$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $\int\frac{1}{x(1+x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}})}dx=\int\frac{1}{x(1+x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{6}})}dx=\int\frac{1}{x(1+x^{\frac{5}{3}})}dx=\int\frac{1}{x(1+x^r)}dx=\int\frac{x^{r-1}}{x^r(1+x^r)}dx=$

$\int x^{r-1}\cdot\left(\frac{1}{x^r}-\frac{1}{x^r+1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{r-1}}{x^r+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{r}\cdot\ln\left|x^r+1\right|+C$+C. S-a notat cu $x^r=x^{\frac{5}{3}}$.

L:793. **Calculaţi:** $\int_1^e \frac{e^x\left(1+\ln x-\ln^2 x\right)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx$. **Marin Chirciu**, Piteşti

Rezolvare:

Avem $\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)'=\frac{(1+\ln x)e^x-x\ln x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1+\ln x-x\ln x)}{e^{2x}}$.

Obţinem $\int_1^e \frac{e^x\left(1+\ln x-\ln^2 x\right)}{e^{2x}+x^2\ln^2 x}dx=\int_1^e\frac{\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)'}{1+\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)^2}dx=\operatorname{arctg}\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)\Bigg|_1^e=arctg\,\frac{e}{e^e}=arctg\;e^{1-e}$

L:794. **Să se arate că polinomul** $f(X)=X(X+1)(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n)-1$ **are o singură rădăcină pozitivă** x_1 **şi** $x_1\langle\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$. **Polinomul** $g(X)=X(X-1)(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-n)+(-1)^n$ **are o singură rădăcină negativă** x_1 **şi** $-\frac{1}{n!}\langle x_1$, $n\in\mathbb{N}^*$. **Ionel Tudor** , Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Observăm că 0 nu este rădăcină pentru f. Presupunem că f(x) are cel puţin două rădăcini reale $x_1\rangle x_2\rangle 0$. Atunci $x_1(x_1+1)(x_1+2)\cdot\ldots\cdot(x_1+n)\;\rangle\;x_2(x_2+1)(x_2+2)\cdot\ldots\cdot(x_2+n)\;\rangle\;0$. Dar,

$f(x_1)=f(x_2)=0\Rightarrow x_1(x_1+1)(x_1+2)\cdot\ldots\cdot(x_1+n)\;=\;x_2(x_2+1)(x_2+2)\cdot\ldots\cdot(x_2+n)=1\Rightarrow 1\rangle1\rangle0$

Absurd. Deci ecuaţia are o singură rădăcină.

$0\langle x_1=\frac{1}{(x_1+1)(x_1+2)\cdot\ldots\cdot(x_1+n)}\langle\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!}$, deci $0\;\langle x_1\langle\frac{1}{n!}$.

Prin substituţia $x=-y$, ecuaţia f(x)=0 din a) devine

$-y(-y+1)\cdot\ldots\cdot(-y+n)=1\Leftrightarrow y(y-1)\cdot\ldots\cdot(y-n)=(-1)^{n-1}$ deci ecuaţia

$g(y)=y(y-1)\cdot\ldots\cdot(y-n)+(-1)^{n-1}=0,$ are rădăcinile $y_k=-x_k,\;k=\overline{1,n}$.

Din a) , doar $x_1\rangle0$ şi atunci polinomul g are singura rădăcină negativă $y_1=-x_1\langle0$.

În a) , $0<x_1<\frac{1}{n!}$, **deci rezultă** $-\frac{1}{n!}<-x_1<0$, **adică** $-\frac{1}{n!}<y_1<0.$

Renotând , avem că polinomul g are o singură rădăcină negativă x_1 **şi** $-\frac{1}{n!}<x_1<0.$

L:795. **Calculaţi** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+nk}}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+nk}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}dx=$

$=\int_1^2\frac{1}{t+\sqrt{t}}dt=2\int_1^{\sqrt2}\frac{1}{1+u}du=\ln\frac{3+2\sqrt2}{4}$.

L:796. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei $x^3+ax^2+bx+c=0$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $2a^3=9ab-27c$. **Gabriel Tica,** Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: $\div\ x_1,x_2,x_3$, atunci $2x_2=x_1+x_3 \Leftrightarrow x_2=-\frac{a}{3} \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}=\frac{ab}{3}-c \Leftrightarrow 2a^3=9ab-27c$.

L:797. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie "*" astfel:

$x*y=\frac{1}{3}\left(x+y-2xy+1\right)$, **oricare ar fi** x, y $\in\mathbb{R}$ **.**

a) Este această lege comutativă? Care este elementul neutru?

b) Arătaţi că orice element $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ este simetrizabil în raport cu legea "*"

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x*9^x=\frac{1}{3}$. **Iuliana Traşcă,** Olt

Rezolvare: **a)** Legea este comutativă.

Din $x*e=x$ avem $\frac{1}{3}\left(x+e-2xe+1\right)=x \Leftrightarrow \left(e+1\right)\left(2x-1\right)=0$. Deci $e=-1\in\mathbb{R}$ este element neutru.

b) Din $x*x'=-1$ obţinem $\frac{1}{3}\left(x+x'-2xx'+1\right)=-1 \Leftrightarrow x'\left(2x-1\right)=x+4$

Dacă $2x-1=0$ avem $x'\cdot 0=\frac{9}{2}$, absurd, iar pentru $2x-1\neq 0$ avem: $x'=\frac{x+4}{2x-1}$

c) $3^x*9^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(3^x+9^x-2\cdot 3^x\cdot 9^x+1\right)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x\cdot\left(1+3^x-2\cdot 3^{2x}\right)=0$.

$\Rightarrow 3^x=0$ sau $\left(3^x-1\right)\cdot\left(2\cdot 3^x+1\right)=0$. Unica soluţie se obţine pentru $3^x=1$, adică x=0

L:798. a) Să se separe rădăcinile reale ale ecuației $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+86x-325=0$.

b) Arătați că $x=\sqrt[3]{\frac{25+3\sqrt{69}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{25-3\sqrt{69}}{2}}$ este soluție a ecuației de la a).

