SCLIPIREA MINȚII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA. PUBLICATIE SEMESTRIALĂ. AN XIX. NR XXXVIII, 2026

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

SM

38



ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEORETIC DE INFORMATICĂ "ALEXANDRU MARGHILOMAN" , BUZĂU

NOIEMBRIE 2026

SCLIPIREA MINȚII 38

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XIX, Nr. XXXVIII. NOIEMBRIEE 2026 BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Președinte Filiala Râmnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Cătălin Iordache – Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice
Mădălina Samoilă - Inspector școlar matematică Buzău

D. M . Bătinețu – Giurgiu — **Daniel Sitaru**
Nicolae Ivășchescu — **Mihály Bencze**
Lucian Tuțescu — **Gheorghe Ghiță**
Marius Drăgan — **Ionel Tudor**
Dorin Mărghidanu — **Marin Chirciu**

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor șef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**
  Andrei Octavian Dobre — **Iuliana Trașcă**
  Ștefan Pîrlog — **Gabriel Tica**
  Ion Stănescu — **Constantin Dinu**
- **Membri :**

Florică **Anastase**, Daniela **Badea**, Daniela **Barbu**, Mădălina **Buliga**, Daniela **Beldea**, Tudor **Belciug**, Doina Cristina **Călina**, Elena-Daniela **Cărămidă**, Gabriela **Militaru Cismaru**, Mihaela **Cioplea**, Elena **Ciobîcă**, Constantin **Ciobîcă**, Mihaela **Ciobănelu**, Andrei **Ciurea**, Simona **Chiriță**, Marin **Chirciu**, Marian **Ciuperceanu,** Teodor **Cîrstov**, Marian **Cucoaneș**, Luiza **Cremeneanu**, Alin-Ionuț **Constantinescu**, Alina **Ciucă**, Camelia **Dană**, Mihaela **Daianu**, Cristina Călina **Doina**, Radu **Diaconu**, Nicolas **Diaconu**, Ana **Dumitru**, Luiza **Dumitrescu**, David **Dobriceanu**, Cristina **Drugă**, Carmen **Firicescu**, Lucian Dan **Grigorie**, Ramona **Grigorie**, Adrian **Gobej**, Ștefan **Gobej**, Cristina-Dumitra **Gobej**, Virginia **Grigorescu**, **Dorina** Goiceanu, Maria **Gurgui,** Ionuț **Ivănescu**, Sebastian **Ilinca**, Bela **Kovacs**, Adalbert **Kovács**, Alina **Lazăr**, Răzvan **Lupu**, Maya-Cataleya **Marcu**, Rareș **Magher**, Nuța **Matei**, Dorin **Mărghidanu**, Mihaela Mioara **Mirea**, Cristian **Moanță**, Gheorghe **Molea**, Horia **Mușat**, Horia **Nedelcu**, Amelia **Curcă – Năstășelu**, Ramona **Nălbaru**, Bianca **Negreț**, Angela **Neicu**, Ariana **Nicolae**, Constantin **Nicolau**, Cristina Diana **Oprescu**, Alecu **Orlando**, Felicia și Cezar **Ozunu**, Petre **Păunescu**, Mădălina **Panduru**, Ion **Pătrașcu**, Aurelia **Petrică** Sorin **Pîrlea**, Oana **Preda**, Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Laura **Popescu**, Dumitru **Preoteasa**, Aura Loreta **Pogorevici**, Florin **Rotaru**, Alexandru **Răduț**, Vlad **Orovniceanu**, Iulia **Sandu**, Dumitru **Săvulescu**, Ilinca **Sebastian**, Delia și Cristian **Schneider**, Daniela **Stoian**, Dumitru Gabriel **Stancele**, Florin **Șendroiu**, Liviu **Smarandache**, Doina **Stoica**, Mircea Mario **Stoica**, Mirela **Țacu**, Eugenia **Turcu**, Sorina **Tudor**, Cristian **Udrea**, Carmen **Vlad**, Ana Alesia **Truică**, Roxana **Vasile**, Gabriela **Vasile**, Carina-Maria **Viespescu**, Daniel **Văcaru,** Simona **Vladimirescu**, Ionuț Florin **Voinea**, Carmen **Vlad**, Laura **Zaharia**, Gigi **Zaharia.**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1
ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE..... 3
PROBLEME REZOLVATE..... 21
PROBLEME PROPUSE 52
QUICKIES 59
CALEIDOSCOP MATEMATIC 63
POȘTA REDACȚIEI..... 68

GÂNDEȘTE CORECT

REDACȚIA
Liceul Teoretic de Informatică „Alexandru Marghiloman” , Buzău,
Strada Ivănețu , Nr. 7, Cod. 120114,
Tel. 0238714902
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan



Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

„Cum arată azi școala,
așa va arăta mâine țara! ”
(Spiru Haret)



1. Istoria matematicii

Spiru C. Haret – Omul Școlii (1851- 1912)

de Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu, **Adrian Stan,** Buzău



Anul acesta s-au împlinit **175** de ani de la nașterea în 15.02.1851 a lui **Spiru Haret**, matematician, mecanician și astronom, reformatorul școlii românești de la sfârșitul secolului al XIX-lea.

S-a născut la Hanul Conachi, Iași, într-o familie de origine armeană în care tatăl, Costache, era judecător. Școala primară a început-o în casa părintească, apoi la o școală din Dorohoi. La 11 ani este admis cu bursă la Liceul „Sfântul Sava” din București pe care îl absolvă în 1869. Lipsa de manuale și pasiunea pentru științe, l-au făcut pe **Spiru Haret** să scrie două cărți, una de algebră și cealaltă „Elemente de trigonometrie” care s-a publicat în 1873 și va fi folosită ca manual de liceu până în 1928. Tot în această perioadă, Haret a tradus „Tratatul de astronomie” al lui L. A. Quetelet (1796-1874), pe care îl publică mai târziu la editura Societății „Junimea” din Iași.

Între 1869 și 1874, **Haret** studiază la Universitatea din București, secția fizică- matematică, devenind licențiat în matematică, după care obține prin concurs o bursă de studii de la Ministerul Instrucțiunii Publice condus de Titu Maiorescu, la Universitatea Sorbona din Paris. Aici și-a trecut din nou licența în matematică (1875) și apoi licența în fizică (1876).

Tot la Sorbona, în anul 1878, pe 30 ianuarie își susține celebra teză de doctorat (la 27 de ani), în domeniul astronomiei și mecanicii, având titlul „**Sur l’invariabilite des grandes axes des orbites planetaires**” („**Asupra invariabilității axelor mari ale orbitelor planetare**”). Teza susținută în fața unei comisii prezidate de profesorul Victor Puiseux, făcea referire la faptul că planetele descriu elipse în mișcarea lor, dar din cauza perturbațiilor ce intervin din cauza maselor celorlalte corpuri cerești și planete, curba descrisă nu este chiar o elipsă.

Matematicienii Laplace (în 1773), Lagrange (în 1776) și Poisson (în 1808) au considerat că axele mari ale elipselor descrise de planete rămân invariabile, indiferent de masele lor pe când Haret a venit cu ideea că tocmai masele planetelor conduc la variații seculare în orbitele descrise de planete. Teza lui Haret răsturnase niște teorii și constituia baza altor teorii care vor conduce pe alți astronomi în domeniul consacrării științifice.

Imediat după aceasta, profesorul Tisserand a demonstrat rezultatul prin aplicarea calculelor pentru planeta Saturn. Ulterior și celebrul matematician Henri Poincaré (1854-1912) (care l-a avut ca student la Sorbona pe Traian Lalescu(1882-1929)) a confirmat calculele lui Haret pe care le-a aplicat pentru demonstrarea „**problemei celor n corpuri” (adică problema stabilității a n corpuri, a atracției între n corpuri),** pentru care în 1889 a fost premiat de regele Oskar al II-lea al Suediei.

Poincaré spunea despre **Hare**t: *„În 1878, Spiru Haret a dovedit existența termenilor seculari de gradul III și acest rezultat a provocat o mare uimire”.*

Teza de doctor a lui **Haret** a fost atât de mult apreciată, încât Facultatea de Ştiinţe din Paris a trimis o adresă Ministerului Culturii şi Instrucţiunii Publice, în care România era felicitată pentru „*un asemenea talent*" iar teza sa a fost republicată în „Memoriile Observatorului" din Paris.

Peste ani, în 1976, primul nume românesc în spaţiu, va fi acel al lui **Spiru Haret**, prin care Uniunea Astronomică Internaţională a denumit un crater de pe partea invizibilă a Lunii.

Menţionăm că primii zece români cu doctorat în matematici luat în străinătate, au fost în ordine cronologică: Paul Tanco (Gratz-1872), Ioan Bozăceanu (Bruxelles-1873), Ştefan Hepites (Bruxelles-1873), Spiru Haret (Paris-1878), David Emmanuel (Paris-1879), Constantin Gogu (Paris- 1882), Nicolae Coculescu (Paris-1895), George Iuga (Strasbourg-1896), Gheorghe Ţiţeica (Paris-1899), Anton Davidoglu (Paris-1900). Dacă primii trei au obţinut doctoratul numai pe bază de examen, **Spiru Haret** a fost primul care l-a obţinut pe baza susţinerii unei teze.

Deşi i s-a propus să rămână ca profesor la Sorbona, **Haret** s-a întors în ţară şi în 1878 este numit profesor la Universitatea din Bucureşti şi la Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti dovedind în cei peste 30 de ani la catedră (până la pensionare în 1910), că este un dascăl de referinţă şi un om remarcabil. La Universitate, **Spiru Haret** a predat mecanică raţională iar la Şcoala de Poduri şi Şosele, trigonometria, geometria elementară plană şi în spaţiu, geometria analitică şi geometria descriptivă.

În perioada 1878- 1890 a predat mecanica raţională şi la Şcoala de Ofiţeri de Artilerie şi Geniu din Bucureşti. **Spiru Haret** s-a străduit ca prin lecţiile sale şi preocupările ştiinţifice la Universitate să-şi îndeplinească misiunea de formator al învăţământului superior al mecanicii în ţara noastră. Lecţiile lui erau captivante, clare, iar el fiind un model de punctualitate pentru studenţii săi (printre care şi Gheorghe Ţiţeica).

Spiru Haret alături de colegul său de studenţie de la Sorbona, David Emmanuel (1854-1941) sunt consideraţi fondatorii şcolii româneşti de matematică şi mecanică. Prin activitatea lor de dascăli, ei au contribuit la formarea unor matematicieni de mare valoare: Nicolae Coculescu, Gheorghe Ţiţeica, Anton Davidoglu, Dimitrie Pompeiu, Andrei Ioachimescu, Traian Lalescu, Victor Vîlcovici, Theodor Angheluţă, Alexandru Myller, Simion Stoilov şi alţii, toţi având un rol important în dezvoltarea învăţământului în cele patru universităţi ale ţării din Bucureşti, Iaşi, Cluj, Timişoara.

În 1879, **Haret** devine membru corespondent al Academiei Române iar în 1892 este ales academician titular. În 1908 înfiinţează Observatorul Astronomic din Bucureşti unde numeşte ca prim director pe Nicolae Coculescu (1866-1952).


MÉCANIQUE SOCIALE

PAR

SP. C. HARET

1910

O altă lucrare celebră a lui **Spiru Haret** publicată în 1910 şi în franceză şi în română este „**Mecanique sociale**" („**Mecanica socială**") în care sunt puse bazele ştiinţei sociale prin introducerea rigorii raţionamentului din ştiinţele exacte. **Haret** a aplicat în analiza socială principiile inerţiei, principiul conservării energiei, postulatul acţiunii şi reacţiunii. Haret susţinea că în societate se aplică principiul minimului efort, preocuparea de randament, cheltuirea cu cât mai puţină energie şi îşi încheie lucrarea cu considerente privind forţele sociale şi civilizaţia. După **Haret**, o civilizaţie integrală, însemna dezvoltarea armonioasă în direcţiile economică, intelectuală şi morală.

Convins de necesitatea dezvoltării învăţământului, **Spiru Haret** şi-a sacrificat activitatea de cercetare şi s-a îndreptat spre cea social – obştească intrând în politică, în Partidul Liberal unde a găsit susţinerea necesară, mai întâi ca inspector general al învăţământului (1883), apoi membru în Consiliul Permanent al Instrucţiunii Publice (1884), secretar general al ministerului (1895) şi în cele din urmă, ministru timp de opt ani al Cultelor şi Instrucţiunii Publice (1897-1899, 1901-1904, 1907-1910) numit de prim-miniştrii D.A Sturdza şi Ion I.C. Brătianu.

Spiru Haret pe baza activităţii sale legislative a reorganizat învăţământul punându-l pe baze moderne şi adaptându-l cerinţelor statului român modern, a dus o acţiune de ridicare a conştiinţei profesionale a învăţătorilor şi profesorilor, ameliorând condiţiile lor morale şi financiare. A clădit aproape 2000 de localuri de şcoli, a înfiinţat primele grădiniţe şi a crescut numărul elevilor înscrişi

în școlile elementare.

La un congres al învățătorilor, marele nostru savant Nicolae Iorga (1871-1940) afirma: *„Când vă vorbesc despre Spiru Haret, în semn de respect, sculați-vă in picioare! Câți știutori de carte eram în România? În 1899, recensământul stabilea 22% din populație. În 1909, proporția ajunsese la 39,4%”.*

Pentru astfel de realizări, **Spiru Haret** era numit „**Omul Școalei**” care după părerea lui Gheorghe Țițeica (1873-1939) însemna „*cel mai glorios titlu care i s-a putut da*”.

Prin „**legea lui Haret”** din 1898 (cu modificările din 1901) , au fost introduse cele trei secții ale liceului: reală, clasică și modernă care se terminau cu un certificat de absolvire și nu cu examen de absolvire și apoi s-au introdus clasele de profesională prin școlile de arte și meserii în mare parte în comunitățile sătești.



În 1909 a înființat la București, Școala Superioară de Arhitectură.

Având un caracter hotărât și extrem de muncitor, **Spiru Haret** a avut un principiu călăuzitor fundamental al vieții lui: „**Fapte nu vorbe**”.

În 1935, lui **Spiru Haret** i s-a dezvelit în fața Universității din București, un monument alături de cele ale lui Gheorghe Lazăr (1779-1823) și Ion Heliade Rădulescu (1802-1872), ctitori ai învățământului românesc.

În 1911, la împlinirea vârstei de 60 de ani, iubit și apreciat pentru activitatea sa, i s-a dedicat un volum omagial de 1228 pagini „*Lui Spiru Haret. Ale tale dintre ale tale. La împlinirea a 60 de ani”.*

Omul, dascălul și făuritorul de școală, **Spiru Haret**, a fost elogiat de mai toate numele ilustre ale învățământului nostru, numele său dăinuind în istoria culturii românești ca un mare organizator de școală și un mare om, pe drept cuvânt considerat cel mai mare ministru al învățământului din România până în prezent.

În semn de recunoștință, numeroase instituții școlare, străzi, parcuri îi poartă numele, cel mai mare amfiteatru de la Facultatea de Matematică din Universitatea din București îi poartă numele și de asemenea, de-a lungul timpului s-au realizat numeroase busturi ale acestuia.

A decedat la vârsta de 61 de ani, în 17 decembrie 1912, după o grea suferință.

Bibliografie:

1. Adrian Stan și colab. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău;
2. Ion Purcaru, Octavian Bâscă. Pagini din istoria matematici; oameni, idei și fapte de referință. Editura Universitară. București. 2017;
3. Gazeta Matematică. Nr. 6/1976; Acad. Caius Iacob. Spiru Haret;
4. Arhimede nr. 1-2/2005. Editura Paralela 45. Nicoleta Francisca- Goșoniu și Nicolae Marin Goșoniu: Mari personalități ale științei și culturii românești- Spiru Haret.
5. www.wikipedia.com



Spiru Haret (foto, jos pe scaun, în stânga, nr. 4) alături de alți liberali de frunte.

**„Cel mai mare dușman al cunoașterii nu este ignoranța.
Este iluzia cunoașterii. ”
Stephen Hawking (1942- 2018)**



2. Articole și note matematice

On the Problem Q120 from SM/37

by José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Math Circle (BMC), Spain

Problem Q120. Proposed by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.
If $a,b,c>0$, such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$ and $\lambda\geq 0$ then prove that $\sum a\left(1+\lambda\sqrt{b}\right)\leq 3(\lambda+1)$.

Given the constraint $a^2+b^2+c^2+abc=4$ for positive real numbers, we can introduce a trigonometric parametrization. Let A,B,C be the angles of an acute triangle ΔABC such that $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $A+B+C=\pi$. We can represent the variables as:

$$a=2\cos A, b=2\cos B, c=2\cos C.$$

Using this substitution, we have

$$a^2+b^2+c^2+abc=4(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C)=4,$$

which is true on account of the well-known triangle identity

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

Now, we can rewrite the target inequality by expanding the cyclic sum as:

$$\sum_{cyc} a+\lambda\sum_{cyc} a\sqrt{b}\leq 3+3\lambda.$$

Since $\lambda\geq 0$, it suffices to prove the following two independent bounds:

$$\sum_{cyc} a\leq 3,\ (1);\ \sum_{cyc} a\sqrt{b}\leq 3,\ (2).$$

If both (1) and (2) hold true, then their liniar combination is also true and this completes the proof.

Proof of (1). Since the function $f(x)=\cos x$ sis strictly concave on the interval $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, we can apply Jensen's Inequality, and we get $\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\leq\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ from which the well-known inequality $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$ follows. Multiplying by 2, and using our trigonometric substitution, we obtain:

$a+b+c=2\cos A+2\cos B+2\cos C\leq 3$, so (1) is proved.

Proof of (2). To bound the cyclic product term, we apply the Cauchy's Inequality:

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}\right)^2\leq\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right).$$

From the preceding, we already know $\sum_{cyc} a \le 3$. Now we evaluate:

$$\sum_{cyc} ab = 4(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A).$$

For any acute triangle, it is known geometric property that:

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \le \frac{3}{4}.$$

Thus, we obtain $\sum_{cyc} ab \le 4\cdot\frac{3}{4} = 3$. Substituting these two component bounds back into our Cauchy's setup, yields

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b}\right)^2 \le 3\cdot 3 = 9 \Rightarrow \sum_{cyc} a\sqrt{b} \le 3, \text{ so (2) is proved.}$$

Combining these results with $\lambda \ge 0$, we get:

$$\sum_{cyc} a(1+\lambda\sqrt{b}) = \sum_{cyc} a + \lambda\sum_{cyc} a\sqrt{b} \le 3 + 3\lambda = 3(\lambda+1), \text{ Q.E.D.}$$

Equality holds if and only if $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, which corresponds to the case where $a = b = c = 1$.

Editor's Note. The Professor **José Luis Díaz-Barrero**, Barcelona Math Circle (BMC), Spain, solved the following problems from SM 37/2026:

L:1263 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L1263.pdf),
L:1264 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L1264.pdf),
L:1265 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L1265.pdf),
L:1266 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L.1266.pdf),
L:1297 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L.1297.pdf),
L:1298 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L.1298.pdf),
L:1299 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L1299.pdf),
L:1300 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L.1300.pdf),
L:1301 (http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2026/07/L.1301.pdf)

Thank you very much, dear Professor *José Luis Díaz-Barrero* !
Thank you very much, dear Professor *Dan Sitaru* for posted online on RMM !

Ştiaţi că ...?

Blaise Pascal (1623-1662), matematician, fizician şi filozof francez a dezvoltat calculul matematic al probabilităţilor în urma discuţiilor cu Piere de Fermat referitor la studiul câştigului între doi jucători de zaruri. În afara unui calculator mecanic - Pascaline, pe cale l-a inventat la 18 ani, el este şi inventatorul ruletei de azi.

În dorinţa sa de a realiza un mecanism perpetum mobile reuşeşte să construiască roata de ruletă dar cei care aveau să definitiveze ruleta au fost francezii Francois şi Louis Blanc (în 1842), care la cererea regelui Charles a III-lea de Monaco (cel care a construit şi primul cazinou) introduce pe discul ruletei şi căsuţa cu numărul 0.

O clasă de probleme cu integrale definite

de D. M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu și Daniel Sitaru

Abstract. This paper presents new solutions for some problems with calculus of definite integrals - published by math journals from all over the world.

Keywords: integrals.

MSC: 26B15, 11S23, 97D50, 97I30, 26D15, 11B39.

Acest articol este o continuare a celor din [1], [2], [3] și [4].

Problema 1. Dacă $f:R\to R$ este o funcție continuă și impară, atunci calculați $\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\ln^{2n+1}x\right)}{\left(1+x^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}}dx$ unde $n\in N$, și $a,\ m\in R_+^*$. ***D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu***

Soluție. Facem schimbare de variabilă $x=u(t)=\frac{1}{t}$, $u'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $u(a)=\frac{1}{a}$, $u\left(\frac{1}{a}\right)=a$ și obținem

$$I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\ln^{2n+1}x\right)}{\left(1+x^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}}dx=\int\limits_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(-\ln^{2n+1}t\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{t^{2m}}\right)^{\frac{1}{m}}}dt=$$

$$\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(-\ln^{2n+1}t\right)}{\frac{\left(1+t^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}}{t^2}}\cdot\frac{1}{t^2}dt=-\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\ln^{2n+1}t\right)}{\left(1+t^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}}dt=-I,$$

deci $I=0$.

Problema 2. Dacă $f,g:R_+\to R_+$ sunt funcții derivabile cu derivatele continue și $a,b\in R_+^*, a<b$, atunci calculați: $\int\limits_a^b\frac{f(x)g'(x)-f'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx$. ***D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu***

(Problema 282, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica (REOIM), Nr. 56, Octombrie - Noiembrie, 2016)

Soluție. Avem $I=\int\limits_a^b\frac{f(x)g'(x)-f'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx=\int\limits_a^b\frac{f(x)g'(x)+e^{g(x)}g'(x)-e^{g(x)}g'(x)-f'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx=$

$$=\int\limits_a^b\frac{(f(x)+e^{g(x)})g'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx-\int\limits_a^b\frac{f'(x)+e^{g(x)}g'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx=\int\limits_a^b g'(x)dx-\int\limits_a^b\frac{(f(x)+e^{g(x)})'}{f(x)+e^{g(x)}}dx=$$

$$=g(x)\Big|_a^b-\ln(f(x)+e^{g(x)})\Big|_a^b=g(b)-g(a)-\ln\frac{f(b)+e^{g(b)}}{f(a)+e^{g(a)}}.$$

Remarcă. Dacă $a=0, b=\frac{\pi}{2}, g(x)=\sin x$ și f o funcție oarecare, derivabilă cu derivate continua se obține problema XII.428 din RMT, Nr. 1/2016, autor Radu Ghenghiu.

Problema 3. Dacă $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), b\in[1,\infty), m,n\in R_+^*$ și $f,g,h,k:[-a,a]\to R$ sunt funcții continue astfel încât: $f(-x)=-f(x), g(-x)=-g(x), h(-x)=h(x), k(-x)=k(x)$, calculați:

$\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)+g(x)}{(b-\cos x)^m h(x)+k(x)\sin^{2n}x}dx$. ***D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu***

(Problema SP.054, Romanian Mathematical Magazine (RMM), Spring Edition, 2017)

Soluție. Fie, $I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)+g(x)}{(b-\cos x)^m h(x)+k(x)\sin^{2n}x}dx$, unde facem schimbarea de variabilă $t=u(x)=-x$, cu $u'(x)=-1$, $u(-a)=a, u(a)=-a$ și obținem:

$I=\int_{a}^{-a}\frac{f(-t)+g(-t)}{(b-\cos(-t))^m h(-t)+k(-t)\sin^{2n}(-t)}(-1)dt=-\int_{-a}^{a}\frac{f(t)+g(t)}{(b-\cos t)^m h(t)+k(t)\sin^{2n}t}=-I$;

$2I=0\Leftrightarrow I=0$.

Problema 4. Dacă $a\in R_+^*$ și funcțiile $f,g,h:R\to R$ sunt continue unde f și g sunt impare iar h este pară, atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\cdot\ln\left(1+e^{g(x)}\right)\cdot arctg\left(h(x)\right)dx=\int_{0}^{a}f(x)g(x)arctg\left(h(x)\right)dx.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema UP.091, RMM, Winter Edition, 2017

Soluție. $I=\int_{-a}^{a}f(x)\ln\left(1+e^{g(x)}\right)arctg\left(h(x)\right)dx$, în care facem schimbarea de variabilă:

$x=u(t)=-t, u'(t)=-1, u(a)=-a, u(-a)=a$ și obținem:

$I=\int_{-a}^{a}f(-x)\ln\left(1+e^{g(-x)}\right)arctg\left(h(-x)\right)dx=-\int_{-a}^{a}f(x)\ln\left(1+e^{-g(x)}\right)arctg\left(h(x)\right)dx=$

$=-\int_{-a}^{a}f(x)\ln\left(\frac{1+e^{g(x)}}{e^{g(x)}}\right)arctg\left(h(x)\right)dx=-\int_{-a}^{a}f(x)\ln\left(1+e^{g(x)}\right)arctg\left(h(x)\right)dx+$

$+\int_{-a}^{a}f(x)g(x)arctg\left(h(x)\right)dx=-I+2\cdot\int_{0}^{a}f(x)g(x)arctg(h(x))dx$, deci:

$I=\int_{0}^{a}f(x)g(x)arctg\left(h(x)\right)dx$, ceea ce era de demonstrat.

