

# SCLIPAREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ. PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ. AN XIX. NR XXXVII, 2026

SM



PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC



SM

**Societatea de Științe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,**

**LICEUL TEORETIC DE INFORMATICĂ "ALEXANDRU MARGHILOMAN", BUZĂU**

**APRILIE 2026**

# SCLIPAREA MINTII 37

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XIX, Nr. XXXVII. APRILIE 2026, BUZĂU



## COLECTIVUL DE REDACTIE



### ▪ Membrii onorifici:

Costică Ambrinoc	- Președinte Filiala Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Cătălin Iordache	- Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice
Cristina Drugă	- Inspector școlar matematică
D. M. Băținețu - Giurgiu	Daniel Sitaru
Nicolae Ivășchescu	Mihály Bencze
Lucian Tuțescu	Gheorghe Ghiță
Marius Drăgan	Ionel Tudor
Dorin Mărghidanu	Marin Chirciu

### ▪ Director:

Neculai Stanciu

### ▪ Redactor sef:

Adrian Stan

### ▪ Redactori principali:

Andrei Octavian Dobre

Ștefan Pîrlog

Ion Stănescu

Iuliana Trașcă

Gabriel Tica

Constantin Dinu

## CUPRINS

ISTORIA  
MATEMATICII ..... 3

ARTICOLE ȘI NOTE  
MATEMATICE ..... 5

PROBLEME  
REZOLVATE ..... 23

PROBLEME  
PROPUSE ..... 50

QUICKIES ..... 59

CALEIDOSCOPI  
MATEMATIC ..... 66

POȘTA REDACȚIEI ..... 68

**GÂNDEȘTE CORECT**

### ▪ Membri :

Elena Alexie, Florică Anastase, Alexandru Liță, Mădălin Avram, Daniela Badea, Daniela Barbu, Mădălina Buliga, Olivia Bercea, Geanina Bică, Sorin Botea, Daniela Beldea, Doina Cristina Călina, Mihai Călugăru, Alina Călugăru, Elena-Daniela Cărămidă, Gabriela Militaru Cismaru, Mihaela Cioplea, Elena Ciobîcă, Constantin Ciobîcă, Mihaela Ciobănelu, Simona Chiriță, Marin Chirciu, Marian Ciuperceanu, Teodor Cîrstov, Marian Cucoaneș, Luiza Cremeneanu, Alin-Ionuț Constantinescu, Alina Ciucă, Camelia Dană, Mihaela Daianu, Cristina Călina Doina, Radu Diaconu, Nicolas Diaconu, Ana Dumitru, Luiza Dumitrescu, Andrei Ganea, Lucian Dan Grigorie, Ramona Grigorie, Adrian Gobej, Ștefan Gobej, Cristina-Dumitra Gobej, Virginia Grigorescu, Dorina Goiceanu, Maria Gurgui, Ionuț Ivănescu, Sebastian Ilinca, Bela Kovacs, Adalbert Kovács, Alina Lazăr, Răzvan Lupu, Jianu Lonetta, Maya-Cataleyza Marcu, Rareș Magher, Dorin Mărghidanu, Mihaela Mioara Mirea, Dan Mitricoiu, Cristian Moanță, Gheorghe Molea, Horia Mușat, Amelia Curcă – Năstășelu, Ramona Nălbaru, Bianca Negreț, Constantin Nicolau, Cristina Diana Oprescu, Alecu Orlando, Felicia și Cezar Ozunu, Petre Păunescu, Mădălina Panduru, Ion Pătrașcu, Aurelia Petrică Sorin Pîrlea, Oana Preda, Emil C. Popa, Vasile Mircea Popa, Dumitru Preoteasa, Aura Loreta Pogorevici, Florin Rotaru, Alexandru Răduț, Vlad Orovniceanu, Dumitru Săvulescu, Ilinca Sebastian, Marius Sgaibă, Loredana Surcel, Roxana Stanciu, Ileana Stanciu, Delia și Cristian Schneider, Daniela Stoian, Dumitru Gabriel Stancele, Florin Șendroi, Liviu Smarandache, Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Mirela Țacu, Ovidiu Țățan, Alina Tigae, Eugenia Turcu, Sorina Tudor, Cristian Udrea, Carmen Vlad, Ana Alesia Truică, Roxana Vasile, Carina-Maria Viespescu, Daniel Văcaru, Simona Vladimirescu, Ionuț Florin Voinea, Carmen Vlad, Laura Zaharia, Gigi Zaharia.



### REDACȚIA

Liceul Teoretic de Informatică  
„Alexandru Marghiloman”, Buzău,  
Strada Ivănețu, Nr. 7, Cod. 120114,  
Tel. 0238714902

E\_mail: [ady\\_stan2005@yahoo.com](mailto:ady_stan2005@yahoo.com)

Coordonator proiect: Adrian Stan



„Cea mai bună strategie este sortită eșecului  
dacă este implementată prost”.

Bernhard Riemann  
(1826-1866)



## 1. Istoria matematicii

### 200 de ani de la nașterea lui Georg Friedrich Bernhard Riemann ( 17.09. 1826 - 20.07.1866 )

În acest an se împlinesc 200 de ani de la nașterea lui **Bernhard Riemann** la 17 septembrie 1826, matematician și fizician german care a adus contribuții importante în analiză și geometrie, de unele dintre ele ținând seama și fizicianul Albert Einstein (1879-1955) în 1916 pentru fundamentarea teoriei relativității generalizate.

**Riemann** s-a născut în satul Breselenz din Hanovra într-o familie modestă cu șase copii iar după moartea mamei sale când copii erau încă mici, tatăl lor fiind pastor luteran s-a îngrijit de educația lor și i-a dirijat către studierea teologiei.

La vârsta de 14 ani, Riemann merge la Hanovra pentru a locui cu bunica sa și aici urmează cursurile liceului, perioadă în care a studiat operele marilor matematicieni **Leonhard Euler** (1707-1783) și **Adrien Legendre** (1752-1833). Profesorii sunt uimiți de abilitățile tânărului în efectuarea calculelor laborioase așa că însuși directorul gimnaziului îi pune la dispoziție propria bibliotecă și îi permite să nu urmeze regulat cursurile. Printre primele cărți pe care le ia să le studieze este și celebrul tratat de teoria numerelor de 859 de pagini al lui Legendre, pe care îl restituie directorului după doar șase zile spunând: „ *Este o carte admirabilă. Am înțeles-o în întregime* ”. Ca elev, **Riemann** inventează un calendar permanent.

În 1846, tatăl își trimite fiul să studieze filologia și teologia la Universitatea din Göttingen. Aici a auzit și cursul despre metoda celor mai mici pătrate, ținut de **Gauss** (1777-1855), care văzând abilitățile matematice ale lui **Riemann**, îl trimite să studieze matematica la Universitatea din Berlin. Aici, începând cu 1847 timp de doi ani Riemann studiază matematica cu matematicienii **Carl Gustav Jacobi** (1804-1851), **Jakob Steiner** (1796-1863), **Gotthold Eisenstein** (1823-1852) și cu **Johann Peter Gustav Dirichlet** (1805-1859) cu care se împrietenește și care îi influențează interesul pentru matematică.

În 1849, **Riemann** s-a întors la Göttingen și după absolvirea facultății de filozofie a fost desemnat asistent al celebrului fizician Wilhelm Weber (1804 - 1891) elev, coleg și prieten al lui Gauss.

În data de 16.12.1851, **Riemann** își susține doctoratul în matematică, sub îndrumarea lui Gauss cu o teză strălucită: „*Principiile unei teorii generale ale funcțiilor de variabilă complexă*” iar cu această ocazie, Gauss îi spune lui Weber: „*Teza prezentată de domnul Riemann dă dovadă de cercetări serioase și profunde ale autorului. Ea ne arată un spirit creator activ, un adevărat matematician și de o strălucitoare originalitate. Prezentarea este clară, concisă și uneori foarte frumoasă.*”

În teza sa de doctorat, **Riemann** stabilește așa numitele- **ecuații Cauchy- Riemann** care



asigură analicitatea unei funcții de variabilă complexă, precum și conceptul care ulterior avea să se numească suprafață riemanniană.

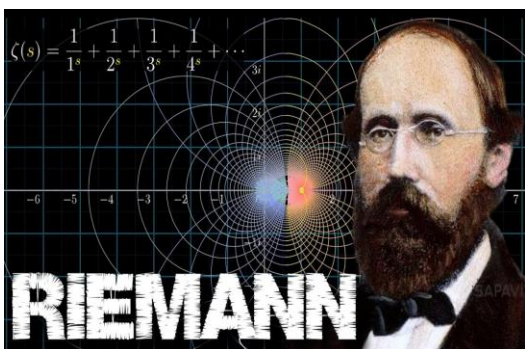
La recomandarea lui Gauss, în 1854 se pregătește să devină profesor iar examenul presupunea o disertație din trei teme. Primele două și le alege din fizica teoretică iar cea de a treia din matematică la sugestia lui Gauss având titlul „*Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei*”.

**Riemann** a susținut această conferință în data de 10 iunie 1854, la 25 de ani de la prima lucrare a lui Lobacevski (1793- 1856), în domeniul în care și Gauss avusese preocupări de fundamentele geometriei în cele șapte săptămâni în care și-a pregătit teza de abilitare, Riemann a cercetat rezultatele pe care le stabilise Gauss în lucrarea „*Cercetări generale asupra suprafețelor curbe*”, cugetând mult asupra consecințelor acestora.

Generalizând ideea generală a lui Gauss, aceea de a considera că geometria intrinsecă de pe o suprafață este caracterizată prin elementul ei liniar (forma metrică a suprafeței) și prin curbura ei totală, **Riemann** a devenit el însuși genial, creator al unei noi geometrii neeuclidiene, alta decât a lui **Janoș Bolyai** (1802- 1860) și **Lobacevki** (1793-1856).

Cu această ocazie **Riemann** arăta că:

„ *Geometria presupune ca fiind date atât conceptul de spațiu, cât și primele noțiuni fundamentale pentru construcții în spațiu. Ea dă despre ele numai definiții nominale, în timp ce determinările esențiale apar în formă de axiome. Relațiile dintre aceste presupuneri rămân însă obscure. Nu se înțelege nici dacă legătura dintre ele este necesară și în ce măsură, nici dacă aprioric legătura este posibilă. Cauza acestei stări de lucruri a constatat în faptul că noțiunea generală de*



*mărime cu mai multe dimensiuni, între care și mărimile geometrice, a rămas complet neelaborată. De aceea eu mi-am propus să construiesc, în primul rând, noțiunea de mărime cu mai multe dimensiuni, cu ajutorul noțiunii generale de mărime. De aici va decurge că spațiul formează numai un caz particular de mărime tridimensională ”.*

Ocupându-se de suprafața cu curbura constantă, **Riemann** a arătat că geometriile de pe suprafețe sunt geometrii neeuclidiene plane și pentru a dovedi acest lucru, a prezentat o nouă geometrie, aceea a planului fără drepte paralele. Aici axioma a V-a a lui **Euclid** ( 330-275 î.e.n) era înlocuită prin aceea că „*printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce nicio paralelă*”.

Tot în disertația sa, **Riemann** a stabilit prima interpretare intuitivă a unei geometrii neeuclidiene, fapt care ulterior a avut o mare importanță pentru apariția teoriei relativității a lui **Einstein** ( 1879-1955) în 1916. Ca și lucrările lui Bolyai și Lobacevski, excepționala disertație din 10 iunie 1854 a lui **Riemann** a trecut neobservată. Numai marele Gauss a urmărit-o atent fiind mulțumit. Nici chiar autorul nu s-a mai gândit la ea, nepublicând-o niciodată. Abia în 1868 ( după decesul lui Riemann), succesorul său la Göttingen, **Richard Dedekind**( 1831-1916), prieten și fost student al lui Riemann a cercetat manuscrisul ( 1855-1856) și l-a publicat imediat.

Așadar, din 1854, **Riemann** devine profesor iar succesiunea evenimentelor face ca după moartea lui Gauss în 1855 și mai apoi a lui Dirichlet în 1859, Riemann să devină succesorul acestora la catedra de matematică cu un salariu suficient pentru a se putea întreține.

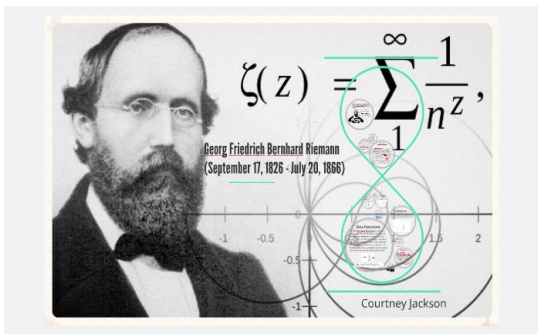
De-a lungul carierei sale, **Riemann** a publicat lucrări în domeniul analizei ecuațiilor cu derivate parțiale, electricității și căldurii.

În 1857 a publicat lucrarea „*Teoria funcțiilor abeliene*” iar în 1861, în lucrarea „*Asupra unei probleme de transmitere a căldurii*”, dezvoltă teoria formelor pătratice. În august 1859, **Riemann** a devenit membru corespondent al Academiei de Științe din Berlin , după ce a prezentat un raport asupra cercetărilor în care este implicat. Titlul expunerii a fost „*Asupra numerelor prime mai mici decât un număr dat*”. Aici apare pentru prima dată enunțul care ulterior s-a numit „*Ipoteza lui Riemann*”. Strâns legată de problema distributivității numerelor prime, ipoteza lui Riemann este una dintre cele mai cercetate probleme de matematică în anul 1900 la al doilea Congres Internațional de Matematică, ținut la Paris.

Marele matematician **David Hilbert** ( 1862-1943) a prezentat o expunere cu titlul „*Probleme matematice*” unde discută un număr de 23 de probleme nerezolvate, despre care el consideră că reprezintă direcții interesante pentru cercetarea matematică. La numărul 8, pe lista lui Hilbert figura și **conjectura lui Riemann**. Se spune că Hilbert fiind întrebat care ar fi primele sale cuvinte dacă ar fi înviat după 500 de ani, el ar fi răspuns: „*Aș întreba dacă a rezolvat cineva conjectura lui Riemann*”. Aceasta este de fapt cea mai mare problemă încă nerezolvată a matematicii. Actualmente aceasta figurează printre cele 7 probleme ale mileniului, stabilite în anul 2000 de Institutul de Matematică Clay din Massachusetts, pentru a căror rezolvare se oferă un premiu de câte 1 milion de dolari.

S-a demonstrat că un număr mare de rezultate în teoria numerelor sunt adevărate, dacă este adevărată **Ipoteza lui Riemann** pe care unii matematicieni o acceptă iar alții sunt sceptici (Littlewood, Selberg). Cum a ajuns Riemann la această conjectură a sa ?

Se știa încă de la Euler că seria armonică divergentă  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  și despre  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (problema de la Basell) iar în 1737, Euler definește funcția zeta:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$  unde s este număr întreg mai mare decât 1 ( pentru asigurarea convergenței seriei). Euler a arătat că există o legătură între funcția continuă  $\zeta(s)$  și numerele prime, anume  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ .



În 1859, **Riemann** a extins funcția zeta la valori complexe, z.

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$  pentru numere complexe z care au partea reală mai mare ca 1 (pentru a asigura convergența seriei).

Mai mult, folosind funcția  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \dots$  (serie

convergentă pentru  $\text{Re } z > 0$ , datorită alternanței semnelor), **Riemann** realizează o extensie prin procedeul numit continuitate analitică și consideră funcția zeta

extinsă (funcția zeta a lui Riemann) ,  $\zeta(z) = \left(1 - \frac{1}{2^{z-1}}\right)^{-1} \cdot f(z)$

definită și pentru  $0 < \text{Re } z \leq 1$ . S-a constatat că funcția zeta a lui Riemann are o infinitate de zerouri de numere întregi negative pare,  $z = -2, -4, -6, \dots$

Aceste zerouri sunt numite zerouri banale,  $(z(-2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$ .

Dar funcția zeta a lui Riemann are și o infinitate de zerouri complexe nebanale,  $z = a + ib, a \in (0;1), b \in \mathbb{R}^*$ .



Conjectura lui Riemann se referă însă la zerourile nereale: Toate zerourile complexe nereale ale funcției zeta Riemann au partea reală egală cu  $\frac{1}{2}$ , deci au forma  $z = a + ib, b \in \mathbb{R}^*$ .

În 1914, matematicianul englez G.H. Hardy (1877-1947) a demonstrat că  $\zeta(z)$  are o infinitate de zerouri complexe pe dreapta critică  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$  iar în 1989 s-a arătat că cel puțin două

cincimi din zerourile complexe sunt acolo. Din 1986, după mai mai mult de o mie de ore de calcul cu un supercomputer, s-a arătat că rezultatul este adevărat pentru primele  $1,5 \cdot 10^9$  zerouri dar acest lucru nu dovedește că toate au aceeași proprietate.

În articolul său, **Riemann** a arătat că există o foarte strânsă legătură între zerourile funcției sale zeta și proprietățile lui  $\pi(n)$  (numărul numerelor prime mai mici decât  $n$ ).

Una dintre cele mai bune aproximații a lui  $\pi(n)$ , care folosește explicit funcția zeta a lui Riemann

este relația 
$$\pi(n) \approx 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \zeta(k+1)} \cdot \frac{(\log n)^k}{k!}.$$

**Riemann** a generalizat noțiunea de integrală pentru o clasă mai generală de funcții și a dezvoltat teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. Considerat adevăratul fondator al topologiei, el a precizat ca obiect al acesteia „studiul proprietăților invariante prin transformări bicontinue”.

A observat că dacă seria termenilor pozitivi și cea a termenilor negativi ai unei serii date sunt divergente, atunci seria dată poate fi convergentă, divergentă sau nedeterminată schimbând după voie ordinea termenilor (ceea ce nu putem face la seriile semiconvergente), atunci putem aduce seria ca să aibă o sumă dată, cu condiția ca termenul general să tindă la zero.

**Riemann** a introdus conceptul de oscilație a unei funcții într-un punct și a arătat că dacă derivata secundă a unei funcții este nulă, atunci funcția este liniară.

A introdus integrala ca șir Cauchy cu deosebirea să nu plece de la o funcție continuă ci de la una arbitrară.

A dat metoda de sumare a seriilor trigonometrice și a dat metoda der soluționare a unor ecuații cu derivate parțiale. A generalizat problema lui Dirichlet privind determinarea unei funcții date pe un contur.

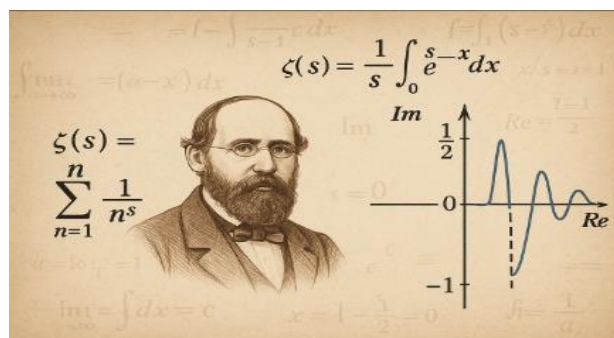
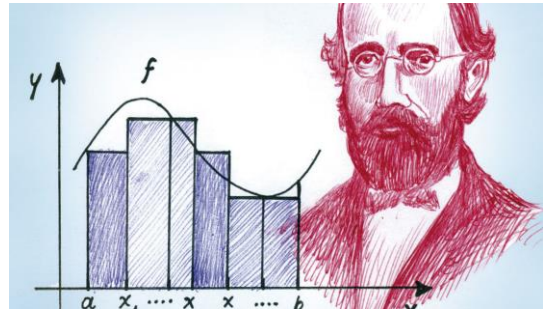
Lucrările lui **Riemann** au avut o influență considerabilă asupra dezvoltării matematicii moderne și mai ales privind geometriile neeuclidiene.

În 1862, **Riemann** s-a căsătorit cu Elisa Koch, sora unui prieten, având o fiică, Ida Schilling.

În ultimi ani ai vieții (1862-1866) a suferit de tuberculoză, și de aceea făcea dese călătorii în zonele mai calde din Italia. Revenit pe malul lacului Maggiore se stinge pe 20 iulie 1866 fiind înmormântat în localitatea Selasco (azi Verbania).

### Bibliografie:

1. Adrian Stan și colab. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015.
2. Ion Purcaru, Octavian Bâscă. Pagini din istoria matematicii. Oameni, idei și fapte de referință. Editura Universitară. București. 2012.
3. Keith Devlin. Vârsta de aur a matematicii. Editura Theta. București. 2000.
4. Paul J. Nahin. O poveste imaginară. Istoria numărului  $\sqrt{-1}$ . Editura Theta. București. 2000.
5. Vasile Bobancu. Caleidoscop matematic. Editura Niculescu. 2005.
6. Revista Arhimede, nr. 7-8 /2004. Editura Paralela 45.
7. www.wikipedia.ro



„ Întodeauna poți recunoaște adevărul prin frumusețea și simplitatea lui.”

Richard P. Feynman  
(1918-1988)



## 2. Articole și note matematice

Profesorul **DUMITRU M. BĂTINEȚU-GIURGIU** la 90 DE ANI

de Ionel Tudor-Călugăreni, Neculai Stanciu, Adrian Stan



Domnul profesor **Dumitru M. Băținețu – Giurgiu**, s-a născut la **27 ianuarie 1936**, în comuna Pietroșani, județul Vlașca (acum Teleorman), ca prim fiu al lui Marin și al Andreianeii. A urmat școala primară și gimnazială în comuna natală în perioada 1943- 1950 și are amintiri frumoase despre profesorii și colegii pe care i-a avut. Menționăm că la Pietroșani s-a născut și a absolvit gimnaziul și viitorul redactor șef al Gazetei Matematice seria B, prof. dr. **Marcel Ion P. Țena**.

În anii 1950 – 1954, **D. M. Băținețu – Giurgiu** este elev la Colegiul Național “Ion Măiorescu” din Giurgiu și îl are ca profesor de matematică și diriginte, pe renumitul profesor Ion Mateescu ( cu dublă licență: matematică și educație fizică, președinte al Filialei Giurgiu a S.S.M.R în perioada 1961-1968), iar ca director pe profesorul de matematică și fizică Savin Popescu ( primul președinte al Filialei Giurgiu a S.S.M.R, 1954-1962). În acea perioadă la Giurgiu se făcea carte serioasă, se vorbea despre “miracolul de la Giurgiu”, liceele “Ion Măiorescu” și “Tudor Vianu” având rezultate remarcabile ale elevilor rezolvitori la Gazeta Matematică și la olimpiadele naționale (elevii Panaitopol Laurențiu și Brișcă Virgil – premiul I iar Popescu Dragoș și Popescu Radu-premiul II ).

În 1954 este prima participare la olimpiada pe țară a elevilor giurgiuveni prin elevul Băținețu M. Dumitru. La Gazeta Matematică a colaborat încă din anul 1951 și a fost premiat ca rezolvitor de probleme din Gazeta Matematică în anii 1954, 1955 și 1956.

În perioada 1960- 1965, **D.M. Băținețu- Giurgiu** a urmat cursurile Facultății de Matematică din București, specializarea Analiză matematică, unde a avut profesori eminenți: Miron Nicolescu, Nicolae Teodoreanu, Gheorghe Marinescu, Nicolaie Dinculeanu, Solomon Marcus, Gheorghe Galbură, Ion Cuculescu și alții.

Activitatea profesională a domnului Băținețu este deosebită. După terminarea facultății, a îndeplinit diferite funcții didactice sau în cercetare: asistent universitar (prin repartiziie guvernamentală) la Institutul Politehnic “Gheorghe Asachi” din Iași, (1965-1968), cercetător științific (prin concurs) la Institutul de Cercetări Forestiere București (1968-1970), asistent

universitar (prin concurs) la Institutul Agronomic Nicolae Bălcescu din București (1970-1972), profesor titular prin concurs la liceul "Matei Basarab" din București (1972-1985), liceul Ion Creangă din București (1985-1989) și din nou la liceul "Matei Basarab" din 1989 până la pensionare în 2003.

La Gazeta Matematică, domnul **D.M. Bătinețu-Giurgiu** a publicat peste 100 de articole și un număr impresionant de probleme (peste 681 de probleme și 62 de note matematice până în 2005), fiind cel mai prolific colaborator în viață și al treilea din istoria de 130 de ani ai revistei Gazeta Matematică.

A avut și funcții de conducere la Gazeta Matematică: redactor principal titular prin concurs (1978-1980), membru al Comitetului de redacție (1969-1973, 1993-2008) iar din 2008 și până în prezent este membru onorific al Comitetului de redacție al GMB.

A făcut parte ca redactor principal din redacția GMB în anul centenar 1995. În calitate de redactor principal a înființat rubricile *Probleme pregătitoare pentru O.I.M* și *Probleme pentru Concursul Anual al Rezolvitorilor Gazetei Matematice*.

Cu ocazia Centenarului Gazetei Matematice din 1995 a fost distins cu Diploma și Medalia Jubiliară „Centenar Gazeta Matematică” iar în 2010 a primit Medalia Jubiliară „Centenarul Societății de Științe Matematice din România”. În anul 2007 pentru întreaga activitate în cadrul Gazetei Matematice și al SSMR, a primit „Diploma de Excelență a Societății de Științe Matematice din România”. În anul 2025 a primit Diploma și Medalia Jubiliară, „130 ani de apariție neîntreruptă a Gazetei Matematice 1895-2025”.

În anul 1989 la Simpozionul de Creativitate și Eficiență în învățământ, organizat la Iași a primit premiul I iar în anul 2000 a primit o mențiune la Concursul de articole metodice organizat de Gazeta matematică seria A.

La cea de a XII-a O.I.M desfășurată la Budapesta în 1970, domnul **D.M. Bătinețu-Giurgiu** a propus o problemă în numele României. A publicat în reviste din țară și din străinătate peste 400 de articole matematice și a propus în reviste, la concursuri și olimpiade precum și la barajele pentru alcătuirea echipelor olimpice internaționale ale României, peste 250 de probleme.

La diferite edituri a tipărit mai mult de 25 de culegeri de probleme de matematică. Prima culegere a fost excelenta monografie „Șiruri”, apărută în 1979 la Editura „Albatros” din București.

A participat la pregătirea loturilor naționale olimpice ale României și la pregătirea elevilor în diverse tabere naționale de matematică. De asemenea, a prezentat comunicări la diferite sesiuni științifice organizate de S.S.M.R sau de Institutul de Matematică al Academiei Române din Cluj-Napoca, Institutul Politehnic „Gheorghe Asachi” din Iași, Universitatea Politehnică din Timișoara, Universitatea „Babeș – Bolyai” din Cluj Napoca, dar și la universitățile din Craiova, Baia Mare, Constanța și Sibiu.

În județul Giurgiu, domnul profesor Bătinețu a participat, în anul 1988 în calitate de redactor al Gazetei Matematice, la Simpozionul „Școala giurgiuveană la Gazeta Matematică” și tot în 1988, la medalionul „Academician Nicolae Teodoreanu la 80 de ani, profesorul Ion Mateescu la 80 de ani, profesorul Stelian Rădulescu la 80 de ani”.

În anul 2008 a participat la aniversarea a 100 de ani a profesorului și dirigintei Ion Mateescu pe care l-a avut în timpul liceului. Tot în județul Giurgiu, domnul Bătinețu a participat și la cercurile pedagogice ale profesorilor de liceu, în 1995 la Liceul Tehnologic din Călugăreni și în 2007 la Liceul „Tudor Vianu” din Giurgiu. În afara Gazetei Matematice, a mai făcut parte și este membru și la revistele de matematică: „Revista Matematică din Timișoara” (R.M.T), „Recreații Matematice” din Iași (R.M.I), „Arhimede” din București, Revista de matematică „Dimitrie Pompeiu” din București, Octogon Mathematical Magazine, „Sclipirea Minții” din Buzău. De asemenea, a colaborat și la revistele: „Cardinal” din Craiova, revista de matematică și informatică din Constanța, „Foaie matematică” din Republica Moldova, revista „Alpha” din Craiova, revista „Argument” din Baia Mare, „Didactica Matematică” din Cluj-Napoca, „Sfera matematicii” din Băilești, revista „Axioma” din Ploiești, revista de matematică din Mehedinți sau Ialomița dar și din alte publicații apărute în țară.

Unele dintre problemele și articolele sale au fost publicate în colaborare cu alți coautori cum ar fi, prof. univ. dr. Maria Bătinețu -Giurgiu cadru didactic la Academia Tehnică Militară din București (colegă de facultate, viitoare soție), prof. univ dr. Augustin Semenescu (fost elev iar acum profesor la Politehnica București), prof. dr. Mihaly Bencze, editor revista Octogon Mathematical

Magazine, prof. Neculai Stanciu, director revista Sclipirea Minții), prof. Daniel Sitaru ( editor Romanian Mathematical Magazine) , prof. Mircea Trifu ( 1942- 2025), secretar general al SSMR mai mult de 25 de ani, prof. Nicolae Papacu ( redactor șef Revista de Matematică din Ialomița), prof. Nicolae Mușuroia ( redactor șef Revista Argument din Baia Mare), prof. Ionel Tudor- Călugăreni.

Domnul profesor **D.M. Bătinețu – Giurgiu** a publicat în mai mult de 36 de cărți, lucrări și articole consacrate în general șirurilor:

1. **Șirul lui Traian Lalescu ( 1882-1929):**  $L_n = {}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ ,  $n \geq 2$  cu limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{e}$ .
2. **Șirul lui Andrei Ioachimescu: ( 1868-1943):**  $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -1,46035\dots$ .
3. **Șirul lui Romeo T. Ionculescu:**  $I_n = (n+1)^{n+1}\sqrt{n+1} - n^n\sqrt{n}$ ,  $n \geq 2$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ ;
4. **Șirul lui Mihail Ghermănescu ( 1899-1962):**  $G_n = \frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$ ,  $n \geq 1$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = e$ .
5. **Șirul lui D.M. Bătinețu-Giurgiu ( problema C:890, G.M, vol. XCIV ( 1989), pag 139) cu termenul general:**  $B_n = \frac{(n+1)^2}{{}^{n+1}\sqrt{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$ ,  $n \geq 2$  cu limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = e$ .