Ionel Tudor , Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Din $(x-1)^5=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$ iar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)^5+81x-324$. este funcţie strict crescătoare ca sumă de funcţii strict crescătoare rezultă că ecuaţia f(x)= 0 are cel mult o soluţie reală. Cum $f(1)\cdot f(4)=-243\cdot 243\langle 0$ şi f(x) este funcţie continuă strict crescătoare, atunci, conform proprietăţii lui Darboux, ecuaţia f(x)=0 are o singură rădăcină reală $x\in\left(1;4\right)$. Cu notațiile $a=\sqrt[3]{\frac{25+3\sqrt{69}}{2}}$ şi $b=\sqrt[3]{\frac{25-3\sqrt{69}}{2}}$ observăm că $a^3+b^3=25$ şi $a\cdot b=1$ atunci dacă $x=a+b\Rightarrow$

$x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab)(a+b)=3x+25$ şi $x^4=x\cdot x^3=x\cdot\left(3x+25\right)=3x^2+25$ iar

$x^5=x^2\cdot x^3=x^2\cdot\left(3x+25\right)=25x^2+9x+75$. Înlocuind în

$f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+86x-325=\left(25x^2+9x+75\right)-5\left(3x^2+25x\right)+10\left(3x+25\right)-$

$-10x^2+86x-325=0$ adică $x=a+b$ este unica soluţie reală a ecuaţiei date.

„ **Matematician nu este cel ce ştie matematică
ci cel ce creează matematică”**

Grigore Moisil (1906-1973)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:979. Aflaţi numărul a din egalitatea $2019\cdot\{2018:[2017\cdot(2016-2a-1)+1]\}+1=2020$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:980. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{aa}^2+\overline{bb}^2+\overline{cc}^2=5929$.

Adrian Gobej, Argeş

G:981. Arătaţi că nu există numere naturale a,b,c astfel încât $(a+b)(b+c)(c+a)=28920$.

Carina Viespescu şi Mihai Ionescu, Craiova

G:982. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $n(n+34)=\underbrace{1111....1}_{k\ de\ 1}$.

eleva **Carina Viespescu**, Craiova

G:983. Să se determine toate numerele naturale nenule n, mai mici decât 2020, pentru care numărul $a=n^{2020}+8\cdot n^{2019}$ este cub perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:984. Să se arate că numărul $A=35^n+1225^k$ este pătrat perfect pentru n=2k+1, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

▪ Clasa a VI-a

G:985. a) Arătaţi că numărul $x=1+9^2+9^4+9^6+...+9^{1006}$ este divizibil cu 82.
b) Scrieţi într-o formă restrânsă numărul $y=80+80\cdot81+80\cdot81^2+....+80\cdot81^{503}$ şi apoi arătaţi că fracţia $F=\dfrac{9^{1009}-9}{x}$ reprezintă produsul a trei numere naturale consecutive.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:986. Demonstraţi că numărul $A=1+3+3^2+3^3+....+3^{2020}+3^{2021}$ este multiplu de 13.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:987. Arătaţi că numărul $x=\overline{20ab}-\overline{b(a+1)}$ este pătrat perfect, ştiind că are loc egalitatea
$x=\overline{abba}+\overline{abb}-\overline{aa}-b=1+3+5+7+....+89+25^{3^2}:25^{2^3}$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

G:988. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=35^0$, $m(\sphericalangle B)=83^0$, şi punctele D, E şi F pe laturile BC, CA şi respectiv AB astfel încât $DE \parallel AB$, $FE \parallel BC$ şi $FD \parallel AC$. Dacă bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle EDF$ şi $\sphericalangle ABC$ se intersectează în punctul P, atunci determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle BPD$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:989. Fie $a,\ b\in(0;\infty)$ astfel încât $a\cdot\ b > a+b$. Arătaţi că $a+b> 4$.

Roxana Vasile, Meda Iacob, Craiova

G:990. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2=2020$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:991. Găsiţi numerele naturale n pentru care $\sqrt{\frac{16n+17}{n-16}}\in\mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

G:992. Fie patrulaterul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ADC)=90^0$, $\sphericalangle ACD=2\cdot\sphericalangle ACB$ şi $AD=2020$. Calculaţi distanţa de la punctul B la dreapta AC.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:993. Aflaţi unghiul dintre diagonalele AC şi BD ale patrulaterului convex ABCD, dacă AB = 5, BC= 7, CD= 5,5 și AD = 2,5.

Anicuţa Beţiu, Sorin Petrişor Dumitrescu, Craiova

G:994. În triunghiul ABC de semiperimetru p, notăm AB=c, BC=a, CA=b şi fie $[AD]$ bisectoarea interioară a triunghiului. Dacă $BD\le p-b$, atunci $DC\le p-b$.

Emil C. Popa, Sibiu

G:995. Se dau ABCD = paralelogram, M = simetricul lui D faţă de B, N = simetricul lui A faţă de C. Dacă aria lui ABCD = 10, aflaţi aria lui BMNC.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:996. Fie $x,y,z\in(0;\infty)$ astfel încât $2020(xy+yz+zx)> x+y+z$. Arătaţi că $x+y+z> \frac{3}{2020}$.

Iulia Sanda, Claudiu Ciulcu, Craiova

G:997. Raportul dintre produsul a două numere naturale nenule distincte şi suma lor este 2017. Să se arate că suma cuburilor celor două numere este divizibilă cu bipătratul celui mai mic.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

$\boxed{\text{G:998}}$. Fie $x\rangle 0$. Arătaţi că $(x+1)^2+\frac{4}{x(x^2+1)}\geq 2\left(\frac{x^2+1}{x}+1\right)$. În ce caz avem egalitatea?