Problema 5. Calculați $\int_{-a}^{a}\frac{\sin x+tgx}{(b-\cos x)^m+\sin^{2n}x}dx$, unde $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), b\in[1,\infty)$ și $m,n\in N^*$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema SP.054, RMM, Winter Edition, 2017

Soluție. $I=\int_{-a}^{a}\frac{\sin x+tgx}{(b-\cos x)^m+\sin^{2n}x}dx$, unde facem schimbarea de variabilă $t=u(x)=-x$, cu $u'(x)=-1$, $u(-a)=a, u(a)=-a$ și obținem:

$I=\int_{a}^{-a}\frac{\sin(-t)+tg(-t)}{(b-\cos(-t))^m+\sin^{2n}(-t)}(-1)dt=-\int_{-a}^{a}\frac{\sin t+tgt}{(b-\cos t)^m+\sin^{2n}t}=-I$, de unde $2I=0\Leftrightarrow I=0$.

Problema 6. Dacă $a,b\in R_+^*$ și funcția $f:R\to R$ este continuă și pară pe R, atunci demonstrați egalitatea:

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^2+arctgx+\sqrt{b^4+arctg^2x}}dx=\frac{1}{b^2}\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema 107, Math Problems, Vol. 4, Nr. 3, 2014

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x=u(t)=-t$, $u'(t)=-1, u(a)=-a, u(-a)=a$ și obținem $I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^2+arctgx+\sqrt{b^4+arctg^2x}}dx=\int_{a}^{-a}\frac{f(-t)}{b^2-arctgt+\sqrt{b^4+arctg^2t}}(-1)dt=$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{b^2 - arctgt + \sqrt{b^4 + arctg^2 t}} dt ;$$

$$2I = I + I = \int_{-a}^{a} f(x)\left(\frac{1}{b^2 + arctgx + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}} + \frac{1}{b^2 - arctgx + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}} \right) dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} f(x) \cdot \frac{2\left(b^2 + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}\right)}{\left(b^4 + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}\right)^2 - arctg^2 x} dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} f(x) \cdot \frac{2\left(b^2 + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}\right)}{2b^2\left(b^2 + \sqrt{b^4 + arctg^2 x}\right)} dx = \frac{1}{b^2} \int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{2}{b^2} \int_{0}^{a} f(x)dx .$$ Rezultă $I = \frac{1}{b^2} \int_{0}^{a} f(x)dx$

Problema 7. Calculați $\int_{a}^{b} \frac{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}}}{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}}} dx$, unde $a, b \in R$, $a < b$, $c \in R_+^*$ și $f : R \to R_+^*$ este o funcție continuă. ***D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu***

(Problema 5292, School Science and Mathematics Journal, Februarie, 2014)

Soluție. $I = \int_{a}^{b} \frac{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}}}{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}}} dx$, în care facem schimbarea de variabilă:

$x = u(t) = a + b - t$, $u'(t) = -1, u(a) = b, u(b) = a$ și obținem:

$$I = \int_{a}^{b} \frac{e^{f(a+b-x-a)} \left(f(a+b-x-a)\right)^{\frac{1}{c}}}{e^{f(a+b-x-a)} \left(f(a+b-x-a)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(b-a-b+x)} \left(f(b-a-b+x)\right)^{\frac{1}{c}}} dx =$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}}}{e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}}} dx$$, deci:

$$2I = I + I = \int_{a}^{b} \frac{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}}}{e^{f(x-a)} \left(f(x-a)\right)^{\frac{1}{c}} + e^{f(b-x)} \left(f(b-x)\right)^{\frac{1}{c}}} dx = \int_{a}^{b} dx = x\Big|_a^b = b - a$$, rezultă $I = \frac{b-a}{2}$.

Problema 8. Să se determine funcția continuă $f : R_+^* \to R$ astfel încât:

$$u^2 \int_{a}^{b} f^2(e^x)dx + \frac{v^2}{3}(b^3 - a^3) \le 2uv \int_{a}^{b} xf(e^x)dx$$, unde $a, b \in R$, $a < b$ și $u, v \in R_+^*$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu - Problema W2, Concursul Internațional Jozsef Wildt, Ediția a XXII-a, 2012

Soluție. $u^2 \int_{a}^{b} f^2(e^x)dx + \frac{v^2}{3}(b^3 - a^3) - 2uv \int_{a}^{b} xf(e^x)dx \le 0 \Leftrightarrow \int_{a}^{b} \left(uf(e^x) - vx\right)^2 dx \le 0$.

Dar, $\int_{a}^{b} \left(uf(e^x) - vx\right)^2 dx \ge 0$; deci, $\int_{a}^{b} \left(uf(e^x) - vx\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \left(uf(x) - vx\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(e^x) = \frac{v}{u}x$.

Luăm $x = \ln t$, $t > 0$ și obținem $f(t) = \frac{v}{u} \ln t$; prin urmare: $f : R_+^* \to R$, $f(x) = \frac{v}{u} \ln x$.

Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, *Exploatarea unor relații funcționale pentru schimbarea de variabilă în integrala Riemann*, Recreații Matematice, Anul XXVII, Nr. 1, Ianuarie – Iunie, 2025, 33-34.

2. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, Ovidiu Pop, *Asupra unei clase de probleme cu integrale funcționale definite,* Revista de Matematică din Timișoara (RMT), Nr. 2, 2024, 3 - 5.

3. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, D. Sitaru, *Câteva probleme cu integrale funcționale*, Sclipirea Minții, Nr. 36, 2025, 7-9.

4. D.M. Bătinețu-Giurgiu, N. Stanciu, D. Sitaru, *Alte probleme cu integrale funcționale,* Sclipirea Minții, Nr. 37, 2026, 10-12.

Asupra metodei α de rezolvare și rafinare a inegalităților

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

~ În memoria matematicianului Titu Zvonaru ~

În [1], Arhimede Mathematical Journal (2022), Mathematical Reflections (2023) și Crux Mathematicorum (2026), se prezintă o nouă metodă de rezolvare și rafinare a inegalităților.

Această metodă a fost descoperită de matematicianul *Marius Drăgan* – primul autor al acestui articol. *Marius Drăgan* a numit această metodă – metoda α. Utilizând metoda α vom rafina trei inegalități cu un grad ridicat de dificultate.

I. Fie $x, y, z \in (0,\infty)$. Arătați că $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}+\left(\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \geq 2$.

Lorian Săceanu, și Marian Cucoaneș

Vom demonstra următoarea inegalitate:

$$\frac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3 \geq \frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1 \geq 2 \text{ , unde } \alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Notăm $S=x+y+z$, $P=xyz$. Avem $\alpha=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geq 9$, $t=\dfrac{S^3}{P}\geq 27$,

$$\sum x^2=\frac{S^3-2P\alpha}{S},\ \sum x^3=S\sum x^2-\sum xy\sum x+3xyz=S^3-3P\alpha+3P,\ \sum xy=\frac{\alpha P}{S},$$

$$\frac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3=\frac{t-3\alpha}{3}+1+\frac{\alpha^3}{(t-2\alpha)^3}.$$

Din inegalitatea lui Schur avem $S^3+9P\geq 4\sum xy \Leftrightarrow t=\dfrac{S^3}{P}\geq 4\alpha-9$, (*).

Notăm $t-2\alpha=u$ și obținem $u\geq 2\alpha-9$. Considerăm funcția $f:[2\alpha-9,\infty)\to R$,

$$f(u)=\frac{u-\alpha}{3}+1+\frac{\alpha^3}{u^3} \text{ cu } f'(u)=\frac{1}{3}-\frac{3\alpha^3}{u^4} \text{ și } u_0=\sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{4}} \text{ punct de minim.}$$

Deoarece $2\alpha-9\geq\sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{4}}$, $\forall\alpha\geq 9$, rezultă că f este crescătoare pe intervalul $[2\alpha-9,\infty)$, deci

$$f(u)\geq f(2\alpha-9)=\frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1.$$

Așadar, $\dfrac{\sum x^3}{3xyz}+\left(\dfrac{\sum xy}{\sum x^2}\right)^3\geq\dfrac{\alpha-9}{3}+\dfrac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1$ și pentru că

$$\frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}+1\geq 2\Leftrightarrow\frac{\alpha-9}{3}+\frac{\alpha^3}{(2\alpha-9)^3}\geq 1\Leftrightarrow(\alpha-9)(2\alpha-9)^3+3\alpha^3\geq 3(2\alpha-9)^3\Leftrightarrow$$

$(\alpha-9)^2\geq 0$, însemnă că am obținut o rafinare a inegalității din problema IX.535.

II. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $abc=1$. Arătați că

$$a^3+b^3+c^3+\frac{64}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 11.$$

Titu Zvonaru

Vom demonstra următoarea rafinare: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 11+\frac{(\alpha-9)^2}{\alpha-1}$, unde

$$\alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Avem $\sum x^3=S^3-3P\alpha+3P$ și $\prod(y+z)=\prod(S-x)=S^3-S\cdot S^2+\sum xyS-P=P\alpha-P$.

Deci $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{64abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{S^3-3P\alpha+3P}{P}+\frac{64P}{P\alpha-P}=$

$$=t+3-3\alpha+\frac{64}{\alpha-1}\overset{(*)}{\geq}4\alpha-9+3-3\alpha+\frac{64}{\alpha-1}=\alpha-6+\frac{64}{\alpha-1}=11+\alpha-6-11+\frac{64}{\alpha-1}=$$

$$=11+\alpha-17+\frac{64}{\alpha-1}=11+\frac{(\alpha-1)(\alpha-17)+64}{\alpha-1}=11+\frac{\alpha^2-18\alpha+81}{\alpha-1}=11+\frac{(\alpha-9)^2}{\alpha-1}.$$

III. Fie a,b,c numere reale strict pozitive. Arătați că $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 4$.

Marius Stănean, Marin Chirciu și Octavian Stroe

În [3], ***Titu Zvonaru*** a demonstrat următoarea rafinare:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 6.$$

În continuare vom prezenta o rafinare pentru ultima inegalitate de mai sus, adică vom demonstra

$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 6+\frac{3(\alpha-9)^2}{(\alpha-6)(2\alpha-9)}$, unde $\alpha=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

În [2] este demonstrată inegalitatea: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$.

Dacă folosim din nou relațiile demonstrate în [1], adică

$\sum a^2=\frac{S^3-2P\alpha}{S}$, $\sum a^3=S^3-3P\alpha+3P$ și $\sum ab=\frac{\alpha P}{S}$, atunci, avem:

$$E=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}\geq 12-\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}=$$

$$=12-\frac{9P\alpha}{S^3-2P\alpha}+\frac{9P}{S^3-3\alpha P+3P}=12-\frac{9\alpha}{t-2\alpha}+\frac{9}{t-3\alpha+3}=6+9-\frac{9\alpha}{t-2\alpha}+\frac{9}{t-3\alpha+3}-3=$$

$$=6+\frac{9(t-3\alpha)}{t-2\alpha}-\frac{3(t-3\alpha)}{t-3\alpha+3}=6+3(t-3\alpha)\left(\frac{3}{t-2\alpha}-\frac{1}{t-3\alpha+3}\right)=$$

$$=6+\underbrace{\frac{3(t-3\alpha)}{t-3\alpha+3}}_{u(t)}\cdot\underbrace{\left(\frac{3(t-3\alpha+3)}{t-2\alpha}-1\right)}_{v(t)}=f(t),\text{ unde } f,u,v:[4\alpha-9,\infty)\to R.$$

Avem $3t-9\alpha+9\geq t-2\alpha\Leftrightarrow t\geq\frac{7\alpha-9}{2}$, adevărată deoarece $\alpha\geq 9$, $t\geq 4\alpha-9\geq\frac{7\alpha-9}{2}$.

Deci $u(t)=1-\frac{1}{t-3\alpha+3}$ este crescătoare și pozitivă, $v(t)=3\left(1-\frac{\alpha-3}{t-2\alpha}\right)-1$ este crescătoare și pozitivă.

Atunci, f este crescătoare și pozitivă, adică

$$f(t)\geq f(4\alpha-9)=6+\frac{3(\alpha-9)^2}{(\alpha-6)(2\alpha-9)},\text{ Q.E.D.}$$

Bibliografie

1. M. Drăgan – *A Method to Solve and Refine some Algebraic Inequalities*, Recreaţii Matematice, Anul XXIII, Nr.1, Ianuarie – Iunie, 2021, pag. 14-17.
2. Pham Kim Hung – *Secrets in Inequalities*, vol. I, GIL Publishing House, 2007, pag. 193.
3. T. Zvonaru – *În legătură cu o inegalitate din RMT NR. 1/2020*, RMT NR. 2/2020, pag. 10–11.

Despre inegalitatea lui Gerretsen-Doucet

de Mihàly Bencze, Braşov

În acest articol ne vom ocupa de inegalitatea *Gerretsen-Doucet*: $p \le 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$.

Teoremă. În orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea: $p \le xR + yr$, unde $2 \le x \le 3\sqrt{3} - \sqrt{19}$ şi $y = 3\sqrt{3} - 2x$.

Demonstraţie.

Dacă ABC este echilateral, atunci $R = 2r$ şi $p = 3\sqrt{3}r$; $p = 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$ iar $p \le xR + yr$ trebuie să implice $3\sqrt{3}r \le (2x + y)r$, adică $3\sqrt{3} \le 2x + y$.

Folosind inegalitatea lui *Gerretsen* $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ obţinem $(xR + yr)^2 \ge 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, unde dacă notăm $t = \frac{R}{r} \ge 2$, deducem $(xt + y)^2 \ge 4t^2 + 4t + 3$.

Fie $f(t) = (xt + y)^2 - (4t^2 + 4t + 3)$, unde dacă presupunem $2x + y = 3\sqrt{3}$, atunci:

$$f(t) = (x^2 - 4)t^2 - (6\sqrt{3}x - 4x^2 - 4)t + 12 - 12\sqrt{3}x + 4x^2 - 3 =$$

$$= (t - 2)((x^2 - 4)t + 3x(2\sqrt{3} - x)), \text{ unde ţinând cont că } t \ge 2, \text{ avem}$$

$$(x^2 - 4)t + 3x(2\sqrt{3} - x) \ge 0.$$

Dacă $x < 2, t \to \infty$, atunci $(x^2 - 4)t + 3x(2\sqrt{3} - x) \to -\infty \Rightarrow x \ge 2, x^2 - 4 > 0$ şi

$(x^2 - 4)t + 3x(2\sqrt{3} - x)$ are minimum pentru $t = 2$;

$2(x^2 - 4) + 3x(2\sqrt{3} - x) = -x^2 + 6\sqrt{3}x - 8; -x^2 + 6\sqrt{3}x - 8 \ge 0, x \in [2, 3\sqrt{3} - \sqrt{19}]$ cu condiţia $y = 3\sqrt{3} - 2x$, deci $(x, y) = (2, 3\sqrt{3} - 4)$ şi $p \le 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$ - care este o consecinţă a inegalităţii lui *Gerretsen*

$p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 = (2R + (3\sqrt{3} - 4)r)^2 - r(12\sqrt{3} - 20)(R - 2r) \le (2R + (3\sqrt{3} - 4)r)^2$, deci $p \le 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$.

Inegalitatea lui *Doucet* $4R + r \ge \sqrt{3}p$ se poate deduce şi astfel:

$(4R + r)^2 - 3p^2 \ge (4R + r)^2 - 3(4R^2 + 4Rr + 3r^2) = 4(R - 2r)(R + r) \ge 0$, deci

$$4R + r \ge \sqrt{3}p.$$

„Universul este un cerc al cărui centru e pretutindeni, iar circumferința nicăieri”.

Blaise Pascal (1623 – 1662)



Asupra unor limite integrale

de Conf.univ.dr. Cătălin Angelo Ioan, Galați

Scopul acestui articol este de a calcula $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx$, unde funcția f satisface o serie de condiții nu foarte restrictive. Rezultatul principal care va sta la baza soluției complete este:

Teoremă ([1]). Dacă $f:(-1,1]\to R$ este o funcție continuă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_a^1 x^n f(x)dx = f(1)\ \ \forall a\in(-1,1).$$

Fie acum $f:[a,b]\to R$, strict monotonă și care păstrează semn constant pe $[a,b]$, derivabilă cu derivata continuă. Considerând restricția codomeniului la $[\min(f(a),f(b)),\max(f(a),f(b))]$, cum f este strict monotonă rezultă că este injectivă și fiind și surjectivă rezultă că este bijectivă, deci inversabilă.

Ne propunem în cele ce urmează să calculăm: $L=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx$.

Dacă f este strict descrescătoare și negativă, considerând funcția $g=-f$, limita devine: $L=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_a^b g^n(x)dx$ cu g, pozitivă. Putem deci considera $L=\lim_{n\to\infty}\varepsilon^n\int_a^b(\varepsilon f)^n(x)dx$ unde $\varepsilon=1$ dacă f este strict crescătoare pozitivă și $\varepsilon=-1$ dacă este strict descrescătoare negativă. În acest caz, $g=\varepsilon f$ este strict crescătoare și pozitivă.

Dacă f este strict descrescătoare, pozitivă sau strict crescătoare, negativă atunci cu schimbarea de variabilă $x=-y$ rezultă:

$$L=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx=-\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{-b} f^n(-y)dy=-\lim_{n\to\infty}\int_{-b}^{-a} f^n(-y)dy.$$

Cum $(f(-y))'=-f'(-y)$ rezultă că funcția $f(-y)$ este strict crescătoare, pozitivă, respectiv strict descrescătoare, negativă. Prin urmare, concluziile de mai jos se vor aplica înlocuind b cu a. Să notăm $I=\varepsilon^n\int_a^b g^n(x)dx$. Dacă $g(b)>g(a)>1$ atunci: $\int_a^b g^n(x)dx>g^n(a)(b-a)$ de unde:

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g^n(x)dx=\infty$. Dacă $g(b)>g(a)=1$, atunci:

$$\int_a^b g^n(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} g^n(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b g^n(x)dx>\int_a^{\frac{a+b}{2}} dx+g^n\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=\frac{b-a}{2}\left(1+g^n\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Dar $g\left(\frac{a+b}{2}\right)>1$ de unde: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b g^n(x)dx=\infty$. Dacă $g(b)>1>g(a)$ atunci din faptul că g este continuă, fie $c\in(a,b)$ astfel încât $g(c)=\frac{1+g(b)}{2}>1$ cu a suficient de mic. Obținem:

$$\int_a^b g^n(x)dx = \int_a^c g^n(x)dx + \int_c^b g^n(x)dx > (c-a)g^n(a) + (b-c)g^n(c).$$

De aici: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b g^n(x)dx \geq (c-a)\lim_{n\to\infty} g^n(a) + (b-c)\lim_{n\to\infty} g^n(c) = \infty$. Prin urmare, pentru f strict crescătoare: $L = \infty$, iar pentru f strict descrescătoare rezultă că limita nu există.

Dacă acum: $1 > g(b) > g(a) \geq 0$ atunci: $0 < \int_a^b g^n(x)dx < g^n(b)(b-a)$ de unde:

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g^n(x)dx = 0$. Prin urmare: $L = 0$ indiferent de natura lui f.

Să considerăm deci cazul rămas: $g(b) = 1 > g(a)$.

Integrând prin părți, obținem: $I = \varepsilon^n \int_a^b x'g^n(x)dx = \varepsilon^n x g^n(x)\Big|_a^b - n\varepsilon^n \int_a^b x g^{n-1}(x)g'(x)dx =$

$$= \varepsilon^n(bg^n(b) - ag^n(a)) - n\varepsilon^n \int_a^b x g^{n-1}(x)g'(x)dx = bf^n(b) - af^n(a) - n\varepsilon^n \int_a^b x g^{n-1}(x)g'(x)dx.$$

Fie acum schimbarea de variabilă: $g(x) = g(b)t$. Avem: $g'(x) = g(b)dt$ de unde:

$$I = bf^n(b) - af^n(a) - n\varepsilon^n g^n(b) \int_{\frac{g(a)}{g(b)}}^1 t^n \frac{g^{-1}(g(b)t)}{t}dt =$$

$$= bf^n(b) - af^n(a) - nf^n(b) \int_{\frac{g(a)}{g(b)}}^1 t^n \frac{g^{-1}(g(b)t)}{t}dt = \quad f^n(b)(b - n\int_{\frac{g(a)}{g(b)}}^1 t^n \frac{g^{-1}(g(b)t)}{t}dt - a(\frac{f(a)}{f(b)})^n).$$

Deoarece g este strict crescătoare și pozitivă, $-1 < \frac{g(a)}{g(b)} < 1$, iar

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varepsilon g(a)}{\varepsilon g(b)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(a)}{g(b)}\right)^n = 0. \qquad \text{Obținem deci:}$$

$$\lim_{n\to\infty}(b - n\int_{\frac{g(a)}{g(b)}}^1 t^n \frac{g^{-1}(g(b)t)}{t}dt) = b - g^{-1}(g(b)) = b - b = 0.$$

Prin urmare: $L = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} f^n(b)$. Cum însă $f^n(b) = \varepsilon^n g^n(b) = \varepsilon^n = \pm 1$ rezultă că $L = 0$.

Fie acum $f:[a,b] \to R$, strict monotonă și care păstrează semn constant pe $[a,b]$, derivabilă cu derivata continuă și $L = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx$. Putem concluziona cele de mai sus în următoarea:

Teoremă. I. Dacă f este strict crescătoare și pozitivă atunci: I.i.) Dacă $f(b) > 1$, atunci $L = \infty$; I.ii.) Dacă $f(b) \leq 1$, atunci $L = 0$. II. Dacă f este strict descrescătoare și negativă atunci:II.i.) Dacă $f(b) > 1$, atunci L nu există; II.ii.) Dacă $f(b) \leq 1$, atunci $L = 0$. III. Dacă f este strict crescătoare și negativă atunci: III.i.) Dacă $f(a) > 1$, atunci L nu există; III.ii.) Dacă $f(a) \leq 1$, atunci $L = 0$ .IV. Dacă f este strict descrescătoare și pozitivă atunci: IV.i.) Dacă $f(a) > 1$, atunci $L = \infty$. IV.ii.) Dacă $f(a) \leq 1$, atunci $L = 0$.

Aplicații

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$. R: Fie $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f:[0,1] \to \left[\frac{1}{2},1\right]$, strict descrescătoare și pozitivă.

Cum $f(0)=1$, din teoremă rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx$. R: $f(x)=\cos x$, $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ este strict descrescătoare și pozitivă. Cum $f(0)=1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx=0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx$. R: $f(x)=tgx$, $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,1]$ este strict crescătoare și pozitivă. Cum $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx=0$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{e}(\ln x)^n dx$. R: $f(x)=\ln x$, $f:[1,e]\to[0,1]$ este strict crescătoare și pozitivă. Cum $f(e)=1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{e}(\ln x)^n dx=0$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x+\cos x}\right)^n dx$. R: $f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x+\cos x}$, $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\left[\frac{3}{4\sqrt{2}},1\right]$ este strict descrescătoare și pozitivă. Cum $f(0)=1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x+\cos x}\right)^n dx=0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(tgx)^n dx$ (*Gazeta Matematică, Seria B*). R: $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to[0,\sqrt{3}]$, $f(x)=tgx$ este strict crescătoare și pozitivă. Cum $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(tgx)^n dx=\infty$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{1}(x^2-x+1)^n dx$ (*Gazeta Matematică, Seria B*). R: $f:[0,1]\to R$, $f(x)=x^2-x+1$ este strict descrescătoare și pozitivă pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare și pozitivă pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Cum $\max\limits_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} f(x)=1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)^n dx=0$, iar $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]} f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2-x+1)^n dx=0$. Limita dată este deci 0.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$ (*Revista de matematică din Timișoara*). R: $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,1]$, $f(x)=\sin x$ este strict crescătoare și pozitivă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, iar $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ de unde limita este 0.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2-x}\right)^n dx$ (*Concursul Seemous*). R: $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{x}{2-x}$ este strict crescătoare și pozitivă, iar, $f(1)=1$ deci limita este 0.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^n dx$. R: $f:[1,2]\to R$, $f(x)=\frac{x^2+1}{2}$ este strict crescătoare și pozitivă, iar $f(2)=\frac{5}{2}>1$ deci limita este ∞.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1(1-x^2)^n dx$ (*Revista de matematică din Timișoara*). R: $f:[0,1]\to R$, $f(x)=1-x^2$ este strict descrescătoare și pozitivă, iar $f(0)=1$ deci limita este 0.

Bibliografie

1. Dumitru Mircea Ivan (coord.), *Teste grilă de matematică*, 2025, U.T.Press, Cluj-Napoca, 2025.

Dezvoltări ale unor probleme din Mathematical Reflections

de **Marin Chirciu**, Pitești

- II -

Lemma2. If $a,b,c>0$ then $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}}=3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\right)\ge\sum\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{3\sum a}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow 3\sum\frac{a}{b}\ge\frac{3\sum a}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b}\ge\frac{\sum a}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Let move on solving the main problem.

We use **Lemmas** get:

$$LHS=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^4\overset{Lema2}{\ge}\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)^4\overset{(1)}{\ge}\frac{(a+b+c)^4}{(2+abc)abc}=RHS,$$

where $\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)^4\overset{(1)}{\ge}\frac{(a+b+c)^5}{(2+abc)abc}\Leftrightarrow\left(\frac{p}{\sqrt[3]{r}}\right)^4\ge\frac{p^5}{(2+r)r}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)^4\ge\frac{p}{(2+r)r}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\ge\frac{p}{2+r}\overset{Lema1}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\ge\frac{3}{2+r}\overset{\sqrt[3]{r}=t}{\Leftrightarrow}\frac{1}{t}\ge\frac{3}{2+t^3}\Leftrightarrow t^3-3t+2\ge 0\Leftrightarrow(t-1)^2(t+2)\ge 0.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

J719. If $a,b,c>0$ holds $\sqrt{2\prod(a^2+b^2)}+4abc\ge\prod(a+b)$. Mihai Opincariu, Brad

Solution.

With substitution $(x,y,z)=\left(\frac{b}{a},\frac{c}{b},\frac{a}{c}\right),xyz=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2\prod\left(a^2+b^2\right)}+4abc \geq \prod(a+b) \Leftrightarrow \sqrt{2\prod\left(x^2+1\right)}+4 \geq \prod(x+1)$.