În lucrările sale, domnul profesor a definit și conceptele despre șiruri Lalescu generalizate, operatori Lalescu, șiruri Lalescu ponderate, funcții Lalescu ponderate, funcții Euler-Lalescu, șirul Bătinețu - Giurgiu cu diferite generalizări, materiale care au fost publicate uneori și cu alți coautori.

Alt domeniu important de cercetare pe care l-a avut în vedere domnul profesor a fost cel al inegalităților unde a descoperit că inegalitatea  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$  ( a,b,c laturile unui triunghi) atribuită matematicianului R. Weitzenböck și publicată de acesta în 1919, a fost mai întâi publicată în Gazeta Matematică nr. 2 în octombrie 1897 de Ion Ionescu, unul dintre cei patru “stâlpi” ai Gazetei Matematice. Astăzi, numim această inegalitate cu numele celor doi și anume **Ionescu – Weitzenböck** iar în numărul 1 din 2013 al Gazetei Matematice autorii D.M.Bătinețu- Giurgiu și Neculai Stanciu au prezentat 23 de demonstrații și 10 generalizări ale acestei inegalități.

De asemenea, domnul Bătinețu a prezentat și alte generalizări ale unor inegalități celebre cum ar fi cele ale lui Bergström, Nesbit, Radon sau legăturile dintre acestea cu inegalitatea Cauchy – Buniakowski-Schwartz.

Dintre lucrările publicate pentru pregătirea elevilor pentru concursuri și olimpiade amintim câteva:

- **“Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee(“ 1950- 1990) împreună cu I. Tomescu, I.V.Maftעי, V. Gheorghită, Editura Științifică, București, 1992;**
- **“Analiză matematică, probleme pentru clasa a XI-a”,** împreună cu Maria Bătinețu- Giurgiu, I. Bîrchi-Damian, Augustin Semenescu, Editura Matrix Rom, București, 2004;
- **“Șiruri”,** autor, Editura Albatros, București, 1979;
- **“Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasa a XI-a și a XII-a”,** alături de I. Maftעי, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

**Pentru activitatea depusă în dezvoltarea învățământului matematic și formarea la tineri a pasiunii pentru studiul matematicii, suntem mândri să îl avem alături de noi pe distinsul domn profesor D.M. Bătinețu – Giurgiu pe care îl felicităm din partea colectivului redacțional de la revista de matematică Sclipirea Minții, îi urăm La Mulți Ani ! cu multă sănătate la împlinirea celor 90 de ani și îi suntem profund recunoscători pentru neobosita sa activitate și colaborare deosebită cu noi.**

#### Bibliografie:

1. Gazeta Matematică, anul C, nr. 9/1995, G.M, seria B, anul CXXX, nr. 9 /2025;
2. Florian Diac, Monografia Societății de Științe Matematice din România, Ed. Paralela 45. Pitești. 1998;
3. Florin Diac, Mircea Trifu, Costel Chiteș. Școala matematică românească de-a lungul timpului. Ed. Oscar Print. București. 2010;
4. Dorel Duca. O istorie care merită să fie cunoscută: Gazeta Matematică și Societatea de Științe din România. Casa Cărții de Știință. Cluj-Napoca. 2015;
5. Marcel Țena. Istoria localității Pietroșani. Ed. Mira. București. 2007;
6. Neculai Stanciu. Profesorul D.M.Bătinețu – Giurgiu... Revista mate.info, noiembrie 2011;
7. Colecția revistelor Gazeta Matematică, Revista de matematică din Timișoara, Recreații Matematice Iași,

## Calculul limitei unui șir de tip Lalescu

de D.M. Bătinețu- Giurgiu, București,  
Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

În Gazeta Matematică, vol. VI ( 1900-1901), a fost publicată pentru prima dată problema 579 ( pag. 148), autorul fiind ilustrul nostru matematician **Traian Lalescu ( 1882- 1929)**. El a considerat șirul cu termenul general  $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ ,  $\forall n \geq 2$ , căruia i-a calculat limita, obținând  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{e}$ , unde  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$

Șirul  $(L_n)_{n \geq 1}$  îl numim acum **șirul lui Traian Lalescu**.

În cele ce urmează, calculăm limita unui șir care reprezintă o extindere a **șirului Lalescu**.

Pentru  $t \geq 0$  și șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  de numere reale strict pozitive care verifică  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = a > 0$

și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^t b_n} = b > 0$  ne propunem calculul limitei șirului cu termenul general

$B_n = \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}}{(n+1)^t} - \frac{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}{n^t}$ ,  $n \geq 2$ . Folosim anumite calcule cu limite ajutătoare:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n^n}} \stackrel{\text{Cauchy-d'Alembert}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} = a \cdot e^{-1} = \frac{a}{e}. \end{aligned} \quad (1)$$

Analog, găsim succesiv:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n^t} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b_n}{n^{nt}}} \stackrel{\text{Cauchy-d'Alembert}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{(n+1)^{(n+1)t}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^t \cdot b_n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{nt+t} = \\ &= b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)t} = b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{(n+1)t} \right] = b \cdot \frac{1}{e^t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Considerăm șirul  $(u_n)_{n \geq 2}$  de numere strict pozitive  $u_n = \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}}{(n+1)^t} \cdot \frac{n^t}{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}$  cu limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{n+1} \cdot \frac{n}{(n+1)^t} \cdot \frac{n^t}{\sqrt[n]{a_n} \sqrt[n]{b_n}} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e^t} \cdot \frac{e}{a} \cdot \frac{e^t}{b} \cdot 1 = 1. \text{ Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1, \text{ obținem}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}} \cdot n^n}{a_n \cdot b_n \cdot (n+1)^{nt}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}^{n+1} \cdot b_{n+1}^{n+1}}}{a_n \cdot b_n \cdot \sqrt[n+1]{a_{n+1} b_{n+1}}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{nt} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{n^t b_n} \cdot \frac{(n+1)^{t+1}}{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}} \cdot \frac{n^{nt+n+1}}{(n+1)^{nt+t+1}} = \end{aligned}$$

$$= a \cdot b \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{t+1}} = a \cdot b \cdot \frac{e^{t+1}}{ab} \cdot \frac{1}{e^t} \cdot 1 = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n = e. \quad (3)$$

Avem și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln[1+(u_n-1)]}{u_n-1}} = 1 \quad (4)$  deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+u_n-1)}{u_n-1} = 1$ .

Pentru șirul  $B_n = \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}}{(n+1)^t} - \frac{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}{n^t} = \frac{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}{n^t} \left( \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}} \cdot \frac{n^t}{(n+1)^t} - 1 \right) =$   
 $= \frac{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}{n^t} \cdot (u_n - 1) = \frac{\sqrt[n]{a_n \cdot b_n}}{n^t} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n^t} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n$ . Folosind limitele găsite (1), (2)

(3), (4) avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e^t} \cdot 1 \cdot \ln e = \frac{ab}{e^{t+1}}$ .

**Aplicația 1.**

Pentru  $t = 0$  și  $a_n = n!$ ,  $b_n = 1$ ,  $\forall n \geq 1$ , avem  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

și  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^0} = 1$ . Obținem  $B_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)! \cdot 1}}{(n+1)^0} - \frac{\sqrt[n]{n! \cdot 1}}{n^0} = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} = L_n$ ,  $\forall n \geq 2$

și am găsit șirul lui Lalescu cu limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{a \cdot b}{e^{0+1}} = \frac{1}{e}$ .

**Aplicația 2.**

Pentru  $t = 2$  și șirurile strict pozitive  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ , cu  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} > 0$  și  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^2 b_n} > 0$ , găsim

șirul cu termenul general  $B_n = \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1} b_{n+1}}}{(n+1)^2} - \frac{\sqrt[n]{a_n b_n}}{n^2}$ ,  $\forall n \geq 2$  având limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{ab}{e^3}$ .

**Aplicația 3.**

Pentru  $t \geq 0$ , considerăm șirurile  $a_n = n!$  și  $b_n = (n!)^t$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Avem  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n! \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n! \cdot n} = 1$  și

$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{n^t \cdot b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^t}{n^t \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n! \cdot (n+1)}{n! \cdot n} \right)^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^t = 1$ . Obținem

$B_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)! [(n+1)!]^t}}{(n+1)^t} - \frac{\sqrt[n]{n! [n!]^t}}{(n)^t}$  cu limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{ab}{e^{t+1}} = \frac{1}{e^{t+1}}$ .

**Bibliografie:**

1. M.D. Bătinețu. Șiruri. Ed. Albatros. București. 1979.
2. Octogon Mathematical Magazine.
3. Colecția Gazeta Matematica.
4. Colecția Revista de Matematică a elevilor din Timișoara. ( R.M.T)
5. Colecția Revistei Recreații Matematice din Iași. ( R.M.I)

## Alte probleme cu integrale funcționale

de D. M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu și Daniel Sitaru

**Abstract.** This paper presents new solutions for some problems with calculus of definite integrals - published by math journals from all over the world.

**Keywords:** integrals.

**MSC:** 26B15, 11S23, 97D50, 97I30, 26D15, 11B39.

Acest articol este o continuare a celor din [1], [2] și [3].

1. (D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu). Dacă  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $b, c \in (1, \infty)$  și  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continue și impare, atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_{-a}^a f(x) \ln(b^{g(x)} + c^{g(x)}) dx = \ln(bc) \int_0^a f(x) g(x) dx.$$

*Soluție.*  $I = \int_{-a}^a f(x) \ln(b^{g(x)} + c^{g(x)}) dx$ , în care facem schimbarea de variabilă  $x = u(t) = -t$ , cu

$u'(t) = -1, u(a) = -a, u(-a) = a$  și obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{-a} -f(t) \ln(b^{-g(t)} + c^{-g(t)}) (-1) dt = - \int_{-a}^a f(x) \ln \frac{b^{g(x)} + c^{g(x)}}{(bc)^{g(x)}} dx = \\ &= -I + \int_{-a}^a f(x) \ln(bc)^{g(x)} dx = -I + \ln(bc) \int_{-a}^a f(x) g(x) dx, \quad (1). \end{aligned}$$

Deoarece funcțiile  $f, g$  sunt impare avem:

$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = (fg)(x)$ , adică  $fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , este o funcție pară și din (1)

obținem:  $2I = \ln(bc) \int_{-a}^a (fg)(x) dx = 2 \ln(bc) \int_0^a f(x) g(x) dx$ , de unde deducem

$$I = \ln(bc) \int_0^a f(x) g(x) dx.$$

2. (D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema 234, REOIM, Nr. 47, Noiembrie 2012 - Februarie 2013). Dacă  $a \in \mathbb{R}_+$  și  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție pară, derivabilă cu derivata continuă,

atunci demonstrați egalitatea:  $\int_{-a}^a \left( \frac{f(x)}{1+e^x} + f'(x) \ln(1+e^x) \right) dx = af(a)$ .

*Soluție.* Se știe că dacă  $f$  este o funcție pară și derivabilă atunci funcția  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție impară. Fie  $I = \int_{-a}^a \left( \frac{f(x)}{1+e^x} + f'(x) \ln(1+e^x) \right) dx$ , în care facem schimbarea de variabilă

$x = u(t) = -t$ , cu  $u'(t) = -1, u(a) = -a, u(-a) = a$  și obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{-a} \left( \frac{f(-t)}{1+e^{-t}} + f'(-t) \ln(1+e^{-t}) \right) (-1) dt = \int_{-a}^a \left( \frac{f(t)e^t}{1+e^t} - f'(t) \ln \frac{1+e^t}{e^t} \right) dt = \\ &= \int_{-a}^a \left( \frac{f(x)e^x}{1+e^x} + xf'(x) - f'(x) \ln(1+e^x) \right) dx. \text{ Deci,} \\ 2I &= \int_{-a}^a \left( \frac{f(x)}{1+e^x} + \frac{f(x)e^x}{1+e^x} + xf'(x) + f'(x) \ln(1+e^x) - f'(x) \ln(1+e^x) \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{-a}^a (f(x) + xf'(x))dx = \int_{-a}^a (xf(x))' dx = xf(x) \Big|_{-a}^a = af(a) - (-af(-a)) = af(a) + af(a) = 2af(a), \text{ de unde } I = af(a).$$

**3. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu).** Dacă  $a \in \mathbb{R}_+^*$  și funcțiile  $f, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile astfel încât  $f$  este pară iar  $g$  este impară pe  $[-a, a]$ , atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^2 - g(x) + \sqrt{b^4 + g^2(x)}} dx = \frac{1}{b^2} \int_0^a f(x) dx.$$

*Soluție.* Facem schimbarea de variabilă  $x = u(t) = -t$ , cu  $u'(t) = -1, u(a) = -a, u(-a) = a$  și

$$\begin{aligned} \text{obținem: } I &= \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^2 - g(x) + \sqrt{b^4 + g^2(x)}} dx = \int_a^{-a} \frac{f(-t)}{b^2 - g(-t) + \sqrt{b^4 + g^2(-t)}} (-1) dt = \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(t)}{b^2 + g(t) + \sqrt{b^4 + g^2(t)}} dt. \end{aligned}$$

. Deci,

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_{-a}^a f(x) \left( \frac{1}{b^2 + g(x) + \sqrt{b^4 + g^2(x)}} + \frac{1}{b^2 - g(x) + \sqrt{b^4 + g^2(x)}} \right) dx = \\ &= \int_{-a}^a f(x) \cdot \frac{2(b^2 + \sqrt{b^4 + g^2(x)})}{(b^2 + \sqrt{b^4 + g^2(x)})^2 - g^2(x)} dx = \\ &= \int_{-a}^a f(x) \cdot \frac{2(b^2 + \sqrt{b^4 + g^2(x)})}{2b^2(b^2 + \sqrt{b^4 + g^2(x)})} dx = \frac{1}{b^2} \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{2}{b^2} \int_0^a f(x) dx, \end{aligned}$$

de unde rezultă  $I = \frac{1}{b^2} \int_0^a f(x) dx$ .

**4. (D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu).** Dacă  $a \in \mathbb{R}_+^*$  și  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcțiile continue și impare, iar  $k : \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$  este funcție pară și continuă, atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_{-a}^a f(x) \ln((k(x))^{g(x)} + (k(x))^{h(x)}) dx = \int_0^a f(x)(g(x) + h(x)) \ln k(x) dx.$$

*Soluție.* Facem schimbarea de variabilă  $x = u(t) = -t$ , cu  $u'(t) = -1, u(a) = -a, u(-a) = a$  și

$$\begin{aligned} \text{obținem: } I &= \int_{-a}^a f(x) \ln((k(x))^{g(x)} + (k(x))^{h(x)}) dx = \int_a^{-a} f(-t) \ln((k(-t))^{g(-t)} + (k(-t))^{h(-t)}) (-1) dt = \\ &= - \int_{-a}^a f(x) \ln((k(x))^{-g(x)} + (k(x))^{-h(x)}) dx = - \int_{-a}^a f(x) \ln \frac{(h(x))^{g(x)} + (k(x))^{h(x)}}{(k(x))^{g(x)+h(x)}} dx = \\ &= -I + \int_{-a}^a f(x) \ln(k(x))^{g(x)+h(x)} dx = -I + \int_{-a}^a f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x)) dx, \end{aligned}$$

de unde deducem

că:  $2I = \int_{-a}^a f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x)) dx$ , și deoarece

$$f(-x)(g(-x) + h(-x)) \ln(k(-x)) = -f(x)(-g(x) - h(x)) \ln(k(x)) = f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x))$$

adică

$$f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x)) \text{ este funcție pară, reiese: } 2I = 2 \int_0^a f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x)) dx, \text{ adică}$$

$$I = \int_0^a f(x)(g(x) + h(x)) \ln(k(x)) dx, \text{ ceea ce era de demonstrat.}$$

5. (D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema XII.176, Recreații Matematice, Nr. 1, Ianuarie - Iunie, 2017). Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă și impară, atunci calculați

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{(x^2 + 1)(1 + xe^{f(\ln x)})} dx.$$

*Soluție.*  $I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{(x^2 + 1)(1 + xe^{f(\ln x)})} dx$ , în care facem schimbarea de variabilă

$x = u(t) = \frac{1}{t}$ , cu  $u(e) = \frac{1}{e}$ ,  $u\left(\frac{1}{e}\right) = e$ ,  $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$  și obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{e \left( \frac{1}{t^2} + 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{t} e^{f(\ln \frac{1}{t})} \right)} \cdot \frac{-1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{t}{(1+t^2)(t + e^{f(-\ln t)})} dt = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{t}{(1+t^2)(t + e^{-f(\ln t)})} dt = \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{te^{f(\ln t)}}{(1+t^2)(te^{f(\ln t)} + 1)} dt. \quad 2I \Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^e \left( \frac{1}{(x^2+1)(1+xe^{f(\ln x)})} + \frac{xe^{f(\ln x)}}{(x^2+1)(1+xe^{f(\ln x)})} \right) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \arctg x \Big|_{\frac{1}{e}}^e = \arctg e - \arctg \frac{1}{e} = \arctg \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = \arctg \frac{e^2 - 1}{2e}, \text{ atunci } I = \frac{1}{2} \arctg \frac{e^2 - 1}{2e}. \end{aligned}$$

#### Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *Exploatarea unor relații funcționale pentru schimbarea de variabilă în integrala Riemann*, Recreații Matematice, Anul XXVII, Nr. 1, Ianuarie – Iunie, 2025, 33-34.
2. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, Ovidiu Pop, *Asupra unei clase de probleme cu integrale funcționale definite*, Revista de Matematică din Timișoara (RMT), Nr. 2, 2024, 3 - 5.
3. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, D. Sitaru, *Câteva probleme cu integrale funcționale*, Sclipirea Mintii, Nr. 36, 2025, 7-9.

## Știați că ....?

..... la 30 iunie se împlinesc 150 de ani de la nașterea matematicianului român **Anton Davidoglu** (n. 30 iunie 1876 — d. 27 mai 1958, București),

A fost **inițiatorul cercetărilor românești în domeniul ecuațiilor diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale.**

A absolvit Școala normală superioară din Paris în anul 1897 având ca profesor pe marele matematician **Hadamard**, iar lucrarea susținută la absolvire s-a numit *Sur l'equation des vibrations transversales des verges elastique* (Sorbona, 1900).

Începând cu anul 1902 și până în 1941 activează ca profesor la catedra de **calcul diferențial și integral** a Facultății de științe din cadrul Universității din București. În anul 1913 a fost **rector** al Academiei de înalte studii comerciale și industrie din București.

Membru fondator al Academiei de Științe din România, A. Davidoglu a contribuit la dezvoltarea **analizei matematice** și a **ecuațiilor diferențiale** contribuțiile sale fiind menționate în lucrările unor prestigioși matematicieni, precum *Emile Picard*, *G. Mignoli*, *J. Mikusinski*.

Bibliografie: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)



## Rafinarea unor inegalități geometrice

de Mihaly Bencze

**Teoremă.** Dacă  $x, y, z > 0$ , atunci:

$$\sqrt{(\sum x)^2 + 9\sum xy} \leq \sum \sqrt{(x+y)(x+z)} \leq \sqrt{3\sum (x+y)(x+z)}.$$

*Demonstrație.* Considerăm  $u, v, w > 0$ , deoarece  $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} \leq \sqrt{3(u+v+w)}$ , folosind notația  $u = (x+y)(x+z)$ ,  $v = (y+z)(y+x)$ ,  $w = (z+x)(z+y)$  obținem

$$\sum \sqrt{(x+y)(x+z)} \leq \sqrt{3\sum (x+y)(x+z)}, \text{ iar pe de altă parte}$$

$$\sum \sqrt{(x+y)(x+z)} = \sum \sqrt{x^2 + \sum xy} = \sum \sqrt{x^2 + (\sqrt{\sum xy})^2} \geq \sqrt{(\sum x)^2 + 9\sum xy}.$$

**Aplicația 1.** În orice triunghi  $ABC$  cu notațiile uzuale avem inegalitățile:

$$\sqrt{13p^2 + 9r(4R+r)} \leq \sum \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \sqrt{3(5p^2 + r^2 + 4Rr)}.$$

*Demonstrație.* În teoremă considerăm  $x = a, y = b, z = c$ . Deoarece inegalitatea se mai poate scrie sub forma  $3r(4R+r) \leq \frac{1}{2}((\sum \sqrt{(a+b)(a+c)})^2 - 13p^2 - 3r(4R+r)) \leq p^2$ , înseamnă că am rafinat inegalitatea clasică  $3r(4R+r) \leq p^2$ .

**Aplicația 2.** În orice triunghi  $ABC$  cu notațiile uzuale avem inegalitățile:

$$\sqrt{p^2 + 9r(4R+r)} \leq \sum \sqrt{ab} \leq \sqrt{3(p^2 + r^2 + 4Rr)}.$$

*Demonstrație.* În teoremă considerăm  $x = p-a, y = p-b, z = p-c$ . Deoarece inegalitatea se mai poate scrie sub forma  $3r(4R+r) \leq \frac{1}{2}((\sum \sqrt{ab})^2 - p^2 - 3r(4R+r)) \leq p^2$ , înseamnă că am rafinat din nou inegalitatea clasică  $3r(4R+r) \leq p^2$ .

**Aplicația 3.** În orice triunghi  $ABC$  cu notațiile uzuale avem inegalitățile:

$$\sqrt{9p^2 + (4R+r)^2} \leq \sum \sqrt{(r_a+r_b)(r_a+r_c)} \leq \sqrt{3(p^2 + (4R+r)^2)}.$$

*Demonstrație.* În teoremă considerăm  $x = r_a, y = r_b, z = r_c$ . Deoarece inegalitatea se mai poate scrie sub forma  $3p^2 \leq \frac{1}{2}((\sum \sqrt{(r_a+r_b)(r_a+r_c)})^2 - 3p^2 - (4R+r)^2) \leq (4R+r)^2$ , înseamnă că am rafinat inegalitatea clasică  $3p^2 \leq (4R+r)^2$ .

### Bibliografie

1. Octagon Mathematical Magazine (1993 – 2025).
2. Sclipirea Minții (2006 – 2025).

„Pentru a fi o stea, trebuie sa strălucești propria lumină, să-ți urmezi propria cale și să nu-ți faci griji pentru întuneric, pentru că atunci stelele strălucesc mai bine”.

(Napoleon Hill)  
(1883 – 1970)



## Asupra unei probleme de geometrie

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

Problema CTP ([1]). Dacă pe cercul  $C(O, R)$  considerăm punctele  $A, B, C, D, E, F$  în această ordine și coardele  $AB, CD$  și  $EF$  egale cu raza cercului  $R$ , iar  $M, N$  și  $P$  sunt mijloacele coardelor  $ED, BC$  și respectiv  $AF$ , atunci demonstrați că triunghiul  $MNP$  este echilateral. (Cristian Tudor Popescu, București)

**Soluția 1** (cu numere complexe). Considerăm  $A, B, C, D, E, F$  situate pe cerc în sens invers sensului trigonometric. Fie  $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_M, z_N$  și  $z_P$  afixele punctelor corespunzătoare. Alegem originea reperului în punctul  $O$ , centrul cercului. Notăm  $\angle BOC = \alpha, \angle EOD = \beta, \angle AOF = \gamma$  și  $\varepsilon_x = \cos x + i \sin x$ . Avem:

$$z_A = \varepsilon_{\frac{\pi}{3}} z_B, z_F = \varepsilon_{\frac{\pi}{3} + \gamma} z_B, z_E = \varepsilon_{\frac{2\pi}{3} + \gamma} z_B, z_D = \varepsilon_{\frac{2\pi}{3} + \beta + \gamma} z_B, z_C = \varepsilon_{\pi + \beta + \gamma} z_B.$$

Pentru a demonstra că triunghiul  $MNP$  este echilateral este suficient să demonstrăm că

$$\begin{aligned} z_N + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3}} z_P + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3}}^2 z_M &= 0 \Leftrightarrow \frac{z_B + z_C}{2} + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3}} \frac{z_A + z_F}{2} + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3}}^2 \frac{z_E + z_D}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_B \left( 1 + \varepsilon_{\pi + \beta + \gamma} + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3}} \left( \varepsilon_{\frac{\pi}{3}} + \varepsilon_{\frac{\pi}{3} + \gamma} \right) + \varepsilon_{\frac{4\pi}{3}} \left( \varepsilon_{\frac{2\pi}{3} + \gamma} + \varepsilon_{\frac{2\pi}{3} + \beta + \gamma} \right) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \varepsilon_{\pi + \beta + \gamma} + \varepsilon_{\pi} + \varepsilon_{\pi + \gamma} + \varepsilon_{2\pi + \gamma} + \varepsilon_{2\pi + \beta + \gamma} &= 0 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon_{\beta + \gamma} - 1 - \varepsilon_{\gamma} + \varepsilon_{\gamma} + \varepsilon_{\beta + \gamma} = 0, \text{ adevărat.} \end{aligned}$$

**Soluția 2** (trigonometric). Această soluție permite determinarea efectivă a laturilor triunghiului  $MNP$ . Avem:  $OM = R \cos \frac{\beta}{2}$ ,  $ON = R \cos \frac{\alpha}{2}$  și  $\angle MON = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{3}$ . Aplicând teorema cosinusului în triunghiul  $MON$  obținem:

$$\begin{aligned} MN^2 &= OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + R^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2R^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= R^2 \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\ &= R^2 \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deoarece } \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} &= \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \frac{1}{4} (-\cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha + \cos \beta + 3) = \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 3) \text{ reiese că} \end{aligned}$$

$$MN^2 = R^2 \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 3) \right) =$$

$= f(\alpha, \beta, \gamma)$ . Analog  $NP^2 = PM^2 = f(\alpha, \beta, \gamma)$ , de unde obținem că triunghiul  $MNP$  este echilateral.

Observație. Deoarece  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 3)$  și  $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$  reiese că

$$MN^2 = NP^2 = PM^2 = R^2 \left( \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) + \frac{3}{4} \right).$$

**Soluția 3** (vectorială - Nicușor Dan). Considerăm  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = ra$ ,  $\overrightarrow{OC} = b$ ,  $\overrightarrow{OD} = rb$ ,  $\overrightarrow{OE} = c$  și  $\overrightarrow{OF} = rc$ , unde prin  $rx$  am notat vectorul obținut prin rotația vectorului  $x$  în sensul acelor de ceasornic cu  $60^\circ$ . Deoarece triunghiurile  $BOA, COD$  și  $FOE$  sunt echilaterale, avem:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{ra+b}{2}, \overrightarrow{OM} = \frac{rb+c}{2}, \overrightarrow{OP} = \frac{rc+a}{2}, \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \left( \frac{ra+b}{2} - \frac{rc+a}{2} \right) \text{ și}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \left( \frac{rb+c}{2} - \frac{rc+a}{2} \right).$$

$$\text{Trebuie să demonstrăm că } r \left( \frac{ra+b}{2} - \frac{rc+a}{2} \right) = \left( \frac{rb+c}{2} - \frac{rc+a}{2} \right)$$

$\Leftrightarrow rra + rb - rrc - ra = rb + c - rc - a \Leftrightarrow rra - ra + a = rrc - rc + c$ , adevărată deoarece  $rra - ra + a = \vec{0}$  și  $rrc - rc + c = \vec{0}$ .

**Aplicație.** Pe cercul  $C(O, R)$  considerăm în această ordine punctele  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  astfel încât  $B_1A_2 = B_2A_3 = B_3A_1 = R$ . De asemenea considerăm  $C_1(O_1, R)$  ce trece prin  $A_1, B_1$  diferit de  $C(O, R)$ . Analog cercurile  $C_2(O_2, R)$  și  $C_3(O_3, R)$  ce trec prin  $A_2, B_2$  și respectiv  $A_3, B_3$  diferite de  $C(O, R)$ . Arătați că triunghiul  $O_1O_2O_3$  este echilateral.

**Soluție.** Centrele romburilor  $OA_1O_1B_1$ ,  $OA_2O_2B_2$  și  $OA_3O_3B_3$ , adică punctele  $M, N, P$  sunt mijloacele laturilor  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  și  $A_3B_3$ . Din problema CTP reiese că  $MNP$  este triunghi echilateral. Dar  $MN, NP$  și  $PM$  sunt linii mijlocii în triunghiurile  $OO_1O_2$ ,  $OO_2O_3$  și  $OO_3O_1$ . Reiese că  $O_1O_2O_3$  este triunghi echilateral.

### Bibliografie

1. <https://adevarul.ro/politica/ctp-a-vrut-sa-il-prinda-pe-nicusor-dan-cu-lectia-2428205.html>

## Aplicații ale integralei definite în calculul limitelor de șiruri

de Adrian Stan, Buzău

Fie  $f$  o funcție definită și mărginită pe intervalul închis  $[a ; b]$ , ( în cele mai multe cazuri, intervalul  $[a ; b]$  este  $[0;1]$ ), care se împarte în  $n$  intervale parțiale, formând ceea ce se numește diviziune a intervalului  $\Delta_n = (a = x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle \dots \langle x_{n-1} \langle x_n = b)$ .

Se va nota cu  $\|\Delta\|$ , norma diviziunii  $\Delta_n = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ , adică lungimea celui mai mare interval  $[x_{k-1} ; x_k]$ , iar pentru fiecare interval se va lua un punct arbitrar  $c_k$ .

Numărul  $\sigma_{\Delta_n}(f, c_k) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$  se numește suma integrală a funcției  $f$ , corespunzătoare diviziunii  $\Delta$  și a sistemului de puncte intermediare  $(c_k)_{k=1, n}$ .

Dacă  $\|\Delta\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pentru orice alegere a punctelor intermediare  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$  și dacă există limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \in \mathbb{R}$  atunci rezultă că  $f$  este integrabilă în sens Riemann și că

$$\sigma_{\Delta_n}(f, c_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

În general, intervalul închis  $[a ; b]$  se împarte în  $n$  intervale parțiale,  $\frac{b-a}{n}$  având aceeași lungime, așadar,  $\|\Delta\| = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și atunci,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(a+k \cdot \frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x) dx$ .

sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

În concluzie, pentru intervalul  $[a ; b] = [0 ; 1]$  rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ .

Exemple de calcul al unor limite de șiruri:

1. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \dots + \ln(n+n) - n \ln n]$ .

**Rezolvare:**  $a_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - n \ln n \right)$ ,

$a_n = \frac{1}{n} \left( \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n} + \dots + \ln \frac{n+n}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$   $f(x) = \ln(1+x)$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = -1 + \ln 4$ .

2. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot [\sqrt[n]{e} + 3\sqrt[n]{e^3} + \dots + (2n-1)\sqrt[n]{e^{2n-1}}]$ .

**Rezolvare:**  $a_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n} \cdot e^{\frac{2k-1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{n}\right)$ ,

$$f(x) = x \cdot e^x, \quad \lim_{n \leftarrow \infty} a_n = \int_0^1 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1.$$

3. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{1}{1^2 + 4n^2} + \frac{1}{2^2 + 4n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + 4n^2} \right)$ .

**Rezolvare:**  $a_n = n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 \left( 4 + \frac{k^2}{n^2} \right)} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{4 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2}, \quad \lim_{n \leftarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{4 + x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

4. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{1 + \sqrt{n^2 + 1}} + \frac{2}{2 + \sqrt{n^2 + 2^2}} + \frac{3}{3 + \sqrt{n^2 + 3^2}} + \dots + \frac{n}{n + \sqrt{n^2 + n^2}} \right)$ .

**Rezolvare:**  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \sqrt{n^2 \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right)}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k}{n} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}},$

$$\lim_{n \leftarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

5. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} \cdot k \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{n}$ .

**Rezolvare:** Pe intervalul  $[0; \pi]$  se ia diviziunea  $\Delta_n = \left( 0; \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{n\pi}{n} = \pi \right)$  cu norma diviziunii

$\|\Delta_n\| = \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$  și sistemul de puncte intermediare  $c_k = \frac{k\pi}{n}$  asociat sumei Riemann, deci funcția asociată este  $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin^2 x$ .

$$a_n = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n x \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin^2 x dx$$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin^2 x dx = \int_0^\pi x \cdot \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \int_0^\pi \left( \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cdot \cos 2x \right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \left( x \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin 2x dx \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{4}$ .

6. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \cos^2 \frac{k\pi}{n}$ .

**Rezolvare:** Pe intervalul  $[0; \pi]$  se ia diviziunea  $\Delta_n = \left( 0; \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{n\pi}{n} = \pi \right)$  cu norma diviziunii

$\|\Delta_n\| = \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$  și sistemul de puncte intermediare  $c_k = \frac{k\pi}{n}$  asociat sumei Riemann, deci funcția asociată este  $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x$ .

$$a_n = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{k\pi}{n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos^2 x dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

7. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{2n+k}{2n-k} \right)^k$

**Rezolvare:** Pe intervalul  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  se ia diviziunea  $\Delta_n = \left(0; \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \dots, \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\right)$  cu norma diviziunii

$\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  și sistemul de puncte intermediare  $c_k = \frac{k}{n}$  asociat sumei Riemann, deci funcția

asociată este  $f: \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$a_n = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n} \ln \frac{1 + \frac{k}{2n}}{1 - \frac{k}{2n}} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx, \text{ etc}$$

### Bibliografie:

- Adrian Stan. Matematică Pentru clasa a XII-a. Editura Editgraph. Buzău. 2021.  
 Marin Chirciu. Matematică. Editura Cartea Românească Educațional. Iași, 2019.  
 Marius Burtea. Manual Matematică pentru clasa a XII-a, Editura Carminis, Pitești. 2007.  
 Petre Năchilă. Matematică pentru toți. Editura Nomina. Pitești. 2022

## Probleme de algebră cu soluții vectoriale

de Cărămidă Elena Daniela, Fălticeni

### I. Inegalități

1. Dacă  $a, b \in [-1; 1]$  atunci  $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$

**Soluție:** Considerăm vectorii  $\vec{x} = (1; 1)$  și  $\vec{y} = (\sqrt{1-a^2}; \sqrt{1-b^2})$ .

Relația  $\|\vec{x} \cdot \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$  implică:  $(1 \cdot \sqrt{1-a^2} + 1 \cdot \sqrt{1-b^2}) \leq (1^2 + 1^2) \left[ (\sqrt{1-a^2})^2 + (\sqrt{1-b^2})^2 \right]$

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{2(2-a^2-b^2)} \quad (1) \quad \text{Deoarece} \quad \sqrt{2(2-a^2-b^2)} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \quad (2)$$

$$4 - 2a^2 - 2b^2 \leq 4 - a^2 - b^2 - 2ab \quad \text{și se ajunge la } (a-b)^2 \geq 0 \text{ (adevărat).}$$

Din relațiile (1) și (2) se obține relația din enunț.

### 2. E: 17780\*/G.M. 6/1979

Să se arate că:  $\frac{\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{12}} \leq \frac{\sqrt[n+1]{6} + \sqrt[n+1]{8} + \sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4} + \sqrt[n+1]{9} + \sqrt[n+1]{16}}$  unde  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

**Soluție:** Considerăm vectorii

$$\vec{a} = (\sqrt[n]{2}; \sqrt[n]{3}; \sqrt[n]{4}) \text{ și } \vec{b} = (\sqrt[n]{3}; \sqrt[n]{4}; \sqrt[n]{2}) \quad \text{și} \quad \vec{x} = (\sqrt[n+1]{2}; \sqrt[n+1]{3}; \sqrt[n+1]{4}); \quad \vec{y} = (\sqrt[n+1]{3}; \sqrt[n+1]{4}; \sqrt[n+1]{2}).$$

Deducem succesiv:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{12} + \sqrt[n]{8}$

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| = \sqrt{(\sqrt[n]{2})^2 + (\sqrt[n]{3})^2 + (\sqrt[n]{4})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt[n]{3})^2 + (\sqrt[n]{4})^2 + (\sqrt[n]{2})^2} = \sqrt[n+1]{4} + \sqrt[n+1]{9} + \sqrt[n+1]{16}.$$

Membrul stâng al inegalității propuse este:  $S = \frac{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|} = \frac{\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{16}} > 1 \quad (1)$

Pe de altă parte:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt[n+1]{2} \cdot \sqrt[n+1]{3} + \sqrt[n+1]{3} \cdot \sqrt[n+1]{4} + \sqrt[n+1]{4} \cdot \sqrt[n+1]{2} = \sqrt[n+1]{6} + \sqrt[n+1]{12} + \sqrt[n+1]{8}$

$\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \sqrt{(\sqrt[n+1]{2})^2 + (\sqrt[n+1]{3})^2 + (\sqrt[n+1]{4})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt[n+1]{3})^2 + (\sqrt[n+1]{4})^2 + (\sqrt[n+1]{2})^2} = \sqrt[n+1]{4} + \sqrt[n+1]{9} + \sqrt[n+1]{16}$  Membrul drept

al inegalității propuse este:  $D = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{\sqrt[n+1]{6} + \sqrt[n+1]{8} + \sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4} + \sqrt[n+1]{9} + \sqrt[n+1]{16}} < 1 \quad (2).$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț.

**3. Să se demonstreze inegalitatea:**  $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$  unde  $a, b, c > 0$  și  $a > c, b > c$ .

**Soluție:**

Alegem vectorii  $\vec{v}_1 = (\sqrt{c}; \sqrt{b-c})$  și  $\vec{v}_2 = (\sqrt{a-c}; \sqrt{c})$ .

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| \leq \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \Leftrightarrow \sqrt{c} \cdot \sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} \cdot \sqrt{c} \leq \sqrt{(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2} \Leftrightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

## II Probleme de extrem (minime și maxime)

**1. Să se demonstreze că, dacă  $x_1; x_2; \dots; x_n$  sunt numere reale, astfel încât:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 1$  atunci**

$$n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \geq 1 \quad (\text{Olimpiada județeană, Argeș, martie 1993})$$

**Soluție:** Considerăm vectorii:  $\vec{a} = (1; 1; 1; \dots; 1)$ ,  $\vec{b} = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$ , deci:

$$1^2 \leq |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 = (1^2 + 1^2 + 1^2 \dots + 1^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)$$

Prin urmare:  $1 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)$  ceea ce este echivalent cu:  $\min[n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)] = 1$

### 2. E:22755/G.M. 2-3/1993

Fie  $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x + 2y + 3z = a$ . Să se afle  $a$ , astfel încât minimul sumei  $x^2 + y^2 + z^2$  să fie 14.

**Soluție:** Să luăm vectorii  $\vec{v}_1 = (x, y, z)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$

$$\|\vec{v}_1\|^2 \cdot \|\vec{v}_2\|^2 \geq (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \Leftrightarrow (x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

Deducem:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2}{14}$  (2) cu egalitate pentru  $\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2$  și exprimând rapoartele corespunzătoare

$$\text{coordonatelor, se obține: } \frac{x^2}{1^2} = \frac{y^2}{2^2} = \frac{z^2}{3^2} = k^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{14} \geq \frac{a^2}{14}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{x + 2y + 3z}{14} \geq \frac{a}{14} \quad (3)$$

Deducem:  $x = \frac{a}{14}; y = \frac{a}{7}; z = \frac{3a}{14}$ . Din  $\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2}{14} = 14$ , rezultă  $a \in [-14; 14]$ .

## Bibliografie

1. Victor Tudor, *Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase*, Editura Carminis, Pitești, 1999

Prof. Colegiul "Vasile Lovinescu", Fălticeni, Suceava

## Dezvoltări ale unor probleme din Mathematical Reflections

de Marin Chirciu, Pitești

- I -

### Mathematical Reflections Nr.1/2026

**J722.** In acute  $\triangle ABC$  holds  $\sum \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2} \geq a + b + c$ . Titu Andreescu, USA

**Solution.**

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{abc}{2(p^2 - (2R+r)^2)} \stackrel{\text{Gerretsen}}{\geq} \frac{abc}{2(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - (2R+r)^2)} = \\ &= \frac{4Rrp}{2 \cdot 2r^2} = \frac{Rp}{r} \stackrel{\text{Euler}}{\geq} 2p = a + b + c = RHS. \quad \text{I used above } \sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{1}{2[p^2 - (2R+r)^2]}. \end{aligned}$$

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

**Remark.** In acute  $\triangle ABC$  holds  $\sum \frac{(abc)^2}{b^2 + c^2 - a^2} \geq (4F)^2$ . Marin Chirciu

**J724.** If  $a, b, c > 0$  then  $\prod (a^3 + bc) \geq (abc)^2 \prod (a+1)$ . Nguyen Viet Hung, Vietnam

**Solution.**

We have  $\left(\frac{a^3}{bc} + 1\right) \left(\frac{b^3}{ca} + 1\right) \stackrel{CBS}{\geq} \left(\frac{ab}{c} + 1\right)^2$  and analogs  $\Rightarrow \prod \left(\frac{a^3}{bc} + 1\right) \geq \prod \left(\frac{bc}{a} + 1\right)$ , (1).

Also  $\left(\frac{ab}{c} + 1\right) \left(\frac{ac}{b} + 1\right) \stackrel{CBS}{\geq} (a+1)^2$  and analogs  $\Rightarrow \prod \left(\frac{bc}{a} + 1\right) \geq \prod (a+1)$ , (2).

From (1) and (2)  $\Rightarrow \prod \left(\frac{a^3}{bc} + 1\right) \geq \prod (a+1) \Leftrightarrow \prod (a^3 + bc) \geq (abc)^2 \prod (a+1)$ .

Equality occurs if and only if  $a = b = c$ .

**Remark.** If  $a, b, c, d > 0$  then:

1).  $\prod (a^3 + bcd) \geq 16(abcd)^3$ . 2).  $\prod (a^3 + bcd) \geq abcd \prod (ab + cd)$ .

Dezvoltări, Marin Chirciu

**S726.** In  $\triangle ABC$  holds  $\sum \frac{1}{b+c-a} \geq \sqrt{\frac{3}{2Rr}}$ .

Nguyen Viet Hung, Vietnam

**Solution.**

$$LHS = \sum \frac{1}{b+c-a} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{p-a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4R+r}{pr} = \frac{4R+r}{2pr} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{3}{2Rr}} = RHS,$$

where  $\frac{4R+r}{2pr} \stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{3}{2Rr}} \Leftrightarrow \frac{(4R+r)^2}{4p^2r^2} \geq \frac{3}{2Rr} \Leftrightarrow R(4R+r)^2 \geq 6rp^2$ , see

**Gerretsen's Inequality**  $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ . It is enough to show that:

$$R(4R+r)^2 \geq 6r \cdot \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \Leftrightarrow 2R-r \geq 3r \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{Euler's Inequality}).$$

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

**Remark.** In  $\triangle ABC$  holds  $\sum \frac{1}{(b+c-a)^n} \geq 3(6Rr)^{\frac{-n}{2}}, n \in \mathbf{N}$ .

Marin Chirciu

**Solution**

For  $n = 0$  we have equality  $3=3$ . For  $n = 1$  see Lemma. For  $n \geq 2$  we use Holder's Inequality.

$$LHS = \sum \frac{1}{(b+c-a)^n} \stackrel{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{1}{b+c-a}\right)^n}{3^{n-1}} \stackrel{Lemma}{\geq} \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2Rr}}\right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2Rr}}}{3}\right)^n = 3(6Rr)^{\frac{-n}{2}} = RHS.$$

**Lemma.** In  $\triangle ABC$  holds  $\sum \frac{1}{b+c-a} \geq \sqrt{\frac{3}{2Rr}}$ . Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

**Mathematical Reflections Nr.6/2025**

**S716.** If  $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  then  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^4 \geq \frac{(a+b+c)^5}{(2+abc)abc}$ .

Marin Chirciu, Pitești, Romania

**Solution.**

**Lemma1.** If  $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  then  $a + b + c \leq 3$ .

We use  $pqr$ -Method. We note  $a + b + c = p, ab + bc + ca = q, abc = r$ .

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Leftrightarrow p^2 - 2q + r = 4 \Leftrightarrow q = \frac{p^2 + r - 4}{2}.$$

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow r \leq 1.$$

$$\text{By Schur inequality: } p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \Rightarrow r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9}.$$

$$\text{We have: } 1 \geq r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9}, q = \frac{p^2 + r - 4}{2} \Rightarrow r \geq \frac{p\left(4 \cdot \frac{p^2 + r - 4}{2} - p^2\right)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9r \geq p^3 + 2pr - 8p \Leftrightarrow r \geq \frac{p^3 - 8p}{9 - 2p} \Rightarrow 1 \geq r \geq \frac{p^3 - 8p}{9 - 2p} \Rightarrow 1 \geq \frac{p^3 - 8p}{9 - 2p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^3 - 6p - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (p - 3)(p^2 + 3p + 3) \leq 0 \Leftrightarrow p \leq 3.$$

În memoria matematicianului Titu Zvonaru

**Asupra problemei 4856 din revista CRUX MATHEMATICORUM**

de Ion Pătrașcu și Ion Cotoi, Craiova

În această notă matematică prezentăm o soluție elementară a problemei de mai sus, publicată de domnul **Titu Zvonaru** în [1] și formulăm alte două probleme în legătură strânsă cu aceasta.

Enunțul problemei **4856** este următorul:

Fie  $ABC$  un triunghi cu  $\sphericalangle A = 30^\circ$  și  $\sphericalangle B = 100^\circ$ . Considerăm punctele  $D$  și  $E$  pe laturile  $AC$  și  $BC$  respectiv, astfel încât  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$  și  $DE \parallel AB$ . Calculați  $\sphericalangle EAC$ .

**Soluție:**

Construim punctul  $F = \text{sim}_{AC}^{(E)}$  și notăm cu H, L intersecțiile dreptei BD cu AF, respectiv CF (vezi figura).

Din  $DE \parallel AB$  rezultă că  $\sphericalangle EDB = 50^\circ$  și cum  $\sphericalangle DBC = 50^\circ$  avem că  $ED = BE$  (1)

Deoarece  $\sphericalangle EDC = 30^\circ$  și  $F = \text{sim}_{AC}^{(E)}$  obținem că triunghiul DEF este echilateral, prin urmare  $ED = DF = EF$  (2)

Relațiile (1) și (2) conduc la concluzia că punctul E este centrul cercului circumscris triunghiului BDF și deoarece  $\sphericalangle DEF = 60^\circ$  avem că  $\sphericalangle DBF = 30^\circ$  (3)

Din  $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ACL = 50^\circ$  obținem că patrulaterul ABCL este inscriptibil și prin urmare

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BLC = 30^\circ \quad (4)$$

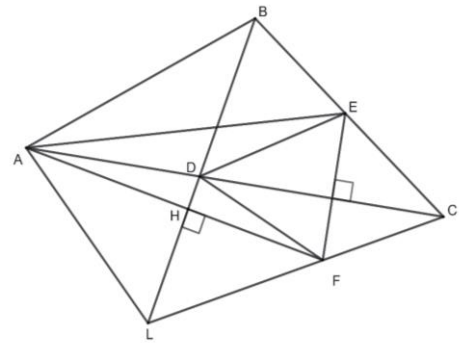
Ca o consecință a relațiilor (3) și (4) obținem că triunghiul FBL este isoscel deci  $FB = FL$  (5)

Diagonala CA este bisectoarea unghiului C în patrulaterul inscriptibil ABCL deci  $AB = AL$  (6)

Relațiile (5) și (6) arată că dreapta AF este mediatoarea segmentului BL și în consecință

$AH \perp BL$  adică  $\sphericalangle AHB = 90^\circ$ . În acest triunghi dreptunghic AHB avem că  $\sphericalangle ABH = 50^\circ$  deci  $\sphericalangle BAH = 40^\circ$  și deoarece  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$  găsim  $\sphericalangle FAC = 10^\circ$ . Faptul că dreptele AF și AE sunt simetrice față de AC implică  $\sphericalangle EAC = 10^\circ$ .

Notă : Pentru o soluție trigonometrică a acestei probleme se poate consulta [2].

**Problema 1**

Fie ABC un triunghi cu  $\sphericalangle A = 30^\circ$  și  $\sphericalangle B = 100^\circ$ . Considerăm punctele D și E pe laturile AC și BC respectiv, astfel încât  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$  și  $\sphericalangle EAC = 10^\circ$ . Demonstrați că  $DE \parallel AB$ .

**Soluție**

$DE \parallel AB \Leftrightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AD}{DC}$  (1). În triunghiul ABC, (BD este bisectoare, teorema bisectoarei implică  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  (2). Rezolvarea problemei se reduce la a demonstra egalitatea  $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{EC}$  (3)

Teorema sinusurilor în triunghiul ABC conduce la  $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}$  (4)

Aceeași teoremă în triunghiurile BAE și CAE furnizează:

$$\frac{BE}{\sin 20^\circ} = \frac{AE}{\sin 100^\circ} \quad (5) \quad \frac{EC}{\sin 10^\circ} = \frac{AE}{\sin 50^\circ} \quad (6)$$

Relațiile (5) și (6) au drept consecință  $\frac{BE}{EC} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 100^\circ}$  (7)

Revenind la relația (3) avem de arătat egalitatea:  $\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 100^\circ}$

Ținând seama de formula  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  obținem că această egalitate este echivalentă cu  $\sin 100^\circ = \cos 10^\circ$  care este evidentă.

**Problema 2**

Fie ABC un triunghi cu  $\sphericalangle A = 30^\circ$  și  $\sphericalangle B = 100^\circ$ . Considerăm punctele D și E pe laturile AC și BC respectiv, astfel încât  $\sphericalangle EAC = 10^\circ$  și  $DE \parallel AB$ . Demonstrați că  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ .

Lăsăm rezolvarea acestei probleme pe seama cititorului.

**Bibliografie:**

[1]. Crux Mathematicorum volumul 49 nr 6 / 2023

[2]. Crux Mathematicorum volumul 50 nr 1 / 2024

„Nu cunoașterea, ci actul de a învăța, nu posesia, ci actul de a ajunge acolo, oferă cea mai mare plăcere”.

Carl F. Gauss  
(1777- 1855)



### 3. Probleme rezolvate

#### ▪ Clasa a V-a

**G:1382.** Câte numere de două cifre  $\overline{ab}$  verifică relația  $\overline{ab} = a \cdot b + a + b$ ?

Alexie Elena, Jianu Lonetta, Craiova

*Rezolvare:*

Avem  $10a + b = a \cdot b + a + b$  sau  $9a = a \cdot b \Rightarrow b = 9$ . Așadar avem numerele 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. În total sunt nouă numere

**G:1382b.** a) Arătați că numărul 10404 este pătrat perfect;

b) Descompuneți în factori primi numărul 10403.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

*Rezolvare:* a)  $10404 = 4 \cdot 2601 = 4 \cdot 9 \cdot 289 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2 = 102^2$  adică 10404 este pătrat perfect;

b)  $10403 = 10404 - 1 = 4 \cdot 2601 - 1 = 102^2 - 1 = (102 - 1) \cdot (102 + 1) = 101 \cdot 103$ , unde 101 și 103 sunt prime.

**G:1383.** Arătați că numerele

$a_1 = 10201, a_2 = 102030201, a_3 = 1020304030201, \dots, a_8 = 102030405060708090807060504030201$

sunt pătrate perfecte.

elevă Panduru Mădălina, Bălcești, Vâlcea

*Rezolvare:* Prin calcul(ușor) se arată că

$a_1 = 101^2, a_2 = 10101^2, a_3 = 1010101^2, \dots, a_8 = 10101010101010101^2$ .

**G:1384.** Să se arate că suma  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2025$  este un pătrat perfect.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

*Rezolvare:* Termenii sumei îi scriem astfel:

$S = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 1012 + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1012) + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1012 \cdot 1013 + 1013 \cdot 1 = 1013(1012 + 1) = 1013 \cdot 1013 = 1013^2$ . Altfel se poate folosi formula sumei primelor  $n$  numere impare:  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 3 + 2n - 1 = n^2$ . Din  $2n - 1 = 2025$  rezultă  $n = 1013$ , deci  $S = 1013^2$ .

**G:1385.** Să se arate că nu există cifrele  $x, y, z$  astfel încât  $x \cdot \overline{yz} = \overline{xyz}$ .

Geanina Bică, Craiova

*Rezolvare:* Din  $x \cdot \overline{yz} = 100x + \overline{yz} \Rightarrow \overline{yz} \cdot (x - 1) = 100x$ . (\*)

Cum  $x \neq 0$  și  $x \neq 1$  considerăm toate valorile pe care le poate lua  $x$  de la 2 la 9 și le înlocuim în relația (\*) obținând astfel niște relații false:  $\overline{yz} = 200$ ;  $2\overline{yz} = 300$ ; ...;  $8\overline{yz} = 900$ . Așadar, nu există cifrele  $x, y, z$  astfel încât să existe relația dată.

**G:1386.** Determinați numerele  $\overline{abcd}$  cu proprietatea  $\overline{ab} \cdot (c^2 + d^2) = 2025$ .

Adrian Stan, Buzău

*Rezolvare:*  $2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2 = 81 \cdot (3^2 + 4^2) \Rightarrow \overline{abcd} = 8134$ .

**G:1387.** Numerele naturale  $x, y, z$  sunt direct proporționale cu numerele prime  $p, q, r$ . Știind că  $p < q < r$ ,  $p + q + r = 10$ ,  $x + y + z = 100$ , calculați suma ultimelor 2026 de cifre ale numărului

$T = x^{2025} + y^{2025} + z^{2025}$ .

elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Din  $p, q, r$  numere prime,  $p < q < r$  și  $p + q + r = 10 \Rightarrow p = 2, q = 3$  și  $r = 5$ .

$$\text{Din } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{10} = \frac{100}{10} = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 50 \end{cases}$$

Cum  $T = 20^{2025} + 30^{2025} + 50^{2025} = 10^{2025} (2^{2025} + 3^{2025} + 5^{2025})$  iar

$U(2^{2025} + 3^{2025} + 5^{2025}) = \overline{\dots 2} + \overline{\dots 3} + \overline{\dots 5} = \overline{\dots 0} \Rightarrow$  ultimele 2026 de cifre ale lui  $T$  sunt 0, deci suma cerută este egală cu 0.

**G:1388.** Demonstrați că există cel puțin un multiplu de 37 care conține numai cifre de 2 și de 3 și are numai aceste cifre. Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Considerăm următoarele 38 de numere: 23, 2323, 232323, ...,  $\underbrace{2323\dots 23}_{38 \text{ de } 23}$ .

Conform principiului cutiei, există cel puțin două numere  $a$  și  $b$  din acest șir care dau același rest la împărțirea cu 37  $\Rightarrow a - b \in M_{37}$ . Cum  $a - b = \underbrace{2323\dots 23}_{k \text{ de } 23} - \underbrace{2323\dots 23}_{p \text{ de } 23}$  cu  $k > p \Rightarrow$

$$a - b = \underbrace{2323\dots 2300\dots 0}_{(k-p) \text{ de } 23 \quad 2p \text{ de } 0} = \overline{2323\dots 23} \cdot 10^{2p}. \text{ Cum } (37; 10^{2p}) = 1 \Rightarrow \underbrace{2323\dots 23}_{k-p \text{ de } 23} = M_{37}, \text{ unde } k > p \text{ și } p \neq 0.$$

Acest număr este format din același număr de cifre 2 și 3 având numai perechi 23, deci problema este demonstrată.

**G:1389.** Determinați numărul natural  $\overline{abc}$  pentru care  $c^c = \overline{accbc}$ . Nicolae Ivășchescu, Canada

**Rezolvare:** Mai întâi se dau valori lui  $c=5, c=6$  și se găsește cifra  $c$  astfel încât membrul stâng să fie un număr de cinci cifre. Pentru  $c = 6$  obținem  $6^6 = 46656 \Rightarrow \overline{abc} = 456$ . Pentru  $c = 7$  se obține un număr de șase cifre.

**G:1390.** a) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât numărul  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n}$  să fie natural;

b) Determinați  $m \in \mathbb{N}^*$  astfel încât numărul  $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{m}$  să fie natural;

Cristina Călina – Doina, Craiova

**Rezolvare:**

a) Avem  $a = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n} = \frac{41}{42} + \frac{1}{n}$ . Cum  $0 < a < 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \frac{41}{42} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{42} \Rightarrow n = 42$ .

b) Avem  $b = \frac{5}{6} + \frac{1}{42} + \frac{1}{m} = \frac{36}{42} + \frac{1}{m} = \frac{6}{7} + \frac{1}{m}$ . Cum  $0 < \frac{6}{7} + \frac{1}{m} < 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{6}{7} + \frac{1}{m} = 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{7} \Rightarrow m = 7$ .

**G:1391.** Să se arate că suma elementelor mulțimii  $M = \{\overline{ab} \mid a^b + a + b = \overline{ab}\}$  este un cub perfect.

Gheorghe Ghiță, Buzău

**Rezolvare:**

Evident  $b$  e cifră nenulă. Dacă  $b = 0$  ar rezulta  $9a = 1$ .

Pentru  $b \geq 1 \Rightarrow a^b + a + b = \overline{ab} \Leftrightarrow a^b + a + b = 10a + b \Leftrightarrow a^b = 9a \Leftrightarrow a^{b-1} = 3^2 \Rightarrow a \in \{3, 9\}$ ;

pentru  $a = 3 \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$ ; pentru  $a = 9 \Rightarrow b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$

$M = \{33; 92\}$ , și atunci  $33 + 92 = 125 = 5^3$ .

## ▪ Clasa a VI-a

**G:1392.** Fie  $A$  un număr natural cu 2025 cifre care este divizibil cu 9. Fie  $B$  suma cifrelor acestui număr. Fie  $C$  suma cifrelor lui  $B$ . Găsiți suma cifrelor lui  $C$ . elev Ganea Andrei, Caraula, Dolj

*Rezolvare:* Deoarece  $A$  se divide cu 9 rezultă că și  $B$  și  $C$  se divid cu 9. Cum  $A \leq \underbrace{999\dots 9}_{2025 \text{ ori}}$  rezultă că  $B \leq 2025 \cdot 9 = 18225 < 99999 \Rightarrow C < 5 \cdot 9 = 45$ . Cum  $C$  se divide cu 9 acesta poate fi 9, 18, 27, 36. Deoarece suma cifrelor fiecărui număr din acestea este 9, obținem că suma cifrelor lui  $C$  este 9.

**G:1393.** Într-o țară sunt 66 orașe cu aeroport propriu. O companie aeriană are în programul său 2025 de rute (tur-retur). Demonstrați că, utilizând rutele companiei aeriene, din orice oraș se poate ajunge în oricare altul. elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

*Rezolvare:* Fie  $A$  un oraș din care nu se poate ajunge în unul sau mai multe orașe dintre celelalte. Notăm  $M_A =$  mulțimea orașelor în care se poate ajunge din  $A$ ,  $A \in M_A$  și cu  $N_A =$  mulțimea celorlalte orașe.

Dacă  $\text{Card}(M_A) = n$ ,  $1 \leq n < 66 \Rightarrow \text{Card}(N_A) = 66 - n$ .

În  $M_A$  sunt cel mult  $\frac{n(n-1)}{2}$  rute, iar în  $N_A$  cel mult  $\frac{(66-n)(65-n)}{2}$  rute.

Cum numărul rutelor este  $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(66-n)(65-n)}{2} =$   
 $= \frac{n^2 - n + 4290 - 66n - 65n + n^2}{2} = \frac{2(n^2 - 66n + 2145)}{2} = n^2 - 66n + 2145 =$   
 $= \underbrace{(n-33)^2}_{n^2 - 66n + 1089} + 1056 \stackrel{n < 66}{\leq} 32^2 + 1056 = 1024 + 1056 = 2080 < 2025 \Rightarrow$  presupunerea făcută este falsă,

de unde concluzia.

**G:1394.** Demonstrați că numărul  $\underbrace{1111\dots 1}_{\text{de } 2025 \text{ ori}}$  se divide cu 37.

Adrian Stan, Buzău

*Rezolvare:*

$$\underbrace{1111\dots 1}_{\text{de } 2025 \text{ ori}} = 111 \times 10^{2022} + 111 \times 10^{2019} + \dots + 111 \times 10^3 + 111 = 111(10^{2022} + 10^{2019} + \dots + 10^3 + 1)$$

Deoarece numărul 111 se divide cu 37, atunci și numărul  $\underbrace{1111\dots 1}_{\text{de } 2025 \text{ ori}}$  se divide cu 37

**G:1395.** Arătați că între două puteri consecutive de numere naturale ale lui 17 există cel mult trei puteri consecutive de numere naturale ale lui 3.