Eugenia Turcu, Iuliana Tigae, Craiova

$\boxed{\text{G:999}}$. Arătaţi că $A=\sqrt{n(n+9)(n+16)(n+25)+5184}\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

$\boxed{\text{G:1000}}$. Să se demonstreze că $\left\{x \middle| x=\frac{b(a+b)}{a^2+b^2}, a>0, b>0\right\}=\left(0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

$\boxed{\text{G:1001}}$. Să se demonstreze că $\left(1+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-2\cdot\frac{1}{6}\right)+...+\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-2\cdot\frac{1}{3n}\right)=$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}$ pentru orice $n\in N^*$.

Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt

$\boxed{\text{G:1002}}$. Fie $a\geq 1,\ b\in\mathbb{R}$ şi ecuaţia $a\cdot(x+a)+(a+1)(x+a+1)=b.$

1) Determinați soluțiile ecuației pentru a=1, b = 2020;

2) Să se arate că pentru $a\geq 1,\ b\in\mathbb{R}$ ecuaţia are una sau două soluţii.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

$\boxed{\text{G:1003}}$. Un paralelipiped dreptunghic având lungimea diagonalei 3 şi aria totală 7are lungimea muchiei laterale egală cu media geometrică a dimensiunilor bazei. Să se afle volumul paralelipipedului.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a IX-a

$\boxed{\text{L:799}}$. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $a^5+a^2\cdot b^3+a\cdot c+d=0$. Arătaţi că numărul $A=c^2-4(a^3+b^3)\cdot d$ este pătratul unui număr natural.

Dan Grigorie, Alina Tigae, Craiova

$\boxed{\text{L:800}}$. Găsiţi valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei $E(x)=\frac{x^3}{x^6+2x^3+2}$.

Adriana Ioniţă, Alina Tigae, Craiova

$\boxed{\text{L:801}}$. Arătaţi că numărul $n=\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}+\sqrt[3]{\sqrt{4901}+70}-\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{4901}-70}$ este natural.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

$\boxed{\text{L:802}}$. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ cu $f(0)=f(1)$. Dacă pentru orice $x,y\in[0;1]$ cu $x\neq y$ avem $|f(x)-f(y)|\langle|x-y|$ arătaţi că $|f(x)-f(y)|\langle\frac{1}{2}$.

Simona Miu. Craiova

L:802. Există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ cu rădăcini reale distincte astfel încât $f(2x)\cdot f(\frac{x+1}{2})=f(x^2+x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}.$?

Cristian Moanţă, Mihaela Mirea. Craiova

L:803. Câte cifre are numărul 2^{40} ?

Gabriel Tica, Băileşti, Dolj şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:804. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $a_k\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $k=\overline{1,n}$, iar σ este o permutare a mulţimii $\{1,2,...,n\}$. Să se afle extremele expresiei $E(a_1,a_2,.....,a_n)=a_{\sigma(1)}\cdot(1-a_1)+a_{\sigma(2)}\cdot(1-a_2)+.....+a_{\sigma(n)}\cdot(1-a_n)$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

L:805. Rezolvaţi în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}2x+2xy-7y+2y^2=0\\2x^2+2xy-3y=0\end{cases}$.

Iulia Sanda, Camelia Dană. Craiova

L:806. Fie $a,b,c\geq 0$ cu $a+b+c=\frac{3}{2}$ şi $n\geq 7$. Arătaţi că

$$\frac{1}{n+(b+c)^2}+\frac{1}{n+(c+a)^2}+\frac{1}{n+(a+b)^2}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Marin Chirciu, Pitești

L:807. Dacă S_n este suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice de rație $r\in\mathbb{R}^*$ pentru orice numere întregi și nenule p și q are loc relația: $\frac{S_{pn}-pS_n}{S_{qn}-qS_n}=\frac{p(p-1)}{q(q-1)}$.

Petre Rău, Galați.

L:808. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale în progresie aritmetică.

a) Demonstrați că șirul $s_n=a_{4n+1}$; $\forall n\geq 1$ este un șir de numere reale în progresie aritmetică.

b) Demonstrați că $\frac{1}{s_1\cdot s_2}+\frac{1}{s_2\cdot s_3}+...+\frac{1}{s_{2020}\cdot s_{2021}}=\frac{2020}{a_5\cdot a_{8085}}$.

c) Dacă S_n este suma primilor n termeni ai șirului s_n, atunci are loc relația:

$$\frac{a_9}{S_1\cdot S_2}+\frac{a_{13}}{S_2\cdot S_3}+...+\frac{a_{4n+5}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_{4k+5}}{a_5\cdot\sum_{k=0}^{n}a_{4k+5}}$$

Elena şi Constantin Ciobîcă. Fălticeni

L:809. Fie $a,b,c>0$ şi $n\geq 0$. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^2+nab}+\frac{b^2}{c^2+nbc}+\frac{c^2}{a^2+nca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+bc+ca)}.$$

Marin Chirciu, Pitești

L:810. Sa se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:811. În triunghiul ΔABC avem $\sin A=\frac{3}{5}$ şi $\cos B=\frac{5}{13}$. Aflaţi cos C.

Ileana Duma, Alina Ghiţă, Craiova

▪ Clasa a X-a

L:812. Să se rezolve $\mathbb{R}^*$ sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} xy = 2 \\ x^y \cdot y^x = 2^{\sqrt{2}} \end{cases}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:813. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|(a-b)(b-c)(c-a)| = 3$. Găsiți cea mai mică valoare a expresiei $|a| + |b| + |c|$.