Using pqr -Method: $p=\sum x, q=\sum xy, r=xyz=1$ we have:

$\prod\left(x^2+1\right)=1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q$ and $\prod(x+1)=1+p+q+r$.

$\sqrt{2\prod\left(x^2+1\right)}+4 \geq \prod(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q\right)}+4 \geq 1+p+q+r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q\right)} \geq p+q+r-3, r=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right)} \geq p+q-2 \Leftrightarrow 2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right) \geq (p+q-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right) \geq (p+q-2)^2 \Leftrightarrow p^2+q^2 \geq 2pq \Leftrightarrow (p-q)^2 \geq 0$.

Equality occurs if and only if $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Remark. If $a,b,c>0$ holds $\sqrt{2\prod\left(a^2+b^2\right)} \geq \frac{1}{2}\prod(a+b)$. Marin Chirciu

Solution.

Using $a^2+b^2 \overset{CS}{\geq} \frac{(a+b)^2}{2}$ we have: $LHS=\sqrt{2\prod\left(a^2+b^2\right)} \geq \sqrt{2\prod\frac{(a+b)^2}{2}}=\frac{1}{2}\prod(a+b)=RHS$.

Equality occurs if and only if $a=b=c$.

S717. In ΔABC holds $\sum am_a \geq p\left(\sum h_a-3r\right)$. Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Solution.

Lemma. In ΔABC, $\sum am_a \geq 6F+2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)$.

Proof.

Using $am_a \geq 2pr+\frac{1}{2}(b-c)^2$ we get $\sum am_a \geq 6F+2\left(p^2-3r^2-12Rr\right)$. We obtained:

$4R\left(p^2-3r^2-12Rr\right) \geq \frac{3R\sqrt{3}}{2}\left(p^2+r^2-14Rr\right) \Leftrightarrow 8\left(p^2-3r^2-12Rr\right) \geq 3\sqrt{3}\left(p^2+r^2-14Rr\right)$

$\Leftrightarrow p^2\left(8-3\sqrt{3}\right) \geq Rr\left(96-42\sqrt{3}\right)+r^2\left(24+3\sqrt{3}\right)$, see Gerretsen`inequality $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

We have: $\left(16Rr-5r^2\right)\left(8-3\sqrt{3}\right) \geq Rr\left(96-42\sqrt{3}\right)+r^2\left(24+3\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R\left(16-3\sqrt{3}\right) \geq 2r\left(16-3\sqrt{3}\right)$, see $R \geq 2r$,(Euler`inequality).

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC, $\sum a^2m_a \geq 2F\left(R-2r+2p\right)$ Marin Chirciu

J718. If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then $a+b+c \geq \frac{3}{2}$. Mircea Becheanu, Canada

Solution. $ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right)$.

$LHS=a+b+c=\sum\frac{x}{y+z} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2}=RHS$ Equality occurs if and only if $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

Remark.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ and $n \in \mathbf{N}$ then $a^n+b^n+c^n \geq \frac{3}{2^n}$. Marin Chirciu

Solution. For $n=0$ we have equality $3=3$. For $n=1$ we have $a+b+c\geq\frac{3}{2}$. For $n\geq 2$ see Holder inequality. $ab+bc+ca+2abc=1\Leftrightarrow(a,b,c)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right)$.

$$LHS=a^n+b^n+c^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}=3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^n=3\left(\frac{\sum\frac{x}{y+z}}{3}\right)^n\overset{Nesbitt}{\geq}3\left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^n=\frac{3}{2^n}=RHS$$

Equality occurs if and only if $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

O719. If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ then $x+y+z\geq 2+\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)xyz}{4+\left(5+3\sqrt{3}\right)xyz}$.

Marius Stănean, Zalău

Solution (by Marin Chirciu, Colegiul National Zinca Golescu Pitesti).

$x^2+y^2+z^2+xyz=4\Leftrightarrow(x,y,z)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC-acute.

We use $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$ and $\prod\cos A=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$.

$$x+y+z\geq 2+\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)xyz}{4+\left(5+3\sqrt{3}\right)xyz}\Leftrightarrow 2\left(1+\frac{r}{R}\right)\geq 2+\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\cdot 8\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}}{4+\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot 8\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{r}{R}\geq\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\cdot 8\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}}{4+\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot 8\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}}\Leftrightarrow\frac{r}{R}\geq\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2}}{4+\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot 2\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2r}{R}\geq\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2}}{2+\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{R^2}}\Leftrightarrow\frac{2r}{R}\geq\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(p^2-(2R+r)^2\right)}{2R^2+\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(p^2-(2R+r)^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left[\left(9+3\sqrt{3}\right)R-\left(5+3\sqrt{3}\right)r\right]\leq R(2R+r)^2\left(9+3\sqrt{3}\right)-2r(2R+r)^2\left(5+3\sqrt{3}\right)+4R^2r,$$

which result from Gerretsen`inequality $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. It remains to show that:

$$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[R\left(9+3\sqrt{3}\right)-2r\left(5+3\sqrt{3}\right)\right]\leq R(2R+r)^2\left(9+3\sqrt{3}\right)-2r(2R+r)^2\left(5+3\sqrt{3}\right)+4R^2r$$

$\Leftrightarrow 2R^2-\left(9+3\sqrt{3}\right)Rr+2r^2\left(5+3\sqrt{3}\right)\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)\left(2R-\left(5+3\sqrt{3}\right)r\right)$, see Euler`inequality $R\geq 2r$.

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Remark. If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ then:

1). $x+y+z\geq 2+\frac{(n+k)xyz}{n+kxyz}$, $n,k>0$. 2). $x+y+z\geq 2+\frac{3xyz}{2+xyz}$.

3) $x+y+z\geq 2+\frac{(\lambda+1)xyz}{\lambda+xyz}$, $\lambda\geq 1$.

Factorialul n!

de elevi **Nicolas Diaconu**, École du Châtelet, France
şi **Truică Ana** , Colegiul Național „Frații Buzești" Craiova

Noțiuni teoretice

În multe probleme de olimpiade şi concursuri, apar frecvent probleme cu factoriale, în ecuații, calcule de sume, şiruri, probleme de numărare, etc.

Vom prezenta mai întâi câteva noțiuni teoretice legate de factoriale:

Definiție: Dacă $n \in \mathbb{N}$ se numește *"n factorial"* numărul $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n$
Prin convenție $0! = 1$.
Exemple: $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, etc

În capitolul următor vom studia exemple de probleme unde vom utiliza factorialul.

Probleme de numărare

Problema 1: Codul Seifului

Andrei are un seif în care îşi păstrează colecția de surprize. Pentru a-l deschide, el a ales un cod format din 4 cifre diferite: **1, 2, 3 şi 4**. Din păcate, Andrei a uitat ordinea exactă a cifrelor! El ştie doar că a folosit fiecare cifră o singură dată.
Cerință: Care este numărul maxim de încercări pe care trebuie să le facă Andrei pentru a fi sigur că va deschide seiful?

***

Rezolvare:
1.Pentru prima poziție are patru variante,
2.Pentru că am ales una deja, pentru a doua poziție mai avem trei variante,
3.Pentru că am ales două deja, pentru a treia poziție mai avem două variante,
4.Pentru ultima poziție mai rămâne o variantă,

Conform regulii factorialului, numărul total de variante este: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
Răspuns: 24 încercări.

Problema 2. Cărțile

Adrian are şase cărți dintre care trei sunt identice. El vrea să le aranjeze în biblioteca lui dar nu are idee cum să facă: sunt atât de multe posibilități!
Cerință: În câte maniere le poate aranja în biblioteca lui?

***

Rezolvare:
Când avem obiecte care se repetă, folosim formula de împărțire:
Etapa 1: Calculăm totalul ca şi cum ar fi diferite,
Etapa 2: Împărțim la numărul de moduri în care se pot aranja obiectele identice.
Etapa 1: Aplicând ce am învățat din problema anterioară avem totalul de: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
Etapa 2: Obiectele identice fiind trei, se pot aranja în: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ moduri
Împărțim totalul la numărul de moduri în care se pot aranja obiectele identice: $6! : 3! = 120$ moduri.

Probleme cu factori - de câte ori apare un factor prim *p* în *n!*

Problema 1

Cerință: De câte ori apare 3 în 10! ? ***

Rezolvare: Pentru a afla de câte ori apare 3 în 10! trebuie să studiem multiplii de 3 până la 10:
1. 3: o dată, 2. 6: o dată, 3. 9: 3×3, deci de două ori,
Răspuns: adunând obținem că 3 apare de patru ori în 10!

Problema 2
Cerință: De câte ori apare 3 în 50! ? ***
Teorie - Formula lui Legendre

În loc să numărăm de câte ori apare 3 în multiplii lui, există o formulă numită *"Formula lui Legendre"*, care ne va ajuta să găsim rezultatul mai repede și mai ușor.
Pentru aceasta trebuie să învățăm două noi noțiuni matematice:

1. Ce este **un număr prim?**

Răspuns: "Este un număr care se împarte doar la 1 și la el însuși".
Exemplu: 2, 3, 5, 7, 11…

Ce este **partea întreagă a lui x - notată** $[x]$?
Răspuns: "Este rezultatul **„întreg"** al unei împărțiri, fără rest."
Exemplu: *[10 : 3] = 3* (3 intră de 3 ori în 10).

1.Trebuie să aplicăm pașii următori (pentru n! și p factor prim):
2.Împărțim numărul **n la p** și reținem partea întreagă,
3.Împărțim numărul **n la p×p** și reținem partea întreagă,
4.…
5. Continuăm cu împărțirea **n la p×p×…×p×p** până când partea întreagă este 0,
6. Adunăm și obținem rezultatul.

Remarcă: ***"Formula lui Legendre"*** se poate scrie pentru $n \in \mathbb{N}$ și *p - prim* cu puteri ale lui *p*:

$$\left[\frac{n}{p^1}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

Să aplicăm ***"Formula lui Legendre"*** pentru exercițiul nostru:
Etapa 1: Observăm că 3 este un număr prim.
Etapa 2:
1.Aplicăm pașii formulei pentru n=50 și p=3:
2.Împărțim numărul 50 la 3 și reținem partea întreagă care este 16,
3.Împărțim numărul 50 la 3×3 și reținem partea întreagă care este 5,
4.Împărțim numărul 50 la 3×3×3 și reținem partea întreagă care este 1,
Continuăm procesul înmulțind numărul de jos cu 3 până când rezultatul împărțirii devine 0: 50 împărțit la 3×3×3×3 este deja 0,
5.Adunăm toate rezultatele obținute și obținem *16+5+1=22*.

Problema 3.
Cerință: Să se demonstreze că nu există niciun număr natural n astfel încât n! să se termine în exact 48 de zerouri. Nicolas Diaconu
Rezolvare:
Vom căuta valori ale lui n care să ne apropie de 48 de zerouri.
Pentru a număra 0-urile trebuie să numărăm factorii primi 5 și 2. Dar având în vedere că în orice factorial, factorul 2 apare mai des decât 5, trebuie doar să numărăm de câte ori se regăsește 5 utilizând ***"Formula lui Legendre":***

Cazul 1: Încercăm n = 195 și aplicăm Legendre pentru 5 - prim:
1. [195 / 5] = 39,
2. [195 / 25] = 7,
3. [195 / 125] = 1,
4. Total: *39 + 7 + 1 = 47* de zerouri.
⇒ Observăm că 195!, 196!, 197!, 198! și 199! se termină toate în 47 de zerouri.

Cazul 2: Încercăm n = 200 (următorul multiplu de 5) și aplicăm Legendre pentru 5 - prim:
1. [200 / 5] = 40
2. [200 / 25] = 8
3. [200 / 125] = 1
4. Total: *40 + 8 + 1 = 49* de zerouri.
⇒ 200! se termină atunci cu 49 de zerouri.

Din **(1)** și **(2)** putem concluziona că nu există *n!* care să se termine cu exact 48 de zerouri.

Teorie:

Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$**. Atunci are loc relația** $(n+1)\cdot(n+2)\cdot.....\cdot(2n-1)\cdot(2n) = 2^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot.....\cdot(2n-1)$.

Demonstrație: Înmulțim cu $n!$ în ambele părți:

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot.....\cdot(2n-1)\cdot(2n)\cdot n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot.....\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot.....\cdot(2n-1)\cdot(2n) = (2n)! \quad \textbf{(1)}$$

$$2^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot.....\cdot(2n-1)\cdot n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot....\cdot n\cdot 2\cdot 2\cdot...\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot.....\cdot(2n-1) =$$

$$= (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot....(2\cdot n)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot.....\cdot(2n-1) =$$

$$= (2\cdot 4\cdot 6\cdot.....\cdot 2n)\cdot(1\cdot 3\cdot 5\cdot.....\cdot(2n-1)) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot.....\cdot(2n-1)\cdot(2n) = (2n)!. \quad \textbf{(2)}$$

Din **(1)** și **(2)** rezultă concluzia.

Problema 4.

Demonstrați că există 507 numere naturale consecutive al căror produs să fie egal cu $2\cdot 6\cdot 10\cdot....\cdot 2026$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot.....\cdot 2026 = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5)\cdot....\cdot(2\cdot 1013) = 2^{507}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot....\cdot(2\cdot 507-1). \quad \textbf{(1)}$$

Aplicând formula avem **(1)** $(1) = (507+1)\cdot(507+2)\cdot.....\cdot(507+507)$, **a**dică exact 507 numere naturale consecutive al căror produs este egal cu $2\cdot 6\cdot 10\cdot....\cdot 2026$.

Rezolvați singuri:

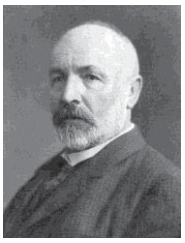
1. a) Găsiți factoriale cu următoarea proprietate: $x! \times y! = z!$ cu $x, y, z \in N$, $x, y, z \geq 2$,
b) Demonstrați că există o infinitate de soluții.
2. a) Găsiți $n \in N,\ n \geq 2$ și $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in N$, astfel încât: $x_1! + x_2! + x_3! + \ldots + x_n! = 2026!$ (*),
b) Găsiți cel mai mic $n \in N,\ n \geq 2$ și $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in N$ care verifică (*).

Bibliografie

1.Gazeta Matematică (Seria B)
2.Teme Supliment Gazeta Matematică, *Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu*
3.Recreații Matematice, problemă propusă de *Nicolas Diaconu*
4.Articol Factorial, *Lucian Tuțescu, George-Florin Șerban*
5.Essai sur la Théorie des Nombres, *Adrien-Marie Legendre*

„ Fiecare problemă pe care am rezolvat-o a devenit o regulă, care ulterior a servit pentru a rezolva alte probleme.”

Rene Descartes (1596-1650)



„ În matematică, arta de a pune întrebări
este mai importantă decât arta de a rezolva probleme.”
Georg Cantor (1845 – 1918)

4. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1425. O persoană rupe trei file consecutive dintr-o carte ale cărei pagini sunt numerotate de la 3 la 100 inclusiv. Este posibil ca, adunând numerele înscrise pe filele rămase, să obțină 4912?

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Calculăm suma numerelor înscrise pe paginile cărții până la eliminarea celor 3 file: 3+4+5+ ... +100 =100·101:2 – (1+2)=5050 – 3=5047. Dacă s-ar obține 4912, înseamnă că suma eliminată este 5047 – 4912=135. Pe paginile scoase sunt 6 numere consecutive: n; n+1; n+2; n+3; n+4; n+5. În acest caz avem: n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5=135, apoi 6n+15=135, 6n=120 iar n= 20. Aceasta înseamnă că paginile lipsă sunt: 20, 21, 22, 23, 24 și 25. În pofida faptului că această ecuație are soluție, răspunsul la întrebarea din enunț este negativ deoarece, când se deschide o carte, pe pagina din dreapta este înscris mereu un număr impar, deci nu poate fi 20.

G:1426. Arătați că numărul $y = 2025^{999} + 2026^{1000} + 2027^{1001}$ nu este pătrat perfect.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

***Rezolvare*:** Se va determina ultima cifră a fiecărui număr din sumă:
$u(2025^{999}) = 5$; $u(2026^{1000}) = 6$; $u(2027^{1001}) = u(7^{4\cdot 250+1}) = 7$, adică $u(y) = u(5+6+7) = u(18) = 8$ prin urmare y nu e pătrat perfect.

G:1427. Determinați cifrele distincte a, b, c astfel încât $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times \overline{aa} \times \overline{bc}$.

Alina Lazăr, Luiza Dumitrescu, Craiova

Rezolvare: Deoarece $\overline{abcabc}$ = 1001$\overline{abc}$ și 1001 = 7 x 11 x 13 = 77 x 13, găsim a = 7, b = 1, c = 3.
Observație: Varianta 1001 = 7 x 11 x 13 = 11 x 91 nu ne duce la a, b, c cifre distincte.

G:1428. Un traseu dreptunghiular are lungimea de 510 de metri și lățimea de 210 metri. Dintr-un punct oarecare al traseului pleacă în același timp, în sensuri opuse, doi căței cu vitezele constante $v_1 = 1,5m/s$ și $v_2 = 5,4km/oră$. Când se întâlnesc, se salută cu un lătrat voios, apoi continuă alergarea. Cât timp a mers fiecare până la punctul de plecare?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Lungimea întregului traseu este 2L+2l = 2(510+210)=1260 m. Cum distanța este egală cu produsul dintre timp și viteza constantă obținem: $t_1 = \frac{1260}{1,5} = 14$ minute iar din $v_2 = 5,4km/ora = 5,4 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 1,5m/s$ rezultă $t_1 = \frac{1260}{1,5} = 14$ minute, deci amândoi cățeii parcurg traseul în 14 minute.

G:1429. a) **Găsiți numerele prime p astfel încât 13p + 3 să fie număr prim.**
b) Găsiți numerele prime p astfel încât p + 10 și p + 20 să fie de asemenea numere prime.

Cristian Udrea, Craiova

Rezolvare: a) p = 2 este singurul număr prim care convine. Dacă p ≥ 3, atunci 13p + 3 este număr par.
b) p = 2 nu convine; p = 3 convine. 3 + 10 = 13, 3 + 20 = 23 sunt numere prime.
Dacă p ≥ 5 este prim, atunci p este de forma 6K + 1 sau 6K + 5. Pentru p = 6K + 1, p + 20 = 6K + 21, care se divide cu 3, iar pentru p = 6K + 5, p + 10 = 6K + 15 nu poate fi prim, deoarece se divide cu 3. Aşadar, p = 3 este singurul număr prim care convine.

G:1430. **a)Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care** $S_n = 1!+2!+3!+....+n!$ **se divide cu 81.**

b) Arătaţi că pentru orice $n \geq 8$ **numărul** S_n **nu se divide cu 81 .** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Dorina Goiceanu, Dan Grigorie, Craiova

Rezolvare: a) Se dau valori lui n şi se obţine cerinţa pentru n = 7; $1!+2!+3!+...+7! = 5913 = 81 \cdot 73$
b) Dacă n =8 atunci $S_8 = S_7 + 8! = 81 \cdot 73 + 8!$ **nu se divide cu 81** deoarece $8!$ nu se divide cu 81. Cum pentru $n \geq 9$, n! se divide cu 81 obţinem cerinţa ($9!, 10!, 11!, ..$ se divide cu $81 = 3^4$).

G:1431. **a) Calculaţi:** $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) - (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$ **.**

b) Demonstraţi că numărul: $10^{2k+2} - 10^{2k+1}$ **se poate scrie ca suma a cinci pătrate de numere naturale nenule, oricare ar fi** k **număr natural.**

c) Demonstraţi că numărul: 10^{3t+2} **se poate scrie ca suma a patru cuburi de numere naturale nenule, oricare ar fi** t **număr natural.** **Gheorghe Molea**, Curtea de Argeş

***Rezolvare*:** a) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) - (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = 100 - 90 = 10$.

b) $10^{2k+2} - 10^{2k+1} = 10^{2k+1}(10^1 - 10^0) = 10^{2k+1} \cdot 9 = 10^{2k} \cdot 10^1 \cdot 9 = 10^{2k} \cdot 90 =$

$= 10^{2k}(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = (10^k \cdot 2)^2 + (10^k \cdot 3)^2 + (10^k \cdot 4)^2 + (10^k \cdot 5)^2 + (10^k \cdot 6)^2$.

c) $10^{3t+2} = 10^{3t} \cdot 10^2 = 10^{3t} \cdot 100 = 10^{3t} \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = (10^t \cdot 1)^3 + (10^t \cdot 2)^3 + (10^t \cdot 3)^3 + (10^t \cdot 4)^3$.

G:1432. **Să se arate că** $n!$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ..... \cdot n)$ **nu se poate termina cu exact 48 de zerouri.**

Nicolas Diaconu, Gaillard, Franţa

Rezolvare: Deoarece $10 = 2 \cdot 5$ căutăm factorii 2 şi 5 pentru a număra zerourile care sunt date de fapt de câte ori apare 5 în descompunerea numerelor. De la 0 la 199 avem 39 multipli de 5;
Numerele 25,50,100, 125, 150, 175 conţin factorul 5 mai mult decât o dată. (avem 8 în plus).
Din cele de mai sus avem 47 de zerouri pentru 199!;
Dar 200! are 49 de zerouri deci niciun factor nu se poate termina cu 48 de zerouri.

G:1433. **Fie A cel mai mare număr natural format din cifre nenule a căror sumă este 2025. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului A la 1001.** **Gobej Ştefan, student, Warwick, Anglia**

Rezolvare: Facem observaţia că $1001 \cdot 111 = 111111$ şi, conform enunţului problemei, cel mai mare număr cu proprietatea cerută este $A = \underbrace{\overline{111...1}}_{\text{2025 de cifre}}$. Cum $2025 = 6 \cdot 337 + 3$ numărul poate fi scris sub forma:

$A = 111111 \cdot 10^{2019} + 111111 \cdot 10^{2013} + ... + 111111 \cdot 10^7 + 111111 \cdot 10^4 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 1001 \cdot 111\left(10^{2019} + 10^{2013} + ... + 10^7 + 10\right) + 1.$

Prin urmare, câtul împărţirii lui A prin 1001 este $111\left(10^{2019} + 10^{2013} + ... + 10^7 + 10\right)$, iar restul este 1.

G:1434. **Determinaţi numărul** $\overline{abcd}$ **pentru care** $\left(a+b+c+d\right)^d = \overline{abcd}$, **ştiind că d, a sunt consecutive în această ordine.** **Nicolae Ivăşchescu**, Canada

Rezolvare: Se dau valori cifrelor d şi a astfel că sunt convenabile valorile 3 şi 4, astfel că
$(4+b+c+3)^3 = \overline{4bc3}$. Dacă **a** ar fi 5 atunci membrul stâng ar fi mai mare ca cel din dreapta. Observăm că pentru b+c = 11 obţinem $(7+b+c)^3 = (7+11)^3 = 15^3 = 5832 \rangle \overline{4bc3}$. Fie b +c = 10 rezultă $(7+10)^3 = (17)^3 = 4913 \Rightarrow a = 4, b = 9, c = 1, d = 3$.

G:1435. **Arătaţi că** $16^n - 9^n - 7$ **se divide cu 56 pentru orice** $n \in \mathbb{N}^*$.

Mirela Ţacu, Sorina Tudor, Craiova

Rezolvare:

Din $(7+9)^n-9^n-7=M_7+9^n-9^n-7=M_7$. Deoarece $56=7\cdot 8$ rămâne să arătăm că 16^n-9^n-7 se divide cu 8 adică mai trebuie să arătăm că 9^n+7 se divide cu 8. Cum $9^n+7=(8+1)^n+7=M_8+1+7=M_8+8=M_8$ rezultă că problema e rezolvată.

G:1436. **Determinați numărul natural A care are proprietatea că dacă la sfârșitul său se mai scrie n cifre ($n\in\mathbb{N}^*$) numărul astfel obținut reprezintă suma tuturor numerelor naturale de la 1 la A.**

Marcu Maya – Cataleya, eleva, Craiova

Rezolvare:

Fie $B=\overline{a_1a_2...a_n}$ numărul de n cifre care se mai scrie la sfârșitul lui A. Atunci, $\overline{AB}=1+2+3+...+A$ sau $\overline{AB}=\frac{A\cdot(A+1)}{2}\Rightarrow A\cdot 10^n+B=\frac{A\cdot(A+1)}{2}\Rightarrow B=\frac{A\cdot\left(A-(2\cdot 10^n-1)\right.}{2}$. Dacă $A\langle 2\cdot 10^n-1\Rightarrow B\langle 0$, deci nu convine. Dacă $A\rangle 2\cdot 10^n-1\Rightarrow A\geq 2\cdot 10^n$ și B ar avea mai mult de n cifre, fals. Atunci, singurul număr care convine este $A=2\cdot 10^n-1$.

G:1438. **Să se compare numerele 11^{2026} și 37^{1353}.** **Ionel Tudor-Călugăreni**, Giurgiu

Rezolvare:

Din $11^{2026}=11\cdot 11^{3\cdot 675}=11\cdot\left(11^3\right)^{675}=11\cdot 1331^{675}$ și $37^{1353}=37\cdot 37^{2\cdot 676}=37\cdot\left(37^2\right)^{676}=37\cdot 1369^{676}$ și cum $675\langle 676$ și $1331\langle 1369$ rezultă $11^{2026}\langle 37^{1353}$.

G:1439. **Comparați numerele a = 2^{998} si b = 3^{665}.** **Ionuț Ivănescu**, Craiova

Rezolvare: Se va arăta că $b\rangle a$.

$3^{665}\rangle 2^{998}\,\big|\cdot 2\cdot 3\Rightarrow 2\cdot 3^{666}\rangle 3\cdot 2^{999}\Leftrightarrow\left(\frac{3^6}{2^9}\right)^{111}\rangle\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{729}{512}\right)^2\cdot\left(\frac{729}{512}\right)^{109}\rangle\frac{3}{2}$ adevărat deoarece $\left(\frac{729}{512}\right)^2\rangle 1,42^2\rangle 2\rangle\frac{3}{2}$.