Nălbaru Ramona, Stăncele Dumitru Gabriel, Craiova

*Rezolvare:* Presupunem contrariul, adică

$$17^n < 3^k < 3^{k+1} < 3^{k+2} < 3^{k+3} < 17^{n+1}, k, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 17^n < 3^k / \cdot 17 \Rightarrow 3^{k+3} < 17^{n+1} < 3^k \cdot 17 \text{ adică } 3^3 < \cdot 17 \text{ fals}$$

De aici cerința problemei.

**G:1396.** Să se rezolve în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ecuația  $x^2 + py + p = xy + (2p+1)x$  unde  $p$  este un număr prim dat. Gheorghe Ghiță, Buzău

*Rezolvare:* Se observă că numărul  $p$  nu poate fi soluție.

$$\text{Din } y = \frac{x^2 - (2p+1)x + p}{x-p} = x - p - 1 - \frac{p^2}{x-p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-p \mid p^2 \Rightarrow$$

$x-p \in \{\pm 1; \pm p; \pm p^2\}$ . De aici obținem:

$$(x; y) \in \{(p-1; p^2-2), (p+1; -p^2), (0; -1), (2p; -1), (-p^2+p; -p^2), (p^2+p; p^2-2)\}.$$

**G:1397.** Să se găsească cel mai mic număr de două cifre, prin care se simplifică fracția:

$$F = \frac{1^{2025} + 2^{2025} + 3^{2025} + 4^{2025} + 5^{2025} + 6^{2025} + 9^{2025}}{11^{2027} + 12^{2027} + 13^{2027} + 14^{2027} + 15^{2027} + 16^{2027} + 19^{2027}}.$$

**Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu**

**Rezolvare:** Numărul  $a = (1^{2025} + 3^{2025} + 5^{2025} + 9^{2025}) + (2^{2025} + 4^{2025} + 6^{2025})$  este număr par ca sumă de două numere pare, deoarece suma numerelor din prima paranteză este suma a patra numere impare adică un număr par, deci, divizibil cu 2. (1)

$$\text{Mai mult, } a = 1^{2025} + (5-3)^{2025} + 3^{2025} + (5-1)^{2025} + 5^{2025} + (5+1)^{2025} + (10-1)^{2025} = \\ = 1 + M_5 + (-3)^{2025} + 3^{2025} + M_5 + (-1)^{2025} + 5^{2025} + M_5 + 1^{2025} + M_{10} + (-1)^{2025} = M_5 : 5. \quad (2).$$

S-a folosit relația  $(x+y)^n = M_x + y^n$ . Din (1) și (2) rezultă că  $a$  este divizibil cu 10.

Analog se arată că  $b = (12^{2027} + 14^{2027} + 16^{2027}) + (11^{2027} + 13^{2027} + 15^{2027} + 19^{2027})$  este un număr par iar  $b = (11^{2027} + 19^{2027}) + (14^{2027} + 16^{2027}) + (12^{2027} + 13^{2027}) + 15^{2027}$  este divizibil și cu 5 conform relației  $(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x+y)$ ,  $x, y \in \mathbb{N}^*$ . Atunci,  $b$  este divizibil cu 10. Rezultă că fracția  $F$  este reductibilă, simplificându-se cu 10.

**G:1398.** Fie  $m = \frac{1}{2025} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}\right)$  și  $n = \frac{1}{2024} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)$ .

**Comparați numerele  $m$  și  $n$ .**

**Nicolae Ivășchescu, Canada**

**Rezolvare:** Presupunem  $m > n$  și înmulțind această relație cu  $2024 \cdot 2025$  obținem:

$$m > n \mid \cdot 2024 \cdot 2025 \Rightarrow 2024 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}\right) > 2025 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right).$$

După desfacerea parantezelor obținem:

$$0 > 2025 + \frac{2025}{2} + \frac{2025}{3} + \dots + \frac{2025}{2024} - \left(2024 + \frac{2024}{2} + \frac{2024}{3} + \dots + \frac{2024}{2024} + \frac{2024}{2025}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > 2025 - 2024 + \frac{2025}{2} - \frac{2024}{2} + \frac{2025}{3} - \frac{2024}{3} + \dots + \frac{2025}{2024} - \frac{2024}{2024} + \frac{2024}{2025} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{2024}{2025} \Leftrightarrow \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} < 0, \text{ ceea ce este fals, de aici rezultă}$$

că  $m < n$ .

**G:1399.** Să se arate că fracția  $\frac{5n+7}{(2n+3)(3n+4)}$  este ireductibilă pentru orice număr natural  $n$ .

**Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București**

**Rezolvare:** Se arată că numerele  $5n+7$  și  $2n+3$  sunt prime între ele, apoi și că numerele  $5n+7$  și  $3n+4$  sunt, de asemenea, prime între ele.

Fie  $d$  astfel încât  $d \mid (5n+7)$  și  $d \mid (2n+3)$ . Atunci avem și  $d \mid 5(2n+3) - 2(5n+7) \Rightarrow d \mid (15-14) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d=1$ . Apoi,  $d \mid 5n+7$  și  $d \mid 3n+4 \Rightarrow d \mid 3(5n+7) - 5(3n+4) \Rightarrow d \mid (21-20) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d=1$ . Așadar, fracția dată este ireductibilă.

**G:1400.** Demonstrați că dacă numerele naturale  $a, b, c, d, e, f, g$  sunt direct proporționale, cu numerele **38, 18, 12, 10, 3, 2, 45** atunci  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = g^2$ .

**Nicolae Ivășchescu, Canada**

**Rezolvare:** Știm că  $\frac{a}{38} = \frac{b}{18} = \frac{c}{12} = \frac{d}{10} = \frac{e}{3} = \frac{f}{2} = \frac{g}{45}$ . Fie  $k$  valoarea comună a rapoartelor. Obținem:

$$a = 38k, b = 18k, c = 12k, d = 10k, e = 3k, f = 2k, g = 45k.$$

Înlocuind în  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = g^2$  obținem  $2025k^2 = (45k)^2$  ceea ce este adevărată.

## ■ Clasa a VII-a

**G:1401.** Să se determine  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încât numărul  $A = |n-1| + |n-2| + |n-3| + |n-4| + |n-5|$  să fie pătrat perfect.

eleva Ana Alesia Truică, Craiova

**Rezolvare:** Dacă  $n \geq 5 \Rightarrow A = 5n - 15 = 5(n-3) \Rightarrow n-3 = 5k^2 \Rightarrow n = 5k^2 + 3, k \in \mathbb{N}^*$ .

Dacă  $n \leq 1 \Rightarrow A = 15 - 5n = 5(3-n) \Rightarrow 3-n = 5k^2 \Rightarrow n = 3 - 5k^2, k \in \mathbb{N}^*$ .

**G:1401.** Să se arate că numărul  $n = 4^{2025} + 2025^4$  poate fi scris ca suma a patru pătrate perfecte.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:** Cum  $4^{2025} = 4 \cdot 4^{2024} = 4 \cdot (4^{506})^4$ , fie  $a = 2025, b = 4^{506}$ , atunci

$n = a^4 + 4 \cdot b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4 \cdot b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 =$   
 $= (a^2 + 2b^2 + 2ab) \cdot (a^2 + 2b^2 - 2ab) = [(a+b)^2 + b^2] \cdot [(a-b)^2 + b^2]$ . După desfacerea parantezelor

obținem:  $n = (a^2 - b^2)^2 + (ab + b^2)^2 + (ab - b^2)^2 + (b^2)^2$  iar după înlocuirea lui a și b se obține

$n = (2025^2 - 4^{1012})^2 + (2025 \cdot 4^{506} + 4^{1012})^2 + (2025 \cdot 4^{506} - 4^{1012})^2 + (4^{1012})^2$ .

**G:1402.** Demonstrați că există numerele naturale a, b, c pentru care  $a^2 + b^2 = c^2 + 2025$ .

Nicolae Ivășchescu, Canada

**Rezolvare:** Folosim identitatea  $(3n-1)^2 + (4n-4)^2 - (5n-4)^2 = 2n+1$  care se demonstrează cu ajutorul formulelor sau prin desfacerea parantezelor. Așadar, fie  $a = 3n-1, b = 4n-4, c = 5n-4$  atunci  $2n+1 = 2025$  și obținem că  $n = 1012$  și  $a = 4044, b = 3035, c = 5056$ .

**G:1403.** Determinați numărul natural n, pentru care:

$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{\sqrt{n+5}}{1+\sqrt{n+5}+\sqrt{n+6}} = \frac{24+\sqrt{6}}{2}$ . elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Raționalizăm fiecare termen al sumei după modelul termenului general:

$$\frac{\sqrt{n+5}}{1+\sqrt{n+5}+\sqrt{n+6}} = \frac{\sqrt{n+5}(1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n+6})}{(1+\sqrt{n+5}+\sqrt{n+6})(1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n+6})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+5}(1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n+6})}{1+2\sqrt{n+5}+n+5-(n+6)} = \frac{\sqrt{n+5}(1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n+6})}{2\sqrt{n+5}} = \frac{1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n+6}}{2}$$

Calculând suma acestora se obține:  $\frac{n+\sqrt{6}-\sqrt{n+6}}{2} = \frac{24+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow n-24 = \sqrt{n+6} > 0$ . Se obține doar soluția  $n = 30$ .

**G:1404.** Un elev s-a gândit la 10 numere întregi (nu neapărat diferite) și a calculat toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere, obținând astfel rezultatele: 92, 93, 94, ..., 100. (Sumele care se repetă le-a scris o singură dată.) La ce numere s-a gândit elevul?

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Fie  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  cele zece numere întregi (nu neapărat diferite), iar  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}$ .

Se pot forma  $C_{10}^9 = 10$  sume formate din câte 9 numere (nu neapărat distincte), și anume

$S - a_1, S - a_2, \dots, S - a_{10}$ . Observăm  $10S - (a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}) = 9S$ , număr care este divizibil cu 9.

Conform ipotezei avem rezultatele 92, 93, 94, ..., 100, deci rezultatele a 9 sume (deci există două sume de câte 9 numere care sunt cu același rezultat).

Cum  $92 + 93 + 94 + \dots + 100 = \frac{(92+100) \cdot 9}{2} = 96 \cdot 9$ , număr divizibil cu 9.

Deducem astfel că suma tuturor numerelor la care s-a gândit elevul este 95, deci termenul lipsă trebuie să fie unul dintre numerele 92, 93, 94, ..., 99, 100 care este divizibil cu 9, deci este 99.

Așadar,  $9S = 9 \cdot 107$ , de unde  $a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} = 107$ .

Dacă  $a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10} = 92 \Rightarrow a_1 = 107 - 92 \Rightarrow a_1 = 15$

Din  $a_1 + a_3 + a_4 + \dots + a_9 + a_{10} = 93 \Rightarrow a_2 = 107 - 93 \Rightarrow a_2 = 14$ .

Analog, continuând raționamentul, numerele sunt: 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 8, 7.

**G:1405.** Se consideră numărul  $a(n) = \sqrt{9^n + 4 \cdot 3^n + m}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dacă  $a(0), a(1) \in \mathbb{N}$  atunci, să se arate că  $a(n) \in \mathbb{N}$ . Adrian Stan, Buzău

*Rezolvare:*  $a(0) = \sqrt{m+5} \in \mathbb{N}$ ,  $a(1) = \sqrt{m+21} \in \mathbb{N}$ .  $m = 4$ .

Observăm că pentru  $m = 4$  obținem  $a(n) = \sqrt{9^n + 4 \cdot 3^n + 4} = \sqrt{(3^n + 2)^2} = 3^n + 2 \in \mathbb{N}$ .

**G:1406.** Arătați că în orice triunghi  $ABC$  unde  $BC = a, AC = b, AB = c$  este adevărată inegalitatea  $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$ . Roxana Vasile, Botea Sorin, Gigi Zaharia, Craiova

*Rezolvare:* Avem  $0 < (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (c^2 - (a-b)^2)(a+b-c) =$   
 $= c^2(a+b) - c^3 - (a-b)^2(a+b) + c(a-b)^2 = c^2a + c^2b - c^3 - (a^2 - b^2)(a-b) + c(a^2 - 2ab + b^2) =$   
 $= c^2a + c^2b - c^3 - a^3 + a^2b + b^2a - b^3 + ca^2 - 2abc + cb^2 = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$   
și de aici inegalitatea din enunț.

**G:1407.** Dacă  $a, b, c > 0$  atunci  $3 \cdot \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \frac{b^3}{a^3} + \frac{c^3}{b^3} + \frac{a^3}{c^3} \geq 12$ . Gheorghe Ghiță, Buzău

*Rezolvare:* Mai întâi se demonstrează inegalitatea:  $3x + \frac{1}{x^3} \geq 4, \forall x > 0$ . Aceasta este echivalentă cu

$(x-1)^2 \cdot (3x^2 + 2x + 1) \geq 0, \forall x \geq 0$  care este adevărată. Pentru  $x = \frac{a}{b} > 0$  se obține  $3 \cdot \frac{a}{b} + \frac{b^3}{a^3} \geq 4$  și analog

pentru celelalte două analoge se obține prin adunare cerința problemei.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $a = b = c$ .

**G:1409.** Fie triunghiul  $\Delta ABC$  echilateral. Pe dreapta  $BC$  se consideră punctul  $M$  astfel încât  $C$  se află între  $B$  și  $M$  și  $m(\sphericalangle CAM) = 15^\circ$ . Dacă  $AB = BC = CA = a$  determinați  $CM$  și  $AM$  în funcție de  $a$ . Răzvan Lupu, Craiova

*Rezolvare:* Ducem  $AA' \perp BC$  ( $A' \in BC$ ). Atunci  $BA' = A'C = \frac{a}{2}$  și triunghiul  $\Delta AA'M$  este

dreptunghic isoscel. De aici,  $A'M = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CM = A'M - A'C = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$  și

$AM = AA' \sqrt{2} = A'M \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**G:1410.** Trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB$  și  $CD$ , este isoscel și are diagonalele perpendiculare. Știind că înălțimea trapezului are 10 cm, să se calculeze aria trapezului. Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

*Rezolvare:* Considerăm înălțimea  $EF$ , unde  $E$  și  $F$  sunt mijloacele bazelor. Triunghiurile  $DOC$  și  $AOB$  sunt dreptunghice și isoscele, atunci  $EO = DC/2$  și  $FO = AB/2$ , iar  $EF = EO + FO = (DC + AB)/2$ , adică înălțimea  $EF$  este cât linia mijlocie a trapezului. Atunci aria acestuia este egală  $10 \cdot 10 = 100$  (cm<sup>2</sup>).

**G:1411.** Fie  $ABCD$  un trapez isoscel înscris în cercul  $C$  cu  $BC \parallel AD$  ( $BC < AD$ ). Perpendiculara  $BB'$  pe  $AD$  intersectează cercul  $C$  în punctul  $E$ . Arătați că  $DE < BC + AE$ .

Marius Sgaibă, Craiova

*Rezolvare:* Construim  $BF \parallel CD$  ( $F \in AD$ ). Obținem că  $BCDF$  este paralelogram și de aici rezultă că  $FD = BC$ . Cum  $AB = BF = CD \Rightarrow \Delta ABF$  este isoscel și cum  $BB'$  este înălțime în triunghiul  $ABF$  este atunci și mediatore. Rezultă  $AB' = B'F \Rightarrow AE = EF$ . În triunghiul  $\Delta EFD$  avem  $DE < EF + FD = AE + BC$ , c.c.t.d.

**G:1412.** În triunghiul  $ABC$  oarecare se consideră punctul  $D$  pe latura  $[AC]$  astfel încât  $[AD] \equiv [DC]$  și punctul  $E \in [BD]$  astfel încât  $[BE] \equiv [ED]$  și punctul  $I \in (BC)$  astfel încât  $DI \parallel AE$ . Construiți cu ajutorul unei rigle negradate pe prelungirea lui  $[AE]$ , dincolo de  $E$  un segment  $[EG]$ , astfel încât  $[EG] = \frac{[AG]}{4}$ .

Nicolae Ivășchescu, Canada

*Rezolvare:* Fie  $\{G\} = AE \cap BC$ . Vom arăta că  $G$  este punctul căutat astfel încât  $[EG] = \frac{[AG]}{4}$ .

În triunghiul  $\Delta CAG$ , avem  $DI \parallel AG$  și cum  $[AD] \equiv [DC]$  rezultă  $DI$  este linie mijlocie, adică  $DI = \frac{1}{2} AG$ .

În triunghiul  $\Delta BDI$ , avem  $[BE] \equiv [ED]$  și  $EG \parallel DI$ , deci  $EG$  este linie mijlocie, rezultă  $EG = \frac{1}{2} DI$  adică  $EG = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} AG\right) = \frac{1}{4} AG$ . c.c.t.d.

**G:1413.** În cercul  $C(O; R)$ , punctele  $A, B, C$  sunt conciclice,  $C$  aparținând arcului mic  $AB$ . Dacă  $AB=R$  și  $AC=2R\cos 75^\circ$  atunci aflați măsura unghiului  $BAC$ .

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

*Rezolvare:* Triunghiul  $OAB$  este echilateral cu  $m(\sphericalangle OAB) = 60^\circ$ . Cum triunghiul  $OAC$  este isoscel ( $OA = OC$ ), fie  $D$  mijlocul lui  $AC$ , atunci,  $AD=2R\cos 75^\circ$

Rezultă,  $m(\sphericalangle OAC) = 75^\circ$  și  $m(\sphericalangle BAC) = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ .

## ▪ Clasa a VIII-a

**G:1414.** Găsiți valoarea de adevăr a propoziției:

$$P: \sqrt{1+2023} \cdot \sqrt{1+2024} \cdot \sqrt{1+2025} \cdot \sqrt{1+2026} \cdot 2026 = 2024 .$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

*Rezolvare:* Pornind de la ultimul radical, avem succesiv:

$$\sqrt{1+2026 \cdot 2028} = \sqrt{1+(2027-1)(2027+1)} = \sqrt{1+2027^2-1} = 2027.$$

$$\sqrt{1+2025 \cdot 2027} = \sqrt{1+2026^2-1} = 2026.$$

$$\sqrt{1+2024 \cdot 2026} = \sqrt{1+2025^2-1} = 2025.$$

$$\sqrt{1+2023 \cdot 2025} = \sqrt{1+2024^2-1} = 2024., \text{ deci propoziția dată este adevărată.}$$

**G:1415.** Să se determine numerele prime  $p, q, r$  care verifică egalitatea  $pqr = 23(p+q+r)$ .

Florin Rotaru, Focșani

**Rezolvare:** Avem  $p > q$  și  $p > r$ . Deoarece

$\frac{pqr}{23} = p - q - r \in \mathbb{N}$  înseamnă că un număr dintre cele trei,  $p, q, r$  este egal cu 23 și acesta este  $p$  având în vedere  $p - q - r \in \mathbb{N}$ . Deci  $qr = 23 - q - r \Rightarrow qr + q + r = 23 \Rightarrow (q+1)(r+1) = 24$ .

Analizând toate situațiile  $(q+1)(r+1) \in \{1 \cdot 24; 2 \cdot 12; 3 \cdot 8; 4 \cdot 6\}$  obținem

$$(q; r) \in \{(2; 7), (7; 2), (3; 5), (5; 3)\} \Rightarrow (p; q; r) \in \{(27; 2; 7), (27; 7; 2), (27; 3; 5), (27; 5; 3)\}.$$

**G:1416.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^3 = x-2$ .

**Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu**

**Rezolvare:** Condiții de existență a ecuației:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

Ecuația dată devine:  $(x-2) \cdot (x+3)^3 = (x+1)^3 \Rightarrow (x-2) \cdot (x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow$

$x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 30x - 55 = 0$ . Descompunând în factori obținem:

$$(x^4 - 25) + (6x^3 - 30x) + (6x^2 - 30) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 25)(x^2 + 25) + 6x(x^2 - 5) + 6(x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 5)(x^2 + 6x + 11) = 0 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

**G:1417.** Se consideră expresia algebrică  $E(x) = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x^2+3x+2}\right) : (x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$ .

Aflați  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $E(x) \in \mathbb{Z}$ .

**Ion Stănescu, Smeeni, Buzău**

**Rezolvare:**  $E(x) = \frac{2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{-4; -3; 0\}$ .

**G:1418.** Fie  $a, b, x, y > 0$ . Să se arate că  $\frac{x^7}{a^4} + \frac{y^7}{b^4} \geq \frac{x^3 + y^3}{a^3 + b^3} \cdot \left(\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b}\right)$ . **Gheorghe Ghiță, Buzău**

**Rezolvare:** Inegalitatea dată este echivalentă cu

$$(a^3 + b^3) \left(\frac{x^7}{a^4} + \frac{y^7}{b^4}\right) \geq (x^3 + y^3) \left(\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{x^7}{a} + \frac{a^3 y^7}{b^4} + \frac{b^3 x^7}{a^4} + \frac{y^7}{b} \geq \frac{x^7}{a} + \frac{x^3 y^4}{b} + \frac{x^4 y^3}{a} + \frac{y^7}{b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^3 y^7}{b^4} + \frac{b^3 x^7}{a^4} - \frac{x^3 y^4}{b} - \frac{x^4 y^3}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a^3 b^3 \left[ \frac{x^3}{a^3} \left(\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{a^4}\right) - \frac{y^3}{a^3} \left(\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{a^4}\right) \right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^3 b^3 \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \left(\frac{y}{b}\right)^4 \right] \cdot \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^3 - \left(\frac{y}{b}\right)^3 \right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^3 b^3 \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \cdot \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \geq 0, \text{ ceea ce este adevărat.}$$

**G:1419.** Demonstrați că valoarea expresiei

$$E(n) = \frac{\sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \sqrt{n+\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \sqrt{n-\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}} \text{ este constantă, oricare ar fi}$$

numărul  $n \in \mathbb{N}^*$ .

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

**Rezolvare:**

Notăm  $S_1 = \sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \sqrt{n+\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}} = \sum_{m=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{m}}$  și

$$S_2 = \sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \sqrt{n-\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}} = \sum_{m=0}^{n^2} \sqrt{n-\sqrt{m}}$$

Vom folosi formula radicalilor compuși  $\sqrt{n+\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-m}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-m}}{2}}$ , care aplicată pentru fiecare termen al sumei se obține:

$$\sqrt{n+\sqrt{0}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-0}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-0}}{2}}, \quad \sqrt{n+\sqrt{1}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{2}}$$

$$\dots\dots \sqrt{n+\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-n^2}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-n^2}}{2}}. \text{ Prin sumare rezultă}$$

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 \Leftrightarrow S_1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 \Leftrightarrow \frac{S_1(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{S_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow E(n) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 =$$

constantă  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**G:1420.** În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$ , lățimea și înălțimea sunt direct proporționale cu 4, respectiv 3. Aflați sinusul unghiului dintre planele  $(ABCD)$  și  $(A'B'CD)$ .

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

**Rezolvare:** Fie  $M \in CC'$ ,  $N \in OC$  astfel încât  $OM \perp CC'$ ,  $C'N \perp OC$ .

$$CN = \frac{4}{5} \cdot CC', \quad OC = \frac{5}{6} \cdot CC', \quad \sin COC' = \frac{24}{25}.$$

**G:1421.** Pe planul pătratului  $ABCD$  se ridică perpendiculara  $[EC]$  astfel încât  $EO = 4(\sqrt{3}+1)cm$ , unde  $O$  este centrul pătratului. Dacă măsura unghiului planelor  $(ABC)$  și  $(EDB)$  este de  $75^\circ$ , determinați distanța de la  $E$  la planul  $(EDB)$  și distanța de la  $C$  la planul  $(MBD)$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $[EC]$ .

Nicolae Ivășchescu, Canada

**Rezolvare:** Se arată ușor că  $m(\sphericalangle((EDB), (ABC)) = m(\sphericalangle(EO, CO)) = m(\sphericalangle EOC) = 75^\circ$ .

În triunghiul dreptunghic  $EOC$  avem

$$\sin 75^\circ = \frac{EC}{EO} \Rightarrow EC = EO \cdot \sin 75^\circ = 4(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{3}).$$

$$\text{De asemenea, } \cos O = \cos 75^\circ = \frac{OC}{EO} \Rightarrow OC = EO \cdot \cos 75^\circ = 4(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}cm.$$

Din  $DO \perp OC$ ,  $DO \perp EC$ ,  $OC, EC \subset (EOC) \Rightarrow DO \perp (EOC)$  și cum

$DO \subset (EDB) \Rightarrow (EDB) \perp (EOC) \Rightarrow d(C, (EDB)) = CF$  cu  $CF \perp EO$ . Dar  $CF$  este înălțime în triunghiul dreptunghic  $EOC$ , rezultând că

$$CF = \frac{EC \cdot OC}{EO} = \frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})2\sqrt{2}}{4(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1 = d(C, (EDB)).$$

Pentru distanța de la  $C$  la planul  $(MBD)$ , fie  $CG \perp MO$ ,  $CG$  este înălțime în triunghiul  $MOC$ ,

$$\text{atunci, } d(C, (MBD)) = CG = \frac{CM \cdot CO}{MO} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{\sqrt{22+8\sqrt{3}}}.$$

$MO$  s-a calculat cu teorema lui Pitagora:  $MO = \sqrt{MC^2 + OC^2} = \sqrt{22+8\sqrt{3}}$ .

**G:1422.** În cubul  $ABCDEFGH$  se notează cu  $O$  centrul feței  $BCGF$ . Se știe că segmentul  $HO$  are lungimea egală cu  $2\sqrt{6}$  cm. Să se afle volumul cubului și măsura unghiului dintre dreptele  $HO$  și  $EB$ .

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

**Rezolvare:** M fiind mijlocul lui FG, avem și  $OM \perp FG$ , Deoarece fețele BCGF și EFGH sunt perpendiculare, rezultă  $OM \perp (GHF)$ , deci  $OM \perp HM$ . Găsim că  $OM = x/2$  și  $HM^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4}$ .

Din  $HO^2 = OM^2 + MH^2$  avem  $HO^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{5x^2}{4} = \frac{6x^2}{4}$ , iar  $HO = \frac{x\sqrt{6}}{2}$ . Dar  $HO = 2\sqrt{6}$  implică  $x = 4$ .

Volumul este  $4^3 = 64$  (cm<sup>3</sup>).

Patrulaterul EBCH este dreptunghi, deci EB este paralelă cu HC. În acest caz unghiul cerut este unghiul format de HO cu HC. Triunghiul HFC este echilateral, iar mediana HO este și bisectoarea unghiului FHC, care are  $60^\circ$ , de unde rezultă că măsura cerută este de  $30^\circ$ .

**G:1423.** Se dă o piramidă patrulateră regulată SABCD. Dacă latura bazei, înălțimea piramidei și apotema piramidei au lungimile trei numere naturale consecutive, să se calculeze sinusul unghiului format de două fețe laterale opuse.

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

**Rezolvare:**

Din  $\triangle SON$  este dreptunghic  $\Rightarrow SN > SO$  și  $SN^2 = SO^2 + ON^2$  (1)

Analizăm cazurile:

**Cazul 1:**  $SN = x + 2$ ,  $SO = x$ ,  $AB = x + 1 \Rightarrow ON = \frac{x + 1}{2}$ .

Relația (1) devine

$$(x + 2)^2 = x^2 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(x + 2)^2 - 4x^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)(15 - x) = 0 \Rightarrow x = 15, \text{ deoarece } x > 0.$$

Deci  $a = SN = 17$ ,  $h = SO = 15$ ,  $l = AB = 16$ .

$(SBC) \cap (SAD) = d \Rightarrow d \parallel BC \parallel AD$  (conform teoremei acoperișului).

$$\left. \begin{array}{l} SN \perp BC \\ SM \perp AD \\ BC \parallel AD \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} SN \perp d \\ SM \perp d \end{array} \right. \Rightarrow m((SBC), (SAD)) = m(MSN) \stackrel{\text{not.}}{=} u$$

$$A_{\triangle SMN} = \frac{a^2 \cdot \sin u}{2} = \frac{l \cdot h}{2} \Rightarrow a^2 \cdot \sin u = l \cdot h \Rightarrow \sin u = \frac{l \cdot h}{a^2} = \frac{16 \cdot 15}{289} = \frac{240}{289}$$

**Cazul 2:**  $SN = x + 2$ ,  $SO = x + 1$ ,  $AB = x \Rightarrow ON = \frac{x}{2}$ .

$$\text{Obținem } (x + 2)^2 = (x + 1)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 - 4x^2 - 8x - 4 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 28 \text{ imposibil în } \mathbb{N}.$$

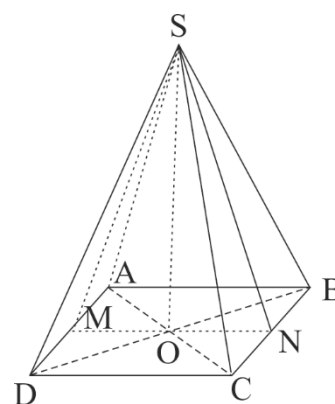
**Cazul 3:**  $SN = x + 1$ ,  $SO = x$ ,  $AB = x + 2 \Rightarrow ON = \frac{x}{2} + 1$ .

$$\text{Avem } (x + 1)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + \frac{x^2}{4} + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x, x \neq 0 \Rightarrow x = 4.$$

Deci  $a = SN = 5$ ,  $h = SO = 4$ ,  $l = AB = 6$  și  $\sin u = \frac{l \cdot h}{a^2} = \frac{6 \cdot 4}{25} = \frac{24}{25}$ .

**G:1424.** a) **Demonstrați inegalitățile:** (i):  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq \frac{3}{4}((x + y)^2 + 1)$ ,  $\forall x, y \geq 0$ ;

(ii):  $(u^2 + 1)(v^2 + 1) \geq (u + v)^2$ ,  $\forall u, v \geq 0$ ;



b) Într-un tetraedru ABCD notăm prin  $F$  aria totală, cu  $F_A$  aria feței care se opune vârfului  $A$  și analogele  $F_B, F_C, F_D$ . Arătați că  $(F_A^2 + 1) \cdot (F_B^2 + 1) \cdot (F_C^2 + 1) \cdot (F_D^2 + 1) \geq \frac{9}{16} \cdot F^2$ .