Dana Cotfasă, Alexandrina Năstase, Craiova

L:814. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{\sqrt[x+2]{2^{3x+6}}} - \sqrt[2x-2]{64^{x-3}} = 0$, $x \geq 2$. **Adrian Stan,** Buzău

L:815. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $9^{x \cdot \arcsin x} + 9^{x \cdot \arccos x} = 2 \cdot 3^{\frac{\pi x}{2}}$. **Claudia Ciulcu, Iulia Sanda**, Craiova

L:816. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ şi $k, l \in \mathbb{N}$ astfel încât $2 \leq k, l \leq n$. Arătaţi că $\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[l]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \leq 1$. Mai rămâne proprietatea adevărată dacă cel puţin unul din numerele k sau l este mai mare strict decât n? (în legătură cu G 344 pag 2/2002, G.M)

Dorina Goiceanu, Lucian Tuţescu, Craiova

L:817. Descompuneţi numărul 1004006004001 în produs de factori primi.

Neculai Stanciu, Buzău

L:818. Să se determine valoarea expresiei $E(z,w) = \left(\frac{z}{z+w}\right)^{2021} + \left(\frac{w}{z+w}\right)^{2021}$ unde z şi w sunt numere complexe nenule astfel încât $z^2 + zw + w^2 = 0$.

Aurel Chitiţă, Slatina, Ani Drăghici, Craiova

L:819. Fie a > 1 şi b≥ 0 sau a > 0 şi $b \geq 1$. Să se rezolve ecuaţia: $\log_{a^n+b} x = \log_{a^x+b} n$, unde $n \in N^*$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:820. Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $(x!)^{125} \cdot (y!)^{1895} = (z!)^{2021}$.

Cristian Moanţă, Lucian Tuţescu, Craiova

L:821. a) Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $(x!)^2 + (y!)^2 = (z!)^2$.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care ecuaţia $(x_1!)^2 + (x_2!)^2 + ... + (x_n!)^2 = (y!)^2$ are soluţii în $n \in \mathbb{N}$.

Cristian Moanţă, Lucian Tuţescu, Craiova

L:822. Să se arate că în orice triunghi oarecare ABC avem:

$$\min\left\{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\} \leq \frac{3}{8}.$$

Emil C. Popa, Sibiu

▪ Clasa a XI-a

L:823. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^{1895}+1}+\frac{1}{n^{1895}+2}+.....+\frac{1}{n^{2020}}\right)$.

Daniela Stoian, Lenuţa Andrei, Craiova

L:824. Să se calculeze $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\sin^2 x\cdot\cos x-\cos^3 x}$; **Adrian Stan**, Buzău

L:825. Demonstraţi că $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln x)+\sin(\ln x^2)+...+\sin(\ln x^n)}{arctg(e^x-e)+arctg(e^{x^2}-e)+...+arctg(e^{x^n}-e)}=e^{-1}$, $\forall n\geq 1$.

Ciobîcă Constantin ; Ciobîcă Elena, Fălticeni

L:826. Calculaţi limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin următoarea relaţie: $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k}i(i+1)\right]^{-1}$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:827. Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei
$\ln x=x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:828. Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât
$f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy(x^2+xy+y^2),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Mădălina Giurgescu, Marian Voinea, Bucureşti

L:829. Fie şirul $x_n=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}+.....+\frac{1}{\sqrt{x+n-1}}-2\sqrt{x+n-1},\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\geq 1$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $l_x=\lim_{n\to\infty}x_n$ să se calculeze $\lim_{x\to\infty}l_x$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:830. Fie M o mulţime finită cu cel puţin două elemente. Definiţi pe M o lege de compoziţie $"*":M\times M\to M$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:
a) $x*y\neq y*x,\ \forall x,y\in M$; b) $x*(y*z)\neq(x*y)*z,\ \forall x,y,z\in M$;

Iulia Sanda, Dorina Goiceanu, Craiova

L:831. a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2x^4+7x^3-4x+14=0$.
b) Să se raţionalizeze numitorul fracţiei $F=\frac{3}{2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:832. Să se calculeze: $\int\frac{\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot(\sin x+\cos x)}dx,\ x\in\mathbb{R}-\left\{(k\pi)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Adrian Stan, Buzau

L:833. Determinaţi primitivele funcţiei $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{tgx}{1+\cos^5 x}$. Generalizare

Orlando Alecu, Roşiori de Vede, Teleorman

L:834. Să se arate că $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2n}}{1+e^x}dx=\int_{0}^{2}x^{2n}dx$. **Aurel Chiriţă, Iulia Sanda**, Craiova

L:835. Să se calculeze primitivele funcţiei $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\cdot\dfrac{\cos^2 x-e^x\cdot\sin x}{(e^x+\cos x)^2}$.

Lucian Tuţescu. Craiova, Marian Voinea. Bucureşti

L:836. Se consideră $I(m,n,p)=\int_1^e x^m\cdot\ln^n x\cdot\cos^p x\,dx$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[I(m,1,1)+I(m,1,-1)\right]=\infty$.

Nicoleta Oprea, Claudiu Ciulcu, Craiova

L:837. Fie $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$, $b,c\in\mathbb{R}$ şi $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I cu derivata continuă astfel încât $a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c\in\mathbb{R}^*$, $\forall x\in I$. Să se calculeze integrala:

$$\int\frac{a^{f(x)}\left[bf(x)\ln a+c\right]f^I(x)}{\left[a^{f(x)}+bf(x)\ln a+b+c\right]^2}dx.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:838. Calculaţi limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin următoarea relaţie: $a_n=\int_n^{2n}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}dx$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

ERATĂ.

În revista Sclipirea Minţii nr. 25, la articolul de la pagina 15 rândul 9 de jos a se citi $(v_n)_{n\geq 3}$ şir strict crescător şi cu termeni negativi.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

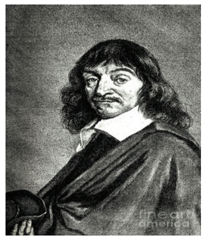
Unui prizonier condamnat la moarte i s-a oferit şansa eliberării dacă rezolvă următoarea problemă.

I se dă 50 de bile albe şi 50 de bile negre pe care să le pună în două urne identice aşa cum crede el astfel încât atunci când condamnatul trebuie să scoată o bilă fără să vadă ce e inăuntru şi fără să ştie din ce urnă a scos, aceasta să fie albă.