G:1440. **Determinați câtul și restul împărțirii numărului $A=2027^{2029}$ la numărul $B=2027^{2026}+2027^{2027}$.** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: $B=2027^{2026}\cdot(1+2027)=2028\cdot 2027^{2026}$,

$A=2027^{2029}=2027^{2029}+2027^{2028}-2027^{2028}-2027^{2027}+2027^{2027}=$

$=\left(2027^{2027}+2027^{2026}\right)\left(2027^2-2027\right)+2027^{2027}=\left(2027^{2027}+2027^{2026}\right)\left(2027\cdot 2026\right)+2027^{2027}=$

$=B\cdot 2027\cdot 2026+2027^{2027}$. Cum $2027^{2027}\langle 2027^{2027}+2027^{2026}=B$, atunci câtul este $2027\cdot 2026$ iar restul este 2027^{2027}.

▪ Clasa a VI-a

G:1441. **Dacă $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Z}^*$, calculați $1961+x\cdot t-y\cdot z$.**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Din $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}\Rightarrow x\cdot t=y\cdot z\Rightarrow 1961+x\cdot t-y\cdot z=1961+0=1961.$

G:1442. **Numerele naturale nenule x, y, z verifică condițiile:**
a) xy se divide cu $3^{14}\cdot 5^{10}$; b) yz se divide cu $3^{17}\cdot 5^{17}$; c) zx se divide cu $3^{20}\cdot 5^{37}$. Aflați cea mai mică valoare posibilă a produsului $x\cdot y\cdot z$.

Mirela Țacu, Alexandra Răduț, Craiova

Rezolvare: Fie $x=3^{x_1}\cdot 5^{y_1}, y=3^{x_2}\cdot 5^{y_2}, z=3^{x_3}\cdot 5^{y_3}$ și din condițiile problemei obținem

$x_1+x_2\geq 14,\ x_2+x_3\geq 17,\ x_1+x_3\geq 20,$ iar prin adunare rezultă $x_1+x_2+x_3\geq \frac{51}{2}=20,5,\ \Rightarrow x_1+x_2+x_3\geq 26.$

Apoi, $y_1+y_2+y_3\geq y_1+y_3\geq 37$ și $xyz=3^{x_1+x_2+x_3}\cdot 5^{y_1+y_2+y_3}\geq 3^{26}\cdot 5^{37}$ care este și cea mai mică valoare a produsului care este atinsă pentru $x=3^8\cdot 5^{18}, y=3^6\cdot 5^0, z=3^{12}\cdot 5^{19}$.

G:1443. **Determinați numerele naturale x,y,z care verifică simultan condițiile: $5x-3y=y-5z=0$ și $x+2y+3z=3600$.** **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare: Din $5x-3y=y-5z=0\Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{1}=k\Rightarrow\ x=3k,\ y=5k,\ z=k$. Prin înlocuire în cealaltă relație se obține k = 225 adică x= 675, y=1125, z=225.

G:1444. **Fie p și q două numere naturale prime diferite și mulțimea $A=\left\{x\,\middle|\,x=p^m\cdot q^n,\ m,n\in N\right\}$.**
Arătați că oricum am alege cinci elemente distincte ale mulțimii A, există două dintre ele al căror produs este pătrat perfect. **Gobej Ștefan**, student Warwick, Anglia

***Rezolvare*:** Produsul a două elemente distincte $a,b\in A$ este $a\cdot b$ și este pătrat perfect atunci când numerele prime p și q ajung să fie cu exponenți pari.

Dacă (m_k, n_k), $k=\overline{1,5}$ sunt exponenții lui p și respectiv q în cele 5 numere distincte alese din mulțimea A, avem patru posibilități (par; par), (par; impar), (impar; par) și (impar; impar). Conform principiului cutiei (Dirichlet) găsim cel puțin două perechi $(m_i;n_i),(m_j;n_j)$, având componentele de aceeași paritate, deci m_i+m_j este par și n_i+n_j este par.

G:1445 **Să se scrie fracția $\frac{1}{2026}$ ca o sumă de 5 fracții distincte, fiecare având numărătorul egal cu 1.**

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Utilizăm faptul că a = a · 1 și identitatea $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$.

Așadar, $\frac{1}{2026}=\frac{1}{2026}\cdot 1=\frac{1}{2026}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=$

$=\frac{1}{2026}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4052}+\frac{1}{12156}+\frac{1}{24312}+\frac{1}{40520}+\frac{1}{10130}$. (Primii 8 termeni din prima paranteză au fost grupați câte doi).

G:1446 **Arătați că are loc relația $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2026}>\frac{2026}{2027}$.** **Ion Stănescu**, Buzău

Rezolvare: Din $\frac{1}{1}>\frac{1}{1}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2026}>\frac{1}{2026}-\frac{1}{2027}$ rezultă cerința.

G:1447 **Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $x^2+py+p=xy+(2p+1)x$, unde p este un număr prim dat.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Observăm că p nu este soluție pentru ecuația dată. Din $y(x-p)=x^2-(2p+1)x+p \Rightarrow$

$y=\frac{x^2-(2p+1)x+p}{x-p}=\frac{(x-p-1)(x-p)-p^2}{x-p}=x-p-1-\frac{p^2}{x-p} \Rightarrow\ y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (x-p)\big|p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-p)\in\{-1;1;-p;p;-p^2;p^2\}$. De aici se găsesc toate valorile pentru x și y.

$\Rightarrow (x;y)\in\{(p-1;p^2-1);(p+1;-p^2),(0;-1),(2p;-1),(-p^2+p;-p^2),(p^2+p;p^2-2)\}$

G:1448 **. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive unde** $a,b\geq 1$ **sau** $a,b\leq 1$**. Să se arate că** $1+a^2\cdot b^2+c^2\geq ab+bc+ca$**.** **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Avem cu ipoteza: $(a^2-1)\cdot(b^2-1)\geq 0$ adică $1+a^2\cdot b^2\geq a^2+b^2\Leftrightarrow$

$1+a^2\cdot b^2+c^2\geq a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \Rightarrow\ 1+a^2\cdot b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

G:1449 **Rezolvați în mulțimea** $\mathbb{Z}$ **ecuația:** $\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+3}{4}+\frac{x^2+5}{6}+.....+\frac{x^2+2025}{2026}=1013$**.**

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare. Ecuația dată este echivalentă cu $\frac{x^2+1}{2}-1+\frac{x^2+3}{4}-1+\frac{x^2+5}{6}-1+.....+\frac{x^2+2025}{2026}-1=0\Rightarrow$

$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+....+\frac{1}{2026}\right)=0\Rightarrow x\in\{-1;1\}$.

G:1450. Arătați că fracția $F=\frac{25^{25}+47^{47}}{25^{47}\cdot 47^{25}+1}$**, se simplifică prin produsul a patru numere naturale consecutive.** **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

***Rezolvare*:** Se arată că atât numărătorul cât și numitorul se simplifică prin $24=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$.

$25^{25}+47^{47}=(24+1)^{25}+(2\cdot 28-1)^{47}=(M_{24}+1)+M_{24}+(-1)^{47}=M_{24}+1-1=M_{24}$. (1)

$25^{47}\cdot 47^{25}+1=(24+1)^{47}\cdot(2\cdot 28-1)^{25}=(M_{24}+1)\cdot(M_{24}+(-1)^{25})+1=(M_{24}+1)\cdot(M_{24}-1)+1=M_{24}$, (2)

Din (1) și (2), rezultă că F se simplifică prin 24, adică produsul a patru numere naturale consecutive

G:1451. Două unghiuri suplementare au bisectoarele care formează cu latura comună două unghiuri cu măsurile două numere pătrate perfecte. Aflați măsurile unghiurilor suplementare.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Fie $\sphericalangle(AOC)$ și $\sphericalangle(BOC)$ unghiurile suplementare cu latura comună $(OC$ și $a=m[\sphericalangle(AOC)]$, $b=m[\sphericalangle(BOC)]$. Rezultă $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=90^0=9^0+81^0\Rightarrow a=18^0,b=162^0$.

G:1452. Bisectoarea AD a unghiului $\sphericalangle(BAC)$ **intersectează BC în D. Paralela prin D la AC intersectează AB în E și paralela prin E la BC intersectează AC în F. Arătați că AE =FC.**

Amelia Curcă- Nastașelu, Filiași

Rezolvare: Cum $DE\,||\,AC$ rezultă că triunghiul ΔAED este isoscel $(\sphericalangle DAC,\sphericalangle ADE)$ alterne interne. Rezultă $AE=DE$ (1). Cum laturile opuse FC, ED, și CD, FE nu se intersectează două câte două rezultă că sunt paralele, și $DE=FC$, (2). Din (1) și (2) rezultă $AE=FC$.

▪ Clasa a VII-a

G:1453. Aflați ultimele 505 cifre ale numărului $A=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+.....+2026\cdot 2026!$, **unde** $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n$ **(n factorial).** **Marcu Maya Cataleya**, eleva, Craiova

Rezolvare: Deoarece $n\cdot n!=(n+1-1)\cdot n!=(n+1)\cdot n!-1\cdot n!=(n+1)!-n!$ rezultă

$A=2!-1!+3!-2!+4!-3!+.....+2027!-2026!=2027!-1$.

Numărul de zerouri cu care se termină A este dat de exponentul lui 5 în 2027! adică

$\exp_5(2027!)=\left[\frac{2027}{5}\right]+\left[\frac{2027}{5^2}\right]+\left[\frac{2027}{5^3}\right]+\left[\frac{2027}{5^4}\right]=405+81+16+3=505$. Cum $A=2027!-1$,

prin urmare, ultimele 505 cifre ale lui A sunt 505 cifre de 9.

G:1454. Cercetați dacă numerele $a=\left[2\frac{1}{3}+1,(2)-0,25\right]\cdot 5\frac{1}{7}-10,$

$b=\sqrt{33,64}:2,9+\sqrt{1\frac{13}{36}}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{-1}$ **sunt soluție a sistemului de ecuații** $\begin{cases}\frac{x+1}{y}=\frac{8}{3},\\ \frac{y+1}{x}=\frac{4}{7}.\end{cases}$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Se calculează $a=7,\ b=3$ și acestea verifică ecuațiile sistemului.

G:1455. Arătați că numărul 3 se poate scrie de forma $x^2+y^2+(xy)^2-254016^2$, **unde** $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Se va arăta că ecuația $x^2+y^2+(xy)^2-254016^2=3$ are soluții în $\mathbb{N}^*$. Pentru aceasta vom scrie

$x^2+y^2+(xy)^2+1-1=254016^2+3\Leftrightarrow\ (x^2+1)(y^2+1)=254016^2+3+1=254016^2+4.$ **(*)**

$254016=4\cdot 63504=4^2\cdot 15876=4^3\cdot 3969=....=7^2\cdot 8^2\cdot 9^2\Rightarrow$

$254016^2=7^4\cdot 8^4\cdot 9^4=(56\cdot 9)^4\Rightarrow\ 254016^2+4=504^4+4=\left(504^2\right)^2+2^2=\left(504^2+2\right)^2-2\cdot 504^2\cdot 2=$

$=\left(504^2+2\right)^2-1008^2=\left(504^2+2-1008\right)\cdot\left(504^2+2+1008\right)=\ \left(504^2-1006\right)\cdot\left(504^2+1010\right).$

Mai departe, se arată că $504^2-1006=(503+1)^2-1006=...=503^2+1$ iar

$504^2+1010=(505-1)^2+1010=...=502^2+1$ iar ecuația (*) devine

$(x^2+1)(y^2+1)=\left(503^2+1\right)\cdot\left(505^2+1\right)$ care are evident soluțiile naturale $(x;y)\in\{(503;505),(505;503)\}$.

G:1456. Determinați numărul rațional x pentru care

$\frac{x-1}{2025}+\frac{x-2}{2024}+\frac{x-3}{2023}+\frac{x-4}{2022}=x+\frac{x-2024}{2}+\frac{x-2023}{3}+\frac{x-2022}{4}-2025.$

Gobej Ștefan, student, Warwick, Anglia

Rezolvare: Observăm că fiecare fracție a ecuației de mai sus poate fi scrisă astfel încât să obținem un factor comun. Partea stângă a ecuației devine:

$\frac{x-2026+2025}{2025}+\frac{x-2026+2024}{2024}+\frac{x-2026+2023}{2023}+\frac{x-2026+2022}{2022}=$

$=\frac{x-2026}{2025}+1+\frac{x-2026}{2024}+1+\frac{x-2026}{2023}+1+\frac{x-2026}{2022}+1=$

$=(x-2026)\left(\frac{1}{2025}+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}\right)+4\ (R_1)$. Partea dreaptă a ecuației devine:

$x-2025+\frac{x-2024}{2}+\frac{x-2023}{3}+\frac{x-2022}{4}=\ \frac{x-2026+1}{1}+\frac{x-2026+2}{2}+\frac{x-2026+3}{3}+\frac{x-2026+4}{4}=$

$=\frac{x-2026}{1}+1+\frac{x-2026}{2}+1+\frac{x-2026}{3}+1+\frac{x-2026}{4}+1=(x-2026)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+4\ (R_2)$

Din $\left[\left(R_1\right)=\left(R_2\right)\right]$ rezultă $\left(x-2026\right)\left(\frac{1}{2025}+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}\right)\not4=\left(x-2026\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\not4$

$\Rightarrow x-2026=0\Rightarrow$ soluție unică $x=2026$.

G:1457. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 51}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 50}}+.....+\frac{1}{\sqrt{51\cdot 1}}\rangle\ \frac{51}{26}$. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare:

Se folosește inegalitatea mediilor $\frac{a+b}{2}\rangle\ \sqrt{a\cdot b}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\rangle\ \frac{2}{a+b}$ pentru fiecare termen al sumei S din stânga rezultând: $S\rangle\ \frac{1}{26}+\frac{1}{26}+....+\frac{1}{26}=\frac{51}{26}$.

G:1458. Fie numerele raționale nenule $a_1, a_2, ..., a_{2025}$ **invers proporționale cu numerele** 1, 2, 3, ..., 2025. **Aflați numărul rațional x pentru care are loc egalitatea** $2025\cdot a_{2025}=x\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_{2025}}{2026}\right)$. **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Din ipoteză $1\cdot a_1=2\cdot a_2=3\cdot a_3=...=2025\cdot a_{2025}$. Obținem $a_2=\frac{a_1}{2}$, $a_3=\frac{a_1}{3}$, ..., $a_{2025}=\frac{a_1}{2025}$.

Egalitatea din problemă devine: $\underset{=2025\cdot a_{2025}}{a_1}=x\left(\frac{a_1}{1\cdot 2}+\frac{a_1}{2\cdot 3}+...+\frac{a_1}{2025\cdot 2026}\right)\Leftrightarrow$

$a_1=x\cdot a_1\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}\right)\Big|:a_1\Leftrightarrow 1=x\cdot\left(1-\frac{1}{2026}\right)\Leftrightarrow 1=x\cdot\frac{2025}{2026}\Rightarrow x=\frac{2026}{2025}$.

G:1459. Să se demonstreze inegalitatea

$\frac{1}{n+1\cdot 2}+\frac{2}{n+2\cdot 3}+\frac{3}{n+3\cdot 4}+.....+\frac{n}{n+n\cdot(n+1)}\le\frac{n\left(n^2+5\right)}{2(n+2)^2},\ \forall n\ge 1$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Se folosește inegalitatea $\frac{k}{n+k\cdot(k+1)}\le\frac{(n-1)\cdot k+3}{(n+2)^2},\ \forall n,k\ge 1$ în care se dau valori lui k de la 1 la n după care se adună relațiile.

G:1460. Să se arate că au loc egalitățile: $\frac{2\cdot tg15^0}{1-tg^2 15^0}=tg30^0=\frac{2}{ctg15^0-tg15^0}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Observăm că $\frac{2}{ctg15^0-tg15^0}=\frac{2}{\frac{1}{tg15^0}-tg15^0}=\frac{2\cdot tg15^0}{1-tg^2 15^0}$, mai trebuie aflat $tg15^0$ și înlocuit în una din relații. $tg15^0=\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15^0\cdot\cos 15^0}{\cos^2 15^0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 30^0}{\frac{1+\cos 30^0}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

G:1461. Fie a,b,c numere strict pozitive astfel încât $ab+bc+ca=1$. **Arătați că** $ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+4abc(a+b+c)\ge 2$ **. În ce caz avem egalitate ?**

Ana Truică, Rareș Magher, elevi, Craiova

***Rezolvare*:** Se folosește inegalitatea $x^2+y^2\ge 2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ cu egalitate pentru x = y.

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\geq 2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)=$$

În cazul nostru, $=2\left[\left(ab+bc+ca\right)^2-2abc(a+b+c)\right]=2-4abc(a+b+c)$ și de aici inegalitatea din enunț. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

G:1462. Demonstrați inegalitatea $4\leq\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{2b}{a+b}\right)\leq\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$ **, unde** $a,b,c>0$

Mihaly Bencze, Brașov și Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $\frac{a+b}{2a}+\frac{2a}{a+b}\geq 2$ și $\frac{a+b}{2b}+\frac{2b}{a+b}\geq 2$ de unde rezultă imediat inegalitatea din stânga.

$\frac{a+b}{2a}+\frac{2a}{a+b}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Leftrightarrow 2a^3-3a^2b+b^3\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2(2a+b)\geq 0$, adevărat.

Similar $\frac{a+b}{2b}+\frac{2b}{a+b}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, de unde prin înmulțire deduce inegalitatea din dreapta.

G:1463. Fie mulțimea $A=\left\{n\in N^*\,\middle|\,1<\sqrt{1+\sqrt{n}}<2\right\}$. **Enumerați elementele mulțimii A și apoi determinați** $n\in A$ **cu proprietatea** $\sqrt{n}\cdot\left|1-\sqrt{1+\sqrt{n}}\right|<1$. **Gobej Cristina-Dumitra,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Din $n\in N^*\Rightarrow\sqrt{n}\geq 1\Rightarrow 1+\sqrt{n}\geq 2\Rightarrow\sqrt{1+\sqrt{n}}\geq\sqrt{2}>1$

$\sqrt{1+\sqrt{n}}<2\Leftrightarrow 1+\sqrt{n}<4\Leftrightarrow\sqrt{n}<3$, deci $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Cum $\left|1-\sqrt{1+\sqrt{n}}\right|=\sqrt{1+\sqrt{n}}-1$, proprietatea cerută în enunț devine :

$$\sqrt{1+\sqrt{n}}-1<\frac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{n}}<\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\Big|^2\Leftrightarrow 1+\sqrt{n}<\frac{\left(1+\sqrt{n}\right)^2}{n}\Big|:\left(1+\sqrt{n}\right)\Leftrightarrow 1<\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dacă $n\geq 3\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}<1$. Atunci, inegalitatea este verificată pentru $n\in\{1,2\}$.

G:1464. Dreptunghiul ABCD cu AB=8 și BC=4 se completează cu pătratele FADE, HBCG, $FG\cap AD=\{M\}$, $FG\cap BC=\{N\}$. **Arătați că** $A_{ABNM}=\left(A_{CNG}\right)^4$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Triunghiurile GCN și GEF sunt asemenea în raportul de 1 la 4. Cum CN=1=AM, NB=3 atunci

$A_{CNG}=\frac{4\cdot 1}{2}=2$, $A_{ABNM}=\frac{(3+1)\cdot 8}{2}=16\Rightarrow c.c.t.d.$

G:1465. a) Fie $ABCD$ **un patrulater convex și** M **mijlocul lui** AB **Fie** $MN\parallel BC$, $MN=BC$, $MP\parallel AD$, $MP=AD$, N **și** P **în același semiplan cu** C **și** D **Dacă** Q **este mijlocul lui** CD **arătați că punctele** N, Q **și** P **sunt coliniare**

b) Fie $ABCD$ **un patrulater convex și** M **mijlocul lui** AB **Dacă** $MN\parallel BC$ **și** $MN=BC$ **(**N **în același semiplan cu** C **și** D**). Fie** Q **mijlocul lui** CD **și** P **simetricul lui** N **față de** Q **Arătați că** $MP\parallel AD$ **și** $MP=AD$. **Panduru Mădălina**, Bălcești, Vâlcea, **Militaru- Cismaru Gabriela**, Craiova

Rezolvare: Cum $MBCN$ e paralelogram $\Rightarrow NC\underset{=}{\parallel}MB$ și $AMPD$ este tot paralelogram $\Rightarrow BD\underset{=}{\parallel}AM$ De aici $DQCN$ paralelogram Așadar P,Q,N coliniare (în orice paralelogram vârfurile opuse și mijlocul unei diagonale sunt coliniare).

Deoarece $CQ = QD$ și $PQ = QP$ obținem $DQCN$ paralelogram $\Rightarrow DP \overset{\parallel}{=} NC$ și cum $NC \overset{\parallel}{=} MB = AM \Rightarrow AMPD$ paralelogram și de aici $AD \overset{\parallel}{=} MQ$.

G:1466. Se consideră trapezul ABCD având bazele AB și CD. Prin punctul O = AC∩BD se duce paralela MN la bazele trapezului, M∈AD și N∈BC. Să se demonstreze că lungimea segmentului MN este media armonică a bazelor trapezului ($m_h(a; b) = \frac{2ab}{a+b}$).

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Pentru simplitate notăm: MA=m; MD=n; AB=x și CD=y. În continuare utilizăm cunoștințe de asemănare a triunghiurilor. ΔDMO este asemenea cu ΔDAB, iar ΔAOM este asemenea cu ΔACD. Avem: $\frac{MO}{x} = \frac{n}{n+m}$ (1) și $\frac{MO}{y} = \frac{m}{n+m}$ (2). Adunăm (1) cu (2): $\frac{MO}{x} + \frac{MO}{y} = \frac{n}{n+m} + \frac{m}{n+m} = \frac{n+m}{n+m} = 1$. Apoi, $MO\cdot(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 1$, de unde $MO = \frac{xy}{x+y}$. La același rezultat se ajunge și pentru NO. Prin urmare, $MN = \frac{2xy}{x+y}$.

G:1467. În patrulaterul ABCD, $m(\sphericalangle ABC) = 106^0$ și $m(\sphericalangle ADC) = 127^0$. Dacă AB=BC=3 determinați lungimea diagonalei BD.

Daniela Stoian, Mihaela Daianu, Craiova

Rezolvare: Considerăm cercul de centru B și raze AB=BC. Cum arcul mic AC are măsura 106^0 atunci arcul mare AC este $360^0 - 106^0 = 254^0 = 2\cdot 127^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ADC) = 127^0 \Rightarrow D \in C(B;r)$. Rezultă că BC=3.

▪ Clasa a VIII-a

G:1468. Puteți găsi câteva modalități de a scrie numărul $2023\cdot 2025$ ca o diferență de două pătrate? Dar pentru numărul $2024\cdot 2025$?

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare:

Se poate folosi identitatea $a\cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ sau altele și se obține $2023\cdot 2025 = 2024^2 - 1^2$.

Pentru $2024\cdot 2025 = 4\cdot 2025\cdot 506$ se poate folosi identitatea $4a\cdot b = (a+b)^2 - (a-b)^2$ și se obține $2024\cdot 2025 = 2531^2 - 1519^2$ sau mai putem avea și $2024\cdot 2025 = 2935^2 - 2125^2$.

G:1469. Determinați numărul natural x pentru care numărul $x^2 + 2x + 2028$ este pătrat perfect.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Rezolvare: Din $(x+1)^2 + 2027 = k^2 \Leftrightarrow (k+x+1)\cdot(k-x-1) = 2027$ care este număr prim, deci $k+x+1 = 2027$ și k-x-1=1. În final se obține x = 1012.

G:1470. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x(x-1)^2 + y(y-1)^2 = x(3z+7y)$.

Molea Laura și Molea Gheorghe, Curtea de Argeș

Rezolvare: Ecuația devine succesiv $x^3 + y^3 - 5x^2 - 2y^2 + x + y - 7xy = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy) + (x+y) - 5x(x+y) - 2y(x+y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy + 1 - 5x - 2y) = 0$. Avem situațiile: 1) $x + y = 0 \Rightarrow x = k, y = -k, k \in Z$ și

2) $x^2 + y^2 - xy + 1 - 5x - 2y = 0 \Leftrightarrow x(x-6) - x(y-1) + (y-1)^2 = 0$.

Notăm $z = y - 1 \Rightarrow z^2 - xz + x(x-6) = 0, \Delta = x^2 - 4x(x-6) = 3x(8-x), \Delta \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,8]$,

deci $x \in \{0,1,2,...,8\}$ şi vom verifica care dintre aceste valori conduce la $z = \frac{x \pm \sqrt{3x(8-x)}}{2} \in Z$.

Obţinem $(x,y) \in \{(k,-k),(0,1),(2,5),(2,-1),(6,7),(6,1),(8,5)\}$.

G:1471. Dacă a,b,c,d sunt numere prime diferite, niciunul nu este egal cu 7, să se arate că $abc+bcd+cda+dab+289 \le 2abcd$. **Florin Rotaru**, Focşani

Rezolvare: Considerăm cele mai mici valori pentru a,b,c,d, astfel, fie $a \ge 2,\ b \ge 3,\ c \ge 5,\ d \ge 11$ şi deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{289}{abcd} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{289}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11} = 2$ care este de fapt forma inegalităţii din enunţ la împărţirea cu abcd.