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București, Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:**

a) Se desfac parantezele și se obțin relații adevărate:  $(2xy - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$  respectiv  $(uv - 1)^2 \geq 0$ .

b) Se aplică (i) pentru  $F_A, F_B, F_C, F_D$  astfel:  $(F_A^2 + 1) \cdot (F_B^2 + 1) \geq \frac{3}{4} \cdot ((F_A + F_B)^2 + 1)$ ,

$(F_C^2 + 1) \cdot (F_D^2 + 1) \geq \frac{3}{4} \cdot ((F_C + F_D)^2 + 1)$  iar prin înmulțire obținem:

$(F_A^2 + 1) \cdot (F_B^2 + 1) \cdot (F_C^2 + 1) \cdot (F_D^2 + 1) \geq \frac{9}{16} \cdot ((F_A + F_B)^2 + 1) \cdot ((F_C + F_D)^2 + 1)$ . Mai departe pentru

$u = F_A + F_B, v = F_C + F_D$  din (ii) obținem:  $((F_A + F_B)^2 + 1) \cdot ((F_C + F_D)^2 + 1) \geq (F_A + F_B + F_C + F_D)^2$

Cum  $F_A + F_B + F_C + F_D = F$  rezultă  $(F_A^2 + 1) \cdot (F_B^2 + 1) \cdot (F_C^2 + 1) \cdot (F_D^2 + 1) \geq \frac{9}{16} \cdot F^2$ .

## ▪ Clasa a IX-a

**L:1208.** Se consideră mulțimea nevidă  $A \subseteq \mathbb{R}$  cu proprietățile: a)  $1 \in A$ ; b)  $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$  ;

c)  $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$ . Demonstrați că numărul  $2024 + \sqrt{2025}$  este element al mulțimii  $A$ .

elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Fie  $x \in A$ . Relația c) devine  $(x - 2)^2 \in A \Rightarrow x \in A$ .

Din b) obținem  $x^2 \in A \Leftrightarrow [(x + 2) - 2]^2 \in A \stackrel{c)}{\Rightarrow} x + 2 \in A \quad (R_1)$

Cum din a) avem  $1 \in A \Rightarrow$  reiese prin raționament inductiv că  $A$  conține toate numerele impare pozitive, iar cum  $2024 + \sqrt{2025} = 2024 + \sqrt{45^2} = 2024 + 45 = 2069$ , demonstrația este încheiată.

**L:1209.** Arătați că pentru orice număr natural nenul  $n$  există un număr natural  $A$ , având  $n$  cifre, toate impare, care se divide cu  $5^n$ .

elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Vom demonstra prin inducție matematică

Pentru  $n = 1$  este evident  $A = 5 : 5^1$  Presupunem afirmația adevărată pentru  $k$ .

Deci  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_k} = p \cdot 5^k$  cu  $(a_i)_{i \in \{1, k\}}$  cifre impare. Considerăm acum numerele de  $k + 1$  cifre impare,

$\overline{1a_1 a_2 \dots a_k}, \overline{3a_1 a_2 \dots a_k}, \overline{5a_1 a_2 \dots a_k}, \overline{7a_1 a_2 \dots a_k}$  și  $\overline{9a_1 a_2 \dots a_k}$ .

Observăm că:  $\overline{1a_1 a_2 \dots a_k} = 10^k + \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \stackrel{\text{ip. ind.}}{=} 10^k + p \cdot 5^k = 5^k (2^k + p)$

$\overline{3a_1 a_2 \dots a_k} = 3 \cdot 10^k + \overline{a_1 a_2 \dots a_k} = 3 \cdot 10^k + p \cdot 5^k = 5^k (3 \cdot 2^k + p)$

Analog,  $\overline{5a_1 a_2 \dots a_k} = 5^k (5 \cdot 2^k + p)$ ,  $\overline{7a_1 a_2 \dots a_k} = 5^k (7 \cdot 2^k + p)$  și  $\overline{9a_1 a_2 \dots a_k} = 5^k (9 \cdot 2^k + p)$ .

Cum numerele  $2^k + p, 3 \cdot 2^k + p, 5 \cdot 2^k + p, 7 \cdot 2^k + p$  și, respectiv  $9 \cdot 2^k + p$  dau resturi distincte la împărțirea prin 5 (se demonstrează destul de ușor) prin urmare, unul dintre numere este divizibil prin 5 și inducția fiind încheiată, problema este demonstrată.

**L:1210.** Fie  $n, k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $2^{k+1} > n$ . Calculați  $S = \sum_{i=0}^k \left[ \frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right]$ , unde  $[a]$  reprezintă

partea întreagă a numărului real  $a$ .

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

**Rezolvare:**  $S = \sum_{i=0}^k \left[ \frac{n}{2^{i+1}} + \frac{1}{2} \right] \quad (R_1)$

Se cunoaște identitatea lui Hermite  $\left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  și folosind aceasta în suma de la

$(R_1)$  pentru  $x = \frac{n}{2^{i+1}}$  obținem  $S = \sum_{i=0}^k \left( \left[ \frac{n}{2^i} \right] - \left[ \frac{n}{2^{i+1}} \right] \right) = [n] - \left[ \frac{n}{2^{k+1}} \right] \stackrel{2^{k+1} > n}{\substack{= \\ n \in \mathbb{N}}} n - 0 = n$ .

**L:1211.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  și numerele reale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cu proprietatea  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2025n$ . Să se determine numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  care verifică ecuația  $\sqrt{a_1 - x_1} + \sqrt{a_2 - x_2} + \dots + \sqrt{a_{n-1} - x_{n-1}} + \sqrt{a_1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} = 45n$ .

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Din condițiile de existență  $a_i - x_i \geq 0 \Leftrightarrow x_i \leq a_i \Leftrightarrow x_i \in (-\infty; a_i]$ ,  $\forall i \in \overline{1, n-1}$

Notăm  $\begin{cases} a_i - x_i = y_i, \forall i \in \overline{1, n-1}, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + a_n = y_n \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - x_i) = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} = 2025n - a_n - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i = 2025n - \underbrace{(a_n + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})}_{y_n} \Rightarrow y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i = 2025n \Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2025n \quad (R_1)$$

Din ipoteză  $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \dots + \sqrt{y_n} = 45n$ .

Folosind Cauchy:  $(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \dots + \sqrt{y_n})^2 \leq \underbrace{(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)}_{n \text{ termeni}} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \stackrel{(R_1)}{=} n^2 \cdot 2025$  iar

egalitatea are loc când  $\sqrt{y_1} = \sqrt{y_2} = \dots = \sqrt{y_n} \Leftrightarrow a_1 - x_1 = a_2 - x_2 = \dots = a_{n-1} - x_{n-1} =$   
 $= a_n + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \quad (R_2)$

Din  $(R_2) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = a_1 - a_n \\ x_1 + 2x_2 + \dots + x_{n-1} = a_2 - a_n \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + 2x_{n-1} = a_{n-1} - a_n \end{cases} (+)$

$$n \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 2025n - a_n - (n-1)a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 2025 - a_n \Rightarrow a_i - x_i = 2025 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_i = a_i - 2025, \forall i \in \overline{1, n-1}$ .

**L:1212.** Dacă  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$  sunt progresii aritmetice de numere întregi, atunci demonstrați că 5 divide  $2a_{n+4}b_{n+4}c_{n+4} + 2a_{n+3}b_{n+3}c_{n+3} - 3a_{n+2}b_{n+2}c_{n+2} + 2a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1} + 2a_n b_n c_n$ .

Florin Rotaru, Focșani

**Rezolvare:** Fie  $r, p, q$  rațiile progresiilor  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ ; notăm  $a_{n+2} = x, b_{n+2} = y, c_{n+2} = z$

$$\begin{aligned} & \text{Avem } 2a_{n+4}b_{n+4}c_{n+4} + 2a_{n+3}b_{n+3}c_{n+3} - 3a_{n+2}b_{n+2}c_{n+2} + 2a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1} + 2a_n b_n c_n \\ &= 2(x+2r)(y+2q)(z+2p) + 2(x+r)(y+q)(z+p) - 3xyz + 2(x-r)(y-q)(z-p) + \\ &+ 2(x-2r)(y-2q)(z-2p) = 5(4pqx + 4pry + 4qrz + xyz), \text{ c.c.t.d.} \end{aligned}$$

**L:1213.** Dacă  $x, y \in (0, \infty)$  și  $(2x)^2 + y^3 \geq (2x)^3 + y^4$  arătați că  $(2x)^3 + y^3 \leq 2$ .

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj Felicia Ozun, Craiova

**Rezolvare:** Arătăm că  $(2x)^3 + y^3 \leq (2x)^2 + y^2$ . Avem

$$(2x)^3 + y^3 \leq (2x)^3 + y^3 + y^4 - y^4 \leq (2x)^3 + y^4 + y^3 - y^4 = (2x)^2 + 2y^3 - y^4 - y^2 + y^2 \\ = (2x)^2 + y^2 - y^2(1-y)^2 \leq (2x)^2 + y^2$$

În Cauchy-Buniakowski  $(au + bv)^2 \leq (a^2 + b^2)(u^2 + v^2)$  punem

$$a = \sqrt{2x}, b = \sqrt{y}, u = 2x\sqrt{2x}, v = y\sqrt{y} \text{ și avem}$$

$$\left[ (2x)^2 + y^2 \right]^2 \leq (2x+y) \left[ (2x)^3 + y^3 \right] \leq (2x+y) \left[ (2x)^2 + y^2 \right] \Rightarrow (2x)^2 + y^2 \leq 2x+y.$$

$$\text{Știm că } \frac{(2x)^2 + y^2}{2} \geq \left( \frac{2x+y}{2} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{2x+y}{2} \right)^2 \leq \frac{2x+y}{2} \Rightarrow \frac{2x+y}{4} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+y \leq 2.$$

$$\text{Avem } (2x)^3 + y^3 \leq (2x)^2 + y^2 \leq 2x+y \leq 2 \Rightarrow (2x)^3 + y^3 \leq 2.$$

**L:1214.** Fie  $n \geq \mathbb{N}$ . Arătați că  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} = 1$ .

Folosind eventual acest rezultat, arătați că dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  și  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , atunci:

$$\frac{x_1}{2 \cdot x_1 + 1} + \frac{x_2}{2^2 \cdot x_2 + 1} + \dots + \frac{x_{n-2}}{2^{n-2} \cdot x_{n-2} + 1} + \frac{x_{n-1}}{3 \cdot 2^{n-3} \cdot x_{n-1} + 1} + \frac{x_n}{3 \cdot 2^{n-2} \cdot x_n + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

În ce caz avem egalitate?

Lucian Tuțescu, Craiova

**Rezolvare:**

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{2+1}{3 \cdot 2^{n-2}} = 1. \text{ Pentru } x=0 \text{ avem } \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

cu egalitate pentru  $x=1$ . Pentru  $x>0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{4}$  cu egalitate pentru  $x=1$ . (\*)

Pentru  $x=2a, x=4b, x=6c, x=12d$ , avem după înlocuire în (\*):

$$\frac{2a}{2a+1} \leq \frac{2a+1}{4} \mid :2 \Rightarrow \frac{a}{2a+1} \leq \frac{a}{4} + \frac{1}{8}, \text{ analog și pentru celelalte:}$$

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{4b+1} + \frac{c}{6c+1} + \frac{d}{12d+1} \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} \text{ cu egalitate pentru}$$

$$2a=4b=6c=12d=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{6}, d=\frac{1}{12}.$$

**L:1215.** Fie  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [1, \infty), n \geq 3$ . Arătați că  $\frac{\sqrt{x_1-1}}{x_1+x_2} + \frac{\sqrt{x_2-1}}{x_2+x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_{n-1}-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{\sqrt{x_n-1}}{x_n+x_1} \leq \frac{n}{4}$ .

În ce caz avem egalitate?

Moanță Cristian, Tuțescu Lucian, Craiova

**Rezolvare:** Deoarece  $a+b \geq 2\sqrt{ab}, a, b > 0$ , avem

$$\frac{\sqrt{x_1-1}}{x_1+x_2} \leq \frac{\sqrt{x_1-1}}{2\sqrt{x_1 \cdot x_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \frac{1}{x_2}} \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right), \text{ cu egalitate pentru } x_1 = x_2 \text{ și } 1 - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}, \text{ deci}$$

$$x_1 = x_2 = 2. \text{ În mod similar se procedează și pentru ceilalți termeni, astfel: } \frac{\sqrt{x_{n-1}-1}}{x_{n-1}+x_n} \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Adunând inegalitățile rezultate obținem inegalitatea din enunț. Egalitate avem pentru  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 2$ .

**L:1216.** Aflați  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât ecuația

$$\left[ \frac{2x+1}{2} \right] + \left[ \frac{2^2x+1}{2} \right] + \left[ \frac{2^3x+1}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{2^n x+1}{2} \right] = 2025 \text{ să aibă soluții în } [0;1).$$

Adrian Stan, Buzău

**Rezolvare:** Știm că  $[a] + \left[ a + \frac{1}{2} \right] = [2a]$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$  (Relația lui Hermite), atunci  $\left[ a + \frac{1}{2} \right] = [2a] - [a]$  pe

care o aplicăm pentru fiecare termen al sumei:

$$\left[ \frac{2x+1}{2} \right] = \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x], \quad \left[ \frac{2^2x+1}{2} \right] = \left[ 2x + \frac{1}{2} \right] = [2^2x] - [2x], \quad \left[ \frac{2^3x+1}{2} \right] = \left[ 2^2x + \frac{1}{2} \right] = [2^3x] - [2^2x]$$

$$\dots \dots \dots \left[ \frac{2^n x+1}{2} \right] = \left[ 2^{n-1}x + \frac{1}{2} \right] = [2^n x] - [2^{n-1}x]. \text{ Adunând relațiile de mai sus obținem:}$$

$$2025 = [2^n x] - [x], \quad x \in [0;1) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [2^n x] = 2025 \Rightarrow 2025 \leq 2^n \cdot x < 2026. \text{ Pentru } n=11 \text{ se}$$

$$\text{verifică relația: } \frac{2025}{2048} \leq x < \frac{2026}{2048}. \text{ Așadar, } n \geq 11.$$

**L:1217.** Să se rezolve ecuația  $(2x^2 - 1013)^2 - 4x - 2026 = 0$ , folosind doar ecuații de grad doi.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:** Cu notația  $1013 = t$ , ecuația devine:

$$(2x^2 - t)^2 - 4x - 2t = 0 \Leftrightarrow t^2 - (4x^2 + 2)t + 4x^4 - 4x = 0 \text{ ecuație de gradul doi în } t \text{ cu discriminantul egal}$$

$$\text{cu } \Delta_t = 16x^2 + 16x + 4 = (4x + 2)^2 \geq 0 \quad \text{iar soluțiile}$$

$$t_{1,2} = \frac{4x^2 + 2 \pm (4x + 2)}{2} = 2x^2 + 1 \pm (2x + 1) \Rightarrow t \in \{2x^2 - 2x; 2x^2 + 2x + 2\}.$$

$$\text{Pentru } 2x^2 - 2x = t = 1013 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1013 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2027}}{4},$$

$$\text{Pentru } 2x^2 + 2x + 2 = t = 1013 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1011 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2023}}{4}. \text{ Deci,}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{2023}}{2}, \frac{1 - \sqrt{2027}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2023}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2027}}{2} \right\}.$$

**L:1218.** În triunghiul ABC, să se arate că  $\max(|a - b|, |b - c|, |c - a|) \leq \sqrt{6(R - 2r)}$ .

Gheorghe Ghiță, Buzău

$$\text{Rezolvare: Din } 4p^2 = (a + b + c)^2 = \left( \frac{2a + b}{3} + \frac{a + 2b}{3} + c \right)^2 \stackrel{(\sum x)^2 \leq 3 \sum x^2}{\leq} 3 \cdot \left( \frac{5(a^2 + b^2) + 8ab}{9} + c^2 \right) \Rightarrow$$

$$12p^2 \leq 5(a^2 + b^2) + 9c^2 + 8ab = 9 \sum a^2 - 4a^2 - 4b^2 + 8ab = 18(p^2 - 4Rr - r^2) \text{ deoarece}$$

$$\sum a^2 = 2(p^2 - 4Rr - r^2). \text{ Rezultă } 12p^2 \leq 18(p^2 - 4Rr - r^2) - 4(a - b)^2$$

$$2(a - b)^2 \leq 3(p^2 - 12Rr - 3r^2) \stackrel{\text{Gerretsen}}{\leq} 3(4R^2 - 8Rr) \Rightarrow (a - b)^2 \leq 6R(R - 2r) \Rightarrow |a - b| \leq \sqrt{6R(R - 2r)}.$$

Analog se obțin inegalitățile  $|b - c| \leq \sqrt{2R(R - 2r)}$ ,  $|c - a| \leq \sqrt{6R(R - 2r)}$ . Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**L:1219.** Să se arate că  $E(x, m) = 9m^2x^2 - 3m(2x^2 - x) + x^2 - x + 1 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

Scrieți  $E(x, m)$  ca sumă a două pătrate perfecte și determinați minimul expresiei  $E(x, m)$ .

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:** Pentru  $m = 0$  rezultă  $E(x, 0) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Pentru  $m \in \mathbb{R}^*$ , scriem  $E(x, m) = 9m^2x^2 - 3mx(2x-1)y + x^2 - x + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$  și cu notația  $mx = y$ , trebuie să arătăm că  $9y^2 - 3(2x-1)y + x^2 - x + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Calculăm discriminantul,  $\Delta_y = 9(2x-1)^2 - 36(x^2 - x + 1) = -27 < 0$  ceea ce înseamnă că trinomul de gradul al doilea în  $y$  este pozitiv, adică  $E(x, m) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{R}^*$ .

Expresia  $E(x, m)$  se scrie ca un trinom în variabila  $x$ :

$$E(x, m) = 9m^2x^2 - 6mx^2 + x^2 + 3mx - x + 1 = (9m^2 - 6m + 1)x^2 + (3m - 1)x + 1$$

$$= (3m - 1)^2 x^2 + (3m - 1)x + 1 \text{ pe care o scriem sub forma canonică } a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ unde}$$

$$a = (3m - 1)^2, b = 3m - 1, c = 1, \Delta = -3(3m - 1)^2, \text{ așadar,}$$

$$E(x, m) = (3m - 1)^2 \left(x + \frac{3m - 1}{2(3m - 1)^2}\right)^2 + \frac{3(3m - 1)^2}{4(3m - 1)^2} = \left((3m - 1)x + \frac{3m - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Minimul expresiei  $\frac{3}{4}$  și se obține pentru  $m = \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$  sau  $x = -\frac{1}{2}, m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ .

**[L:1220].** Dacă  $a, b, c, d > 0$  atunci să se arate că  $\sum \frac{a}{3a^3 + bcd} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2$ .

Marin Chirciu, Pitești

**Rezolvare:** Datorită omogenității putem lua  $abcd = 1$ .

$$LHS = \sum \frac{a}{3a^3 + bcd} = \sum \frac{a^2}{3a^4 + abcd} = \sum \frac{a^2}{3a^4 + 1} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = RHS,$$

unde  $\sum \frac{a^2}{3a^4 + 1} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 \Leftrightarrow \sum \frac{a^2}{3a^4 + 1} \leq \frac{1}{16} q^2$ , vezi:

$$\sum \frac{a}{3a^4 + 1} = \sum \frac{a^2}{a^4 + a^4 + a^4 + 1} \stackrel{AG}{\leq} \sum \frac{a^2}{4\sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot 1}} = \sum \frac{a^2}{4a^3} = \sum \frac{1}{4a} = \frac{q}{4} \stackrel{q \geq 4}{\leq} \frac{1}{16} q^2.$$

Am folosit mai sus  $q \geq 4$ , vezi  $q = abc + bcd + cda + dab \stackrel{AG}{\geq} 4\sqrt[4]{(abcd)^3} = 4$ .

Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $a = b = c = d$ .

**[L:1221].** Fie  $M$  un punct în planul triunghiului  $\Delta ABC$  iar  $N, P, Q$  simetriile punctului  $M$  în raport cu mijloacele laturilor  $AB, BC$ , respectiv  $AC$ . Arătați că  $\overline{MG} = 2\overline{MG_1}$  unde  $G$  și  $G_1$  sunt centrele de greutate ale triunghiurilor  $\Delta ABC$  respectiv  $\Delta NPQ$ . Dorina Goiceanu, Camelia Dana, Craiova

**Rezolvare:**  $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{MB}$ ,  $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{MC}$ , și  $\overline{MQ} = \overline{MC} + \overline{MA}$ . Prin adunarea relațiilor se obține  $\overline{MN} + \overline{MP} + \overline{MQ} = 2(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \Leftrightarrow 3\overline{MG_1} = 6\overline{MG} \Rightarrow \overline{MG_1} = 2\overline{MG}$ .

**[L:1222].** Fie triunghiul  $\Delta ABC$  isoscel ( $AB=BC$ ) cu  $m(\sphericalangle ABC) = 36^\circ$  și  $D \in (BC)$  astfel încât  $AD$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ . Dacă  $AD = 2\sqrt{7}$ , calculați lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ .

Alina Ciucă, Ionuț Ivănescu, Craiova

**Rezolvare:** Deoarece  $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC) = 36^\circ$  (unghiurile  $\sphericalangle BAC, \sphericalangle BCA$  au  $72^\circ$ ) găsim  $m(\sphericalangle ADC) = 72^\circ$ , atunci  $AC = AD = 2\sqrt{7}$ . Din teorema bisectoarei în triunghiul  $\Delta ABC$  rezultă

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{DC}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{BC} \Rightarrow DC \cdot (DC + 2\sqrt{7}) = 28 \text{ sau } DC^2 + 2\sqrt{7}DC - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$DC = \sqrt{35} - \sqrt{7}. \text{ Mai departe se obține } AB = BC = \sqrt{35} + \sqrt{7} \text{ și } AC = 2\sqrt{7}.$$

**[L:1223].** Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și fie D, E punctele de intersecție ale cercului de diametru [AB] cu laturile [AC], respectiv [BC]. Notăm cu M intersecția dreptelor CO și DE, unde O este mijlocul segmentului [AB].

a) Să se demonstreze relația  $\left(\frac{BC}{CE} + \frac{AC}{CD}\right)\overline{CM} = \overline{CB} + \overline{CA}$ .

b) Să se arate că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă

$$AC^2 + BC^2 = 3AB^2.$$

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

**Rezolvare:**

a) Deoarece E, M, D sunt puncte coliniare, rezultă că există  $\alpha \in (0, 1)$  astfel încât

$$\overline{CM} = \alpha\overline{CE} + (1-\alpha)\overline{CD} = \alpha\frac{CE}{CB}\overline{CB} + (1-\alpha)\frac{CD}{CA}\overline{CA} \quad (1)$$

Vectorii  $\overline{CM}$  și  $\overline{CO} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CA})$  sunt coliniari, de unde deducem că

$$\alpha\frac{CE}{CB} = (1-\alpha)\frac{CD}{CA} \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{CE}{CB} + \frac{CD}{CA}\right) = \frac{CD}{CA}.$$

Obținem prin calcul  $\left(\frac{BC}{CE} + \frac{AC}{CD}\right)\alpha \cdot \frac{CE}{CB} = 1$  și din relația (1) rezultă  $\left(\frac{BC}{CE} + \frac{AC}{CD}\right)\overline{CM} = \overline{CB} + \overline{CA}$ .

b) M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă  $\overline{CM} = \frac{1}{3}(\overline{CB} + \overline{CA}) \Leftrightarrow \frac{BC}{CE} + \frac{AC}{CD} = 3$ .

Din teorema medianei  $CO^2 = \frac{2BC^2 + 2CA^2 - AB^2}{2}$ . Scriind puterea punctului C față de cercul dat avem:

$$CE \cdot CB = CD \cdot CA = CO^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow CE \cdot CB = CD \cdot CA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}.$$

Obținem  $\frac{BC}{CE} + \frac{AC}{CD} = 3 \Leftrightarrow \frac{BC^2}{BC \cdot CE} + \frac{AC^2}{AC \cdot CD} = 3 \Leftrightarrow BC^2 + AC^2 = 3\left(\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}\right)$ , ultima

relație fiind echivalentă cu concluzia.

**[L:1224].** În triunghiul ABC considerăm punctul  $M \in (BC)$ . Să se arate că:

$$\min(AB, AC) \leq \frac{AM}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Emil C. Popa, Sibiu

**Rezolvare:** Din  $\frac{AM}{\sin C} = \frac{MC}{\sin x}$  și  $\frac{AM}{\sin B} = \frac{MB}{\sin y}$ , unde am notat  $x = \sphericalangle(MAC)$  și  $y = \sphericalangle(MAB)$ , găsim că

$$\frac{AM}{\sin C} \cdot \sin x + \frac{AM}{\sin B} \cdot \sin y = BC, \quad \frac{\sin x}{\sin C} + \frac{\sin y}{\sin B} = \frac{BC}{AM}, \quad \frac{2R \cdot \sin x}{AB} + \frac{2R \cdot \sin y}{AC} = \frac{2R \cdot \sin A}{AM},$$

R- raza cercului circumscris triunghiului dat ABC.

$$\text{De aici: } \frac{\sin x}{AB} + \frac{\sin y}{AC} = \frac{\sin A}{AM}, \quad \frac{\sin x + \sin y}{\min(AB, AC)} \geq \frac{\sin A}{AM},$$

$$\frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{\min(AB, AC)} \geq \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{AM}, \quad \min(AB, AC) \leq \frac{AM \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \leq \frac{AM}{\cos \frac{A}{2}}$$

## ■ Clasa a X-a

**L:1225.** Arătați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2025}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2025)(y+2025)}} \geq 2025$$

**Rezolvare:**

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

Întâi se va demonstra **Lema:** Pentru orice numere reale pozitive  $a, b \in (0; \infty)$  și  $p$  număr natural nenul, are loc inegalitatea  $\sqrt{(a+p)(b+p)} - p \geq \sqrt{ab}$ . (\*). Se va demonstra prin ridicare la pătrat

Folosind inegalitatea (\*) sub forma:  $\frac{\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy}}{1} \geq k, \forall x, y \in (0; +\infty)$  și  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy})(\sqrt{(x+k)(y+k)} + \sqrt{xy})}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq k \Leftrightarrow \frac{xy + xk + yk + k^2 - xy}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+k}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1 \quad (R_2). \text{ Sumând inegalitatea } (R_2) \text{ pentru } k \in \overline{1, 2025} \text{ obținem}$$

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{x+y+k}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de 2025 ori}} = 2025.$$

**L:1226.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Aflați partea întreagă a numărului  $A_n = \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}}$ .

**Rezolvare:**

**Sorina Tudor**, Craiova, **Daniela Beldea**, Băilești

Evident, pentru  $n=0 \Rightarrow A_0=1 \Rightarrow [A_0]=1$  iar pentru  $n=1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow [A_1]=0$ .

$$\text{Fie } n \geq 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{1}{3(n+1)!} < A_n \leq \frac{1}{2(n+1)!} < 1 \Rightarrow [A_n]=0.$$

**L:1227.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că:

a)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ . b)  $n! \leq (n+1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n+2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$ . În ce caz avem egalitate?

**Moanță Cristian**, **Tuțescu Lucian**, Craiova

**Rezolvare:** a) prin inducție sau cu formula  $\sum_{k=1}^n k \cdot (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

b) Din inegalitatea mediilor:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \geq n \sqrt{(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (n(n+1))} =$$

$$= n \sqrt{(n!)^2 \cdot (n+1)} \text{ sau } \sqrt{(n!)^2 \cdot (n+1)} \leq \frac{(n+1)(n+2)}{3}, \text{ adică } (n!)^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)^n \left(\frac{n+2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Egalitate avem doar pentru  $n = 1$ .

Dacă  $n \geq 2$  ca să avem egalitate în ar trebui ca  $1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = \dots = n(n+1)$ , cea ce nu se poate.

**L:1228.** Dacă  $a, b, c \geq 1$  și  $k \geq 0$  să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{\lg^2 a + k \cdot \lg^2 b} + \sqrt{\lg^2 b + k \cdot \lg^2 c} + \sqrt{\lg^2 c + k \cdot \lg^2 a} \geq \sqrt{k+1} \cdot \lg abc \quad \text{Gheorghe Ghiță, Buzău}$$

$$\text{Rezolvare: } \sum \sqrt{(k+1)(\lg^2 a + k \lg^2 b)} = \sum \sqrt{(k+1)(k \cdot \lg^2 b + \lg^2 a)} =$$

$$= \sum \sqrt{(\sqrt{k^2 + 1}) \cdot (\sqrt{k} \lg b)^2 + (\lg a)^2} \stackrel{CBS}{\geq} \sum \sqrt{(\sqrt{k} \sqrt{k} \lg b + 1 \cdot \lg a)^2} = \sum (k \lg b + \lg a) =$$

$$= k \sum \lg a + \sum \lg a = (k+1) \sum \lg a = (k+1)(\lg a + \lg b + \lg c) = (k+1) \lg abc \text{ cu egalitate când cele trei numere } a, b, c \text{ sunt egale sau pentru } k = 0.$$

**L:1229.** Rezolvați ecuația  $x^{\log_2 \left(\frac{x}{98}\right)} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$ .

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Condiții de existență  $x \in (0, +\infty)$

$$\text{Logaritmăm ecuația problemei în baza 2 și obținem } \log_2 \left(\frac{x}{98}\right) \cdot \log_2 x + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = \log_2 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x (\log_2 x - \log_2 98) + \log_2 7 \left( \log_2 2 + \log_2 7 \right) = 0 \quad (R_1) \quad \text{Notăm } \log_2 x = t \text{ și } (R_1) \text{ devine}$$

$$t^2 - t \cdot \underbrace{\log_2(7^2 \cdot 2)}_{1+2\log_2 7} + \log_2 7 + \log_2^2 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - (1+2\log_2 7)t + \log_2 7 + \log_2^2 7 = 0 \quad (R_2)$$

$$\Delta = (1+2\log_2 7)^2 - 4(\log_2 7 + \log_2^2 7) = 1 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1+2\log_2 7 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \log_2 x = \log_2 7 \Rightarrow x = 7 \in \text{cond.} \\ t_2 = \log_2 x = \frac{2(1+\log_2 7)}{2} = \log_2(2 \cdot 7) = \log_2 14 \Rightarrow x = 14 \in \text{cond.} \end{cases}$$

**L:1230.** Fie  $x = 1+i\sqrt{3}$ ,  $y = 1-i\sqrt{3}$  și  $z = 2$ . Demonstrați că pentru orice număr prim  $p$ ,  $p > 3$  are loc egalitatea  $x^p + y^p = z^p$ . Gobej Adrian, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Observăm că  $(R_1) \left\{ \frac{x}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \frac{y}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon^2, \frac{z}{2} = 1 \right.$  sunt rădăcinile de ordinul al

3-lea ale lui  $-1$ , adică rădăcinile ecuației  $x^3 + 1 = 0$ . Din  $(R_1)$  avem  $\{x = 2\varepsilon, y = -2\varepsilon^2, z = 2$ .