Cum ar trebui să aranjeze bilele în cele două urne astfel încât să aibă cea mai mare şansă de a alege o bilă albă?

(Răspuns la pagina 52)

„ It's not enough to have a good mind.
The main thing is to use it well".
Rene Descartes
(1596- 1650)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before <u>March 01, 2021.</u>

PROPOSALS – QUICKIES

Q63. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.
If $0 \le a < b$ are real numbers, then prove that

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{(ka+(n-k)b)((n-k)a+kb)} \le \frac{a+b}{2}$$

Q64. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania.
If $a,b,c>0$ such that $a+b+c=1$, then prove that $\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b} \ge 2$. When does the equality holds ?

Q65. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Let $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma = Euler - Mascheroni$ constant. Find $\lim_{n\to\infty}(\gamma_n - \gamma)\sqrt[n]{n!}$.

Q66. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.
If $x,y,z,t>0$, then $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{z^2}{t}+\frac{t^2}{z}\right) \ge 2(xz+yt)$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q59. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. Prove that in any triangle ABC with usual notations is true the following inequality $\sum\frac{w_a^2}{bc} \le \frac{9}{4}$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. We have

$$\frac{w_a^2}{bc} = \frac{4p(p-a)}{(b+c)^2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2} = 1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2.$$

Using the known inequality $3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$ and Nesbitt-Ionescu inequality, it follows that $\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ which yields the desired inequality.

Solution 2 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

$$\frac{9}{4}-\sum\frac{w_a^2}{bc} = \sum\left(\frac{a^2}{(b+c)^2}-\frac{1}{4}\right) = \sum\frac{(2a+b+c)(a-b)+(2a+b+c)(a-c)}{4(b+c)^2} =$$

$$=\sum\frac{(2a+b+c)(a-b)}{4(b+c)^2}+\sum\frac{(2a+b+c)(a-c)}{4(b+c)^2}=$$

$$=\sum\frac{(2a+b+c)(a-b)}{4(b+c)^2}+\sum\frac{(2b+c+a)(b-a)}{4(c+a)^2}=$$

$$=\sum\frac{(a-b)((2a+b+c)(c+a)^2-(2b+c+a)(b+c)^2)}{4(b+c)^2(c+a)^2}=$$

$$=\sum\frac{(a-b)^2(a^2+b^2+3c^2+2ab+5bc+5ca)}{4(b+c)^2(c+a)^2}\geq 0.$$

Since $a^2+b^2+3c^2+2ab+5bc+5ca>3(b+c)(c+a)$, we obtain a stronger inequality

$$\sum\frac{w_a^2}{bc}+\sum\frac{3(a-b)^2}{4(b+c)(c+a)}\leq\frac{9}{4}.$$

Solution 3 by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania. We use Bergström's inequality and Nesbitt-Ionescu's inequality.

$$3-\sum\frac{w_a^2}{bc}=\sum\left(1-\frac{w_a^2}{bc}\right)=\sum\frac{bc-w_a^2}{bc}=\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)^2}{3}\overset{Nesbitt-Ionescu}{\geq}$$

$$\overset{Nesbitt-Ionescu}{\geq}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3-\sum\frac{w_a^2}{bc}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow-\sum\frac{w_a^2}{bc}\geq\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sum\frac{w_a^2}{bc}\leq\frac{9}{4}.$$

Also solved by Marin Chirciu, Piteşti, Romania and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Remark. Marin Chirciu, Piteşti, Romania proved the following inequality $\frac{9r}{2R}\leq\sum\frac{w_a^2}{bc}\leq\frac{9}{4}$.

Q60. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania. If $a_k>0$ $(k=\overline{1,n})$, then prove the following inequalities a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{(a_k+1)(a_k^3+1)}\leq\frac{n}{4}$; b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{(a_k^2+a_k+1)(a_k^4+1)}\leq\frac{n}{6}$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

a) By AM-GM inequality we have $\frac{a_k^2}{(a_k+1)(a_k^3+1)}\leq\frac{a_k^2}{2\sqrt{a_k}\cdot 2\sqrt{a_k^3}}=\frac{1}{4}$.

Adding up the similar inequalities, we are done.

b) Similarly we have $a_k^2+a_k+1\geq 3a_k\Rightarrow\frac{a_k^3}{(a_k^2+a_k+1)(a_k^4+1)}\leq\frac{a_k^3}{3a_k\cdot 2\sqrt{a_k^4}}=\frac{1}{6}$.

Adding up the similar inequalities, we are done.

Solution 2 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.

a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{(a_k+1)(a_k^3+1)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{2\sqrt{a_k}\cdot 2\sqrt{a_k^3}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{4}$;

b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{(a_k^2+a_k+1)(a_k^4+1)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{3\cdot\sqrt[3]{a_k^2\cdot a_k\cdot 1}\cdot 2\cdot\sqrt{a_k^4\cdot 1}}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{6}$, and the proof is complete.

Solution 3 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

The inequalities follow since functions $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}$, $g(x)=\frac{x^3}{(x^2+x+1)(x^4+1)}$

have respective maximum values 1/4 and 1/6 at x=1. In order to prove this, instead of using derivatives, we may proceed as follows:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}=\dfrac{x}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x}{x^2-x+1}$, and $\dfrac{x}{(x+1)^2}\le\dfrac{1}{4}$ because $(x+1)^2-4x\ge 0$,

$\dfrac{x}{x^2-x+1}\le 1$ because $x^2-x+1-x=(x-1)^2\ge 0$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{(x^2+x+1)(x^4+1)}=\dfrac{x}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{x^2}{x^4+1}$, and $\dfrac{x}{x^2+x+1}\le\dfrac{1}{3}$ since $x^2+x+1-3x\ge 0$,.