G:1472. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\frac{x-5}{6}+\frac{x-6}{5}=\frac{5}{x-6}+\frac{6}{x-5}$. **Mirela Ţacu**, Craiova

Rezolvare: Condiţii de existenţă: $x \in \mathbb{R}\setminus\{5;6\}$. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$\left(\frac{x-5}{6}-\frac{6}{x-5}\right)+\left(\frac{x-6}{5}-\frac{5}{x-6}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2-6^2}{6(x-5)}+\frac{(x-6)^2-5^2}{5(x-6)}=0 \Rightarrow$$

$$(x-11)\cdot\left(\frac{x+1}{6(x-5)}+\frac{x-1}{5(x-6)}\right)=0 \Rightarrow x \in \left\{0;11;\frac{61}{11}\right\}.$$

G:1473. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:
$|x-1|+|x-2|+.....+|x-65|=66\cdot(x-66)$. **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Cum membrul stâng este pozitiv rezultă $(x-66) \ge 0 \Rightarrow x \ge 66$.

Atunci, ecuaţia dată devine: $x-1+x-2+x-3+.....+x-65=66(x-66) \Rightarrow$

$66x-2145=66x-4356 \Rightarrow x=2211$.

G:1474. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x^4+24x^3+176x^2+512x+512=0$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Ecuaţia dată se mai scrie $x^4+3\cdot 2^3\cdot x^3+2^4\cdot 11\cdot x^2+2^9\cdot x+2^9=0$ şi efectuând substituţia $x=4t=2^2\cdot t$ obţinem $2^8t^4+3\cdot 2^9t^3+11\cdot 2^8t^2+2^{11}t+2^9=0 \,|:2^8 \Rightarrow\ t^4+6t^3+11t^2+8t+2=0$ ecuaţie echivalentă cu $(t+1)\cdot\left(t^3+5t^2+6t+2\right)=0$ cu soluţiile $t \in \left\{-1;-2\pm\sqrt{2}\right\}$. Cum x = 4**t** obţinem:

Rezultă $x_1=x_2=-4$ şi $x_{3,4}=-8\pm 4\sqrt{2}$.

G:1475. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia:
$(x-26)^2+(x-25)^2+...(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+.....+(x+25)^2+(x+26)^2 \ge 2026$ **.**

Ana Truică, eleva, Craiova

Rezolvare: Membrul stâng este mai mare decât

$26x^2+x^2+26x^2+2\left(1^2+2^2+....+26^2\right) \ge 53x^2+2\cdot\frac{26\cdot 27\cdot 53}{6} > 2026$. Rezultă că $x \in \mathbb{R}$.

G:1476. Calculaţi valoarea expresiei: $E(a;b)=\frac{7\cdot a^{2025}-5\cdot b^{2025}}{7\cdot a^{2025}+5\cdot b^{2025}}$ **dacă** $a^2+\frac{b^3}{a}=b^2+\frac{a^3}{b}$ **.**

Mirea Mihaela Mioara, Daianu Mihaela, Craiova

Rezolvare: Evident a şi b trebuie să fie nenule. Din $a^2-b^2+\frac{b^3}{a}-\frac{a^3}{b}=0 \Rightarrow\ \left(a^2-b^2\right)\left(\frac{ab-a^2-b^2}{ab}\right)=0$,

Deoarece $ab-a^2-b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4} > 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. atunci $a=b$ sau **a = - b.**

Dacă **a = b** rezultă $E(a;b)=\dfrac{2a^{2025}}{12a^{2025}}=\dfrac{1}{6}$ iar dacă **a = - b** atunci, $E(a;b)=\dfrac{-12a^{2025}}{-2a^{2025}}=6$.

G:1477. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x^3+1}{9}+\frac{x^3+2}{10}+\frac{x^3+3}{11}+...+\frac{x^3+2025}{2033}=2025.$$

Gobej Ștefan, student Warwick, Anglia

Rezolvare: Ecuația este echivalentă cu:

$$x^3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2033}\right)+\frac{1}{9}+\frac{2}{10}+\frac{3}{11}+...+\frac{2025}{2033}=\underbrace{1+1+...+1}_{\text{2025 de termeni}}\Leftrightarrow$$

$$x^3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2033}\right)=\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{2}{10}\right)+\left(1-\frac{3}{11}\right)+...+\left(1-\frac{2025}{2033}\right)\Leftrightarrow$$

$$x^3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2033}\right)=8\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2033}\right)\Leftrightarrow x^3=8$$

Din $x^3-8=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=0\Leftrightarrow(x-2)\underbrace{\left[(x+1)^2+3\right]}_{\geq 3}=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$ este singura soluție reală a ecuației.

G:1478. Fie $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}$. **Să se arate că** $\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{24}a_4\right)^2\leq\frac{1}{2}a_1^{\,2}+\frac{1}{3}a_2^{\,2}+\frac{1}{8}a_3^{\,2}+\frac{1}{24}a_4^{\,2}$.

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare: În inegalitatea lui Cauchy- Buniakowski- Schwarz scrisă sub forma ,

$\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4\right)^2\leq\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}\right)\cdot\left(y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+y_3^{\,2}+y_4^{\,2}\right)$ punem

$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}a_2,\ x_3=\frac{1}{\sqrt{8}}a_3,\ x_4=\frac{1}{\sqrt{24}}a_4$, și $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y_3=\frac{1}{\sqrt{8}},\ y_4=\frac{1}{\sqrt{24}}$.

Atunci, $\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{24}a_4\right)^2\leq\left(\frac{1}{2}a_1^{\,2}+\frac{1}{3}a_2^{\,2}+\frac{1}{8}a_3^{\,2}+\frac{1}{24}a_4^{\,2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)$ cee ce trebuia demonstrat deoarece $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=1$.

G:1479. Dacă $a\in\mathbb{R}$**, atunci demonstrați egalitatea:**

$$\left((a^3-2a)^2+(2a^2-1)^2\right)\left((a^6-2a^2)^2+(2a^4-1)^2\right)\left((a^9-2a^3)^2+(2a^6-1)^2\right)=(a^6+1)(a^{12}+1)(a^{18}+1).$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: $(a^3-2a)^2+(2a^2-1)^2=a^6-4a^4+4a^2+4a^4-4a^2+1=a^6+1$;

$(a^6-2a^2)^2+(2a^4-1)^2=a^{12}-4a^8+4a^4+4a^8-4a^4+1=a^{12}+1$;

$(a^9-2a^3)^2+(2a^6-1)^2=a^{18}-4a^{12}+4a^6+4a^{12}-4a^6+1=a^{18}+1$.

G:1480. Dacă $k,x,y,z>0\Rightarrow$

$$(k+1)\sum xy\leq\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}+\sqrt{yz(ky+z)(y+kz)}+\sqrt{zx(kz+x)(z+kx)}\leq(k+1)\sum x^2$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}\geq(k+1)xy\Leftrightarrow k(x-y)^2\geq 0\Rightarrow$

$$\sum_{cyc}\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}\geq\sum_{cyc}(k+1)xy=(k+1)\sum_{cyc}xy$$

$$\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}=\sqrt{x(kx+y)\cdot y(x+ky)}\overset{MA-MG}{\leq}\frac{x(kx+y)+y(x+ky)}{2}=$$

$$=\frac{(kx+x)(kx+y)+(ky+y)(x+ky)}{2(k+1)}\overset{MA-MG}{\leq}\frac{(kx+x+kx+y)^2+(ky+y+x+ky)^2}{8(k+1)}=$$

$$=\frac{\big((2k+1)x+y\big)^2+\big(x+(2k+1)y\big)^2}{8(k+1)}=\frac{(2k^2+2k+1)(x^2+y^2)+2(2k+1)xy}{4(k+1)}\overset{MA-MG}{\leq}$$

$$\frac{(2k^2+2k+1)(x^2+y^2)+(2k+1)\left(x^2+y^2\right)}{4(k+1)}=\frac{(k+1)^2(x^2+y^2)}{2(k+1)}=\frac{(k+1)(x^2+y^2)}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}\leq\sum\frac{(k+1)(x^2+y^2)}{2}=\frac{(k+1)(\sum x^2+\sum y^2)}{2}=(k+1)\sum x^2.$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{xy(kx+y)(x+ky)}\leq\sum_{cyc}\frac{(k+1)(x^2+y^2)}{2}=\frac{(k+1)(\sum x^2+\sum y^2)}{2}=(k+1)\sum_{cyc}x^2$$

G:1481. Rezolvați în R_+^* sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}2+\dfrac{8x^3}{(1+y)(1+z)}=6y-x-z\\ 2+\dfrac{8y^3}{(1+z)(1+x)}=6z-y-x\\ 2+\dfrac{8z^3}{(1+x)(1+y)}=6x-z-y\end{cases}$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Adunând ecuațiile sistemului obținem:

$$\left(2+y+z+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}-6x\right)+\left(2+z+x+\frac{8y^3}{(1+z)(1+x)}-6x\right)+$$

$$+\left(2+x+y+\frac{8z^3}{(1+x)(1+y)}-6z\right)=0.$$ Cu inegalitatea mediilor avem:

$$2+y+z+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}=(1+y)+(1+z)+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{(1+y)(1+z)\cdot 8x^3}{(1+y)(1+z)}}=6x.$$

Deci, avem egalitate: $1+y=1+z=\dfrac{8x^3}{(1+y)(1+z)}$.

Trebuie să rezolvăm ecuația $2+\dfrac{8x^3}{(1+x)^2}=4x\Leftrightarrow(x-1)^2(2x+1)=0$. Singura soluție $(1,1,1)$.

G:1482. O prismă triunghiulară regulată dreaptă are aria laterală egală cu suma ariilor bazelor, iar suma dintre latura bazei l, și înălțimea prismei h, este $1+2\sqrt{3}$. Arătați că $l^2+h^2=13$.

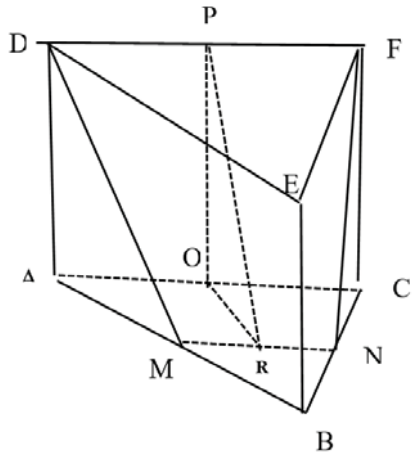
Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $3l\cdot h=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow l=2\sqrt{3}\cdot h\Rightarrow l=2\sqrt{3},\ h=1$ și $\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2=13$.

G:1483. ABCDEF este o prismă triunghiulară regulată în care toate muchiile sunt congruente (ABC este o bază). Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC. Să se afle AB dacă MNFD are aria egală cu $3\sqrt{19}$ cm².

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:



Notăm muchia prismei cu x. Deoarece MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă MN∥AC (1). Apoi, ACFD fiind pătrat, avem DF∥AC (2). Din (1) și (2) rezultă MN∥DF, deci MNFD este trapez (de fapt, este chiar trapez isoscel, având DM=FN, conf. cazului C.C.). Bazele sunt DF=x și MN=$\frac{x}{2}$. Pentru înălțime, luând P mijlocul lui DF, trasăm PQ ⊥ AC și rezultă PQ ⊥ (ABC). Se duce QR ⊥ MN și, din teorema directă a celor trei perpendiculare, avem PR ⊥ MN și totodată PR ⊥ DF. În continuare, PQ=x, iar QR=$\frac{x\sqrt{3}}{4}$ (jumătate din înălțimea triunghiului echilateral). După calcule se ajunge la PR=$\frac{x\sqrt{19}}{4}$. Exprimăm aria trapezului MNFD: $A=\frac{\left(x+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x\sqrt{19}}{4}\right)}{2}$. După calcule se ajunge la $\frac{3x^2\sqrt{19}}{16}=3\sqrt{19}$, de unde $x^2=16$, iar x=4 (cm).

▪ Clasa a IX-a

L:1256. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} x-y+xy=25 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$.

Iorga Theoayhan Ștefan, elev, Craiova

Rezolvare:

Din $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ și $xy=25-(x-y)\Rightarrow (x-y)^2-2(x-y)-8=0\Rightarrow x-y\in\{-2;4\}$.

Din $x-y=-2$ și $xy=27\Rightarrow (x;y)\in\left\{\left(-1-2\sqrt{7};1-2\sqrt{7}\right),\left(-1+2\sqrt{7};1+2\sqrt{7}\right)\right\}$.

Din $x-y=4$ și $xy=21\Rightarrow (x;y)\in\{(7;3),(-3;-7)\}$.

L:1257. Rezolvați în R ecuația: $[x^5]+[x^4]+[x^3]+[x^2]+[x]+1=\{x\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, iar $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

Mirea Mihaela Mioara, Craiova, **Beldea Daniela**, Băilești

Rezolvare: Cum $[x^5]+[x^4]+[x^3]+[x^2]+[x]+1\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{x\}=0$ și $x\in\mathbb{Z}$. Atunci, ecuația dată devine: $x^3\cdot(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow(x^2+x+1)\cdot(x^3+1)=0$.

Cum $x^2+x+1\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=-1$.

L:1258. Dacă $a\cdot a_1^7+b\cdot b_1^7+c\cdot c_1^7>a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1$, atunci demonstrați că

$$a\cdot a_1^7+b\cdot b_1^7+c\cdot c_1^7\geq a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1+42,$$

oricare ar fi numerele întregi a,b,c,a_1,b_1,c_1. **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Fie $A=a\cdot a_1^7+b\cdot b_1^7+c\cdot c_1^7$ și $A_1=a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1$. Se știe că $n^7\equiv n(\text{mod }42)$ oricare ar fi $n\in Z$.

Avem $A-A_1=a\cdot(a_1^7-a_1)+b\cdot(b_1^7-b)_1+c\cdot(c_1^7-c)_1>a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1$ care se divide cu 42, deci $A-A_1=42k$ și cum $A-A_1>0$ avem $k\geq 1$, de unde $A-A_1\geq 42$ și prin urmare $A\geq A_1+42$, adică cee ace era de demonstrat.

L:1259. **Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați numerele reale $x_1,x_2,....,x_n$ astfel încât să fie îndeplinite simultan relațiile: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}=y$ și $\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+....+x_n^{\,2}}+n^2\cdot\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}=n\sqrt{n}\cdot y$.**

Felicia Ozunu, Mirela Țacu, Craiova

Rezolvare: Dacă n = 1 atunci, $\sqrt{x_1}=y$, $\sqrt{x_1^{\,2}}+\sqrt{x_1}=y\Rightarrow y=x_1=0$. Dacă $n\geq 2\Rightarrow$

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+.....+x_n^{\,2}\geq\dfrac{(x_1+x_2+....+x_n)^2}{n}$, și $x_1+x_2+....+x_n\geq\dfrac{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+.....+\sqrt{x_n})^2}{n}\Rightarrow$

$n\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+.....+\sqrt{x_n}\right)=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+....+x_n^{\,2}}+n^2\cdot\sqrt{x_1+x_2+....+x_n}\geq$

$\dfrac{|x_1+x_2+....+x_n|}{\sqrt{n}}+n^2\cdot\dfrac{\left|\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\right|}{\sqrt{n}}=\dfrac{x_1+x_2+....+x_n}{\sqrt{n}}+n\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\right)\Rightarrow$

$0\geq\dfrac{x_1+x_2+....+x_n}{\sqrt{n}}\geq 0\Rightarrow x_1+x_2+....+x_n=0\Rightarrow x_1=x_2=....=x_n=0\Rightarrow y=0.$

L:1260. **Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ fie $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+....+\dfrac{2n-1}{2^n}$. Să se arate că**

$[a_n]\langle 3,\ \forall n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}.$ **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Se arată prin inducție că $a_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru n =1 avem $a_1=3-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$ se verifică.

Presupunem că avem propoziția $P(n):\ a_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$, adevărată și să demonstrăm că

$P(n+1):\ a_{n+1}=3-\dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$, este adevărată.

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}=3-\dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$ adevărat. Așadar, $a_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$[a_n]\langle 3,\ \forall n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}.$

L:1261. **Fie numerele $A=3+3^2+3^3+.....+3^{2026}$ și $B=4+4^2+4^3+.....+4^{2026}$. Aflați cifra unităților numărului $B+A$.** **Elena Daniela Cărămidă, Aura Loreta Pogorevici**, Fălticeni

***Rezolvare*:** $A=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+.....+3^{2020}\cdot\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+3^{2025}+3^{2026}$. **Cum ultima cifră a lui $3+3^2+3^3+3^4$ este 0 atunci ultima cifră a lui A este $u(A)=u(506\cdot 0)+u(3^{2025})+u(3^{2026})=u(0+3+9)=2$**

$B=\left(4+4^2\right)+\left(4^3+4^4\right)+.....+\left(4^{2025}+4^{2026}\right)$, **atunci,** $u(B)=u(1013\cdot 0)=0$.

Deci cifra unităților lui $A+B$ este 2.

L:1262. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Determinați mulțimea soluțiilor ecuației $f^3(x)-3f^2(x)=1-3f(x)$.** **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare. Ecuația dată devine $\left(f(x)-1\right)^3=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow(x-3)^2-1=0\Rightarrow x\in\{2;4\}$.

L:1263. **Dacă $x,y,z>0, n\in N$ și $(xy)^{n-1}+(yz)^{n-1}+(zx)^{n-1}=1$, atunci demonstrați că:**

$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}\geq xyz$. **Mihaly Bencze**, Brașov și **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Deoarece $\sum a^2 \geq \sum ab$, avem:

$$x^{2n-2}+y^{2n-2}+z^{2n-2}=(x^{n-1})^2+(y^{n-1})^2+(z^{n-1})^2 \geq (xy)^{n-1}+(yz)^{n-1}+(zx)^{n-1}=1.$$

Cu inegalitatea lui Cebâșev și inegalitatea mediilor avem:

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=x^{2n-2}\cdot x^3+y^{2n-2}\cdot y^3+z^{2n-2}\cdot z^3 \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(x^{2n-2}+y^{2n-2}+z^{2n-2}\right)\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 3xyz = xyz.$$

L:1264. Fie numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in [0;+\infty)$ **astfel încât** $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=S$. **Demonstrați că** $\sqrt{S-a_1^2}+\sqrt{S-a_2^2}+...+\sqrt{S-a_n^2} \geq \sqrt{n-1}\left(a_1+a_2+...+a_n\right)$, **pentru orice număr natural n,** $n \geq 2$.

Gobej Cristina-Dumitra, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Din inegalitatea C-B-S: $\underbrace{\left(1^2+1^2+...+1^2\right)}_{n-1 \text{ termeni}}\left(a_2^2+a_3^2+...+a_n^2\right) \geq \left(a_2+a_3+...+a_n\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (n-1)\left(S-a_1^2\right) \geq \left(a_2+a_3+...+a_n\right)^2 \Rightarrow \sqrt{S-a_1^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(a_2+a_3+...+a_n\right) \ (R_1)$$

Scriind și relațiile analoage $\sqrt{S-a_2^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(a_1+a_3+...+a_n\right) \ (R_2)$ .....

$\sqrt{S-a_n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right) \ (R_n)$ și apoi adunându-le obținem

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{S-a_k^2} \geq \frac{n-1}{\sqrt{n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right) \Leftrightarrow \sqrt{S-a_1^2}+\sqrt{S-a_2^2}+...+\sqrt{S-a_n^2} \geq \geq \sqrt{n-1}\left(a_1+a_2+...+a_n\right)$$ și

inegalitatea este demonstrată, $\forall n \in N,\ n \geq 2$.

L:1265. Rezolvați în R_+ **următorul system de ecuații:** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2} \\ y^2+yz+z^2=(2y+z)\sqrt[3]{yx^2} \\ z^2+zx+x^2=(2z+x)\sqrt[3]{zy^2} \end{cases}$.

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Cu inegalitatea mediilor avem: $\sqrt[3]{xz^2} \leq \frac{x+2z}{3}$, și alte două inegalități similare.

Adunând ecuațiile sistemului obținem:

$$2\sum x^2+\sum xy=(2x+y)\sqrt[3]{xz^2}+(2y+z)\sqrt[3]{yx^2}+(2z+x)\sqrt[3]{zy^2} \leq$$

$$\leq \frac{(2x+y)(x+2z)}{3}+\frac{(2y+z)(y+2x)}{3}+\frac{(2z+x)(z+2y)}{3}=\frac{2\sum x^2+7\sum xy}{3}, \text{ adică}$$

$6\sum x^2+3\sum xy \leq 2\sum x^2+7\sum xy \Leftrightarrow \sum x^2 \leq \sum xy$, dar $\sum x^2 \geq \sum xy$.

Deci, $x=y=z$, și obținem soluțiile (a,a,a), cu $a \in R_+$.

L:1266. Dacă $x,y,z>0,\ xyz=1 \Rightarrow \frac{9}{x^3+y^3+z^3+3} \leq \frac{x}{x^2+yz}+\frac{y}{y^2+zx}+\frac{z}{z^2+xy} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $\left(x^2+yz\right)\left(y+z\right) \overset{MA-MG}{\geq} 2\sqrt{x^2yz}\cdot 2\sqrt{yz}=4xyz;$ Din

$$\frac{x}{x^2+yz} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \sum_{cyc}\frac{x}{x^2+yz} \leq \sum \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{1}{x}=\frac{\sum xy}{2xyz} \overset{xyz=1}{=} \frac{1}{2}\sum xy \leq \frac{1}{2}\sum x^2$$

$\sum_{cyc}\frac{x}{x^2+yz}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^3+xyz}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(x^3+xyz)}\overset{MA-MG}{\geq}\frac{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2}{\sum(x^3)+3xyz}\overset{xyz=1}{=}\frac{9}{\sum x^3+3}$, cu egalitate pentru x = y = z =1.

L:1267. **Fie** $n\in\mathbb{N}$**. Determinați** $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ **astfel încât** $(x-1)^n f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x^n,(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$**.**

Mihaela Cioplea, Băilești , **Amelia Curcă ,** Filiași

Rezolvare: Fie $n=0$. Relația din enunț devine $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=1,(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\quad(1)$. Luând în locul lui x pe $\frac{x+1}{x-1}$ obținem $f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$ sau $f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1,(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\qquad(2)$.

Adunând relațiile (1) și (2) obținem 0=2 , fals. . Așadar pentru $n=0$ nu există funcția f .

Fie $n\in\mathbb{N}^*$, procedând analog (punem în locul lui x pe $\frac{x+1}{x-1}$) găsim

$\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^n f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$ sau $\left(\frac{2}{x-1}\right)^n f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n\qquad(3)$.

Înmulțim relația (3) cu $(x-1)^n$ și adunând-o cu relația din enunț obținem $2^n f(x)-f(x)=x^n+(x+1)^n$ și de aici $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x^n+(x+1)^n}{2^n-1}$

L:1268. **Pentru** $m\in R-\{1\}$**, se consideră funcția:** $f:R\to R,\quad f(x)=(m-1)x^2-2(m+1)x+2m-1.$

a) Să se determine m**, astfel încât între rădăcinile ecuației** $f(x)=0$ **să existe relația:**

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2.$ **b) Pentru ce valori ale parametrului** m**, inecuația** $f(x)>0$ **nu admite soluții?**

Diaconu Radu, Sibiu

Rezolvare: a) Pentru $m\neq 1$, din relațiile lui Viete, $S=x_1+x_2=\frac{2m+2}{m-1}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{2m-1}{m-1}$.

Atunci, $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{S^2-2P}{P^2},m\in R-\left\{\frac{1}{2},1\right\}$. Cum $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2,$ rezultă

$\frac{4m^2+8m+4}{(m-1)^2}-\frac{4m-2}{m-1}=2\cdot\frac{4m^2-4m+1}{(m-1)^2}\Leftrightarrow 4m^2-11m=0.\Rightarrow m_1=0,m_2=\frac{11}{4}.$

b) Facem mențiunea că inecuația $f(x)>0$ nu admite soluții reale dacă și numai dacă $f(x)\leq 0$, oricare ar fi x real. Rezolvarea problemei revine la rezolvarea sistemului de inecuații:

m-1< 0 , $\Delta\leq 0$ sau $m-1<0,\ -4m(m-5)\leq 0.$ Mulțimea soluțiilor acestui sistem este: $(-\infty,0]$.

L:1269. **Dacă** $a,b,c\rangle 0$ **și** $\lambda\geq 1$ **atunci** $\frac{abc+\lambda(a+b+c)}{9\lambda+ab+bc+ca}\geq\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$**.**

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Folosim Metoda pqr – cu $\sum_{cyc}a=p,\ \sum_{cyc}ab=q,\ abc=r$. Atunci, inegalitatea dată se scrie

$\frac{r+\lambda p}{9\lambda+q}\geq\frac{r}{p^2-2q}\Leftrightarrow\lambda p^3+p^2r\geq 9r+3qr+2\lambda pq$, vezi inegalitatea lui Schur $p^3\geq 4pq-9r$.

Este suficient să arătăm că:

$\lambda(4pq-9r)+p^2r\geq 9r+3qr+2\lambda pq\Leftrightarrow 2\lambda pq+p^2r\geq 9(\lambda+1)r+3qr$, vezi $pq\geq 9r$.

Rămâne să arătăm că:

$2\lambda\cdot 9r+p^2r\ge 9(\lambda+1)r+3qr \Leftrightarrow p^2r\ge 9(1-\lambda)r+3qr \Leftrightarrow p^2\ge 9(1-\lambda)+3q$, vezi $p^2\ge 3q$ și $\lambda\ge 1$.

Am folosi mai sus:

1). $pq\ge 9r$, vezi $pq=\sum a\sum ab \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}=9\sqrt[3]{(abc)^3}=9r$.

2). $p^2\ge 3q$, vezi $p^2=(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

L:1270. Arătați că într-un triunghi de laturi $a,b,c\rangle 0$ și semiperimetru s, are loc inegalitatea:

$\frac{a}{4s-3a}+\frac{b}{4s-3b}+\frac{c}{4s-3c}\ge 5$. **Dumitru Bătinețu – Giurgiu, Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

Rezolvare: Se va utiliza inegalitatea lui Bergström:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4s-3a}=\sum_{cyc}\left(\frac{a}{4s-3a}+\frac{1}{3}\right)-1=\sum_{cyc}\frac{3a+4s-3a}{4s-3a}-1=4s\sum_{cyc}\frac{1}{4s-3a}-1\overset{Bergstrom}{\ge}4s\cdot\frac{(1+1+1)^2}{\sum_{cyc}(4s-3a)}-1=$$

$$=\frac{36s}{12s-6s}-1=5.$$

L:1271. Știind că $[1+\sin(a-b)]\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right)\ge 1,\ \forall a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, să se arate că a = b.