Relația din enunț devine  $2^p \varepsilon^p + (-2)^p \varepsilon^{2p} = 2^p | : 2^p \Leftrightarrow \varepsilon^p + (-1)^p \varepsilon^{2p} = 1 \quad (R_3)$

Cum relația trebuie demonstrată pentru orice număr prim  $p > 3 \Rightarrow p$  poate avea formele  $6n-1$  sau  $6n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , iar  $\varepsilon^6 = 1$ .

Cazul I.  $p = 6n-1$ , relația  $(R_3)$  devine:  $\varepsilon^{6n-1} + (-1)^{6n-1} \varepsilon^{12n-2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon^6)^n \cdot \frac{1}{\varepsilon} - (\varepsilon^6)^{2n} \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon - 1 = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \quad (A).$$

Cazul al II-lea.  $p = 6n + 1$ , relația  $(R_3)$  devine:  $\varepsilon^{6n+1} + (-1)^{6n+1} \varepsilon^{12n+2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon^6)^n \cdot \varepsilon - (\varepsilon^6)^{2n} \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon - \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \quad (A).$$

Astfel, demonstrația problemei este încheiată.

**L:1231.** Numerele complexe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sunt astfel încât  $|z_k - \alpha| < r, (\forall) k = \overline{1, n}$  și  $r \in (0, \alpha)$ .

Demonstrați că  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \cdot \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right| \geq \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) \cdot n^2$ .

Moanță Cristian, Craiova

**Rezolvare:** Din ipoteză avem:

$$(a - a_k)^2 + b_k^2 < r^2 \Rightarrow 2aa_k > a_k^2 + b_k^2 + a^2 - r^2 \geq 2\sqrt{(a_k^2 + b_k^2) \cdot (a^2 - r^2)} > 0, \quad (*), \quad \text{deoarece}$$

$$a > 0, \quad r^2 < a^2. \text{ Rezultă } a_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\text{Din } (*) \text{ obținem și } \frac{a_k^2}{a_k^2 + b_k^2} \geq \frac{a^2 - r^2}{a^2}, \quad k = \overline{1, n} \quad (1).$$

$$\text{Atunci, } |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \cdot \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right| =$$

$$|(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \dots + b_n)| \cdot \left| \frac{a_1 - ib_1}{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \frac{a_n - ib_n}{a_n^2 + b_n^2} \right| =$$

$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}\right)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}\right)^2} =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}\right) \geq$$

$$\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{a_1}{\alpha^2 - r^2} + \frac{a_2}{\alpha^2 - r^2} + \dots + \frac{a_n}{\alpha^2 - r^2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 - r^2}{\alpha^2} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) \cdot n^2,$$

$$\text{deoarece } (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

**L:1232.** Să se rezolve ecuația  $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = \frac{2(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}}$ .

Adrian Stan, Buzău

**Rezolvare:** Notăm  $\sqrt[3]{8+x} = a, \quad \sqrt[3]{8-x} = b \Rightarrow a^3 + b^3 = 16$ .

$$a + b = \frac{2(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}} = 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4 \quad (1).$$

$$4 \cdot (a^3 + b^3) - (a+b)^3 = 3(a-b)^2 \cdot (a+b) \geq 0. \text{ Rezultă}$$

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3 + b^3) \Rightarrow (a+b)^3 \leq 4^3 \Rightarrow a+b \leq 4 \quad (2). \text{ Din } (1) \text{ și } (2) \text{ rezultă că } a = b. \quad x=0.$$

**L:1233.** Arătați că: a)  $\cos 6 = \cos \{2\pi\}$ ; b)  $\cos 9 = -\cos \{3\pi\}$ ; c)  $\text{ctg} 1 > \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ,

unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ . Moanță Cristian, Tuțescu Lucian, Craiova

**Rezolvare:**

$$\text{a) } \cos 6 = \cos[2\pi] = -\cos(\pi - [2\pi]) = -\cos((2\pi - [2\pi]) - \pi) = -\cos(\{2\pi\} - \pi) = \\ = -\cos(\pi - \{2\pi\}) = \cos\{2\pi\}.$$

$$\text{b) } \cos 9 = \cos[3\pi] = -\cos(\pi - [3\pi]) = -\cos((3\pi - [3\pi]) - 2\pi) = -\cos(2\pi - \{3\pi\}) = -\cos\{3\pi\}.$$

$$\text{c) } \operatorname{ctg} 1 = \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{2}\right\} > \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \text{ deoarece } \operatorname{tg} x > x, \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ În cazul} \\ \text{nostru } x = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

**L:1234.** Determinați numerele naturale nenule  $n$ , pentru care  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} = 2 - \sqrt{n}$ .

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

*Rezolvare:*  $n = 1$  verifică relația  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 = 2 - \sqrt{1}$ ;

$$n = 2 \text{ nu verifică relația deoarece } \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1 \neq 2 - \sqrt{2};$$

$$n = 3 \text{ verifică relația deoarece } \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = 2 - \sqrt{3},$$

Pentru  $n \geq 4, \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{n} \leq 0$ . Dar  $0 < \frac{\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$  și  $0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} < 1$  deci  $2 - \sqrt{n} \leq 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ .

Rezultă că  $n \geq 4$  nu este soluție a ecuației, deci  $S = \{1; 3\}$ .

**L:1235.** Fie un triunghi cu vârful în  $O$  (orig. axelor), iar celelalte în punctele de tangență ale laturilor ce pleacă din  $O$  cu parabola  $f(x) = x^2 - x + 1, x \text{ din } R$ . Calculați aria triunghiului și arătați că unghiul  $O$  e ascuțit.

Petre Păunescu, Roșiori de Vede

*Rezolvare:* Din ecuația tangentei la graficul funcției,  $y = f(x) = mx$  rezultă ecuația

$$x^2 - x - mx + 1 = 0 \text{ care trebuie să aibă soluție unică, adică } \Delta = m^2 + 2m - 3 = 0. \text{ Rezultă } m \in \{-3; 1\}.$$

Rezultă cele două tangente au ecuațiile  $y = -3x, y = x$ . Punctele de tangență sunt  $A(1; 1), B(-1; 3)$ .

Cu formula distanței se află lungimile laturilor.

**L:1236.** Rezolvați în  $(0; \infty)$  ecuațiile  $\sqrt[5]{41 + 29x} = x + 1$  și  $\sqrt[5]{401 + 298x} - \sqrt[5]{41 + 29x} = x$ , știind că sunt echivalente.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

*Rezolvare:*

$$\sqrt[5]{41 + 29x} = x + 1 \mid ( )^5 \Rightarrow 29x + 41 = (x + 1)^5 \Rightarrow x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 24x - 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x^3 + 5x^2 + 12x + 20) - 2x^3 - 10x^2 - 24x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^3 + 5x^2 + 12x + 20) = 0.$$

Pentru  $x \in (0; \infty)$  avem,  $x^3 + 5x^2 + 12x + 20 > 0$  și rezultă doar  $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ . Convine doar

$x = \sqrt{2} > 0$ , deci  $\sqrt[5]{41 + 29x} = \sqrt{2} + 1$ . Cum cele două ecuații sunt echivalente rezultă că  $\sqrt{2}$  este soluție și

$$\text{pentru cea de a doua. Rezultă } \sqrt[5]{401 + 298 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[5]{41 + 29 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\text{Cum } \sqrt[5]{41 + 29 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow$$

$\sqrt[5]{401 + 298 \cdot \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 1 \mid ( )^5 \Rightarrow 401 + 298 \cdot \sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)^5$  care este adevărată, demonstrația implică folosirea binomului lui Newton.

**L:1237.** Să se demonstreze că în orice triunghi  $ABC$  există egalitatea:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{h_a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}{h_b} + \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{h_c} = \frac{p-a}{h_a r_a} + \frac{p-b}{h_b r_b} + \frac{p-c}{h_c r_c}. \quad \text{Florin Rotaru, Focșani}$$

**Rezolvare:** Relația din enunț rezultă din relațiile trigonometrice:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{h_a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}{h_b} + \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{h_c} = \frac{2R-r}{rp} \quad \text{și} \quad \frac{p(p-a)}{h_a r_a} + \frac{p(p-b)}{h_b r_b} + \frac{p(p-c)}{h_c r_c} = \frac{2R-r}{r}.$$

## ■ Clasa a XI-a

**L:1238.** a) Fie  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$  matrice inversabile ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) astfel încât  $X^{-1} - Y$  este matrice inversabilă;

b) Fie  $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$  matrice inversabile,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  astfel încât  $YX + (YX)^{-1} = I_n$ . Arătați că  $X - Y^{-1}$  este matrice inversabilă. eleva **Carina Viespescu**, București, **Bianca Negreț**, Craiova

**Rezolvare:**

a) Din  $(X - Y^{-1}) \cdot (X^{-1} - Y) = I_n - XY - Y^{-1}X + I_n = I_n - XY - (XY)^{-1} + I_n = I_n - I_n + I_n = I_n$

rezultă că  $X^{-1} - Y$  este inversabilă și în plus  $(X^{-1} - Y)^{-1} = X - Y^{-1}$ .

b) Din  $(X^{-1} - Y) \cdot (X - Y^{-1}) = I_n - X^{-1}Y^{-1} - YX + I_n = I_n - (YX)^{-1} - YX + I_n = I_n - I_n + I_n = I_n$  și de aici

rezultă că  $X - Y^{-1}$  și  $(X - Y^{-1})^{-1} = X^{-1} - Y$ .

**L:1239.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  cu  $AB = BA$ . Demonstrați că  $\det(2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n) \geq 0$ .

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Considerăm matricea  $X = I_n + x_1 A + x_2 B \in M_n(\mathbb{C})$  unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației

$$x^2 + x + 2 = 0. \quad \text{cu} \quad \overline{x_1} = x_2 \quad \text{iar} \quad \overline{x_2} = x_1 \quad (\mathbb{R}_1)$$

$$\text{Cum } X \cdot \overline{X} = (I_n + x_1 A + x_2 B) \overline{(I_n + x_1 A + x_2 B)} \stackrel{(\mathbb{R}_1)}{=} (I_n + x_1 A + x_2 B)(I_n + x_2 A + x_1 B) =$$

$$I_n + x_2 A + x_1 B + x_1 A + x_1 x_2 A^2 + x_1^2 AB + x_2 B + x_2^2 BA + x_1 x_2 B^2 =$$

$$I_n + (x_1 + x_2)A + (x_1 + x_2)B + x_1 x_2 (A^2 + B^2) + (x_1^2 + x_2^2)AB \quad (\mathbb{R}_2).$$

Din relațiile lui Viéte  $\{x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -3 \Rightarrow (\mathbb{R}_2)$  devine

$$X \cdot \overline{X} = I_n - A - B + 2A^2 + 2B^2 - 3AB = 2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n \quad (\mathbb{R}_3) \quad \text{și problema este}$$

demonstrată pentru că  $\det(X \cdot \overline{X}) = \det(X) \cdot \det(\overline{X}) = |\det(X)|^2 \geq 0$ .

$$\stackrel{(\mathbb{R}_3)}{\Rightarrow} \det(2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n) \geq 0.$$

**L:1240.** Studiați dacă există matrice  $A, B \in \mathcal{M}_{2025}(\mathbb{R})$ , astfel încât  $A^2 + B^2 = AB$  și

$\det(AB - BA) > 0$ . Justificați răspunsul.

**Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Fie  $A$  și  $B$  două matrice cu proprietățile cerute și  $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varepsilon^3 = 1$ . Cum  $\varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = 1$

iar  $1 + \bar{\varepsilon} = -\varepsilon$ , utilizând relația  $A^2 + B^2 = AB$  obținem

$$(A + \varepsilon B)(\overline{A + \varepsilon B}) = (A + \varepsilon B)(A + \bar{\varepsilon} B) = \underbrace{A^2 + B^2}_{AB} + \varepsilon BA + \bar{\varepsilon} AB = (1 + \bar{\varepsilon})AB + \varepsilon BA = \underbrace{-\varepsilon}_{=-\varepsilon}(AB - BA) \quad (1)$$

Utilizând faptul că  $\det(X \cdot \bar{X}) = \det(X) \cdot \det(\bar{X}) = |\det(X)|^2 \in [0; +\infty)$ ,  $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$  relația (1) devine

$$\det[(A + \varepsilon B)(\overline{A + \varepsilon B})] = (-\varepsilon)^{2025} \cdot \det(AB - BA) = -\varepsilon^{2025} \cdot \det(AB - BA) \in [0; +\infty) \subset \mathbb{R}, \text{ iar cum}$$

$\det(AB - BA) > 0$  (din ipoteza problemei) și  $\varepsilon^{2025} = (\varepsilon^3)^{675} = 1$  deducem

$$\det[(A + \varepsilon B)(\overline{A + \varepsilon B})] = \underbrace{[\det(A + \varepsilon B)]^2}_{\geq 0} = \underbrace{-\det(AB - BA)}_{< 0} \Rightarrow \text{nu există matrice } A, B \in M_{2025}(\mathbb{R}) \text{ cu}$$

proprietatea cerută.

**L:1241.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $b < 0$ . Arătați că ecuația  $x^3 + 3ax^2 + 3bx + ab = 0$  are toate rădăcinile reale.

Dană Camelia, Vlad Carmen, Craiova

**Rezolvare:** Dacă  $a = 0$  ecuația devine  $x^3 + 3bx = 0$  cu soluțiile reale  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-3b}$ .

Notând  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + ab$  avem

$$f(-a) = -a^3 + 3a^3 - 3ab + ab = 2a(a^2 - b) \text{ deoarece } a^2 - b > 0 \text{ avem două cazuri}$$

$a > 0$  și  $f(-a) > 0$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  iar  $f(0) = ab < 0$  ecuația  $f(x) = 0$  are trei rădăcini reale  $x_1 \in (-\infty, -a), x_2 \in (-a, 0)$  și  $x_3 \in (0, \infty)$ .

$a < 0$ . Atunci  $f(-a) < 0$  și  $f(0) > 0$ . Ecuația  $f(x) = 0$  va avea trei rădăcini reale

$$x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in (0, -a) \text{ și } x_3 \in (-a, \infty).$$

**L:1242.** Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 2$  și  $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{n}, n \geq 1$ .

a) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n}{1 + 2 + \dots + n}$ ;

c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + na_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ .

Florin Rotaru, Focșani

**Rezolvare:**  $a_1 = 2, a_2 = 3 < 4, a_3 = 7/2 < 4, a_4 = 13/4 < 4, a_5 = 133/64 < 4$ ; presupunem  $a_n < 4$ ,

$$\text{atunci } a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{n} \leq \frac{16 - a_n + 1}{n} < \frac{17}{n} < 4.$$

a) Șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit superior de 4, deci  $0 < a_n < \frac{17}{n-1}$  pentru șirul  $n \geq 5$  și de aici

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n}{1 + 2 + \dots + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(a_n^2 - a_n + 1)}{n(n+1)} = 1.$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + na_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(a_n^2 - a_n + 1)}{n} = 1.$

**L:1243.** Se consideră un șir de numere raționale strict pozitive  $(x_n)_{n \geq 1}$  în care fiecare termen începând cu al doilea se obține din produsul vecinilor săi din care se scade o unitate!

Dacă  $x_2 = 2025$ , calculați  $x_{2027}$ .

elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Din  $x_3 = \frac{1+x_2}{x_1}$ ,  $x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$ , ...,  $x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_1+1}{x_2}$ ,  $x_6 = \dots = x_1$   
 $x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \frac{1+x_1}{\frac{1+x_1}{x_2}} = x_2$ ,  $x_8 = \frac{1+x_7}{x_6} = \frac{1+x_2}{x_1} = x_3$ ,  $x_9 = \frac{1+x_8}{x_7} = \frac{1+x_3}{x_2} = x_4$ , ... Deci termenii se repetă periodic și  $x_{2027} = x_{5k+2} = x_2 = 2025$ .

**[L:1244].** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir convergent de numere reale pozitive. Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + ak}$ .

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

**Rezolvare:** Din ipoteza că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent  $\Rightarrow \exists l \in R$  (unică),  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Notăm  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + ak}$  și  $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + l}$ .

$$\text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2+l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{l}{n^2}\right)} = \frac{1}{2} \quad (R_1)$$

Cum șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent  $\Rightarrow \exists M > 0$ , astfel încât  $|a_n| \leq M, \forall n \geq 1$ , prin urmare

$$|a_k - l| \leq |a_k| + |l| \leq M + l, \forall k \geq 1 \quad (R_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Acum } |x_n - y_n| &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2 + ak} - \frac{k}{n^2 + l} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{k(l - a_k)}{(n^2 + ak)(n^2 + l)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k|a_k - l|}{(n^2 + ak)(n^2 + l)} \stackrel{(R_2)}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{k(M+l)}{n^4} = \\ &= \frac{M+l}{n^4} (1+2+\dots+n) = \frac{(M+l)n(n+1)}{2n^4} = \frac{(M+l)(n+1)}{2n^3} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Din } (R_1) \text{ și } (R_2) \Rightarrow x_n = \underbrace{(x_n - y_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{y_n}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^2 + ak} = \frac{1}{2}.$$

**[L:1245]** Fie  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  și  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale strict pozitive astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$

Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{H_n}}{\sqrt[n]{a_n}}$ . **D.M.Bătinețu-Giurgiu, București, Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu**

**Rezolvare:** Folosim cunoscuta limită  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$ , unde  $\gamma = 0,577 \dots$  este constanta lui Euler-Mascheroni.

De asemenea aplicăm și criteriul lui Cauchy-d'Alembert. Limita cerută o calculăm astfel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{H_n}}{\sqrt[n]{a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{H_n}}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} e^{H_n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{H_n} \cdot e^{\ln(n^{-1})} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{H_n - \ln n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \\ &= e^\gamma \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n (C-d'A)}{a_n}} \stackrel{(C-d'A)}{=} e^\gamma \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{a_{n+1}}{n^n}} = e^\gamma \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{n^n} = e^\gamma \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{a_{n+1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= e^\gamma \cdot \frac{1}{a} \cdot e = \frac{e^{1+\gamma}}{a}. \end{aligned}$$

**L:1246.** Arătați că  $e^{x^2} > 2 + 3\ln x$ ,  $\forall x > 2$ .

student Alin – Ionuț Constantinescu, Craiova

**Rezolvare:** Folosim inegalitatea cunoscută  $e^x \geq x+1$ ,  $\forall x \geq 0$ . Atunci,  $e^{x^2} > x^2 + 1$ ,  $\forall x \geq 0$ . Mai trebuie arătat că  $x^2 + 1 > 2 + 3\ln x$ . Fie  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3\ln x - 1$  și să demonstrăm că  $f(x) > 0$ ,  $\forall x > 2$ .  $f'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Cum  $f'(x) > 0, \forall x > 2$  adică  $f$  este crescătoare și  $f(2) = 4 - 3\ln 2 - 1 > 0$  rezultă din  $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) > 0$ ,  $\forall x > 2$ .

**L:1247.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-3; 2]$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1}$ . Să se determine numărul real  $m$  astfel încât  $f$  să fie bijectivă.

Adrian Stan, Buzău

**Rezolvare:**  $\text{Im } f \subset [-3; 2] \Rightarrow -3 \leq \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - (2+m)x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + (m-3)x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in [-4; 0] \cap [-5; 11] = [-4; 0].$$

**L:1247b.** Dacă  $k, a, b, c > 0$  astfel încât  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3$  să se arate că

$$\left(\frac{k}{bc} + 1\right)^a \cdot \left(\frac{k}{ca} + 1\right)^b \cdot \left(\frac{k}{ab} + 1\right)^c \geq (k+1)^{a+b+c}.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

**Rezolvare:** Se logaritmează inegalitatea propusă:

$$a \ln\left(\frac{k}{bc} + 1\right) + b \ln\left(\frac{k}{ca} + 1\right) + c \ln\left(\frac{k}{ab} + 1\right) \geq (a+b+c) \ln(k+1). \quad (*)$$

Se arată că funcția  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(\frac{k}{x} + 1\right)$  este strict descrescătoare și convexă.

$$\text{Relația } (*) \text{ devine } af(bc) + bf(ca) + cf(ab) \geq (a+b+c)f\left(\frac{a \cdot bc + b \cdot ca + c \cdot ab}{a+b+c}\right) = (a+b+c)f\left(\frac{3abc}{a+b+c}\right)$$

$$\geq (a+b+c)f(1) = (a+b+c) \ln(k+1) \text{ deoarece } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3abc}{a+b+c} \leq 1.$$

## ■ Clasa a XII-a

**L:1248.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu 2025 elemente. Arătați că funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $\forall x \in G$  este injectivă.

Loredana Surcel, Otopeni

**Rezolvare:** Fie  $x, y \in G$  cu  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ . Fie  $\text{ord}(x) = 2a+1$  și  $\text{ord}(y) = 2b+1$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Să presupunem că  $a < b$ . Avem  $x^2 = y^2 \Rightarrow x^{2a+2} = y^{2a+2} \Rightarrow x = y^{2a+2}$ . (\*)

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x^{2b+2} = y^{2b+2} \Rightarrow y = x^{2b+2}. \quad (**)$$

Din (\*) și (\*\*) rezultă  $y = y^{(2a+2)(2b+2)} \Leftrightarrow y = (y^{(2b+1)})^{2a+2} \cdot y^{2a+2} \Rightarrow y^{2a+2} = e$ , ceea ce e fals.

Analog pentru  $a > b$ . Deci  $\text{ord}(x) > \text{ord}(y) \Rightarrow x^{2a+2} = y^{2a+2} \Rightarrow x^{2a+1} \cdot x = y^{2a+1} \cdot y \Rightarrow$

$e \cdot x = e \cdot y \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x)$  este injectivă.

**L:1249.** Determinați funcțiile derivabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea

$$(x+2) \cdot f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = x, \quad \forall x > -1.$$

elevi Horia Mușat, Vlad Orviceanu, Craiova

**Rezolvare:** Din  $(x+2) \cdot f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = x \cdot e^x \Rightarrow [e^x \cdot (x+1) \cdot f(x)]' = x \cdot e^x \Rightarrow$   
 $\int (e^x \cdot (x+1) \cdot f(x))' dx = \int x \cdot e^x dx \Rightarrow e^x \cdot (x+1) \cdot f(x) = x e^x - e^x + C$ , de unde rezultă că  
 $f(x) = \frac{1}{x+1} \left( x - 1 + \frac{C}{e^x} \right), \forall x > -1$ .

**L:1250.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R, 0 < a < b$  este continuă astfel încât  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , atunci demonstrați că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $\int_c^b f(x) dx = f(c)$ . **Florin Rotaru, Focșani**

**Rezolvare:** Considerăm  $F : [a, b] \rightarrow R$ , unde  $F(x) = e^{x-b} \int_x^b f(t) dt$ . Avem că  $F$  este derivabilă și verifică ipotezele teoremei lui Rolle,  $F(a) = F(b)$  și deci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $F'(c) = 0$ .

Deoarece  $F'(x) = e^{x-b} \int_x^b f(t) dt - e^{x-b} f(x) = e^{x-b} \left( \int_x^b f(t) dt - f(x) \right)$  atunci  $F'(c) = 0$ , deci  
 $\int_c^b f(x) dx = f(c)$ .

**L:1251.** Rezolvați ecuația:  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$ . **Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu**  
**Rezolvare:**

Cu substituția  $x = t + \frac{1}{t}, t \neq 0$  avem  $x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2, x^3 = t^3 + \frac{1}{t^3} + 3\left(t + \frac{1}{t}\right)$ ,  
 $x^4 = t^4 + \frac{1}{t^4} + 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 6, x^5 = t^5 + \frac{1}{t^5} + 5\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) + 10\left(t + \frac{1}{t}\right)$ . Făcând înlocuirile în ecuația dată în  $x$   
 se obține  $t^5 + \frac{1}{t^5} + t^4 + \frac{1}{t^4} + t^3 + \frac{1}{t^3} + t^2 + \frac{1}{t^2} + t + \frac{1}{t} + 1 = 0$  care este echivalentă cu ecuația  
 $t^{10} + t^9 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ . (\*), ecuație în care observăm că 1 nu este soluție. Atunci,  
 ecuația (\*) o putem scrie echivalentă cu ecuația  $(t-1)(t^{10} + t^9 + t^7 + \dots + t^2 + t + 1) = 0$ , deci cu ecuația  
 binomă  $t^{11} - 1 = 0$  care are soluțiile complexe  $t_k = \cos \frac{2k\pi}{11} + i \sin \frac{2k\pi}{11}, k = \overline{1, 10}$  pentru ecuația (\*). S-a  
 exclus soluția  $t_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$  deoarece s-ar obține soluția  $x = 2$  care nu verifică ecuația dată.  
 Soluțiile complexe ale ecuațiilor cu coeficienți reali fiind în perechi conjugate avem  
 $t_6 = \overline{t_1}, t_7 = \overline{t_2}, t_8 = \overline{t_3}, t_9 = \overline{t_4}, t_{10} = \overline{t_5}$ .

Atunci:  $x_1 = t_1 + \frac{1}{t_1} = t_1 + \overline{t_1} = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{2\pi}{11} - i \sin \frac{2\pi}{11} = 2 \cos \frac{2\pi}{11} > 0$ . Analog pentru  
 $x_2, x_3, x_4, x_5$ .

Obținem:  $S = \left\{ -2 \cos \frac{\pi}{11}; -2 \cos \frac{3\pi}{11}; -2 \cos \frac{5\pi}{11}; 2 \cos \frac{2\pi}{11}; 2 \cos \frac{4\pi}{11} \right\} \subset (-2; 2)$ .

**L:1252.** Calculați integrala  $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^2 + x + 1)}$ .

**Simona Vladimirescu, Ileana Stanciu, Craiova**

**Rezolvare:** Fie  $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = \frac{-dy}{y^2}$ . Avem

$$I = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{dy}{y^2}}{\left(\frac{1}{y^4} + 1\right)\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1\right)} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{y^4 dy}{(y^4 + 1)(y^2 + y + 1)}. \text{ Așadar}$$

$$2I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 1)(x^2 + x + 1)} dx \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

**L:1253.** Să se calculeze:  $I = \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{8 + \sin 4x}} dx, x \in \mathbb{R}$ .

Radu Diaconu Sibiu

**Rezolvare:** Fie integralele

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{8 + \sin 4x}} dx, \quad J = \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{8 + \sin 4x}} dx. \text{ Avem:}$$

$$I - J = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sqrt{8 + \sin 4x}} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{(\sin 2x + \cos 2x)^{\diamond}}{\sqrt{(\sin 2x + \cos 2x)^2 + 7}} dx = -\frac{1}{4} \cdot \ln |\sin 2x + \cos 2x + \sqrt{8 + \sin 4x}| + C. \quad (1)$$

$$I + J = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt{8 + \sin 4x}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(\sin 2x - \cos 2x)^{\diamond}}{\sqrt{9 - (\sin 2x - \cos 2x)^2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \arcsin \left( \frac{\sin 2x - \cos 2x}{3} \right) + C. \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2) și împărțind la 2 obținem:

$$I = \frac{1}{8} \left[ \arcsin \left( \frac{\sin 2x - \cos 2x}{3} \right) - \ln |\sin 2x + \cos 2x + \sqrt{8 + \sin 4x}| \right] + C.$$

**L:1254.** Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  să se calculeze  $\int_n^{n+1} \left[ \frac{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + 2n}{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + n} \right] \cdot \left\{ \frac{(n+1)x - n}{(n+1)x + n} \right\} dx$ , unde

$[a], \{a\}$  reprezintă partea întregă, respectiv partea fracționară a unui număr real  $a$ .

Gheorghe Ghiță, Buzău

**Rezolvare:** Deoarece

$$\left[ \frac{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + 2n}{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + n} \right] = \left[ 1 + \frac{n}{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + n} \right] = 1 + \left[ \frac{n}{x^{4n} + (n+1)x^{2n} + n} \right] = 1,$$

și  $\left\{ \frac{(n+1)x - n}{(n+1)x + n} \right\} = \frac{(n+1)x - n}{(n+1)x + n}$ , fracția fiind un număr subunitar, integrala dată, devine:

$$\int_n^{n+1} \frac{(n+1)x - n}{(n+1)x + n} dx = \int_n^{n+1} dx - \frac{2n}{n+1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x + \frac{n}{n+1}} = x \Big|_n^{n+1} - \frac{2n}{n+1} \ln \left( x + \frac{n}{n+1} \right) \Big|_n^{n+1}$$

$$= 1 - \frac{2n}{n+1} \ln \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n}.$$

**L:1255.** Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \text{ Să se calculeze integrala: } \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

Vasile Mircea Popa, Sibiu

**Rezolvare:** Notăm:  $I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$  ;  $J = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$  .

Avem:  $I + J = \int_0^{\infty} \frac{x(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x)}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$

Pentru calculul integralei definite de mai sus vom folosi o primitivă a funcției de integrat și formula Leibniz-Newton adaptată situației din problema noastră (limita superioară din integrala definită tinde la infinit).

Putem scrie:  $\int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx$  .

$P(x) = \int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 - x + 1} + C_1$  .

$Q(x) = \int \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{2x - 1}{3(x^2 - x + 1)} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$  .

$R(x) = \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C_2$  .

Pentru  $P(x)$  și  $R(x)$  am folosit tabelul primitivelor imediate. Pentru  $Q(x)$  am utilizat o formulă de recurență cunoscută de la integrarea funcțiilor raționale.

Relația pentru familia de primitive ale funcției  $f(x) = \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2}$ ,  $x \in [0, \infty)$  este:

$\int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{x - 2}{3(x^2 - x + 1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C = F(x) + C$  unde  $C$  este o constantă arbitrară.

Rezultă:  $I + J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(0) \right)$  .

Dar:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ ;  $F(0) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{2}{3}$  . Rezultă:  $I + J = \frac{\pi}{54} (18 + 4\pi\sqrt{3})$  (1)

În integrala  $J$  facem schimbarea de variabilă  $x = \frac{1}{t}$  și obținem:

$J = -\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1\right)^2} \frac{1}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{arctg} t}{(1 + t + t^2)^2} dt = I$  (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă  $I = \frac{\pi}{54} (9 + 2\pi\sqrt{3})$  .