$\dfrac{x^2}{x^4+1}\le\dfrac{1}{2}$ because $x^4+1-2x^2=(x^2-1)^2\ge 0$.

Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

Q61. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Prove that in any triangle ABC with usual notations is true the following inequality

$$\frac{ab}{s-c}+\frac{bc}{s-a}+\frac{ca}{s-b}\ge 12\cdot\sqrt{3}\cdot r.$$

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. We have

$$\sum\frac{bc}{b+c-a}-\sum a=\sum\left(\frac{bc}{b+c-a}-\frac{b+c}{2}\right)=\sum\frac{ab+ac-b^2-c^2}{2(b+c-a)}=$$

$$=\sum\frac{b(a-b)+c(a-c)}{2(b+c-a)}=\sum\frac{b(a-b)}{2(b+c-a)}+\sum\frac{c(a-c)}{2(b+c-a)}=$$

$$=\sum\frac{b(a-b)}{2(b+c-a)}+\sum\frac{a(b-a)}{4(b+c)^2}=\sum\frac{(a-b)^2(a+b-c)}{2(b+c-a)(c+a-b)}\ge 0.$$

Using the well known Mitrinović's inequality $s^2\ge 27r^2$ (see for e.g. 5.11 from O. Bottema, Geometric Inequalities, Groningen, 1969) it follows that

$$\sum\frac{ab}{s-c}=\sum\frac{2ab}{a+b-c}\ge 2(a+b+c)=4s\ge 12\sqrt{3}\cdot r.$$

Solution 2 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania. By AM-GM inequality, the fact that $abc=4\cdot R\cdot S$ and Heron's formula $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ we have

$$\sum_{cyclic}\frac{ab}{s-c}\ge 3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{(abc)^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\right)==3\cdot\sqrt[3]{\frac{16R^2S^2s}{S^2}}=6\cdot\sqrt[3]{2R^2s},$$ (1). By Euler's inequality

($R\ge 2r$) and Mitrinović's inequality ($s\ge 3\sqrt{3}r$) from (1) we get:

$$\sum_{cyclic}\frac{ab}{s-c}\ge 6\cdot\sqrt[3]{2R^2s}\ge 6\cdot\sqrt[3]{4r^2\cdot 3\sqrt{3}\cdot r}=12\sqrt{3}r,$$ Q.E.D.

Also solved by Marin Chirciu, Piteşti, Romania and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.
Remark1. Daniel Văcaru gave two solutions.
Remark2. Marin Chirciu, Piteşti, Romania proved the following inequality

$$12\sqrt{3}r\le\sum\frac{bc}{p-a}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}(5R-2r).$$

Q62. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Compute the following limits: a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{k!}}$; b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[k]{(k!)^2}}$.

Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.

a). $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{k!}}\overset{Cesaro-Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k}{\sqrt[k]{k!}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{k!}}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\overset{Cauchy-D'Alembert}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e.$$

b). We have $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\overset{Cauchy-D'Alembert}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[k]{(k!)^2}}\overset{Cesaro-Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{\sqrt[k]{(k!)^2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[k]{(k!)^2}}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(n!)^2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^2=e^2.$$

ŞTIAŢI CĂ ....

Expresia „**grăuntele de nisip al lui Pascal** ’’ face referire la o consemnare în cărţile filozofului, matematicianului şi fizicianului Blaise Pascal (1623- 1699) despre posibila moarte a lui Oliver Cromwell (1599- 1658)- conducătorul de temut al Angliei care a înlăturat monarhia decapitându-l pe Carol I în 1649 şi a instaurat teroarea în insulele engleze dar şi dominaţia peste o mare parte a Europei.

Contemporan cu Cromwell, Pascal după unele informaţii ale medicilor care l-au tratat pe acesta scrie în cărţile sale despre o posibilă infecţie urinară a lui Cromwell care a decedat din cauza unui .... fir de nisip, posteritatea dând însă expresiei **„grăuntele de nisip al lui Pascal”** o semnificaţie originală pentru a înţelege că micile cauze pot provoca adesea efecte mari.

La noi în folclorul popular găsim de asemenea expresia echivalentă **„Buturuga mică răstoarnă carul mare”.**

„ Învățătura care nu intră decât în ochi și în urechi seamănă cu un prânz luat în vis”
Proverb chinez

6. Caleidoscop matematic

Probleme recreative de logică și de creativitate

Kovács Béla, Satu Mare. (Email: belako12@gmail.com)

1. **Folosind numai cele patru operații elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire) și eventual paranteze, exprimați numărul 24 cu ajutorul cifrelor 3 , 3 , 8 și 8.**
   Poate nu este ușor, dar încercați. Să vă gândiți. Vom reveni mai târziu.

2. **Folosind cele patru operații elementare și eventual paranteze, apoi folosind și ridicare la putere, radicali, semnul factorial, sau chiar ca cifrele unui număr exprimați numerele naturale începând cu 1 și până cât se poate, cu ajutorul cifrelor 3 , 3 , 8 și 8.**
   Prezentăm o parte din soluții, chiar dublate.

$1 = 3 - 3 + 8 : 8$	$1 = 3 : 3 + 8 - 8$
$2 = 3 : 3 + 8 : 8$	$2 = \sqrt{3 \cdot 3} - 8 : 8$
$3 = 3! - 3 + 8 - 8$	$3 = 3! : 3 + 8 : 8$
$4 = 8 - 3! + 8 - 3!$	$4 = 3 - 3 + \sqrt{8+8}$
$5 = 3 + 3 - 8 : 8$	$5 = (8 - 3)! : 8 : 3$
$6 = 3 + 3 + 8 - 8$	$6 = (3 + 3) \cdot 8 : 8$
$7 = 3 + 3 + 8 : 8$	$7 = \sqrt{8 \cdot 8} - 3 : 3$
$8 = 3 \cdot 3 - 8 : 8$	$8 = 3 - 3 + \sqrt{8 \cdot 8}$
$9 = 3 \cdot 3 + 8 - 8$	$9 = 3 : 3 + \sqrt{8 \cdot 8}$
$10 = 3 \cdot 3 + 8 : 8$	$10 = 8 - 3 + 8 - 3$
$11 = 3^3 - 8 - 8$	$11 = \sqrt{8 \cdot 8} + \sqrt{3 \cdot 3}$

   Căutați alte soluții. Continuați puțin mai departe, folosind orice senme de operații.