Florin Rotaru , Focșani

Rezolvare: Punând în identitatea trigonometrică $(1+\sin x)\cdot\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=\cos x$ în loc de x valoarea a-b rezultă $\cos(a-b)\ge 1$. Dar $\cos(a-b)\le 1\Rightarrow\cos(a-b)=0\Rightarrow a=b.$

L:1272. Dacă a, b, c sunt numere reale îndeplinind condițiile $a,b,c\ge 1, ab\ge c, bc\ge a, ca\ge b$ demonstrați că este adevărată următoarea inegalitate:

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\ge\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}-\sqrt{\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}{3}}.$$ **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

Rezolvare: Membrul stâng este egal cu $MS=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{18\left(\frac{a+b+c}{3}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)}$ iar membrul drept se mai scrie

$$MD=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2}{18\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}+\sqrt{\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}{3}}\right)}.\quad MD=\frac{\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}+\frac{(b-c)^2}{b^2c^2}+\frac{(c-a)^2}{c^2a^2}}{18\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}+\sqrt{\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}{3}}\right)}$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie: $A(a-b)^2+B(b-c)^2+C(c-a)^2\ge 0$

Să vedem în ce condiții avem $A\ge 0, B\ge 0, C\ge 0$.

Inegalitatea $A\ge 0$ înseamnă: $\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}\ge\frac{1}{\frac{ab^2+a^2b+\frac{a^2b^2}{c}}{3}+\sqrt{\frac{a^3b^3+\frac{a^4b^3}{c}+\frac{a^3b^4}{c}}{3}}}$

Observăm că această inegalitate este adevărată dacă avem: $a,b\ge 1$ și $c\le \frac{a^2b^2}{c}$, adică: $c\le ab$.

Inegalitatea $B\ge 0$ va fi adevărată dacă $b,c\ge 1$ și $a\le bc$. Inegalitatea $C\ge 0$ va fi adevărată dacă $c,a\ge 1$ și $b\le ca$. Astfel, inegalitatea din enunțul problemei este demonstrată.

Observații

1. Inegalitatea rămâne valabilă în condițiile (mai largi): $a,b,c\ge 1$.

Dar, demonstația este mult mai dificilă în acest caz.

2. Expresia: $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ este media simetrică elementară a numerelor a, b, c.

L:1273. **Să se arate că în orice triunghi ABC avem (notațiile fiind cele cunoscute):**

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right)\le\frac{p}{3Rr^2}.$$

Diaconu Radu, Sibiu

***Rezolvare*:** Folosind inegalitatea $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, rezultă

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ sau $(a+b+c)^2\ge 3abc\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, rezultă:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{4p^2}{12RS}=\frac{p^2}{3Rpr}=\frac{p}{3Rr}. \quad (1)$$

Apoi: $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\le\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2pr}=\frac{1}{r}.$

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\le\frac{1}{r}. \quad (2)$$

Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2), obținem: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right)\le\frac{p}{3Rr^2}.$

▪ Clasa a X-a

L:1274. **Să se determine primul termen, rația și termenul general al unei progresii geometrice știind că:** $\begin{matrix}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1013\\ a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=2026\end{matrix}$.

Cărămidă Elena Daniela, Aura Loreta Pogorevici, Fălticeni

Rezolvare: Din împărțirea relațiilor

$a_1\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)=1013$, și $a_1q^3\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)=2026$ rezultă $q^3=2\Rightarrow q=\sqrt[3]{2}$. Atunci,

$$a_1\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^5-1}{\sqrt[3]{2}-1}=1013\Rightarrow a_1=1013\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^5-1},\text{ și }\ a_n=1013\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^5-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{n-1};\ n\in\mathbb{N},n\ge 2.$$

L:1275. **Dacă $x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{x}{\sqrt[3]{y}}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}=xy$ atunci să se calculeze cu cât este egal x^4+y^4?**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Fie $x=a^3$, $y=b^3$ $a,b\in\mathbb{R}^*$. Relația dată devine

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}=a^3b^3\Rightarrow a^4+b^4=a^4b^4\Leftrightarrow a^4\left(1-b^4\right)+b^4=0\Rightarrow a^4\left(1-b^4\right)-\left(1-b^4\right)+1=0\Leftrightarrow$$

$\left(1-b^4\right)\left(a^4-1\right)=-1\Rightarrow\begin{cases}a^4-1=1\\b^4-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=2\\b^4=2\end{cases}$. Atunci, $x^4+y^4=\left(a^3\right)^4+\left(b^3\right)^4=\left(a^4\right)^3+\left(b^4\right)^3=2^3+2^3=16.$

L:1276. **Determinați** $x\in[0;+\infty)$ **pentru care** $[x]^{\lg 3}+[x]^{\lg 4}+[x]^{\lg 5}=[x]^{\lg 6}$, **unde prin** $[x]$ **am notat partea întreagă a lui x .** **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

Rezolvare: Evident $[x]=0\Leftrightarrow x\in[0;1)$ este soluție.

Pentru $x\in[1;+\infty)$, folosind formula $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, ecuația poate fi scrisă sub forma

$3^{\lg[x]}+4^{\lg[x]}+5^{\lg[x]}=6^{\lg[x]}$, de unde obținem în mod unic $\lg[x]=3\ (R_1)$, deoarece folosind

raționamentul standard $3^3+4^3+5^3=27+64+125=216=6^3$.

Din (R_1) $\lg[x]=3\Rightarrow x\in[10^3,10^3+1)\Rightarrow x\in[1000;1001)$ este soluție.

Soluție finală $x\in[0;1)\cup[1000;1001)$.

L:1277. **Dacă** $a,b,x,y\rangle 0,\ \Rightarrow\dfrac{x^{1001}}{a^{901}}+\dfrac{y^{1001}}{b^{901}}\geq\left(\dfrac{x^{100}+y^{100}}{a^{100}+b^{100}}\right)^{10}\cdot\left(a^{99}x+b^{99}y\right)$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: *Se aplică (Lema)* $\dfrac{x^{n+k}}{a^n}+\dfrac{y^{n+k}}{b^n}\geq\left(\dfrac{x^k+y^k}{a^k+b^k}\right)\cdot\left(\dfrac{x^n}{a^{n-k}}+\dfrac{y^n}{b^{n-k}}\right)$, Gheorge Ghiță,, pentru n = 901,

801, 701, , ..., 1 și k= 100. Atunci,

$$\frac{x^{1001}}{a^{901}}+\frac{y^{1001}}{b^{901}}\geq\frac{x^{100}+y^{100}}{a^{100}+b^{100}}\cdot\left(\frac{x^{901}}{a^{801}}+\frac{y^{901}}{b^{801}}\right)\geq\left(\frac{x^{100}+y^{100}}{a^{100}+b^{100}}\right)^2\cdot\left(\frac{x^{801}}{a^{701}}+\frac{y^{801}}{b^{701}}\right)\geq\ldots\ldots\geq\left(\frac{x^{100}+y^{100}}{a^{100}+b^{100}}\right)^{10}\cdot\left(a^{99}x+b^{99}y\right).$$

L:1278. **Fie numerele complexe** z_1,z_2,z_3 **astfel încât** $z_1+z_2+z_3=0,\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ **și** $z_1\cdot z_2\cdot z_3=1$.

a) Demonstrați că $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}+z_3^{\,3}=3$. **b) Calculați valoarea expresiei** $E=z_1^{\,2025}+z_2^{\,2025}+z_3^{\,2025}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

a) Deoarece $z_1+z_2+z_3=3z_G$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC cu $A(z_1)$, $B(z_2)$ și, respectiv $C(z_3)$, fixând reperul cartezian cu $z_G=0$ avem deci $z_G=z_0$.

Din ipoteza problemei $\Rightarrow\Delta ABC$ este echilateral, iar punctele A, B și respectiv C pe cercul unitate.

Luând $\left\{z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ \ z_2=\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right),\ \ z_3=\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right),\right.$

din

$z_1\cdot z_2\cdot z_3=1\Rightarrow\cos(3\alpha+2\pi)+i\sin(3\alpha+2\pi)=1\Leftrightarrow\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)=1\Rightarrow(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=1$ și

deci $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ este rădăcină de ordinul al 3-lea a unității, $\alpha\in\left\{0;\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

Așadar, $z_1,z_2,z_3\in\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$ cu $\begin{cases}1+\varepsilon+\varepsilon^2=0\\\varepsilon^3=1\end{cases}$,

Deci, $z_1^{\,3k}=z_2^{\,3k}=z_3^{\,3k}=1,\ \forall k\in N\ (R_1)$ și finalizare $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}+z_3^{\,3}=3$.

b) Conform (R_1) de la punctul a) cum $2025\in M_3\Rightarrow E=z_1^{\,2025}+z_2^{\,2025}+z_3^{\,2025}=$

$=\left(z_1^{\,3}\right)^{675}+\left(z_2^{\,3}\right)^{675}+\left(z_3^{\,3}\right)^{675}=3$.

L:1279. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **inecuația:** $2^x+4^x+15^x\geq 3^x+5^x+8^x$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: $15^x-5^x-3^x+1\geq 8^x-4^x-2^x+1\Leftrightarrow \left(5^x-1\right)\cdot\left(3^x-1\right)\geq\left(4^x-1\right)\cdot\left(2^x-1\right)$ (*).

Dacă x = 0 avem egalitate. Dacă $x\rangle 0\Rightarrow 5^x-1\rangle 4^x-1,\ 3^x-1\rangle 2^x-1$, deci (*(este adevărată.

Pentru $x\langle 0\Rightarrow y\rangle\ 0\Rightarrow y=-x\Rightarrow\ 0\rangle 4^x-1=\frac{1}{4^y}-1\rangle\frac{1}{5^y}-1=5^x-1$ și $0\rangle\ 2^x-1=\frac{1}{2^y}-1\rangle\frac{1}{3^y}-1=3^x-1$.

Deci, relația (*) este adevărată pentru orice x real. $S=\{\mathbb{R}\}$.

L:1280. **Dacă** $m=\frac{C_{2n}^n+2C_{2n-1}^n+4C_{2n-2}^n+\ldots+2^nC_n^n}{(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2}$, $n=2^{2k},k\in N^*$, **atunci calculați** $[\log_2^m]$, **unde** $[.]$ **reprezintă partea întreagă.** **Florin Rotaru,** Focșani

Rezolvare:

$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ și $C_{2n}^n+2C_{2n-1}^n+4C_{2n-2}^n+\ldots+2^nC_n^n=4^n$, deci

$m=\frac{4^n}{C_{2n}^n}$. Avem dubla inegalitate: $\frac{4^n}{2\sqrt{n}}<C_{2n}^n<\frac{4^n}{\sqrt{2n}}$, adică $2\sqrt{n}>\frac{4^n}{C_{2n}^n}>\sqrt{2n}>\sqrt{n}$, sau $2\sqrt{n}>m>\sqrt{n}$ și dacă $n=2^{2k}\Rightarrow 2^{k+1}>m>2^k\Rightarrow k+1>\log_2^m>k$, de unde $[\log_2^m]=k$.

L:1281. **Dacă numerele strict pozitive** $a_1,a_2,a_3,a_4,.....,a_{n+1}\in\mathbb{R}$. **verifică relația**

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+.....+a_n^2=\frac{a_n\cdot a_{n+1}\cdot(2n+1)}{6},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$ **să se arate că** $\frac{C_n^0}{a_1}+\frac{C_n^1}{a_2}+\frac{C_n^2}{a_3}+.....+\frac{C_n^n}{a_{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{a_{n+1}},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Florin Rotaru, Focșani

Rezolvare: Se arată că $a_k=k\cdot a_1,\ \forall k\in\mathbb{N}^*$.

n=1: $a_1^2=\frac{a_1a_2\cdot 3}{6}\Rightarrow a_2=2a_1$; n=2: $a_1^2+a_2^2=\frac{a_2a_3\cdot 5}{6}\Rightarrow a_3=3a_1$;

n=3: $a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{a_3a_4\cdot 7}{6}\Rightarrow a_4=4a_1$;

Presupunem că $a_k=k\cdot a_1,\ \forall 1\leq k\leq n$ și pentru n+1 avem

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+....+a_n^2+a_{n+1}^2=\frac{a_na_{n+1}\cdot(2n+1)}{6}\Rightarrow a_{n+1}=(n+1)a_1$. Egalitatea de demonstrat devine

$\frac{C_n^0}{a_1}+\frac{C_n^1}{2a_1}+\frac{C_n^2}{3a_1}+.....+\frac{C_n^n}{(n+1)a_1}=\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)a_1}$ ceea ce revine la a demonstra că

$\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+.....+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, relație care rezultă din folosirea formulei $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ în care se dau valori lui k de la 0 la n și după adunarea termenilor se folosește formula

$C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+.....+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}-1$.

L:1282. **Să se rezolve și să se discute ecuația:** $\log_3(a+3^x)+\log_3(a-3^x)=x,a\in\mathbb{R}$.

Diaconu Radu, Sibiu

Rezolvare: Avem condițiile: $a+3^x>0,\ a-3^x>0$, din care rezultă $a>0$ și $3^x<a$. (1)

Ecuația se scrie: $\log_3(a^2-3^{2x})=x\Leftrightarrow a^2-3^{2x}=3^x\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x-a^2=0,$ de unde obținem:

$3^x=\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. (2) Ținând cont de condițiile (1), ecuația (2) are soluții pentru:

$\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}.<a\Leftrightarrow 1+4a^2<1+4a+4a^2\Leftrightarrow 0<4a$, adevărat. Rezultă din (2) că ecuația are soluția:

$x=\log_3\dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$, pentru $a>0$.

L:1283. **Dacă** $a,b,c,d\in C$, **demonstrați identitatea:**

$$\sum\left((a+b)^3+(a+c)^3+(a+d)^3+(a-b)^3+(a-c)^3+(a-d)^3\right)=6\left(\sum a\right)\cdot\left(\sum a^2\right).$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: $\sum\left((a+b)^3+(a+c)^3+(a+d)^3+(a-b)^3+(a-c)^3+(a-d)^3\right)=$

$=\sum(6a^3+6ab^2+6ac^2+6ad^2)=6\left(\sum(a^3+ab^2+ac^2+ad^2)\right)=6\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right).$

L:1284. **Triunghiurile** $A_1A_2A_3$ **și** $B_1B_2B_3$ **au ariile** F_1, **respectiv** F_2 **și semiperimetrele** s_1, **respectiv** s_2. **Să se arate că** $\left(2s_1+b_1^3+b_2^3+b_3^3\right)\cdot\left(2s_2+a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)\geq 48\cdot\left(F_1+F_2\right)$.

D.M. Bătinețu- Giurgiu, București, **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

Rezolvare: Se folosesc inegalitățile Cauchy- Buniakovski- Schwarz și Ionescu-Weizenböche:

$$\left(2s_1+b_1^3+b_2^3+b_3^3\right)\cdot\left(2s_2+a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)=\left(a_1+a_2+a_3+b_1^3+b_2^3+b_3^3\right)\cdot\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3+b_1+b_2+b_3\right)\overset{C-B-S}{\geq}$$

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)^2\overset{I-W}{\geq}\left(4\sqrt{3}F_1+4\sqrt{3}F_2\right)^2=48\left(F_1+F_2\right)^2.$$

L:1285. **Dacă** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **și** $\cos x+\cos y+\cos z=0,\ \sin x+\sin y+\sin z=0$ **să se arate că** $\cos 5^n x+\cos 5^n y+\cos 5^n z=0,\ \sin 5^n x+\sin 5^n y+\sin 5^n z=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Fie numerele complexe $z_1=\cos x+i\sin x,\ z_2=\cos y+i\sin y,\ z_3=\cos z+i\sin z$. Deoarece $z_1+z_2+z_3=0$ vom demonstra că $z_1^5+z_2^5+z_3^5=0$. Avem

$z_1^2=\cos 2x+i\sin 2x,\ z_2^2=\cos 2y+i\sin 2y,\ z_3^2=\cos 2z+i\sin 2z$. Deoarece

$\dfrac{1}{z_1}=\cos x-i\sin x$ deducem $\cos x=\dfrac{z_1^2+1}{2z_1}$, analog și pentru celelalte , și cum

$$\cos x+\cos y+\cos z=0\Rightarrow\frac{z_1^2+1}{2z_1}+\frac{z_2^2+1}{2z_2}+\frac{z_3^2+1}{2z_3}=0\Rightarrow$$

$$\frac{z_1z_2z_3(z_1+z_2+z_3)+z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{2z_1z_2z_3}=0\Rightarrow\ z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0.$$

$\Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)=0$. Mai departe avem,

$\Rightarrow z_1^5+z_2^5+z_3^5=(z_1+z_2+z_3)^5-5\left(z_1+z_2\right)\left(z_2+z_3\right)\left(z_3+z_4\right)\left(z_1^2+z_2^2+z_3^3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)$ și având în vedere rezultatele de mai sus avem $z_1^5+z_2^5+z_3^5=0$ adică $\cos 5x+\cos 5y+\cos 5z=0$ și $\sin 5x+\sin 5y+\sin 5z=0$. Folosind același procedeu rezultă $\cos 5^2x+\cos 5^2y+\cos 5^2z=0$ și $\sin 5^2x+\sin 5^2y+\sin 5^2z=0$. Se arată apoi prin inducție cerința problemei.

L:1286. **Rezolvați în** $\mathbb{R}$ **ecuația:** $\sqrt{8x(2x-1)+5}=1-\cos 2028\pi x$

Mihaela Mioara Mirea, Daniela Stoian, Craiova

Rezolvare: Cum $8x(2x-1)+5=(4x-1)^2+4\Rightarrow\sqrt{8x(2x-1)+5}\geq 2$ cu egalitate pentru $x=\dfrac{1}{4}$.

Rezultă $1-\cos 2028\pi x\geq 2\Rightarrow\cos 2028\pi x\leq -1\Rightarrow\cos 2028\pi x=-1$ cu soluția $x=\dfrac{1}{4}$.

$\left(\cos\left(2028\pi\cdot\frac{1}{4}\right)=\cos 507\pi=(-1)^{507}=-1\right)$. Așadar, $S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

▪ Clasa a XI-a

L:1287. **Fie** $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ **şi** $\alpha \in R$, **astfel încât** $A^2 - B^2 = \alpha(AB - BA)$.

a) Dacă $\alpha = 0$ şi n impar, demonstraţi că $\det(AB - BA) = 0$.

b) Dacă $\alpha \neq 0$ să se arate că $(AB - BA)^n = 0_n$ **Gobej Cristina-Dumitra**, Curtea de Argeş

Rezolvare: Fie $C = AB - BA$.

Din relaţia $A^2 - B^2 = \alpha(AB - BA) \Leftrightarrow \begin{cases} (A-B)(A+B) = (\alpha+1)C \ (R_1) \text{ si} \\ (A+B)(A-B) = (\alpha-1)C \ (R_2) \end{cases}$

a) Pentru $\alpha = 0$ obţinem din (R_1) $\det C = \det(A+B)\cdot\det(A-B)$, iar din (R_2)

$\det(-C) = \det(A+B)\cdot\det(A-B)$ şi deci $\det C = \det(-C)$

Cum n este impar $\Rightarrow \det(-C) = -\det C \Rightarrow \det(C) = -\det(C) \Rightarrow 2\det(C) = 0 \Rightarrow \det(C) = 0$.

b) Dacă $\alpha = 1$ atunci din $(R_1)\cdot(R_2) \Rightarrow 4C^2 = (A-B)(A+B)(A+B)(A-B) = O_2$, deci $C^n = O_n$.

Analog pentru $\alpha = -1$.

Fie acum $\alpha \neq \pm 1$. Cum $(A+B)(A-B)$ şi $(A-B)(A+B)$ au acelaşi polinom caracteristic

$\Rightarrow \det((\alpha+1)C - xI_n) = \det((\alpha-1)C - xI_n), \ \forall x \in C$.

Luând $x = (\alpha+1)y \Rightarrow \det(C - yI_n) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^n \det\left(C - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} yI_n\right), \ \forall y \in C$.

Fie λ o valoare proprie a lui C. Atunci $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\lambda$ este tot valoare proprie şi inductiv $\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^k \lambda$ este valoare proprie a lui C, $\forall k \in N$. Cum $\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \neq \pm 1$, dacă $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ C are o infinitate de valori proprii, fals.

Deci $\lambda = 0 \Rightarrow C^n = (AB - BA)^n = O_n$.

L:1288. **Să se calculeze limita şirului:** $a_n = n^\alpha\left(\sqrt{n^2+1} - 3n\right), \ \alpha \in R$. **Diaconu Radu**, Sibiu

Rezolvare: Avem, $a_n = n^\alpha\left(\sqrt{n^2+1} - 3n\right) = n^\alpha \cdot \frac{-8n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+3n} = \frac{-8+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+3} \cdot n^{\alpha+1}$. Rezultă:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pentru $\alpha <$ -1, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$, pentru $\alpha = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pentru $\alpha >$ -1.

L:1289. **Dacă** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 \in (0,1)$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3, \forall n \in N^*$, **atunci calculaţi** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n$.

Florin Rotaru, Focşani

Rezolvare: Arătăm că $a_n < 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi în completare arătăm că $a_n < \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$.

Deoarece $a_{n+1} = a_n - a_n^3$ arătăm că $a_{n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in N^*$. În acest sens, acest lucru

$\frac{1}{2} > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > a_n - a_n^3 \Leftrightarrow 1 > 2a_n(1 - a_n^2)$, ar trebui demonstrat.

Dar $1>1-a_n^4=(1-a_n^2)(1+a_n^2)\geq(1-a_n^2)\cdot 2a_n$, deci $\frac{1}{2}>a_{n+1},\forall n\in N^*$.

Deoarece $a_n<1,\forall n\in N^*$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=0$.

L:1290. **Fie șirul** $(x_n)_{n\geq 1}$ **cu** $x_1=1$ **și** $x_n=x_{n-1}+\frac{1}{1+2+.....+n}$, $\forall n\geq 2$. **Arătați că** $x^2_{2025}-x^2_{2024}<\frac{2}{1013^2}$. **Calculați:** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. **Mihaela Mioara Mirea, Ionuț Ivănescu**, Craiova

Rezolvare: Știm că $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, atunci $x_n-x_{n-1}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. Dând valori lui n și adunând relațiile obținem $x_n=\frac{2n}{n+1}$, $\forall n\geq 2$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$.

Mai departe, se obține că $(x_{n+1})^2-(x_n)^2=4\left(\frac{2}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)<\frac{8}{(n+2)^2}$.

Pentru n = 2024 rezultă $(x_{n+1})^2-(x_n)^2<\frac{8}{2026^2}=\frac{2}{1013^2}\Rightarrow$

L:1291. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^2}{\left[2\cdot\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\right]+\left[4\cdot\sqrt[k]{\frac{2}{3}}\right]+....+\left[2n\cdot\sqrt[k]{\frac{n}{n+1}}\right]}$, **unde** $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geq 2$ **și** $[a]$ **este partea întreagă a lui a.** **Florin Rotaru,** Focșani

Rezolvare: Pentru $k>1$, $k\in\mathbb{N}$ avem $1-\frac{1}{2k}<\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ adevărată. Rezultă

$$2k-1<2k\sqrt{\frac{k}{k+1}}<2k\cdot\sqrt[3]{\frac{k}{k+1}}<2k\cdot\sqrt[4]{\frac{k}{k+1}}\cdot.....<2k\cdot\sqrt[n]{\frac{k}{k+1}}<2k\Rightarrow\left[2k\cdot\sqrt[k]{\frac{m}{m+1}}\right]=2m-1,\ 1\leq m\leq n.$$

Așadar, numitorul este egal cu $1+3+5+...+2n-1=n^2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^2}{n^2}=\frac{1}{2}$.

L:1292. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^n+C_{2n}^{n-1}+...+C_{2n}^0}{5^n}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Știm că $C_n^k=C_n^{n-k}$ și $C_{2n}^0+C_{2n}^1+...+C_{2n}^{n-1}+C_{2n}^n+C_{2n}^{n+1}+...+C_{2n}^{2n}=2^{2n}$, atunci se arată că

$C_{2n}^{n-1}+C_{2n}^{n-2}+...+C_{2n}^1+C_{2n}^0=\frac{4^n-C_{2n}^n}{2}>0\Rightarrow C_{2n}^n<4^n$ și

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^n+C_{2n}^{n-1}+.....+C_{2n}^0}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^n+\frac{4^n-\lim\limits_{n\to\infty}C_{2n}^n}{2}}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+C_{2n}^n}{2\cdot 5^n}\leq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0,$$ limita cerută fiind egală cu 0.

L:1293. **Se consideră șirul** $(x_n)_{n\geq 1}$ **cu** $x_n=\frac{3^2}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{4^2}{2\cdot 3}\right)^2\cdot\left(\frac{5^2}{3\cdot 4}\right)^3\cdot.....\cdot\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+1)}\right)^n\cdot e^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Se calculează mai întâi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)}\right]^{n+1}\cdot e=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+6n+9}{n^2+3n+2}\right)^{n+1}=e\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+10n+7}{n^2+3n+2}}=e\cdot e^3=e^4$$

.

Rezultă, conform criteriului raportului, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^4$.