**„Studiază din greu ce te interesează cel mai mult, în cel mai nedisciplinat, irreverențios și original mod posibil”.**

**Richard Feynman**  
(1918-1988)

„ Cel care insistă să nu rostească niciodată  
o greșeală trebuie să păstreze tăcerea ”.

Werner Heisenberg (1901-1976)



## 4. Probleme propuse

### ▪ Clasa a V-a

**G:1425.** O persoană rupe trei file consecutive dintr-o carte ale cărei pagini sunt numerotate de la 3 la 100 inclusiv. Este posibil ca, adunând numerele înscrise pe filele rămase, să obțină 4912?

**Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București**

**G:1426.** Arătați că numărul  $y = 2025^{999} + 2026^{1000} + 2027^{1001}$  nu este pătrat perfect.

**Doina și Mircea Mario Stoica, Arad**

**G:1427.** Determinați cifrele distincte a, b, c astfel încât  $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times \overline{aa} \times \overline{bc}$ .

**Alina Lazăr, Luiza Dumitrescu, Craiova**

**G:1428.** Un traseu dreptunghiular are lungimea de 510 de metri și lățimea de 210 metri. Dintr-un punct oarecare al traseului pleacă în același timp, în sensuri opuse, doi căței cu vitezele constante  $v_1 = 1,5m/s$  și  $v_2 = 5,4km/oră$ . Când se întâlnesc, se salută cu un lătrat voios, apoi continuă alergarea. Cât timp a mers fiecare până la punctul de plecare?

**Ion Stănescu, Smeeni, Buzău**

**G:1429.** a) Găsiți numerele prime p astfel încât  $13p + 3$  să fie număr prim.

b) Găsiți numerele prime p astfel încât p + 10 și p + 20 să fie de asemenea numere prime.

**Cristian Udrea, Craiova**

**G:1430.** a) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care  $S = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$  se divide cu 81

b) Arătați că pentru orice  $n \geq 8$  numărul  $S_n$  nu se divide cu 81. ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$ )

**Dorina Goiceanu, Dan Grigorie, Craiova**

**G:1431.** a) Calculați:  $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) - (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$ .

b) Demonstrați că numărul:  $10^{2k+2} - 10^{2k+1}$  se poate scrie ca suma a cinci pătrate de numere naturale nenule, oricare ar fi k număr natural.

c) Demonstrați că numărul:  $10^{3t+2}$  se poate scrie ca suma a patru cuburi de numere naturale nenule, oricare ar fi t număr natural.

**Gheorghe Molea, Curtea de Argeș**

**G:1432.** Să se arate că  $n!$  ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ) nu se poate termina cu exact 48 de zerouri.

**Nicolas Diaconu, Gaillard, Franța**

**G:1433.** Fie A cel mai mare număr natural format din cifre nenule a căror sumă este 2025. Determinați câtul și restul împărțirii numărului A la 1001.

**Gobej Ștefan, elev, Curtea de Argeș**

**G:1434.** Determinați numărul  $\overline{abcd}$  pentru care  $(a+b+c+d)^d = \overline{abcd}$ , știind că d, a sunt consecutive în această ordine.

**Nicolae Ivășchescu, Canada**

**G:1435.** Arătați că  $16^n - 9^n - 7$  se divide cu 56 pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Mirela Țacu, Sorina Tudor, Craiova**

**G:1436.** Determinați numărul natural A care are proprietatea că dacă la sfârșitul său se mai scrie n cifre ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) numărul astfel obținut reprezintă suma tuturor numerelor naturale de la 1 la A.

**Marcu Maya – Cataleya, eleva, Craiova**

**G:1437.** Găsiți numerele prime  $p$  astfel încât  $13p+3$  să fie număr prim. Dar ca numerele  $p+10n$  și  $p+20$  să fie prime ?  
Cristian Udrea, Craiova

**G:1438.** Să se compare numerele  $11^{2026}$  și  $37^{1353}$ .  
Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

**G:1439.** Comparați numerele  $a = 2^{998}$  și  $b = 3^{665}$ .  
Ionuț Ivănescu, Craiova

**G:1440.** Determinați câtul și restul împărțirii numărului  $A = 2027^{2029}$  la numărul  $B = 2027^{2026} + 2027^{2027}$ .  
Gheorghe Ghiță, Buzău

## ■ Clasa a VI-a

**G:1441.** Dacă  $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ ,  $x, y, z, t \in \mathbb{Z}^*$ , calculați  $1961 + x \cdot t - y \cdot z$ .

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

**G:1442.** Numerele naturale nenule  $x, y, z$  verifică condițiile:

a)  $xy$  se divide cu  $3^{14} \cdot 5^{10}$ ; b)  $yz$  se divide cu  $3^{17} \cdot 5^{17}$ ;

c)  $zx$  se divide cu  $3^{20} \cdot 5^{37}$ . Aflați cea mai mică valoare posibilă a produsului  $x \cdot y \cdot z$ .

Mirela Țacu, Alexandra Răduț, Craiova

**G:1443.** Determinați numerele naturale  $x, y, z$  care verifică simultan condițiile:  $5x - 3y = y - 5z = 0$  și  $x + 2y + 3z = 3600$ .  
Nicolae Ivășchescu, Canada

**G:1444.** Fie  $p$  și  $q$  două numere naturale prime diferite și mulțimea  $A = \{x \mid x = p^m \cdot q^n, m, n \in \mathbb{N}\}$ . Arătați că oricum am alege cinci elemente distincte ale mulțimii  $A$ , există două dintre ele al căror produs este pătrat perfect.  
Gobej Ștefan, elev, Curtea de Argeș

**G:1445.** Să se scrie fracția  $\frac{1}{2026}$  ca o sumă de 5 fracții distincte, fiecare având numărătorul egal cu

1.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

**G:1446.** Arătați că are loc relația  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2026} > \frac{2026}{2027}$ .  
Ion Stănescu, Buzău

**G:1447.** Să se rezolve în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ecuația  $x^2 + py + p = xy + (2p+1)x$ , unde  $p$  este un număr prim dat.  
Gheorghe Ghiță, Buzău

**G:1448.** Fie  $a, b, c$  trei numere reale strict pozitive unde  $a, b \geq 1$  sau  $a, b \leq 1$ . Să se arate că

$$1 + a^2 \cdot b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Florin Rotaru, Focșani

**G:1449.** Rezolvați în mulțimea  $\mathbb{Z}$  ecuația:  $\frac{x^2+1}{2} + \frac{x^2+3}{4} + \frac{x^2+5}{6} + \dots + \frac{x^2+2025}{2026} = 1013$ .

Nicolae Ivășchescu, Canada

**G:1450.** Arătați că fracția  $F = \frac{25^{25} + 47^{47}}{25^{47} \cdot 47^{25} + 1}$ , se simplifică prin produsul a patru numere naturale consecutive.  
Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

**G:1451.** Două unghiuri suplementare au bisectoarele care formează cu latura comună două unghiuri cu măsurile două numere pătrate perfecte. Aflați măsurile unghiurilor suplementare.  
Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

**G:1452.** Bisectoarea  $AD$  a unghiului  $\sphericalangle(BAC)$  intersectează  $BC$  în  $D$ . Paralela prin  $D$  la  $AC$  intersectează  $AB$  în  $E$  și paralela prin  $E$  la  $BC$  intersectează  $AC$  în  $F$ . Arătați că  $AE = FC$ .

Amelia Curcă- Năstășelu, Filiași

## ▪ Clasa a VII-a

**G:1453.** Aflați ultimele 505 cifre ale numărului  $A = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2026 \cdot 2026!$ , unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  ( $n$  factorial). **Marcu Maya Cataleya**, eleva, Craiova

**G:1454.** Cercetați dacă numerele  $a = \left[ 2\frac{1}{3} + 1, (2) - 0,25 \right] \cdot 5\frac{1}{7} - 10$ ,

$$b = \sqrt{33,64} : 2,9 + \sqrt{1\frac{13}{36}} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-1} \text{ sunt soluție a sistemului de ecuații } \begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{y+1}{x} = \frac{4}{7}. \end{cases}$$

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

**G:1455.** Arătați că numărul 3 se poate scrie de forma  $x^2 + y^2 + (xy)^2 - 254016^2$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}^*$ .

**Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

**G:1456.** Determinați numărul rațional  $x$  pentru care

$$\frac{x-1}{2025} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-3}{2023} + \frac{x-4}{2022} = x + \frac{x-2024}{2} + \frac{x-2023}{3} + \frac{x-2022}{4} - 2025.$$

**Gobej Ștefan**, elev, Curtea de Argeș

**G:1457.** Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 51}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 50}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{51 \cdot 1}} > \frac{51}{26}$ .

**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1458.** Fie numerele raționale nenule  $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$  invers proporționale cu numerele  $1, 2, 3, \dots, 2025$ . Aflați numărul rațional  $x$  pentru care are loc egalitatea

$$2025 \cdot a_{2025} = x \left( \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{2025}}{2026} \right).$$

**Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

**G:1459.** Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{n+1 \cdot 2} + \frac{2}{n+2 \cdot 3} + \frac{3}{n+3 \cdot 4} + \dots + \frac{n}{n+n \cdot (n+1)} \leq \frac{n(n^2+5)}{2(n+2)^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G:1460.** Să se arate că au loc egalitățile:  $\frac{2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ}$ .

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1461.** Fie  $a, b, c$  numere strict pozitive astfel încât  $ab + bc + ca = 1$ . Arătați că

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) + 4abc(a + b + c) \geq 2. \text{ În ce caz avem egalitate?}$$

**Ana Trucă, Rareș Magher**, elevi, Craiova

**G:1462.** Demonstrați inegalitatea  $4 \leq \left( \frac{a+b}{2a} + \frac{2a}{a+b} \right) \left( \frac{a+b}{2b} + \frac{2b}{a+b} \right) \leq \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2$ , unde  $a, b, c > 0$

**Mihaly Bencze, Brașov și Neculai Stanciu, Buzău**

**G:1463.** Fie mulțimea  $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid 1 < \sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2 \right\}$ . Enumerați elementele mulțimii  $A$  și apoi

determinați  $n \in A$  cu proprietatea  $\sqrt{n} \cdot \left| 1 - \sqrt{1 + \sqrt{n}} \right| < 1$ .

**Gobej Cristina-Dumitra**, Curtea de Argeș

**G:1464.** Dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AB=8$  și  $BC=4$  se completează cu pătratele  $FADE$ ,  $HBCG$ ,

$$FG \cap AD = \{M\}, FG \cap BC = \{N\}. \text{ Arătați că } A_{ABNM} = (A_{CNG})^4.$$

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

**G:1465.** a) Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $M$  mijlocul lui  $AB$ . Fie  $MN \parallel BC$ ,  $MN = BC$ ,  $MP \parallel AD$ ,  $MP = AD$ ,  $N$  și  $P$  în același semiplan cu  $C$  și  $D$ . Dacă  $Q$  este mijlocul lui  $CD$  arătați că punctele  $N, Q$  și  $P$  sunt coliniare

b) Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $M$  mijlocul lui  $AB$ . Dacă  $MN \parallel BC$  și  $MN = BC$  ( $N$  în același semiplan cu  $C$  și  $D$ ). Fie  $Q$  mijlocul lui  $CD$  și  $P$  simetricul lui  $N$  față de  $Q$ . Arătați că  $MP \parallel AD$  și  $MP = AD$ .

**Mădălina Panduru**, Bălcești, Vâlcea, **Gabriela Militaru- Cismaru**, Craiova

**G:1466.** Se consideră trapezul  $ABCD$  având bazele  $AB$  și  $CD$ . Prin punctul  $O = AC \cap BD$  se duce paralela  $MN$  la bazele trapezului,  $M \in AD$  și  $N \in BC$ . Să se demonstreze că lungimea segmentului  $MN$  este media armonică a bazelor trapezului ( $m_h(a; b) = \frac{2ab}{a+b}$ ).

**Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

**G:1467.** În patrulaterul  $ABCD$ ,  $m(\sphericalangle ABC) = 106^\circ$  și  $m(\sphericalangle ADC) = 127^\circ$ . Dacă  $AB = BC = 3$  determinați lungimea diagonalei  $BD$ .

**Daniela Stoian, Mihaela Daianu**, Craiova

## ■ Clasa a VIII-a

**G:1468.** Puteți găsi câteva modalități de a scrie numărul  $2023 \cdot 2025$  ca o diferență de două pătrate? Dar pentru numărul  $2024 \cdot 2025$ ?

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1469.** Determinați numărul natural  $x$  pentru care numărul  $x^2 + 2x + 2028$  este pătrat perfect.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G:1470.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:  $x(x-1)^2 + y(y-1)^2 = x(3z+7y)$ .

**Molea Laura și Molea Gheorghe**, Curtea de Argeș

**G:1471.** Dacă  $a, b, c, d$  sunt numere prime diferite, niciunul nu este egal cu 7, să se arate că  $abc + bcd + cda + dab + 289 \leq 2abcd$ .

**Florin Rotaru**, Focșani

**G:1472.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\frac{x-5}{6} + \frac{x-6}{5} = \frac{5}{x-6} + \frac{6}{x-5}$ .

**Mirela Țacu**, Craiova

**G:1473.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-65| = 66 \cdot (x-66).$$

**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G:1474.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 512x + 512 = 0$ .

**Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

**G:1475.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

$$(x-26)^2 + (x-25)^2 + \dots + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+25)^2 + (x+26)^2 \geq 2026.$$

**Ana Truică**, eleva, Craiova

**G:1476.** Calculați valoarea expresiei:  $E(a; b) = \frac{7 \cdot a^{2025} - 5 \cdot b^{2025}}{7 \cdot a^{2025} + 5 \cdot b^{2025}}$  dacă  $a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}$ .

**Mirea Mihaela Mioara, Daianu Mihaela**, Craiova

**G:1477.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x^3+1}{9} + \frac{x^3+2}{10} + \frac{x^3+3}{11} + \dots + \frac{x^3+2025}{2033} = 2025.$$

**Gobej Ștefan**, elev, Curtea de Argeș

**G:1478.** Fie  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ . Să se arate că  $\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{24}a_4\right)^2 \leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{3}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3^2 + \frac{1}{24}a_4^2$ .

**Florin Rotaru**, Focșani

**G:1479.** Dacă  $a \in \mathbb{R}$ , atunci demonstrați egalitatea:

$$\left((a^3 - 2a)^2 + (2a^2 - 1)^2\right)\left((a^6 - 2a^2)^2 + (2a^4 - 1)^2\right)\left((a^9 - 2a^3)^2 + (2a^6 - 1)^2\right) = (a^6 + 1)(a^{12} + 1)(a^{18} + 1).$$

Mihaly Bencze, Brașov și Neculai Stanciu, Buzău

**G:1480.** Dacă  $k, x, y, z > 0 \Rightarrow$

$$(k+1) \sum xy \leq \sqrt{xy(kx+y)(x+ky)} + \sqrt{yz(ky+z)(y+kz)} + \sqrt{zx(kz+x)(z+kx)} \leq (k+1) \sum x^2$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

**G:1481.** Rezolvați în  $\mathbb{R}_+^*$  sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2 + \frac{8x^3}{(1+y)(1+z)} = 6y - x - z \\ 2 + \frac{8y^3}{(1+z)(1+x)} = 6z - y - x \\ 2 + \frac{8z^3}{(1+x)(1+y)} = 6x - z - y \end{cases}$$

Mihaly Bencze, Brașov și Neculai Stanciu, Buzău

**G:1482.** O prismă triunghiulară regulată dreaptă are aria laterală egală cu suma ariilor bazelor, iar suma dintre latura bazei  $l$ , și înălțimea prisme  $h$ , este  $1 + 2\sqrt{3}$ . Arătați că  $l^2 + h^2 = 13$ .

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

**G:1483.** ABCDEF este o prismă triunghiulară regulată în care toate muchiile sunt congruente (ABC este o bază). Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC. Să se afle AB dacă MNFD are aria egală cu  $3\sqrt{19}$  cm<sup>2</sup>.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

## ■ Clasa a IX-a

**L:1256.** Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul de ecuații: 
$$\begin{cases} x - y + xy = 25 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$$

Iorga Theoayhan Ștefan, elev, Craiova

**L:1257.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $[x^5] + [x^4] + [x^3] + [x^2] + [x] + 1 = \{x\}$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ , iar  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .

Mirea Mihaela Mioara, Craiova, Beldea Daniela, Băilești

**L:1258.** Dacă  $a \cdot a_1^7 + b \cdot b_1^7 + c \cdot c_1^7 > a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1$ , atunci demonstrați că

$$a \cdot a_1^7 + b \cdot b_1^7 + c \cdot c_1^7 \geq a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1 + 42,$$

oricare ar fi numerele întregi  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ .

Florin Rotaru, Focșani

**L:1259.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Determinați numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  astfel încât să fie îndeplinite simultan relațiile:  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} = y$  și  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + n^2 \cdot \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = n\sqrt{n} \cdot y$ .

Felicia Ozunu, Mirela Țacu, Craiova

**L:1260.** Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  fie  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ . Să se arate că

$$[a_n] < 3, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Florin Rotaru, Focșani

**L:1261.** Fie numerele  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026}$  și  $B = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2026}$ . Aflați cifra unităților numărului  $B + A$ .

Elena Daniela Cărmădă, Aura Loreta Pogorevici, Fălticeni

**L:1262.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ . Determinați mulțimea soluțiilor ecuației

$$f^3(x) - 3f^2(x) = 1 - 3f(x).$$

**Adrian Stan**, Buzău

**L:1263.** Dacă  $x, y, z > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  și  $(xy)^{n-1} + (yz)^{n-1} + (zx)^{n-1} = 1$ , atunci demonstrați că:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} \geq xyz.$$

**Mihaly Bencze**, Brașov și **Neculai Stanciu**, Buzău

**L:1264.** Fie numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; +\infty)$  astfel încât  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = S$ . Demonstrați că

$$\sqrt{S - a_1^2} + \sqrt{S - a_2^2} + \dots + \sqrt{S - a_n^2} \geq \sqrt{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2.$$

**Gobej Cristina-Dumitra**, Curtea de Argeș

**L:1265.** Rezolvați în  $R_+$  următorul system de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (2x + y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2 + yz + z^2 = (2y + z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2 + zx + x^2 = (2z + x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}$$

**Mihaly Bencze**, Brașov și **Neculai Stanciu**, Buzău

**L:1266.** Dacă  $x, y, z > 0$ ,  $xyz = 1 \Rightarrow \frac{9}{x^3 + y^3 + z^3 + 3} \leq \frac{x}{x^2 + yz} + \frac{y}{y^2 + zx} + \frac{z}{z^2 + xy} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ .

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:1267.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Determinați  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $(x-1)^n f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x^n, (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Mihaela Cioplea**, Băilești, **Amelia Curcă**, Filiași

**L:1268.** Pentru  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ , se consideră funcția:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1$ .

a) Să se determine  $m$ , astfel încât între rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$  să existe relația:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2.$$

b) Pentru ce valori ale parametrului  $m$ , inecuația  $f(x) > 0$  nu admite soluții?

**Diaconu Radu**, Sibiu

**L:1269.** Dacă  $a, b, c > 0$  și  $\lambda \geq 1$  atunci  $\frac{abc + \lambda(a+b+c)}{9\lambda + ab + bc + ca} \geq \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

**Marin Chirciu**, Pitești

**L:1270.** Arătați că într-un triunghi de laturi  $a, b, c > 0$  și semiperimetru  $s$ , are loc inegalitatea:

$$\frac{a}{4s-3a} + \frac{b}{4s-3b} + \frac{c}{4s-3c} \geq 5.$$

**Dumitru Bătinețu - Giurgiu**, **Ionel Tudor - Călugăreni**, Giurgiu

**L:1271.** Știind că  $[1 + \sin(a-b)] \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right) \geq 1, \forall a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , să se arate că  $a = b$ .

**Florin Rotaru**, Focșani

**L:1272.** Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale îndeplinind condițiile  $a, b, c \geq 1, ab \geq c, bc \geq a, ca \geq b$  demonstrați că este adevărată următoarea inegalitate:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}$$

**Vasile Mircea Popa**, Sibiu

**L:1273.** Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  avem (notațiile fiind cele cunoscute):

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right) \leq \frac{p}{3Rr^2}.$$

**Diaconu Radu**, Sibiu

## ■ Clasa a X-a

**L:1274.** Să se determine primul termen, rația și termenul general al unei progresii geometrice știind

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1013$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 2026$$

**Cărămidă Elena Daniela, Aura Loreta Pogorevici, Fălticeni**

**L:1275.** Dacă  $x, y \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $\frac{x}{\sqrt[3]{y}} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}} = xy$  atunci să se calculeze cu cât este egal  $x^4 + y^4$ ?

**Adrian Stan, Buzău**

**L:1276.** Determinați  $x \in [0; +\infty)$  pentru care  $[x]^{\lg 3} + [x]^{\lg 4} + [x]^{\lg 5} = [x]^{\lg 6}$ , unde prin  $[x]$  am notat partea întreagă a lui  $x$ .

**Gobej Adrian, Curtea de Argeș**

**L:1277.** Dacă  $a, b, x, y > 0$ ,  $\Rightarrow \frac{x^{1001}}{a^{901}} + \frac{y^{1001}}{b^{901}} \geq \left( \frac{x^{100} + y^{100}}{a^{100} + b^{100}} \right)^{10} \cdot (a^{99}x + b^{99}y)$ .

**Gheorghe Ghiță, Buzău**

**L:1278.** Fie numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$  astfel încât  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ,  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$ .

a) Demonstrați că  $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3$ . b) Calculați valoarea expresiei  $E = z_1^{2025} + z_2^{2025} + z_3^{2025}$ .

**Gobej Adrian, Curtea de Argeș**

**L:1279.** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația:  $2^x + 4^x + 15^x \geq 3^x + 5^x + 8^x$ .

**Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu**

**L:1280.** Dacă  $m = \frac{C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n}{(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2}$ ,  $n = 2^{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , atunci calculați  $[\log_2^m]$ ,

unde  $[\cdot]$  reprezintă partea întreagă.

**Florin Rotaru, Focșani**

**L:1281.** Dacă numerele strict pozitive  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ . verifică relația

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_n \cdot a_{n+1} \cdot (2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ să se arate că } \frac{C_n^0}{a_1} + \frac{C_n^1}{a_2} + \frac{C_n^2}{a_3} + \dots + \frac{C_n^n}{a_{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{a_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

**Florin Rotaru, Focșani**

**L:1282.** Să se rezolve și să se discute ecuația:  $\log_3(a+3^x) + \log_3(a-3^x) = x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Diaconu Radu, Sibiu**

**L:1283.** Dacă  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , demonstrați identitatea:

$$\sum \left( (a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (a-b)^3 + (a-c)^3 + (a-d)^3 \right) = 6 \left( \sum a \right) \cdot \left( \sum a^2 \right).$$

**Mihaly Bencze, Brașov și Neculai Stanciu, Buzău**

**L:1284.** Triunghiurile  $A_1A_2A_3$  și  $B_1B_2B_3$  au ariile  $F_1$ , respectiv  $F_2$  și semiperimetrele  $s_1$ , respectiv  $s_2$ . Să se arate că  $(2s_1 + b_1^3 + b_2^3 + b_3^3) \cdot (2s_2 + a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \geq 48 \cdot (F_1 + F_2)$ .

**D.M. Bătinețu- Giurgiu, București, Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu**

**L:1285.** Dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$  și  $\cos x + \cos y + \cos z = 0$ ,  $\sin x + \sin y + \sin z = 0$  să se arate că  $\cos 5^n x + \cos 5^n y + \cos 5^n z = 0$ ,  $\sin 5^n x + \sin 5^n y + \sin 5^n z = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Florin Rotaru, Focșani**

**L:1286.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\sqrt{8x(2x-1)+5} = 1 - \cos 2028\pi x$

**Mihaela Mioara Mirea, Daniela Stoian, Craiova**

## ■ Clasa a XI-a

**L:1287.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $A^2 - B^2 = \alpha(AB - BA)$ .

a) Dacă  $\alpha = 0$  și  $n$  impar, demonstrați că  $\det(AB - BA) = 0$ .

b) Dacă  $\alpha \neq 0$  să se arate că  $(AB - BA)^n = 0_n$  **Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș**

**L:1288.** Să se calculeze limita șirului:  $a_n = n^\alpha (\sqrt{n^2 + 1} - 3n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . **Diaconu Radu, Sibiu**

**L:1289.** Dacă  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} = a_n - a_n^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n$ . **Florin Rotaru, Focșani**

**L:1290.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu  $x_1 = 1$  și  $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{1 + 2 + \dots + n}, \forall n \geq 2$ . Arătați că  $x_{2025}^2 - x_{2024}^2 < \frac{2}{1013^2}$ . Calculați:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . **Mihaela Mioara Mirea, Ionuț Ivănescu, Craiova**

**L:1291.** Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{\left[ 2 \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \right] + \left[ 4 \cdot \sqrt[k]{\frac{2}{3}} \right] + \dots + \left[ 2n \cdot \sqrt[k]{\frac{n}{n+1}} \right]}$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$  și  $[a]$  este

partea întreagă a lui  $a$ . **Florin Rotaru, Focșani**

**L:1292.** Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} + \dots + C_{2n}^0}{5^n}$ . **Gheorghe Ghiță, Buzău**

**L:1293.** Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu  $x_n = \frac{3^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{4^2}{2 \cdot 3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5^2}{3 \cdot 4}\right)^3 \cdot \dots \cdot \left(\frac{(n+2)^2}{n(n+1)}\right)^n \cdot e^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ . **Adrian Stan, Buzău**

**L:1294.** Fie  $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  o funcție continuă, astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 2$ . Arătați că există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  și să se calculeze această limită. **Gobej Adrian, Curtea de Argeș**

**L:1295.** Determinați funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile în  $x_0 = 0$  cu proprietatea că  $f'(0) = 1$ , care verifică relația  $2f^2(x) - 3f(x) = f(2x) + f(x) - 3$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . **Gobej Adrian, Curtea de Argeș**

**L:1296.** Fie  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  o funcție continuă astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{x \cdot f(x)} = a > 0$ . Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (f(x+1))^{\frac{1}{x+1}} - (f(x))^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x))^{\frac{1}{x}}}{x}$$

**D.M. Bătinețu-Giurgiu, București**

## ■ Clasa a XII-a

**L:1297.** Determinați numerele naturale  $n$  astfel încât  $\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{16}{35}$  unde  $\varphi(n)$  reprezintă numărul numerelor prime cu  $n$  și mai mici sau egale cu el (indicatorul lui Euler).

**Vasile Roxana, Udrea Cristian, Craiova**

**L:1298.** Demonstrați că toate rădăcinile reale ale ecuației  $x^{6n} - 4x^{2n} - 4 = 0$  sunt de modul mai mare decât  $\sqrt[2n]{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . **Molea Gheorghe, Curtea de Argeș**

**L:1299.** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  și să se rezolve ecuația  $8x^4 + mx^2 + x + 1 = 0$ , știind că are două rădăcini cu produsul egal cu  $-\frac{1}{2}$ . **Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu**

**L:1300.** Fie  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polinom de grad  $n \in \mathbb{N}^*$  cu toate rădăcinile reale. Dacă  $P = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_{n-1}X + a_n$  și  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in [-2, 0]$  arătați că polinomul  $P$  are cel puțin o rădăcină în intervalul  $[0, 2]$ . **Mihaela Cioplea, Daniela Beldea, Băilești**

**L:1301.** Fie  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polinom de grad  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $P = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_{n-1}X + a_n$  și  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \in [-2, 0]$ , arătați că polinomul  $P$  are cel puțin o rădăcină  $x_k \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|1 - x_k| \leq 1$ .

**Năstășelu Amelia Curcă, Filiași, Mirela Țacu, Craiova**

**L:1302.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție continuă. Arătați că există  $c \in (0, 3)$  astfel încât  $2cf(c^2) = 3f(3c)$ . **Orovicenu Vlad, Teodor Cîrstov, elevi Craiova**

**L:1303.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție derivabilă cu proprietatea  $3 \int_0^1 f(x) dx = f(1)$ . Arătați că există  $c \in (0, 1)$  astfel încât  $f'(c) = \frac{2}{c} \cdot f(c)$ . elevi, **Mușat Horia, Craiova, Viesescu Carina, București**

**L:1304.** Fie  $0 < a < b$  și funcția  $f: [a; a+1] \rightarrow [a; b]$  continuă. Dacă  $\int_a^b f(x) dx = b$  să se demonstreze că  $\int_a^{a+1} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{b}$ . **Florin Rotaru, Focșani**

**L:1305.** Dacă  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , este derivabilă, cu derivata continuă, atunci demonstrați:  

$$\int_0^1 [(1-2x)f(x) + (x^2-x)f'(x)] dx = 0.$$
 **Florin Rotaru, Focșani**

**L:1306.** Determinați o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă cu proprietatea că  $f(x) = 2 + \int_0^x t \cdot f(t) dt$ . **Ana Dumitru, Daniela Barbu, Craiova**

**L:1307.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție continuă astfel încât  $x^3 \geq \int_0^x f(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$ . Arătați că  $f(0) = 0$ . elevi **Negreț Bianca, Craiova, Viesescu Carina, București**

**L:1308.** Să se calculeze: a)  $\int \sqrt{\frac{x}{1-\sqrt{x}}} dx$ . b)  $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1) \cdot \ln(e^{2x}+1)} dx$ . **Adrian Stan, Buzău**

**L:1309.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculați integrala  $I_n = \int_0^1 (1-2x)^{2n+1} e^{x-x^2} dx$ . elevi **Viesescu Carina, București, Negreț Bianca, Craiova**

**L:1310.** Să se calculeze:  $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} dx, x \in (0, \infty)$ . **Diaconu Radu, Sibiu**

**L:1311.** Să se calculeze integrala:  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{x^2-2x+3} dx$ . **Vasile Mircea Popa, Sibiu**

„ Bring forward what is true.  
Write it so that it is clear.  
Defend it to your last breath.”