   Cu radicali este foare simplă prima problemă: $24 = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8}$

3. **Folosind cele patru operații elementare și eventual paranteze, apoi folosind și ridicare la putere, radicali, semnul factorial, sau chiar ca cifrele unui număr exprimați numerele naturale începând cu 1 și până cât se poate cu ajutorul cifrelor 2 , 2 , 3 și 3.**
   Încercați cu curaj!

Prezentăm o parte din soluții, chiar dublate.

$1 = 3^2 - 2^3$	$1 = 3 : 3 + 2 - 2$
$2 = 3 : 3 + 2 : 2$	$2 = 3 - 2 + 3 - 2$
$3 = 2 + 2 - 3 : 3$	$3 = 3 : 2 + 3 : 2$
$4 = 2 + 2 : (3 : 3)$	$4 = 2 + 2 + 3 - 3$
$5 = 3 \cdot 3 - 2 - 2$	$5 = 3 + 3 - 2 : 2$
$6 = 3 + 3 + 2 - 2$	$6 = 3 : (2 - 3 : 2)$
$7 = 3 + 3 + 2 : 2$	$7 = 2^3 - 3 + 2$

$8 = 3 \cdot 3 - 2 : 2$	**$8 = 3^2 - 3 + 2$**
$9 = 3 \cdot 3 + 2 - 2$	**$9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3$**
$10 = 3 \cdot 3 + 2 : 2$	**$10 = 3 + 2 + 3 + 2$**
$11 = 2 \cdot 3 + 2 + 3$	**$11 = 33 - 22$**
$12 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$	**$12 = 3 \cdot (3 + 2 : 2)$**
$13 = 3 \cdot 3 + 2 + 2$	**$13 = 2(2 + 3) + 3$**
$14 = 3^2 + 2 + 3$	**$14 = 2^3 + 3 \cdot 2$**
$15 = 3^2 + 2 \cdot 3$	**$15 = 3 (2 + 2) + 3$**
$16 = 2^3 + 2^3$	**$16 = 2 (2 + 3 + 3)$**
$17 = 3 (2 + 3) + 2$	**$17 = 3^2 + 2^3$**
$18 = 3 (2^3 - 2)$	**$18 = 3^2 + 3^2$**
$19 = 3 \cdot 3! + 2 : 2$	**$19 =2 \cdot (3! + 2) + 3$**
$20 = (3 + 2)! : (2 \cdot 3)$	**$20 = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2$**
$21 = 3(2 + 2 + 3)$	**$21 = (3 + 2 : 2)! - 3$**
$22 = 2 (2^3 + 3)$	**$22 = 22 + 3 - 3$**
$23 = 3^3 - 2 - 2$	**$23 = (2 + 2)! - 3 : 3$**
$24 = (2 + 2)! + 3 - 3$	**$24 = 2 \cdot 2 \cdot (3 + 3)$**
$25 = (2 + 3)(2 + 3)$	**$25 = (2 + 2)! + 3 : 3$**
$26 = 3^3 - 2 : 2$	**$26 = 3 \cdot (3! + 2) + 2$**
$27 = 3^3 +2 - 2$	**$27 = (3 + 2 : 2)! + 3$**
$28 = 3^3 + 2 : 2$	**$28 = (2 + 3)^2 + 3$**
$29 = 2^{3+2} - 3$	**$29 = 33 - 2 - 2$**
$30 = 2 \cdot 3 \cdot (2 + 3)$	**$30 = (2 + 2)! + 3 + 3$**

Căutați și alte soluții. Continuați mai departe.

Dintre soluțiile prezentate se poate observa exprimarea numărului 6, poate puțin neobișnuit:

$6 = 3 : (2 - 3 : 2)$ sau exprimarea cu fracții ordinare: $\dfrac{3}{2-\dfrac{3}{2}} = 6$

În mod asemănător se rezolvă prima problemă: $8 : (3 - 8 : 3) = 24$ sau $\dfrac{8}{3-\dfrac{8}{3}} = 24$

4. Exprimați numărul 60 cu ajutorul numerelor 4 , 4 , 15 , 15 , folosind numai cele patru operații elementare, și eventual paranteze.

Rezolvare: $15 : (4 - 15 : 4) = 60$ sau cu fracții $\dfrac{15}{4-\dfrac{15}{4}} = 60$

5. Exprimați numărul 120 cu ajutorul numerelor 5 , 5 , 24 , 24 , folosind numai cele patru operații elementare, și eventual paranteze.

Soluția: $24 : (5 - 24 : 5) = 120$ sau cu fracții $\dfrac{24}{5-\dfrac{24}{5}} = 120$

O generalizare:

6. Exprimați produsul $n(n^2 - 1)$ cu ajutorul numerelor n , n , $n^2 - 1$, $n^2 - 1$, folosind numai cele patru operații elementare și eventual paranteze.

Soluția este: $n(n^2 - 1) = \dfrac{n^2-1}{n-\dfrac{n^2-1}{n}}$

7. Folosind sirul de numere n , n , n + 1 , n + 1 , n + 2 , n + 2 , exprimați produsul n(n + 1)(n + 2). (n ≥ 1 , număr natural). Se poate folosi numai cele patru operații elementare și eventual paranteze.