L:1294. **Fie** $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ **o funcție continuă, astfel încât** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=2$. **Arătați că există** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **și să se calculeze această limită.** **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Fie $a\in(0;+\infty)$ astfel încât $\frac{f(2x)}{f(x)}>\frac{3}{2},\ \forall x\in[a;+\infty)$. Fie $x\in(a;+\infty)$ și $k=\left[\log_2\frac{x}{a}\right]$ (R_1) Din (R_1) $k\le\log_2\left(\frac{x}{a}\right)<k+1\Leftrightarrow\log_2 2^k\le\log_2\left(\frac{x}{a}\right)<\log_2 2^{k+1}\Leftrightarrow$

$2^k\le\frac{x}{a}<2^{k+1}\Big|\cdot a\Leftrightarrow a\cdot 2^k\le x<a\cdot 2^{k+1}\Big|\cdot 2^k\Leftrightarrow a\le\frac{x}{2^k}<2a$. Atunci $\frac{x}{2^t}\ge\frac{x}{2^k}\ge a,\ \forall t\in\overline{1,k}$.

Scriem acum $f(x)=\frac{f(x)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot f\left(\frac{x}{2^k}\right)>\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot f\left(\frac{x}{2^k}\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{\left[\log_2\frac{x}{a}\right]}\cdot m$, unde

$m=\min\limits_{x\in[a;2a]} f(x)\Rightarrow f(x)>\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{x}{a}\right)-1}\cdot m$ și cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{x}{a}\right)-1}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

L:1295. **Determinați funcțiile** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, derivabile în** $x_0=0$ **cu proprietatea că** $f'(0)=1$**, care verifică relația** $2f^2(x)-3f(x)=f(2x)+f(x)-3$**, pentru orice** $x\in\mathbb{R}$**.**

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare: Relația din enunț se scrie

$2(f(x)-1)^2=f(2x)-1\Big|\cdot 2\Leftrightarrow\left[2(f(x)-1)\right]^2=2(f(2x)-1),\ \forall x\in R\ (R_1)$

Considerăm $h:R\to R$, $h(x)=2(f(x)-1)$ care este evident continuă și derivabilă în origine, cu $h'(0)=2f'(0)=2$. Din (R_1) observăm $h(2x)=h^2(x),\ \forall x\in R\ (R_2)$ și pentru

$x=0\overset{(R_2)}{\Rightarrow}\begin{cases}h(0)=h^2(0)\Leftrightarrow h(0)(h(0)-1)=0\Rightarrow h(0)\in\{0;1\}\ \text{si}\\ h(x)\ge 0,\ \forall x\in R\end{cases}$

Pentru $x\to\frac{x}{2}$ și $(R_2)\Rightarrow h(x)=h^{2^1}\left(\frac{x}{2^1}\right)\overset{x\to\frac{x}{2}}{=}h^{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)=\ldots=h^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right),\ \forall x\in R$ și $n\in N$.

Se analizează cazurile: **Cazul 1**: $h(0)=0$, și se arată că $h(x)=0$ iar f(x) =1

și **Cazul 2:** $h(0)=1$ și se arată că $e^{2x}=h(x)=2(f(x)-1)\Rightarrow f(x)=\frac{e^{2x}}{2}+1,\ \forall x\in R$.

L:1296. **Fie** $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ **o funcție continuă astfel încât** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{x\cdot f(x)}=a\rangle 0$**. Să se arate că**

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}-(f(x))^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(f(x))^{\frac{1}{x}}}{x}$. **D.M. Bătinețu- Giurgiu**, București

Rezolvare: Cu Criteriul Cauchy- D'Alembert și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ rezultă

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}}\frac{\sqrt[n]{f(n)}}{n}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}}\sqrt[n]{\frac{f(n)}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{n\cdot f(n)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=a\cdot\frac{1}{e}$$

Fie $B:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $B(x)=\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}-\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$. și $u(x)=\dfrac{\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}}{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}}\underset{x\to\infty}{\to}1$.

$B(x)=\dfrac{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}}{x}.\dfrac{u(x)-1}{\ln u(x)}\cdot\ln\left(u(x)\right)^x$. Din $\lim\limits_{x\to\infty}\left(u(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(f(x+1)\right)}{x\left(f(x)\right)}\cdot\dfrac{x+1}{\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}}\cdot\dfrac{x}{x+1}=e\Rightarrow$

$$\lim_{x\leftarrow-\infty}B(x)=\lim_{x\leftarrow-\infty}\frac{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}}{x}.\lim_{x\leftarrow-\infty}\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\cdot\lim_{x\leftarrow-\infty}\ln\left(u(x)\right)^x=\frac{a}{e}\cdot1\cdot\ln e=\frac{a}{e},\ \text{c.c.t.d}.$$

▪ Clasa a XII-a

L:1297. Determinați numerele naturale n **astfel încât** $\dfrac{\varphi(n)}{n}=\dfrac{16}{35}$ **unde** $\varphi(n)$ **reprezintă numărul numerelor prime cu** n **și mai mici sau egale cu el (indicatorul lui Euler) .**

Vasile Roxana, Udrea Cristian , Craiova

Rezolvare: Din $35\varphi(n)=16n$ obținem că $5|n$ adică $n=5^a m, a,m\in\mathbb{N}^*,\left(5^a,m\right)=1$. Cum $\varphi\left(5^a\cdot m\right)=\varphi\left(5^a\right)\varphi(m)$ rezultă $35\left(5^a-5^{a-1}\right)\varphi(m)=16\cdot5^a m$ adică $7\cdot4\varphi(m)=16m$ sau $7\varphi(m)=4m$. De aici $7|m$ adică $m=7^b p, b,p\in\mathbb{N}^*,\left(7^b,p\right)=1$.

Obținem $7\varphi\left(7^b\right)\varphi(p)=4\cdot7^b p;7\left(7^b-7^{b-1}\right)\varphi(p)=4\cdot7^b\cdot p$ adică $6\varphi(p)=4p\Rightarrow3\varphi(p)=2p\Rightarrow$ $3|p$ deci $p=3^c q,\left(3^c,q\right)=1\Rightarrow$ și $3\varphi\left(3^c q\right)=2\cdot3^c\cdot q\Rightarrow3\varphi\left(3^c\right)\varphi(q)=2\cdot3^c\cdot q;3\left(3^c-3^{c-1}\right)\varphi(q)=2\cdot3^c\cdot q$ de unde $\varphi(q)=q$ adică $q=1$. Găsim $n=5^a\cdot m=5^a\cdot7^b\cdot p=5^a\cdot7^b\cdot3\cdot q=5^a\cdot7^b\cdot3^c$.

L:1298. Demonstrați că toate rădăcinile reale ale ecuației $x^{6n}-4x^{2n}-4=0$ **sunt de modul mai mare decât** $\sqrt[2n]{2}$, $\forall n\in N^*$.

Molea Gheorghe, Curtea de Argeș

Rezolvare: Ecuația data o putem scrie: $x^{4n}(x^{2n}+1)=x^{4n}+4x^{2n}+4\Rightarrow$

$x^{4n}=\dfrac{x^{4n}+4x^{2n}+4}{x^{2n}+1}$, (*). Dar $x^{4n}+4x^{2n}+4>4x^{2n}+4$, $\forall x\in R^*$, rezultă $\dfrac{x^{4n}+4x^{2n}+4}{x^{2n}+1}>4$, $\forall x\in R^*$ (**). Din (*) și (**) reiese că $x^{4n}>4\Rightarrow x^{2n}>2\Rightarrow|x|>\sqrt[2n]{2}$.

L:1299. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ **și să se rezolve ecuația** $8x^4+mx^2+x+1=0$, **știind că are două rădăcini cu produsul egal cu** $-\dfrac{1}{2}$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se folosesc relațiile lui Viete, unde: $x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_1+x_2=u$, $x_3+x_4=v$, $u,v\in\mathbb{R}$ cu $u+v=0\Rightarrow v=-u$ și $2u+4v=1\Rightarrow u=-\dfrac{2}{2}$, $v=\dfrac{1}{2}$. Înlocuind în a doua relație a lui Viete,

$x_1 \cdot x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = \frac{m}{8} \Rightarrow$ **m = - 8 .** Rezolvând ecuația $8x^4 + -8x^2 + x + 1 = 0$ se obțin soluțiile $S = \left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right\}$.

L:1300. **Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$ cu toate rădăcinile reale . Dacă $P = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + ... + a_{n-1} X + a_n$ și $a_1 + a_2 + ... + a_n \in [-2, 0]$ arătați că polinomul P are cel puțin o rădăcină în intervalul $[0, 2]$.** **Mihaela Cioplea, Daniela Beldea** , Băilești

Rezolvare: Avem $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$. Cum $P(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n) = 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ și $1 + a_1 + a_2 + ... + a_n \in [-1, 1]$ obținem că $|(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)| \le 1$ (1).

Dacă nicio rădăcină $x_i \notin [0, 2], i = \overline{1, n}$ atunci $|1 - x_i| > 1, \forall i = \overline{1, n}$ și prin înmulțire $|(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)| > 1$, contradicție cu (1).

Așadar , $\exists i \in \{1, 2..., n\}$ astfel încât $|1 - x_i| \le 1$ și de aici $-1 \le 1 - x_i \le 1$ adică $x_i \in [0, 2]$.

L:1301. **Fie $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $P = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + ... + a_{n-1} X + a_n$ și $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \in [-2, 0]$,arătați că polinomul P are cel puțin o rădăcină $x_k \in \mathbb{C}$ astfel încât $|1 - x_k| \le 1$.** **Năstășelu Amelia Curcă**, Filiași, **Mirela Țacu** , Craiova

Rezolvare: Cum $|(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)| = |1 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n| \le 1$ deoarece $-1 \le 1 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \le 1$. Dacă presupunem prin reducere la absurd că și prin înmulțire $|(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)| > 1$, fals, de unde cerința problemei .

L:1302. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție continuă. Arătați că există $c \in (0; 3)$ astfel încât $2cf(c^2) = 3f(3c)$.** **Oroviceanu Vlad, Teodor Cîrstov**, elevi Craiova

Rezolvare: Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{3x}^{x^2} f(t)dt$. Evident g este derivabilă și $g(0) = g(3) = 0$ rezultă conform Teoremei lui Rolle că există $c \in (0; 3)$ astfel încât $g^I(c) = 0$. Cum $g^I(x) = 2xf(x^2) - 3f(x)$ găsim $0 = g^I(c) = 2cf(c^2) - 3f(3c)$, de aici rezultă cerința problemei.

L:1303. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă cu proprietatea $3\int_0^1 f(x)dx = f(1)$. Arătați că există $c \in (0; 1)$ astfel încât $f^I(c) = \frac{2}{c} \cdot f(c)$.** elevi, **Mușat Horia**, Craiova, **Viespescu Carina**, București

Rezolvare: Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x) - 3\int_0^x f(t)dt$ o funcție care este derivabilă în 0 și $g(0) = g(1) = 0$, atunci, conform teoremei lui Rolle rezultă că există $c \in (0; 1)$ astfel încât $g^I(c) = 0$.

Cum $g^I(x) = f(x) + x \cdot f^I(x) - 3f(x) = x \cdot f^I(x) - 2f(x)$, pentru x = c obținem $0 = g^I(c) = c \cdot f^I(c) - 2f(c)$ de unde rezultă concluzia.

L:1304. **Fie** $0 \langle a \langle b$ **și funcția** $f:[a;a+1]\to[a;b]$ **continuă. Dacă** $\int_a^b f(x)dx = b$ **să se demonstreze că** $\int_a^{a+1} \frac{1}{f(x)}dx = \frac{1}{b}$. **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Din $a \le f(x) \le b \Rightarrow [f(x)-a]\cdot[f(x)-b] \le 0 \Leftrightarrow f^2(x)-(a+b)f(x)+ab \le 0 \Rightarrow$

$f(x)+\frac{ab}{f(x)} \le a+b \Rightarrow \int_a^{a+1} f(x)dx + ab\int_a^{a+1}\frac{1}{f(x)}dx \le a+b \Rightarrow$

$b+ab\int_a^{a+1}\frac{1}{f(x)}dx \le a+b \Rightarrow \int_a^{a+1}\frac{1}{f(x)}dx \le \frac{1}{b}$. (1).

Din $\frac{1}{b} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{a} \Rightarrow \int_a^{a+1}\frac{1}{b}dx \le \int_a^{a+1}\frac{1}{f(x)}dx \le \int_a^{a+1}\frac{1}{a}dx \Rightarrow \frac{1}{b} \le \int_a^{a+1}\frac{1}{f(x)}dx$. (2). Din (1) și (2) rezultă concluzia.

L:1305. **Dacă** $f:[0,1]\to R$**, este derivabilă, cu derivata continuă, atunci demonstrați:**

$\int_0^1 [(1-2x)f(x)+(x^2-x)f'(x)]dx = 0$. **Florin Rotaru,** Focșani

Rezolvare: $\int_0^1 [(1-2x)f(x)+(x^2-x)f'(x)]dx = \int_0^1 [(x-x^2)f(x)]'dx = (x-x^2)f(x)\Big|_0^1 = 0$.

L:1306. **Determinați o funcție** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, continuă cu proprietatea că** $f(x) = 2+\int_0^x t\cdot f(t)dt$.

Ana Dumitru , Daniela Barbu , Craiova

Rezolvare: Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Atunci $f(x)=2+F(x)-F(0) \Rightarrow$ f(x) este derivabilă și rezultă că $f^I(x)=F^I(x)=xf(x)\Big|\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$

$e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f^I(x) - x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}f(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x)\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^I = 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = c\cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \forall x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}.$

Din $f(x) = 2+\int_0^x cte^{\frac{t^2}{2}}dt \Leftrightarrow f(x) = 2+c\cdot e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_0^x \Rightarrow$ c=2. Așadar, $f(x) = 2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$.

L:1307. **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, o funcție continuă astfel încât** $x^3 \ge \int_0^x f(t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Arătați că f(0) =0.**

elevi **Negreț Bianca**, Craiova, **Viespescu Carina**, București

Rezolvare: Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3-\int_0^x f(t)dt$. Evident, $g(0)=0$ și $g(x)\ge 0 = g(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Rezultă că 0 este un punct de minim pentru g(x), atunci $g^I(0)=0$, conform teoremei lui Fermat.

Din $g^I(x) = 3x^2 - f(x)$ și $g^I(0)=0$ rezultă $f(0)=0$.

L:1308. **Să se calculeze: a)** $\int\sqrt{\frac{x}{1-\sqrt{x}}}dx$. **b)** $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)\cdot\ln(e^{2x}+1)}dx$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: a) Notăm $\sqrt{1-\sqrt{x}} = t \Rightarrow 1-\sqrt{x} = t^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1-t^2 \Rightarrow x = 1-2t^2+t^4 \Rightarrow$

$dx=\left(-4t+4t^3\right)dt \Leftrightarrow dx=-4t(1-t^2)dt$. Integrala dată devine

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-\sqrt{x}}}dx=\int\frac{-4t(1-t^2)^2}{t}dx=-4\int(1-2t^2+t^4)dt=-4\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C\text{, etc.}$$

b) Notăm $\ln\left(e^{2x}+1\right)=t\Rightarrow\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+1}dx=dt \quad x=0\Rightarrow t=\ln 2,\ x=\ln\sqrt{3}\Rightarrow t=\ln(e^{\ln 3}+1)=\ln 4..$

Integrala dată este egală cu $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_{\ln 2}^{\ln 4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(\ln 4)-\ln(\ln 2)\right)=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$.

L:1309. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați integrala $I_n=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^{2n+1}e^{x-x^2}dx$.

elevi **Viespescu Carina** , București , **Negreț Bianca** , Craiova

Rezolvare: Avem $I_1=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)e^{x-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(e^{x-x^2}\right)'dx=e^{x-x^2}\,/_0^1=0$.

$$I_3=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^3e^{x-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^2\left(e^{x-x^2}\right)'dx=e^{x-x^2}\left(1-2x\right)^2/_0^1-\int\limits_0^1 2\left(1-2x\right)\left(-2\right)e^{x-x^2}dx=0+4I_1=0$$ P

rocedând recursiv avem

$I_{2n+1}=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^{2n+1}e^{x-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^{2n}\left(e^{x-x^2}\right)'dx=e^{x-x^2}\left(1-2x\right)^{2n}/_0^1+4n\int\limits_0^1\left(1-2x\right)^{2n-1}e^{x-x^2}dx$ și de aici

$I_{2n+1}=4nI_{2n-1}$. Cum $I_1=I_3=0$ prin inducție găsim $I_{2n+1}=0,\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}$.

L:1310. Fie $f:\mathbb{R}\to\left(0;\infty\right)$ o funcție continuă astfel încât $\int\limits_0^1 f(x)dx\geq 2$. Arătați că

$\int\limits_0^1 f^n(x)dx\geq n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}*.$ **Alexandra Răduț, Gigi Zaharia**, Craiova

Rezolvare: Din inegalitatea lui Bernoulli avem

$f^n(x)=\left(1+f(x)-1\right)^n\geq 1+n\cdot\left(f(x)-1\right)=1-n+nf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Atunci,

$$\int\limits_0^1 f^n(x)dx\geq\int\limits_0^1\left(1-n+nf(x)\right)dx=(1-n)x\Big|_0^1+n\int\limits_0^1 f(x)dx\geq 1-n+2n=n+1\,.$$

L:1311. Să se calculeze: $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx, x\in(0,\infty)$. **Diaconu Radu**, Sibiu

Rezolvare: $\int\frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx=\int\frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)'dx=$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)+C.$$

L:1312. Să se calculeze integrala: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^2-2x+3}dx$. **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

Rezolvare: Fie I integrala din enunț și $x:\left[0;\frac{1}{2}\right]\to\left[0;\frac{1}{2}\right],\ x(t)=\frac{\frac{1}{2}-t}{1-\frac{1}{2}t}$, funcție bijectivă, derivabilă și cu

derivata continuă pe $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. În integrala I facem schimbarea de variabilă $x = x(t)$.

Rezultă $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln 3 - \ln\frac{1+t}{1-t}$; $x^2 - 2x + 3 = \frac{3\left(t^2-2t+3\right)}{\left(2-t\right)^2}$; $dx = \frac{-3}{\left(2-t\right)^2}dt$

Obținem:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln 3 - \ln\frac{1+t}{1-t}}{t^2-2t+3}dt \Rightarrow I = (\ln 3)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2-2t+3}dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln\frac{1+t}{1-t}}{t^2-2t+3}dt = (\ln 3)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2-2t+3}dt - I$$

$$I = \frac{1}{2}(\ln 3)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2-2t+3}dt. \quad \text{Cum} \quad \int \frac{1}{t^2-2t+3}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C = F(t) + C$$

Deci, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2-2t+3}dt = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Rezultă: $I = \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$.

ERATĂ

În numărul 37 al revistei la partea de probleme rezolvate, din motive tehnice de imprimare au fost câteva probleme care nu s-au văzut și pe care le reproducem în continuare.

L:1237. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC există egalitatea:

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{h_a} + \frac{tg\frac{B}{2}}{h_b} + \frac{tg\frac{C}{2}}{h_c} = \frac{p-a}{h_a r_a} + \frac{p-b}{h_b r_b} + \frac{p-c}{h_c r_c}.$$ **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare: Relația din enunț rezultă din relațiile trigonometrice:

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{h_a} + \frac{tg\frac{B}{2}}{h_b} + \frac{tg\frac{C}{2}}{h_c} = \frac{2R-r}{rp} \text{ și } \frac{p(p-a)}{h_a r_a} + \frac{p(p-b)}{h_b r_b} + \frac{p(p-c)}{h_c r_c} = \frac{2R-r}{r}.$$

Clasa a XI-a

L:1238. a) Fie $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ matrice inversabile ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) astfel încât $X^{-1} - Y$ este matrice inversabilă;

b) Fie $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ matrice inversabile , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $YX + (YX)^{-1} = I_n$. Arătați că $X - Y^{-1}$ este matrice inversabilă. eleve **Carina Viespescu**, București, **Bianca Negreț**, Craiova

Rezolvare:

a) Din $\left(X - Y^{-1}\right)\cdot\left(X^{-1} - Y\right) = I_n - XY - Y^{-1}X + I_n = I_n - XY - (XY)^{-1} + I_n = I_n - I_n + I_n = I_n$

rezultă că $X^{-1} - Y$ este inversabilă și în plus $\left(X^{-1} - Y\right)^{-1} = X - Y^{-1}$.

b) Din $\left(X^{-1}-Y\right)\cdot\left(X-Y^{-1}\right)=I_n-X^{-1}Y^{-1}-YX+I_n=I_n-\left(YX\right)^{-1}-YX+I_n=I_n-I_n+I_n=I_n$ și de aici rezultă că $X-Y^{-1}$ și $\left(X-Y^{-1}\right)^{-1}=X^{-1}-Y$.

L:1239. **Fie** $A,\ B\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ **cu** $AB=BA$**. Demonstrați că** $\det\left(2A^2+2B^2-3AB-A-B+I_n\right)\geq 0.$

student **Gobej Ștefan, Warwick, Anglia**

Rezolvare: Considerăm matricea $X=I_n+x_1A+x_2B\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$ unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2+x+2=0.$ cu $\overline{x_1}=x_2$ iar $\overline{x_2}=x_1$ $\left(R_1\right)$

Cum $X\cdot\overline{X}=\left(I_n+x_1A+x_2B\right)\overline{\left(I_n+x_1A+x_2B\right)}\overset{(R_1)}{=}\left(I_n+x_1A+x_2B\right)\left(I_n+x_2A+x_1B\right)=$

$I_n+x_2A+x_1B+x_1A+x_1x_2A^2+x_1^2AB+x_2B+x_2^2BA+x_1x_2B^2=$

$I_n+\left(x_1+x_2\right)A+\left(x_1+x_2\right)B+x_1x_2\left(A^2+B^2\right)+\left(x_1^2+x_2^2\right)AB$ $\left(R_2\right)$.

Din relațiile lui Viéte $\left\{x_1+x_2=-1,\ x_1x_2=2\Rightarrow x_1^2+x_2^2=-3\right.\Rightarrow$ $\left(R_2\right)$ devine

$X\cdot\overline{X}=I_n-A-B+2A^2+2B^2-3AB=2A^2+2B^2-3AB-A-B+I_n$ $\left(R_3\right)$ și problema este demonstrată pentru că $\det\left(X\cdot\overline{X}\right)=\det\left(X\right)\cdot\overline{\det\left(X\right)}=\left|\det\left(X\right)\right|^2\geq 0$.

$\overset{(R_3)}{\Rightarrow}\det\left(2A^2+2B^2-3AB-A-B+I_n\right)\geq 0.$

L:1240. **Studiați dacă există matrice** $A,\ B\in\mathcal{M}_{2025}\left(\mathbb{R}\right)$**, astfel încât** $A^2+B^2=AB$ **și** $\det\left(AB-BA\right)>0.$ **Justificați răspunsul.** **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

Rezolvare: Fie A și B două matrice cu proprietățile cerute și $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^3=1.$ Cum $\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=1$ iar $1+\bar{\varepsilon}=-\varepsilon$, utilizând relația $A^2+B^2=AB$ obținem

$$\left(A+\varepsilon B\right)\overline{\left(A+\varepsilon B\right)}=\left(A+\varepsilon B\right)\left(A+\bar{\varepsilon}B\right)=\underbrace{A^2+B^2}_{AB}+\varepsilon BA+\bar{\varepsilon}AB=\underbrace{\left(1+\bar{\varepsilon}\right)}_{=-\varepsilon}AB+\varepsilon BA=-\varepsilon\left(AB-BA\right)\ (1)$$

Utilizând faptul că $\det\left(X\cdot\overline{X}\right)=\det\left(X\right)\cdot\overline{\det\left(X\right)}=\left|\det\left(X\right)\right|^2\in\left[0;+\infty\right),\forall X\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ relația (1) devine

$\det\left[\left(A+\varepsilon B\right)\overline{\left(A+\varepsilon B\right)}\right]=\left(-\varepsilon\right)^{2025}\cdot\det\left(AB-BA\right)=-\varepsilon^{2025}\cdot\det\left(AB-BA\right)\in\in\left[0;+\infty\right)\subset\mathbb{R},$ iar cum $\det\left(AB-BA\right)>0$ (din ipoteza problemei) și $\varepsilon^{2025}=\left(\varepsilon^3\right)^{675}=1$ deducem

$\det\left[\left(A+\varepsilon B\right)\overline{\left(A+\varepsilon B\right)}\right]=\underbrace{\left|\det\left(A+\varepsilon B\right)\right|^2}_{\geq 0}=\underbrace{-\det\left(AB-BA\right)}_{<0}\Rightarrow$ nu există matrice $A,\ B\in\mathcal{M}_{2025}\left(\mathbb{R}\right)$ cu proprietatea cerută.

L:1241. **Fie** $a,b\in\mathbb{R}$ **cu** $b<0$**. Arătați că ecuația** $x^3+3ax^2+3bx+ab=0$ **are toate rădăcinile reale .**

Dană Camelia , Vlad Carmen, Craiova

Rezolvare: Dacă $a=0$ ecuația devine $x^3+3bx=0$ cu soluțiile reale $x_1=0,x_{2,3}=\pm\sqrt{-3b}$.

Notând $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f\left(x\right)=x^3+3ax^2+3bx+ab$ avem

$f\left(-a\right)=-a^3+3a^3-3ab+ab=2a\left(a^2-b\right)$ deoarece $a^2-b>0$ avem două cazuri

$a>0$ și $f\left(-a\right)>0$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ iar $f(0)=ab<0$ ecuația $f(x)=0$ are trei rădăcini reale $x_1\in\left(-\infty,-a\right),x_2\in\left(-a,0\right)$ și $x_3\in\left(0,\infty\right)$.

$a<0$. Atunci $f(-a)<0$ și $f(0)>0$ .Ecuația $f(x)=0$ va avea trei rădăcini reale $x_1\in(-\infty,0), x_2\in(0,-a)$ și $x_3\in(-a,\infty)$.