Ludwig Boltzmann  
(1844 - 1906)



## 5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submitted solutions should arrive before September 01, 2026.

### PROPOSALS – QUICKIES

*- Dedicated to D.M Băținețu-Giurgiu on the occasion of his 90<sup>th</sup> birthday -*

**Q120. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.**

If  $a, b, c > 0$ , such that  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  and  $\lambda \geq 0$  then prove that  $\sum a(1 + \lambda\sqrt{b}) \leq 3(\lambda + 1)$ .

**Q121. Proposed by D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania**

Find the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3!!} \cdot \sqrt[3]{5!!} \cdot \sqrt[n]{(2n-1)!!}} \int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x) dx$ , where  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ ,  $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  with  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$ , and  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  is a continuous function on  $(0, \infty)$ .

**Q122. Proposed by D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania**

Find the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x) dx$ , where  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ ,  $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  and  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  is a continuous function on  $(0, \infty)$ .

**Q123. Proposed by D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania.**

Find the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \int_{s_n}^{\frac{\pi^2}{6}} f(x) dx$ , where  $(s_n)_{n \geq 1}$ ,  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  and  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  is a continuous function on  $(0, \infty)$ .

## SOLUTIONS - QUICKIES

~ TITU ZVONARU ~



(27.11.1953 – 11.04.2025)

Q116. Proposed by TITU ZVONARU.

Prove that if  $x, y, z > 0$  then  $\frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \frac{27x}{7x + y + z} + \frac{27y}{x + 7y + z} + \frac{27z}{x + y + 7z} \geq 13$ .

Solution by author. We have

$$\begin{aligned} & \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{27(xy + yz + zx)} + \frac{x}{7x + y + z} + \frac{y}{x + 7y + z} + \frac{z}{x + y + 7z} \geq \frac{13}{27} \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{27(xy + yz + zx)} + \frac{x}{7x + y + z} + \frac{y}{x + 7y + z} + \frac{z}{x + y + 7z} \geq \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{27(xy + yz + zx)} - \frac{4}{27} \geq \frac{1}{3} - \left( \frac{x}{7x + y + z} + \frac{y}{x + 7y + z} + \frac{z}{x + y + 7z} \right), \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{We can write } LHS &= \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{27(xy + yz + zx)} - \frac{4}{27} = \frac{4(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + yz + zx)}{27(xy + yz + zx)} = \\ &= \frac{2((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)}{27(xy + yz + zx)}, \quad (2). \end{aligned}$$

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Using  $pqr$ -Method :  $p = \sum x, q = \sum xy$ , we have:

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \sum \frac{27x}{7x + y + z} = \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \sum \frac{27x^2}{7x^2 + xy + xz} \stackrel{CS}{\geq} \\ &\geq \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \frac{27(\sum x)^2}{7\sum x^2 + 2\sum xy} = \frac{4(p^2 - 2q)}{q} + \frac{27p^2}{7(p^2 - 2q) + 2q} = \\ &= \frac{4(p^2 - 2q)}{q} + \frac{27p^2}{7p^2 - 12q} \stackrel{(1)}{\geq} 13 = RHS, \text{ where } \frac{4(p^2 - 2q)}{q} + \frac{27p^2}{7p^2 - 12q} \stackrel{(1)}{\geq} 13. \end{aligned}$$

By homogeneity inequality we can take  $p = 1$ .

$$\text{It remains to show that } \frac{4(1 - 2q)}{q} + \frac{27}{7 - 12q} \geq 13 \Leftrightarrow 9q^2 - 6q + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3q - 1)^2 \geq 0.$$

Equality occurs if and only if  $x = y = z$ .

**Remark.** The inequality can be developed.

If  $x, y, z > 0$  and  $\lambda > 0, n > 0, 27n \geq 4\lambda$  then 
$$\frac{n(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \sum \frac{\lambda x}{7x + y + z} \geq n + \frac{\lambda}{3}.$$

**Solution.** Using  $pqr$ -Method :  $p = \sum x, q = \sum xy$ , we have:

$$\begin{aligned} \frac{n(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \sum \frac{\lambda x}{7x + y + z} &= \frac{n(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \sum \frac{\lambda x^2}{7x^2 + xy + xz} \stackrel{CS}{\geq} \\ &\stackrel{CS}{\geq} \frac{n(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + \frac{\lambda(\sum x)^2}{7\sum x^2 + 2\sum xy} = \frac{4(p^2 - 2q)}{q} + \frac{\lambda p^2}{7(p^2 - 2q) + 2q} = \\ &= \frac{n(p^2 - 2q)}{q} + \frac{\lambda p^2}{7p^2 - 12q} \stackrel{(1)}{\geq} n + \frac{\lambda}{3} = RHS, \text{ where } \frac{n(p^2 - 2q)}{q} + \frac{\lambda p^2}{7p^2 - 12q} \stackrel{(1)}{\geq} n + \frac{\lambda}{3}. \end{aligned}$$

By homogeneity inequality we can take  $p = 1$ . It remains to show that:

$$\frac{n(1 - 2q)}{q} + \frac{\lambda}{7 - 12q} \geq n + \frac{\lambda}{3} \Leftrightarrow (108n + 12\lambda)q^2 - (99n + 4\lambda)q + 21n \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3q - 1)((36n + 4\lambda)q - 21n) \geq 0, \text{ vezi } q \leq \frac{1}{3} \text{ \u015fi } \lambda > 0, n > 0, 27n > 4\lambda,$$

for which  $(36n + 4\lambda)q - 21n \leq 0$ . Equality occurs if and only if  $x = y = z$ .

**Note.** For  $n = 4, \lambda = 27$  is obtained Q116 from Sclipirea Mintii number 36.

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{1}{3} - \sum_{cyclic} \frac{x}{7x + y + z} = \sum_{cyclic} \left( \frac{1}{9} - \frac{x}{7x + y + z} \right) = \sum_{cyclic} \left( \frac{y - x}{9(7x + y + z)} + \frac{z - x}{9(7x + y + z)} \right) = \\ &= \sum_{cyclic} \frac{y - x}{9(7x + y + z)} + \sum_{cyclic} \frac{z - x}{9(7x + y + z)} = \sum_{cyclic} \frac{y - x}{9(7x + y + z)} + \sum_{cyclic} \frac{x - y}{9(x + 7y + z)} = \\ &= \sum_{cyclic} \frac{x - y}{9} \left( \frac{1}{x + 7y + z} - \frac{1}{7x + y + z} \right) = \sum_{cyclic} \frac{2(x - y)^2}{3(7x + y + z)(x + 7y + z)}, (3). \end{aligned}$$

$$\text{Then by (1), (2) and (3) it suffices to show that } \frac{2(x - y)^2}{27(xy + yz + zx)} \geq \frac{2(x - y)^2}{3(7x + y + z)(x + 7y + z)}.$$

If  $x = y$ , we have equality; if  $x \neq y$  it remains to prove that

$$\begin{aligned} \frac{1}{27(xy + yz + zx)} &\geq \frac{1}{3(7x^2 + 7y^2 + z^2 + 50xy + 8yz + 8zx)} \\ \Leftrightarrow 7x^2 + 7y^2 + z^2 + 50xy + 8yz + 8zx &\geq 9(xy + yz + zx), \text{ true because } \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq xy + yz + zx. \text{ We have equality if and only if } x = y = z. \end{aligned}$$

**Q117. Proposed by TITU ZVONARU.**

Let  $ABC$  be a triangle with  $AD$  the hight from  $A$ , and  $E$  respectively  $F$  the middle of the sides  $AC$ , respectively  $AB$ . For any point  $P$  from the plane of triangle  $ABC$ , let  $Y$  and  $Z$  be its symmetric from the points  $E$ , respectively  $F$ . If  $P'$  is the middle at  $DP$  and  $M = BY \cap CZ$ , then prove that the line  $MP'$  passes through a fixed point.

**Solution by author.** We choose an orthogonal system such that  $D(0,0), A(0,a), B(b,0), C(c,0)$ .

So,  $E\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$  \u015fi  $F\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ . Let  $P\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$  and we deduce easly  $Y(c - p, a - q)$ , and

$Z(b-p, a-q)$ . We assume that  $a \neq q, p \neq b-c, p \neq -b+p$ . The equation of the line  $BY$  is

$$\frac{x-b}{c-p-b} = \frac{y}{a-q} \Leftrightarrow x(a-q) + y(p+b-c) - ab + bq = 0, (1)$$

and the equation of the line  $CZ$  is

$$x(a-q) + y(p-b+c) - ac + cq, (2).$$

Since  $b \neq c \Rightarrow p+b-c \neq p-b+c$ , the system of equations (1) and (2) has solution; we obtain  $M\left(\frac{b+c-p}{2}, \frac{a-q}{2}\right)$ . To stop the analysis as shown the equations of lines

$BY$  and  $CZ$  in cases  $a=q$  or  $p=b-c$  or  $p=-b+c$ , it's easier to check that the point  $M$  is on the lines  $BY$  and  $CZ$ .

$$\text{The points } B, Y, M \text{ are collinear} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ c-p & a-q & 1 \\ \frac{b+c-p}{2} & \frac{a-q}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ which is true.}$$

Analogous we deduce that the points  $C, Z, M$  are collinear.

Because  $P'\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$  and  $M\left(\frac{b+c-p}{2}, \frac{a-q}{2}\right)$ , we note that the middle of the segment  $MP'$  has coordinates

$$\left(\frac{b+c}{4}, \frac{a}{4}\right) \text{ so is a fixed point, and the proof is complete.}$$

#### Q118. Proposed by TITU ZVONARU.

Let  $a, b, c > 0$  such that  $a+b+c=1$ . Prove that:

$$\frac{abc(1+3a)}{b+c} + \frac{abc(1+3b)}{c+a} + \frac{abc(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

**Solution by author.** We prove the inequality:  $\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{a^3+2abc}{abc} \leq \frac{1}{bc}$ , (\*).

Since  $a+b+c=1$ , then (\*) becomes succesively:  $\frac{2(4a+b+c)}{b+c} + \frac{a^2+2bc}{bc} \leq \frac{(a+b+c)^2}{bc}$

$$\Leftrightarrow 8abc + 2bc(b+c) + a^2(b+c) + 2bc(b+c) \leq a^2(b+c) + (b^2+c^2)(b+c) + 2ab(b+c) + 2ac(b+c) + 2bc(b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-2bc) + 2ab^2 + 2ac^2 + 2abc + 2abc - 8abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 + 2a(b-c)^2 \geq 0, \text{ true.}$$

Writing other two inequalities similar with (\*), and adding we obtain:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{2(1+3b)}{c+a} + \frac{2(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

We have equality if and only if  $a=b=c=\frac{1}{3}$ . The proof is complete.

#### Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Using  $pqr$ -Method :  $p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc$ , we have:

$$\sum \frac{1+3a}{b+c} = \sum \frac{1}{b+c} + 3 \sum \frac{a}{b+c} = \frac{p^2+q}{pq-r} + 3 \cdot \frac{p^3-2pq+3r}{pq-r} = \frac{p^3-2pq+9r}{q-r}.$$

$$a^3+b^3+c^3+6abc = (p^3-3pq+3r) + 6r = 1-3q+9r.$$

$$LHS = abc \left( \sum \frac{1}{b+c} + 3 \sum \frac{a}{b+c} \right) + \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc}{2} = r \cdot \frac{4-5q+9r}{q-r} + \frac{1-3q+9r}{2} =$$

$$= \frac{7r+q-3q^2+9r^2+2qr}{2(q-r)} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{2} = RHS,$$

where  $\frac{7r+q-3q^2+9r^2+2qr}{2(q-r)} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3q^2 - 9r^2 - 8r - 2qr \geq 0 \Leftrightarrow 3q^2 \geq 9r^2 + 8r + 2qr,$

resulting from  $q^2 \geq 3pr$ , see:  $q^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3pr$   $p=1 \Leftrightarrow q^2 \geq 3r.$

It remains to show that:

$$3 \cdot 3r \geq 9r^2 + 8r + 2qr \Leftrightarrow 2q + 9r \leq 1, \text{ from: } q \leq \frac{1}{3}, r \leq \frac{1}{27} \text{ see: } 1 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3q$$

and  $1 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{r}.$  Equality occurs if and only if  $a = b = c = \frac{1}{3}.$

**Remark.** The inequality can be developed. If  $a, b, c > 0, a+b+c=1$  and  $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{5}$  then

$$abc \sum \frac{1+\lambda a}{b+c} \leq \frac{\lambda+3}{18}.$$

**Solution.** Using  $pqr$ -Method :  $p = \sum a = 1, q = \sum ab, r = abc$ , we have:

$$\sum \frac{1+\lambda a}{b+c} = \sum \frac{1}{b+c} + \lambda \sum \frac{a}{b+c} = \frac{p^2+q}{pq-r} + \lambda \cdot \frac{p^3-2pq+3r}{pq-r} \stackrel{p=1}{=} \frac{1+\lambda+(1-2\lambda)q+3\lambda r}{q-r}.$$

$$abc \sum \frac{1+\lambda a}{b+c} \leq \frac{\lambda+3}{18} \Leftrightarrow r \cdot \frac{1+\lambda+(1-2\lambda)q+3\lambda r}{q-r} \leq \frac{\lambda+3}{18} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+3)q + 18(2\lambda-1)qr \geq 54\lambda r^2 + (19\lambda+21)r, \text{ resulting from } q \geq 3\sqrt[3]{r^2}.$$

It remains to show that:

$$(\lambda+3) \cdot 3\sqrt[3]{r^2} + 18(2\lambda-1)r \cdot 3\sqrt[3]{r^2} \geq 54\lambda r^2 + (19\lambda+21)r \stackrel{r=t^3}{\Leftrightarrow}$$

$$(\lambda+3) \cdot 3t^2 + 18(2\lambda-1)t^3 \cdot 3t^2 \geq 54\lambda t^6 + (19\lambda+21)t^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 54\lambda t^4 - 54(2\lambda-1)t^3 + (19\lambda+21)t - 3(\lambda+3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3t-1)[18\lambda t^3 + 6(3-5\lambda)t^2 + 2(3-5\lambda)t + 3(\lambda+3)] \leq 0,$$

resulting from  $t \leq \frac{1}{3}$  and  $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{5}$ , see:  $t = \sqrt[3]{r}, r \leq \frac{1}{27}$ , from  $1 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{r}.$

Equality occurs if and only if  $a = b = c = \frac{1}{3}.$

**Q119. Proposed by TITU ZVONARU.**

Solve for  $x \in (0, 90^\circ)$ :  $\frac{\sin x}{2 \sin(x+60^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} = 1.$

**Solution by author.** The equation it is written successively:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} - 1 = 1 - \frac{\sin x}{\sin(x+60^\circ)} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin(x+60^\circ) - \sin x}{\sin(x+60^\circ)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin 10^\circ \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos(x+30^\circ)}{\cos(x-30^\circ)} \Leftrightarrow 2 \sin 10^\circ = \frac{\cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ}{\cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 10^{\circ} = \frac{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{1 - 2 \sin 10^{\circ}}{1 + 2 \sin 10^{\circ}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\cos 10^{\circ} - 2 \sin 10^{\circ} \cos 10^{\circ}}{\cos 10^{\circ} + 2 \sin 10^{\circ} \cos 10^{\circ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sin 80^{\circ} - \sin 20^{\circ}}{\sin 80^{\circ} + \sin 20^{\circ}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{2 \sin 30^{\circ} \cos 50^{\circ}}{2 \sin 50^{\circ} \cos 30^{\circ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^{\circ} = \operatorname{tg} 30^{\circ} \operatorname{ctg} 50^{\circ} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40^{\circ}, x = 40^{\circ}.$$

**Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.**

$$\frac{\sin x}{2 \sin(x+60^{\circ})} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2(\sin x \cos 60^{\circ} + \sin 60^{\circ} \cos x)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x\right)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \frac{4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3} \cot x = \frac{4 \sin 40^{\circ}}{4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cot x = \frac{4 \sin 40^{\circ}}{4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cot x = \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \frac{1}{4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}}$$

$$\tan x = 4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}$$

We have  $4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3} = \tan 40^{\circ}$ , see:

$$4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3} = 2 \left( 2 \sin 40^{\circ} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( 2 \sin 40^{\circ} - \cos 30^{\circ} \right) = 2 \left( \frac{2 \sin 40^{\circ} \cos 40^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} - \cos 30^{\circ} \right) =$$

$$= 2 \left( \frac{\sin 80^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} - \cos 30^{\circ} \right) = 2 \left( \frac{\sin 80^{\circ} - \cos 40^{\circ} \cos 30^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} \right) = 2 \left( \frac{\cos 10^{\circ} - \cos 40^{\circ} \cos 30^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} \right) =$$

$$= 2 \left( \frac{\cos 10^{\circ} - \frac{1}{2} (\cos 70^{\circ} + \cos 10^{\circ})}{\cos 40^{\circ}} \right) = 2 \left( \frac{2 \cos 10^{\circ} - \cos 70^{\circ} - \cos 10^{\circ}}{2 \cos 40^{\circ}} \right) =$$

$$= 2 \left( \frac{\cos 10^{\circ} - \cos 70^{\circ}}{2 \cos 40^{\circ}} \right) = \frac{\cos 10^{\circ} - \cos 70^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} = \frac{2 \sin 40^{\circ} \sin 30^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} = \frac{2 \sin 40^{\circ} \cdot \frac{1}{2}}{\cos 40^{\circ}} = \frac{\sin 40^{\circ}}{\cos 40^{\circ}} = \tan 40^{\circ}.$$

$$\tan x = 4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3}, 4 \sin 40^{\circ} - \sqrt{3} = \tan 40^{\circ} \Leftrightarrow \tan x = \tan 40^{\circ}, x \in (0^{\circ}, 90^{\circ}) \Leftrightarrow x = 40^{\circ}.$$

The solution of the equation is  $x = 40^{\circ}$ .

**Remark.** The inequality can be developed. Let be  $\alpha \in (0^{\circ}, 90^{\circ})$  fixed. Solve for  $x \in (0^{\circ}, 90^{\circ})$

$$\frac{\sin x}{2 \sin(x+60^{\circ})} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^{\circ}} = 1.$$

**Solution.** 
$$\frac{\sin x}{2 \sin(x+60^{\circ})} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2(\sin x \cos 60^{\circ} + \sin 60^{\circ} \cos x)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^{\circ}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x\right)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \frac{4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3} \cot x = \frac{4 \sin \alpha^\circ}{4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cot x = \frac{4 \sin \alpha^\circ}{4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cot x = \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \frac{1}{4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \arctan(4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3}).$$

The solution of the equation is  $x = \arctan(4 \sin \alpha^\circ - \sqrt{3})$ .

## Caleidoscop Matematic

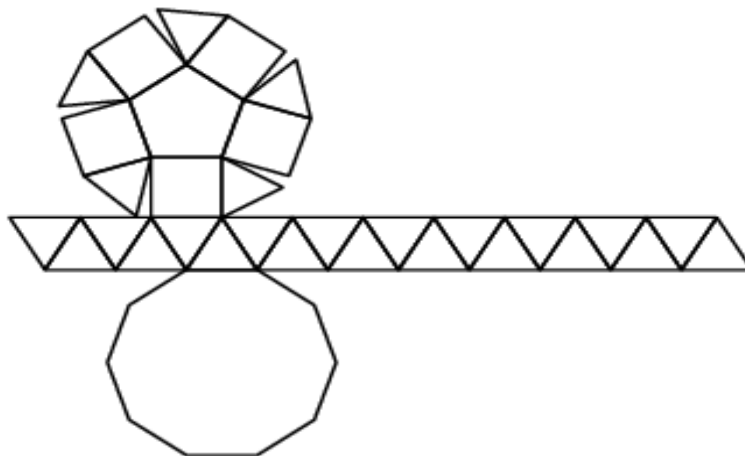
I. Câte vârfuri are Cupola Circului - gyroelongated pentagonal cupola ?

de Neculai Stanciu

**Indicații:**

1) Gyroelongated pentagonal cupola este un poliedru convex cu următoarele fețe: 25 de triunghiuri echilaterale, 5 pătrate, 1 pentagon regulat și 1 decagon regulat.

2) Desfășurata corpului arată ca în figura de mai jos (construiți corpul).



Răspuns la pagina 67.

„Niciodată nu avem cu adevărat dreptate,  
putem doar să fim siguri că greșim.”  
Richard Feynman  
(1918-1988)



## 6. Caleidoscop matematic

### Cercul și poliedrul

Un poliedru și-un cerc se lăudau cu ardoare

Cu obiectele din dotare.



-Am lungime și raze nenumărate,

Orice compas să mă deseneze poate

Se rostogoli cercul, convins

Că poliedrul cade învins.

-Controverse sunt sigur că isc:

Abia când ești cerc plin devii disc...

Trăiești cu iluzia cuadraturii,

Nu știi că ești contra naturii!

Vârfuri, muchii și fețe posed,

De echipartiție c-ai fi auzit, nu cred!

Documentează-te mai mult, te invit:

Chiar și de Euler sunt pomenit...

-Dar, zise cercul, ignori un adevăr banal:

În regnul tău tridimensional,

Ești campion în ipocrizie

Cu-atâtea fețe, convex să te ție.

A, un fapt și mai grav,

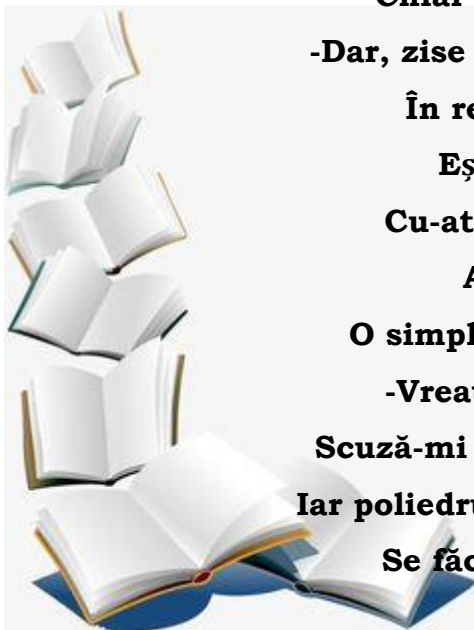
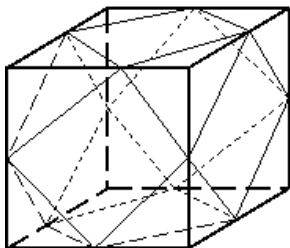
O simplă scobitură te face concav...

-Vreau totuși să-ți mai răspund:

Scuză-mi jargonul, te cam dai... rotund!

Iar poliedrul, iritat de-așa reproșuri istețe,

Se făcu și mai mult... fețe-fețe...



Dumitru Preoteasa, Giurgiu

## La Mulți Ani 2026 !

### Frumusețea matematicii oglindită în umbra timpului

$$1 = (2^0 + 2)! : 6$$

$$2 = 2 + 0 \cdot 26$$

$$3 = -(2^0 + 2 - 6)$$

$$4 = (2 + 0 + 2)! : 6$$

$$5 = -(-2^0 + 2 - 6)$$

$$6 = 2 + 0 - 2 + 6$$

$$7 = (2 + 0 - 2)! + 6$$

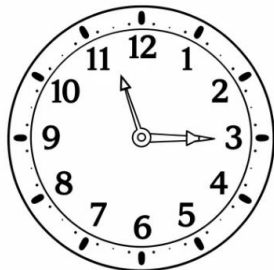
$$8 = 2 \cdot (0 - 2 + 6)$$

$$9 = 2^0 + 2 + 6$$

$$10 = 2 + 0 + 2 + 6$$

$$11 = 2 + 0! + 2 + 6$$

$$12 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 6$$



### Frumusețea matematicii oglinădită în umbra timpului

*f*<sup>2</sup>

$$13 = 2^0 + 2 \cdot 6$$

$$14 = 2 + 0 + 2 \cdot 6$$

$$15 = 2 + 0! + 2 \cdot 6$$

$$16 = 2 \cdot (0 + 2 + 6)$$

$$17 = \text{Merită efortul!}$$

$$18 = (2 + 0!) + 2 \cdot 6$$

$$19 = \text{Merită efortul!}$$

$$20 = \text{Merită efortul!}$$

$$21 = \text{Merită efortul!}$$

$$22 = \text{Merită efortul!}$$

$$23 = \text{Merită efortul!}$$

$$24 = \text{Merită efortul!}$$

De asemenea putem lua în considerare și zilele unei luni:

$$25 = -(2^0 - 26), \quad 26 = 2 \cdot 0 + 26, \quad 27 = (2 \cdot 0)! + 26, \quad 28 = 2 + 0 + 26, \quad 29 = 2 + 0! + 26, \quad 30 = (2 + 0 + 2)! + 6$$

**31 = ... Merită efortul !**

**Precizare:**

1) Pot fi folosite toate parantezele, semnele și operațiile învățate în școală.

2)  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$  ( n factorial);  $0! = 1$ ;  $1! = 1$ ;  $2! = 2$ ;  $3! = 6$ , etc.

Ionuț Ivănescu, Colegiul Național „Ștefan Velovan” Craiova.

Răspunsuri în numărul viitor.

### Răspuns la Câte vârfuri are Cupola Circulari - gyroelongated pentagonal cupola ?

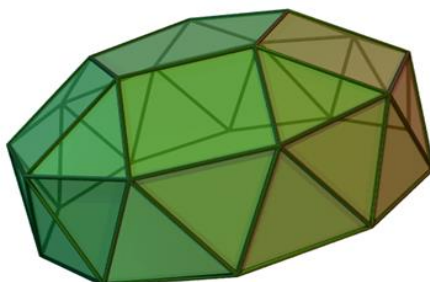
**Soluția 1.** Se aplică formula lui Euler pentru poliedre convece:  $m + 2 = f + v$ .

Numărul fețelor este  $f = 25 + 5 + 1 + 1 = 32$ .

Numărul muchiilor este  $m = \frac{25 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{2} = \frac{110}{2} = 55$ . Deci avem  $55 + 2 = 32 + v$ .

Obținem că **gyroelongated pentagonal cupola** are 25 de vârfuri.

**Soluția 2.** Se folosește desfășurata și se obține poliedrul de mai jos. Prin numărare se obțin 25 de vârfuri.



"Cine nu cugetă decât pe jumătate, acela nu crede nici în Dumnezeu;  
dar cine cugetă corect, acela trebuie să creadă în Dumnezeu."

Sir Isaac Newton  
(1643 – 1727)



## 7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut numărul 37 al revistei de matematică „SCLIPIREA MINTII”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăți calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e\_mail: [adv\\_stan2005@yahoo.com](mailto:adv_stan2005@yahoo.com), fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype (**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste.** Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru numărul 38 al revistei „SCLIPIREA MINTII” va fi **01 OCTOMBRIE 2026**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

## Elevi rezolvitori

### Liceul Economic „Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș:

**Clasa a XI-a:** Maria- Amina Tanasi; **Prof. Daniel Văcaru.**

### Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău

**Clasa a X-a:** Toma Ariana, Avram Alexandru, Turcu Alexandru, Bratosin Andrei, Marcu Gabriela, Șerban Mario, Grozav Vlăduț; **Clasa a XI-a:** Tudor Octavian, Petcu Petru, Dragu Florin, Zaman George, Gavrilă Răzvan, Lungu George; Petre Ana Maria, Gheorghe Magdalena;

**Clasa a XII-a:** Zaharia Darius Andrei, Cazacu Rareș Ștefan, Radu Cătălina, Isăcilă Ema, Prof. **Stan Adrian**

### Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova

**Clasa a XII-a:** Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian.**

### Scoala Gimnazială Mircea Eliade, Craiova:

**Clasa a VII-a:** Afrem Sara, Drăgan Raul, Pascu Ștefan, Geană Rebeca, Prisnel Sara. Prof. **Grigorie Dan Lucian.**

### Scoala Preuniversitară de Măsură Smeeni, Buzău

**Clasa a VI-a:** Nicula Andrei, Pavel Bogdan, Pipoi Antonia; **Clasa a VII-a:** Dobre Andrei, Stan Maria;

**Clasa a VIII-a:** Neagu Delia, Manolache Andreea, Dragnea Ionuț; Prof. **Ion Stănescu.**



Inspectoratul Școlar Județean Buzău  
Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Buzău

Liceul Teoretic de Informatică "Alexandru Marghiloman" Buzău

Proiectul Județean de Matematică

**SCLIPAREA MINTII**

**2006 - 2026**

Concursul Județean de Matematică

Ediția a XVIII-a, clasele IX-XII, și a V-VIII-a

**25 APRILIE 2026**



Proiect Județean aprobat de I.S.J Buzău în CAEJ Buzău, Domeniul Științific

**REVISTA SCLIPAREA MINTII****NR. 37 ANUL XIX - APRILIE 2026****Cuprins**

<b>1. Istoria matematicii</b> .....	<b>1</b>
200 de ani de la nașterea lui G. B. Riemann de Ionel Tudor – Călugăreni și Adrian Stan .....	1
<b>2. Articole și note matematice</b> .....	<b>5</b>
Prof. D.M. Bătinețu- Giurgiu la 90 de ani de Ionel Tudor, Adrian Stan, Neculai Stanciu .....	5
Calculul limitei unui șir de tip Lalescu de D.M. Bătinețu- Giurgiu, Ionel Tudor- Călugăreni .....	8
Alte probleme cu integrale funcționale de D. M Bătinețu- Giurgiu, N. Stanciu, Daniel Sitaru .....	10
Refinarea unor inegalități geometrice de Mihaly Bencze .....	13
Asupra unei probleme de geometrie de Marius Dragan și Neculai Stanciu .....	14
Aplicații ale integralei definite în calculul limitelor de șiruri de Adrian Stan .....	16
Probleme de algebră cu soluții vectoriale de Elena Cărmidă .....	18
Dezvoltări ale unor probleme din Math. Refl. de Marin Chirciu ....	20
Asupra prob. 4856 din Crux Mathematicorum de Ion Pătrașcu, Ion Cotoi, .....	21
<b>3. Probleme rezolvate</b> .....	<b>23</b>
<b>4. Probleme propuse</b> .....	<b>50</b>
<b>5. Quickies</b> .....	<b>59</b>
<b>6. Caleidoscop matematic</b> .....	<b>66</b>
<b>7. Poșta redacției</b> .....	<b>68</b>



LEI 20 RON

**editgraph**  
 editură | tipar offset | tipar digital  
[www.editgraph.ro](http://www.editgraph.ro)

**ISSN 2247 – 6601**  
**ISSN – L 2247 – 6601**