În căutarea unor soluții studiem câteva cazuri particulare
Pentru n = 1 avem șirul de numere: 1 , 1 , 2 , 2 , 3 , 3 și trebuie exprimat numărul 6 .
Iată o soluție simplă: 6 = 1 – 1 + 2 – 2 + 3 + 3
Pentru n = 2 avem șirul de numere: 2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 și trebuie exprimat numărul 24 .
O soluție simplă ar fi: $24 = 4^2 + 3 + 3 + 4 - 2$ (cu ridicare la putere, care n-ar fi admis acum)
Pentru n = 3 avem șirul de numere: 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 5 și trebuie exprimat numărul 60 .
O soluție simplă ar fi: $60 = 3^3 + 5 \cdot 5 + 4 + 4$ (cu ridicare la putere, care n-ar fi admis acum)
Pentru n = 4 avem șirul de numere: 4 , 4 , 5 , 5 , 6 , 6 și trebuie exprimat numărul 120 .
O soluție simplă este: 120 = (5 + 5)(6 + 6) + 4 – 4 și tot așa mai departe . . .
Dar în cazul general aceste încercări nu ne ajută la nimic.

Soluția în cazul general este: $n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+2)}{n+1-\dfrac{n(n+2)}{n+1}}$

Rezultă din problema precedentă, prin descompunere în factori.
Astfel:

în cazul n = 2 avem: $2 \cdot 4 : (3 - 2 \cdot 4 : 3) = 24$ sau cu fracții $\dfrac{2\cdot 4}{3-\dfrac{2\cdot 4}{3}} = 24$

în cazul n = 3 avem: $3 \cdot 5 : (4 - 3 \cdot 5 : 4) = 60$ sau cu fracții $\dfrac{3\cdot 5}{4-\dfrac{3\cdot 5}{4}} = 60$

Și acum exprimăm 2020 cu astfel de operații elementare:
2020 = 4 · (7 · 9 : (8 – 7 · 9 : 8) + 1)
2020 = 100 + 5 · 7 : (6 – 5 · 7 : 6) + 8 · 10 : (9 – 8 · 10 : 9) + 9 · 11 : (10 – 9 · 11 : 10)
2020 = 2 · 5 + 3 : (2 – 3 : 2) – 8 : (3 – 8 : 3) + 15 : (4 – 15 : 4) – 24 : (5 – 24 : 5) + 35 : (6 – 35: : 6) – 48 : (7 – 48 : 7) + 63 : (8 – 63 : 8) + 80 : (9 – 80 : 9) + 99 : (10 – 99 : 10)

Probleme propuse:
Folosind patru cifre doar de 1, sau 2, sau 3, sau 4 sau 5 sau 6 exprimați numerele naturale de la 1 până la 30 . Se pot folosi orice semne de operație, respectiv paranteze.

Răspuns la problema de la pagina 45.

Dacă am pune 50 de bile albe în urna 1 şi 50 de bile negre în urna 2 probabilitatea ar fi $P = \dfrac{1}{2}$.

La fel ar da dacă am pune 25 bile albe şi 25 de bile negre în fiecare urnă.

Soluţia cea mai avantajoasă e ca în prima urnă să punem o singură bilă albă iar în urna a doua să punem 49 bile albe şi 50 bile negre. Atunci, probabilitatea ar fi

$$P = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{99} = \frac{99+49}{2\cdot 99} = \frac{74}{99} \simeq 0,74 \rangle\ 0,5 .$$

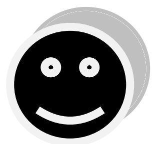
„Lenea este la om ca şi rugina la fier”.
Proverb românesc

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 26** al revistei de matematică **„ SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com**, fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003-2007**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 27** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2021**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.



ELEVI REZOLVITORI

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a XI-a: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**

Şcoala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeş:
Clasa a VI-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;

Şcoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova
Clasa a VIII-a: Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Niţoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a X-a: Găvăneanu Adriana, Berechet Ștefan, Modruz Ştefania, Crăciun Elena, Penteliuc Ioana**; Clasa a XI-a :** Știrbu Cătălin; Ilie Aniţa, Gegea Andreea. **Clasa a XII-a:** Catinca Teodora; Trifan Mircea, Moise Andrei. **Prof. Adrian Stan.**

Scoala Gimnazială Smeni:
Clasa a V-a: Mîrziu Diana, Stănescu Daria, Mateescu Bianca, Prună Valentin; **Clasa a VI-a**: Jifcu Mario, Mîrzu Alexandru, Ion Alexandru; **Clasa a VI-a:** Negoiță Elena, Anghel Marius, Velicu Diana **Clasa a VIII-a**: Tudorache Răzvan, Vasile Emilia; **Clasa a IX-a :** Constantin Ioana; **Clasa a XII-a:** Nicolae Mirabela; **Prof. Ion Stănescu**

Scoala Gimnazială Nicolae Labis , Mălini, Suceava:
Clasa a VI-a: Gogan Maria Veronica, **Prof. Gabriela Gogan.**

VIZITAŢI ŞI REVISTA ONLINE DE MATEMATICĂ MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 26 ANUL XIII - DECEMBRIE 2020

Cuprins

1. Istoria matematicii

Srinivasa Aiyangar Ramanujan
de Ionel Tudor ………………………………………..….…..… 1

2. Articole şi note matematice

Inegalităţi algebrice demonstrate geometric
de Adrian Stan …………………..…………………………... 7

Altă demonstraţie pentru inegalitatea Iran 1996
de Marius Dragan, Neculai Stanciu ……………………..…… 10

Triangle inequalities of Bătineţu's type
de D.M. Bătineţu Giurgiu, Daniel Sitaru, Neculai Stanciu…… 11

Comparing the numbers a^b and b^a
de Dorin Mărghidanu………………………………………... 14

Inegalitatea mediilor şi aplicaţii
de Gabriela Gogan ……………………………………………….. 17

3. Probleme rezolvate ……………………………… 19

4. Probleme propuse ……………………………… 39

5. Quickies ………………………………………………… 46

6. Caleidoscop matematic ………………………… 50

7. Poşta redacţiei ……………………………………… 53

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601