L:1242. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=2$ și $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{n}, n\geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+4a_2+...+n^2a_n}{1+2+...+n}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2+2a_2^2+...+na_n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$. **Florin Rotaru**, Focșani

Rezolvare : $a_1=2, a_2=3<4, a_3=7/2<4, a_4=13/4<4, a_5=133/64<4$; presupunem $a_n<4$, atunci $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{n}\leq\frac{16-a_n+1}{n}<\frac{17}{n}<4$.

a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior de 4, deci $0<a_n<\frac{17}{n-1}$ pentru șirul $n\geq 5$ și de aici $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+4a_2+...+n^2a_n}{1+2+...+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2a_{n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(a_n^2-a_n+1)}{n(n+1)}=1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2+2a_2^2+...+na_n^2}{a_1+a_2+...+a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}^2}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(a_n^2-a_n+1)}{n}=1$.

De asemenea, pentru articolul de la Istoria Matematicii „200 de ani de la nașterea lui G. B. Riemann” autori sunt Ionel Tudor – Călugăreni , Giurgiu și Adrian Stan, Buzău

Știați că ....?

..... **Spiru Haret** l-a ajutat pe **Aurel Vlaicu** (1882- 1913) în realizarea visului său aviatic.

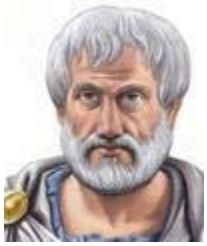
În 1909, cînd **Aurel Vlaicu** s-a întors în satul său natal din Transilvania , prietenul său **Octavian Goga** (1881- 1938) l-a luat și l-a adus la București pentru a-l introduce în cercurile financiare și politice ale celor interesați de dezvoltarea unor modele de aeroplane. Astfel că în toamna lui 1909 când a avut loc expunerea a două modele de aeroplane în parcul de la Filaret a fost prezent și ministrul **Spiru Haret** care a fost impresionat de aparatele de zbor și a decis să-l sprijine, adică a realizat demersurile ca statul român să aprobe construirea primului model de aeroplan cu motor „**Vlaicu I**” la **Arsenalul Armatei din București**. Vlaicu a fost angajat acolo ca inginer și a avut acces la ateliere, materiale și oameni.



La **17 iunie 1910** , pe câmpul de la Cotroceni, Vlaicu avea să reușească primul său zbor cu un aparat cu motor să se ridice de la sol și să zboare 50 de metri în aer.

Spiru Haret l-a susținut public pe Aurel Vlaicu în realizarea visului acestuia dar a și propus cartea lui despre construcția aeroplanelor pentru acordarea premiului **Academiei Române**, existând și o scrisoare de mulțumire din **17 septembrie 1912** a lui Vlaicu pentru Haret pentru acordarea acestui premiu.

„Cei care cunosc, fac.
Cei care înțeleg, învață”.
Aristotel
(ap. 384- 322, î.e.n)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1484. Se consideră mulțimea $A=\left\{x\middle|x=n^4+1,\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că în orice submulțime cu 5 elemente a lui A, se găsesc două elemente a căror diferență este divizibilă cu 10.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1485. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyzt}$, știind că $1+3+5+.....+\overline{zt}=\overline{xyzt}$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1486. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. Arătați că $(2n+1)+(2n+3)+....+(2n^2-1)=n^2\cdot\left(n^2-1\right)$.

elev **Marcu Maya Cataleya**, Craiova

G:1487. Arătați că $2027^{2026}-1$ se divide cu 2026^2. elev **Belciug Tudor**, Craiova

G:1488. Se dă fracția $\frac{1}{2026}$. Mărind-o de două ori, de trei ori, ..., de 2026 de ori și adunând rezultatele cu fracția inițială obținem suma S. Arătați că anul dat de numărul 2S+1 este un an bisect.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1489. Suma a șapte numere naturale este 1001. Arătați că există trei numere, dintre cele șapte, a căror sumă să fie mai mare sau egală cu 429. elev **Nicolas Diaconu,** Gaillard, Franța

G:1490. Un număr natural scris în baza 10 cu cifre distincte $\overline{xyz}$, $x>y>z$, se numește „stabil“ dacă diferența dintre el și răsturnatul său $\overline{zyx}$ este tot un număr natural de trei cifre distincte format tot cu cifrele x, y și z. Aflați câte numere „stabile“ există.

student ***Gobej Ștefan*** ,Warwick, Anglia

G:1491. a) Arătați că: $\underbrace{333...3}_{99\text{ ori}}\times\underbrace{666...6}_{100\text{ ori}}=\underbrace{999...9}_{99\text{ ori}}\times\underbrace{222...2}_{100\text{ ori}}$.

b) Numărul a este scris cu 99 cifre de 3, iar numărul b este scris cu 100 cifre de 6. Demonstrați că suma cifrelor numărului $a\times b$ este un pătrat perfect.

Molea Gheorghe, Curtea de Argeș

G:1492. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $2xy+1013z=2026$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1493. Se consideră numărul $A=10^{2026}+3\cdot10^{2026}+5\cdot10^{2026}+...+2025\cdot10^{2026}$.

a) Demonstrați că A este divizibil cu 2026^2. b) Calculați restul împărțirii numărului A prin 3.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1494. Găsiți numerele naturale $n\geq 3$, pentru care $3^n+(n-3)^n=275$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:1495. Fie $a=\left(\frac{9}{2}\right)^{2026}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{2025}+(-1)^{2026}\cdot\frac{9}{2}+\frac{9}{2^{2026}}\cdot(-2)^{2025}+\left(-2026-2025-....-1+1013\cdot 2027\right)$.
Cercetați dacă numerele 3, 4, a și 6 sunt termenii unei proporții. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1496. Să se scrie fracția $\frac{23}{4290}$ ca o sumă de 4 fracții, fiecare având numărătorul egal cu 1.
Dumitru Preoteasa, **Giurgiu, Mădălina Buliga**, București

G:1497. Să se arate că numărul $\frac{10^{2026}+11^{4049}}{37}$ este natural. **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

G:1498. **Fie** $a=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+.....+\frac{9}{10^9}$ **și** $=\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^3}+.....+\frac{1}{10^9}$**. Se cere:**
Să se calculeze a și b prin aducerea la același numitor și să se determine cel mai mic număr zecimal p cu șapte zecimale astfel încât $p\rangle\ a+b$. **Petre Păunescu,** Roșiori de Vede

G:1499. Demonstrați că nu există numere naturale x și y astfel încât $x^2-5y^{2026}=2^{2028}$.
Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1500. Fie X și Y două mulțimi, astfel încât $card(X\cap Y)=65,\ card(X-Y)=896$ și $card(Y-X)=1065$. Determinați $card(X),\ card(Y)$ și $card(X\cup Y)$.
Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1501. Determinați numerele prime p, q, r astfel încât $p+q^2=r^2$. elev **Nicolae Ariana**, Craiova

G:1501. Arătați că nu există $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(a+b+2)^3=3(ab+1)^2$.
elevi **Marcu Maya Cataleya, Nicolae Arriana**, Craiova

G:1502. Fie a, b, c numere strict pozitive astfel încât $\frac{a^{2026}}{a+b}=\frac{b^{2026}}{b+c}=\frac{c^{2026}}{c+a}$. Arătați că a = b = c.
Daniela Beldea, Mihaela Cioplea, Băilești

G:1503. Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\frac{p}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{q}$ în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, unde p și q sunt numere prime date. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1504. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC să se arate că $2(a+b+c)^2\rangle\ 3(a^2+b^2+c^2)$.
Florin Rotaru, Focșani

▪ Clasa a VII-a

G:1505. Să se afle ultimele două cifre ale numărului 7^{2026}.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1506. Arătați că nu există $x,y,z\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(x+y)^2=7(z^2+1)$.
Dan Grigorie, Monica Matei, Craiova

G:1507. Fie $a_1, a_2, ..., a_{2027}$, numerele 1, 2, ..., 2027 în altă ordine. Arătați că cel puțin două dintre numerele $|a_1-1|, |a_2-1|, ..., |a_{2027}-1|$ sunt egale. **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

G:1508. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^6 + y^{2026} = 2x^3$.

elev Dobriceanu David, Craiova

G:1509. Aflați numărul real x, dacă unul din numerele $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+3}$ este media aritmetică a celorlalte două. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1510. Fie numărul $a = \frac{1}{676} + \frac{1}{677} + \frac{1}{678} + ... + \frac{1}{2026}$. Arătați că a este supraunitar și calculați partea întreagă a lui a.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

G:1511. Fie $a\rangle 0,\ b\rangle 0,\ c\rangle 0,\ d\rangle 0$ și cel puțin unul dintre numerele b și d este mai mare sau egal cu 1. Să se arate că $\frac{a-b+1}{b+d-1} + \frac{b-c-1}{c+a+1} + \frac{c-d+1}{b+d-1} + \frac{d-a-1}{c+a+1} \geq 0$. **Florin Rotaru**, Focșani

G:1512. Fie $a,b,c\rangle\ 0\ , n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Să se arate că

$$\frac{a^n + b^n}{ab(a^{n-2} + b^{n-2}) + c^n} + \frac{b^n + c^n}{bc(b^{n-2} + c^{n-2}) + a^n} + \frac{c^n + a^n}{ca(c^{n-2} + a^{n-2}) + b^n} \geq 2 .$$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:1513. Să se arate că numărul $7^{12} + 2^{14}$ este număr compus.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga,** București

G:1514. Aflați numărul întreg x, astfel încât expresia

$E(x) = \left(\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}\right) \cdot \left(x^2 - x - 6\right) - 5x + \frac{3x+2}{x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; -2; 3\}$ să fie număr natural.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1515. Dacă $n = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ și $m = \sqrt{3} - 1$ să se afle cu cât este egal numărul $A = \frac{\sqrt{(1+n)(1+m)}}{n+m+1}$?

Adrian Stan, Buzău

G:1516. Fie punctele $A(-7;3)$ și $B(4;6)$ într-un sistem de axe xOy. Determinați poziția punctului C situat pe axa obciselor astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic în C.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1517. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $A = 2026^{2n+1} - 2025^{2n+1} - 2025^n \cdot 2026^n$ să fie număr prim. **Dorina Goiceanu, Iulia Sanda**, Craiova

G:1518. Se consideră ecuația $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$. Calculați suma pătratelor rădăcinilor fără a rezolva ecuația și determinați apoi și rădăcinile ecuației. **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

G:1519. Fie $a,b,c \in (0;\infty)$ cu proprietatea $a \cdot b \cdot c = 3$. Demonstrați că

$\frac{a}{a^2b+9} + \frac{b}{b^2c+9} + \frac{b}{c^2a+9} \leq \frac{a+b+c}{16}$. **Constantin Nicolau**, Curtea de Argeș

G:1520. Fie a,b,c,d numere reale strict pozitive. Arătați că

$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$. **Florin Rotaru,** Focșani

G:1521. Aflați toate tripletele (x,y,z) de numere întregi nenule care verifică ecuația:

$$2x^2y^2 + 3y^2z^2 + 2z^2x^2 = 7xyz .$$

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Math Circle (BMC)

G:1522. Fie $a,b,c\rangle\ 0$. Să se arate că $(ab+bc+ca)^n \geq 3^{3-n}abc(a+b+c)^{2n-3}$, $\forall n\in\{0;1;2\}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1523. Dacă $a,b,c>0$, atunci demonstrați inegalitățile:

i) $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\geq\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$; **ii)** $\sum_{cyclic}\left(\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\right)\geq\frac{54}{a+b+c}$.

Neculai Stanciu, Buzău și **Mihaly Bencze, Brașov**

▪ Clasa a IX-a

L:1312. Fie x,y,z numere reale strict pozitive. Arătați că
$\frac{1-x}{x^2-x+1}+\frac{1-y}{y^2-y+1}+\frac{1-z}{z^2-z+1}+2\geq\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^3+1}+\frac{1}{y^3+1}+\frac{1}{z^3+1}\right)$. În ce caz avem egalitate?

Roxana Vasile , Craiova

L:1313. Determinați minimul expresiei $E(x)=x^{2026}+x^{26}+\frac{25^2}{x^{26}+25}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Calina Doina Cristina, Dorina Goiceanu, Craiova

L:1314. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\left(x^3(x+y)\right)=x^4+x^3\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Angela Neicu, Amelia Curcă – Năstășelu, Filiași

L:1315. Dacă $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=xy$ atunci să se calculeze cu cât este egal x^3+y^3 ?

Adrian Stan, Buzău

L:1316. Studiați dacă există $x,\ y\in R^*$ astfel încât $4^{x+y}+\sqrt{2026^x+2026^y-2}=2^{x+y+1}-1$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1317. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:
$\sqrt{x_1-3}+\sqrt{x_2^2-4x_2+3}-\sqrt{(x_3-2)^3}=\sqrt{x_2-3}+\sqrt{x_3^2-4x_3+3}-\sqrt{(x_4-2)^3}=\ldots$
$=\sqrt{x_n-3}+\sqrt{x_1^2-4x_1+3}-\sqrt{(x_2-2)^3}=0$.

Neculai Stanciu, Buzău și **Mihaly Bencze,** Brașov

L:1318. Rezolvați în R ecuația $x^3-7x+7=0$.

Neculai Stanciu, Buzău și **Mihaly Bencze,** Brașov

L:1319. Arătați că pentru orice $x,y,z>0$ are loc inegalitatea
$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 4\cdot\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$.

Elena Daniela Cărămidă, Fălticeni, Suceava

L:1320. Dacă $a,b,c>0$, atunci demonstrați inegalitatea: $\sum_{cic}\frac{a}{\sqrt{bc+4(ca+ab)}}\geq 1$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1321. Dacă, $f:N\to N$, $f(n)=1!+2!+\ldots+n!$, astfel încât $f(n+2)=3A(n)f(n+1)-2B(n)f(n)$, $\forall n\geq 1$, atunci aflați $A(n)$ și $B(n)$. **José Luis Díaz-Barrero,** Barcelona Math Circle (BMC)

L:1322. Determinați $x,y,z\in\mathbb{Z}$ soluțiile sistemului de ecuații: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=13\\ y^2+yz+z^2=49\\ z^2+zx+x^2=31\end{cases}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

L:1323. Dacă $a,b,c\rangle 0$ și $ab+bc+ca+abc=4$ atunci, $2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)^2+3\sum_{cyc}a+12\sum_{cyc}\frac{1}{a}\geq 63.$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1324. Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq\pm b$ astfel încât $\left(a^2-b^2\right)\cdot\sin 10^0=a\left(\cos 5^0-\sin 5^0\right)-b\left(\cos 5^0+\sin 5^0\right).$ **Ionel Tudor- Călugăreni**, Giurgiu

▪ Clasa a X-a

L:1325. Arătați că dacă a,b,c sunt numere reale distincte două câte două atunci ecuațiile $x^5-ax^4+b^5=0$, $x^5-bx^4+c^5=0$, $x^5-cx^4+a^5=0$ nu pot avea rădăcini reale comune.

Laura Popescu , Craiova

L:1326. Fie $a,b,c>0$, demonstrați: $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg\frac{b}{c}}+\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\lg\frac{c}{a}}+\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\lg\frac{a}{b}}\geq 3.$

Elena Daniela Cărămidă, Fălticeni, Suceava

L:1327. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $n+1+2^{2^0}+2^{2^1}+2^{2^2}+.....+2^{2^n}\rangle (n+1)\sqrt[n+1]{2^{2^{n+1}}-1}$.

Dan Grigorie, Carmen Vlad, Craiova

L:1328. Determinați cel mai mic număr natural $n\geq 2$ astfel încât ecuația $x_1!+x_2!+.....+x_n!=2026!$ să aibă soluții în numere naturale. ($n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot....\cdot n$, $n\in\mathbb{N}^*$). elev **Diaconu Nicolas Gaillard**, Franța

L:1329. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, ecuația $2x^3+6x^2+5x+2=0$.

elev **Truică Ana**, Craiova

L:1330. Rezolvați ecuația: $\log_{2026}\left(2025+\log_{2026}\left(2025+\log_{2026}\left(2025+[x]\right)\right)\right)=[x]$, unde cu $[x]$ a fost notată partea întreagă a numărului real x. **student Gobej Ștefan,** Warwick, Anglia

L:1331. Arătați că pentru orice număr natural n, $n\geq 4$ avem: $\sqrt[4]{n}\rangle\sqrt[5]{n+1}$.

Sebastian Ilinca, Pârșcoveni, **Carmen Firicescu,** Corabia, Olt

L:1332. Să se determine mulțimea $A=\left\{a\in\mathbb{R}\,\middle|\,9^x+(2a+2)3^x+a^2-7\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\right\}$.

Adrian Stan, Buzău

L:1333. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{2}{\sqrt{4-3x+2x^2-x^3}}-x-1=0$.

Ionel Tudor - Călugăreni, Giurgiu

L:1334. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2034-x}=47$.

Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

L:1335. Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to[0;\infty)$ și trei numere reale oarecare a, b, c. Arătați că are loc inegalitatea

$\sqrt{(3^x+f(a))\cdot(3^{-x}+f(a))}+\sqrt{(3^x+f(b))(3^{-x}+f(b))}+\sqrt{(3^x+f(c))(3^{-x}+f(c))}\geq 3+f(a)+f(b)+f(c),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

L:1336. Dacă $f:R\to R$, $f(x)=a^5[x]+b^5\{x\}+5a^4b\{x\}+5ab^4[x]+10a^3b^2[x]+10a^2b^3\{x\}$, unde $a,b\in R$, atunci demonstrați că f este impară dacă și numai dacă $a=b$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1337. Să se rezolve ecuația $\sqrt[2n]{x-a+1}+\sqrt[2n]{a+1-x}=\log_a x+\log_x a$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, $a\rangle 2$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1338. Dacă $x,y,z>0$ şi $0\le\lambda\le 3$ atunci să se arate că $\sum x^2+\lambda(xyz)^{\frac{2}{3}}\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)\sum xy$.

Marin Chirciu, Piteşti

▪ Clasa a XI-a

L:1339. a) Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$, $n\ge 2$ şi $f:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$, $f(x)=xAx$. Arătaţi că f nu e injectivă.

b) Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$, $n\ge 2$ şi $g:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$, $g(x)=AxA+xAx$. Arătaţi că g nu e injectivă.

Cristian Schneider, Lucian Tuţescu, Craiova

L:1340. Fie $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Să se arate că $\det\left(3A^2+4B^2+3A+2B+I_n\right)\ge 0$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

L:1341. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+e^x}{e^{e^x}}$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

elev **Nuţa Matei**, Craiova

L:1342. Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}}-\sqrt{\ln n}\right)$.

Gabriela Vasile, Răzvan Lupu, Craiova

L:1343. Determinaţi funcţiile $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ derivabile astfel încât $\left(x^2+1\right)\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=2x,\ \forall x\rangle\ 0$.

Monica Stanca, Craiova

L:1344. Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^2}{\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+.....+\left[\sqrt{n\cdot(n+1)}\right]}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x;

Adrian Stan, Buzău

L:1345. Fie $\gamma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}-\ln n$, $n\ge 2$ şirul constantei Euler-Mascheroni, $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\gamma_{n+1}{}^2\cdot\gamma_n-\gamma^3\right)\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Ionel Tudor- Călugăreni, Giurgiu

L:1346. Fie şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ unde $a_n=\sqrt{\left|1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2\right|^2-n^3}$ şi $b_n=\sqrt{\left|1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2\right|^2+(n+1)^3}$. Fie şirul $c_n=a_n+b_n-1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{n^2}\right)^n$.

Florin Rotaru , Focşani

L:1347. Calculaţi limita şirului $(b_n)_{n\ge1}$ definit prin următoarea relaţie: $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{4^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

▪ Clasa a XII-a

L:1348. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea $x^3=x+x+x,\ \forall x\in A$. Arătaţi că $(A,+,\cdot)$ este inel comutativ.

Daniela Stoian, Mihaela Băianu, Craiova

L:1349. Arătați că ecuația $f(x)=0$, unde $f(x)=x^{15}-9x^{10}+27x^5-277-125\sqrt{5}$ are o singură soluție reală $x_1\in\left(\sqrt[5]{3};2\right)$ și să se determine valoarea exactă a acesteia.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

L:1350. Fie p un număr prim impar și A un inel de caracteristică p cu n elemente care are proprietatea că $x^p=x$ pentru orice $x\in A$. Demonstrați că $|Aut(A)|\ \big|\ |A|$ dacă și numai dacă n = p.

studenți **Ciurea Andrei**, Paris, **Nedelcu Horia**, București

L:1351. Fie A un inel finit, cu element unitate, care are cel puțin un divizor al lui zero. Se presupune că pentru orice $a,\ b\in A^*$ nenule cu $a\cdot b=0$ are loc relația $(a+b)^2=1$. Arătați că $x^3=x$ pentru orice $x\in A$. studenți **Ciurea Andrei**, Paris, **Nedelcu Horia**, București

L:1352. Determinați $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$ continuă cu proprietatea că există $F:\mathbb{R}\to(0;\infty)$ o primitivă a funcției f astfel încât F^5 este o primitivă a funcției f^5.

Mihaela Cioplea, Daniela Beldea, Băilești

L:1353. Fie a, b, c trei numere nenule și distincte și p(X) un polinom de gradul șase, cu coeficienți reali astfel încât $p(a)-p(-a)=a^5,\ p(b)-p(-b)=b^5,\ p(c)-p(-c)=c^5$. Să se arate că $\int_0^1[p(x)-p(-x)]dx=\frac{1}{6}$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1354. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcție derivabilă cu proprietatea că $4\cdot\int_0^1 x\cdot f(x)dx=f(1)$. Să se arate că există $c\in(0\ ;1)$ astfel încât $f^I(c)=\frac{2}{c}\cdot f(c)$.

Adrian Stan, Buzău

L:1355. Fie $a,b,c,d\rangle\ 0$ astfel încât $ad\neq bc$ să se calculeze $\int\frac{\sin x-x\cos x}{(ax+b\sin x)(cx+d\sin x)}dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1356. Dacă $f:[a,b]\to(0,\infty)$ este o funcție continuă, astfel încât $f(a+b-x)+f(x)=c$, $\forall x\in[a,b]$ și $a+b=\frac{\pi}{2}$, atunci calculați: $\int_a^b\frac{\sin^n x+f(x)+d}{\sin^n x+\cos^n x+c+2d}dx$, unde $n\in N^*$ și $d\geq 0$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:1357. Dacă $f:R\to(1,\infty)$ și $g:R\to R$ sunt funcții continue, iar $(L_n)_{n\geq 0}, L_0=2, L_1=1, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n, \forall n\in N$ este șirul lui Lucas, atunci calculați:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{\left(f(x-y_n)\right)^{g(y_{n+1}-x)}}{\left(f(y_{n+1}-x)\right)^{g(x-y_n)}+\left(f(x-y_n)\right)^{g(y_{n+1}-x)}}dx,$$

unde $y_n=\sqrt[n]{(2n-1)!!L_n}$, $n\in N^*-\{1\}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:1358. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin următoarea relație: $a_n=\int_0^n\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^3}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu



„ Money was never a big motivation for me, except as a way to keep score. The real excitement is playing the game".
Donald Trump (1946- ...)
„Trump: Art of the Deal"

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 01, 2027.

PROPOSALS – QUICKIES

Q124. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania.
If $f:R_+^*\to R_+^*$ is a continuous function and $\gamma_n=-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, find

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{\gamma}^{\gamma_n}\frac{f(x-\gamma)}{f(\gamma_n-x)+f(x-\gamma)}dx.$$

Q125. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania. If $f:R_+^*\to R_+^*$ is a continuous function and $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, find

$$\lim_{n\to\infty}\int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}}\frac{f(x-e^{x_n})}{f(e^{x_{n+1}}-x)+f(x-e^{x_n})}dx.$$

Q126. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania.
If $f:R_+^*\to R_+^*$ is a continue function and $(a_n)_{n\geq 1}$ is defined by $a_1=a_2=1, a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}, \forall n\geq 2$ and

$(x_n)_{n\geq 1}, x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, find $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}}\frac{f(x-e^{x_n})}{f(e^{x_{n+1}}-x)+f(x-e^{x_n})}dx.$

Q127. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania.
If $f:R\to(1,\infty)$ and $g:R\to R$ are continuos functions, and $y_n=\sqrt[n]{n!F_n}$, $n\in N^*-\{1\}$, where $(F_n)_{n\geq 0}$ is Fibonacci sequence , find

$$\lim_{n\to\infty}\int_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{\left(f(x-y_n)\right)^{g(y_{n+1}-x)}}{\left(f(y_{n+1}-x)\right)^{g(x-y_n)}+\left(f(x-y_n)\right)^{g(y_{n+1}-x)}}dx.$$

Q128. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $a,b,c,d>0$, then prove that:

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b^2+c^2+d^2} \le \sqrt{\sum_{cyc} 3a^2}.$$

SOLUTIONS - QUICKIES

Q120. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

If $a,b,c>0$, such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$ and $\lambda \ge 0$ then prove that $\sum a\left(1+\lambda\sqrt{b}\right) \le 3(\lambda+1)$.

Solution by author. Lemma. If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$, then $a+b+c\le 3$.

Using pqr-Method: $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$:

$$a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow p^2-2q+r=4 \Leftrightarrow q=\frac{p^2+r-4}{2}.$$

$$4=a^2+b^2+c^2+abc \overset{AM-GM}{\ge} 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow abc\le 1 \Rightarrow r\le 1.$$

By Schur's Inequality: $p^3-4pq+9r\ge 0 \Rightarrow r\ge \frac{p\left(4q-p^2\right)}{9}$; $1\ge r\ge \frac{p\left(4q-p^2\right)}{9}, q=\frac{p^2+r-4}{2}$

$$r\ge \frac{p\left(4\cdot\frac{p^2+r-4}{2}-p^2\right)}{9} \Leftrightarrow 9r\ge p^3+2pr-8p \Leftrightarrow r\ge \frac{p^3-8p}{9-2p} \Rightarrow 1\ge r\ge \frac{p^3-8p}{9-2p}$$

$$1\ge \frac{p^3-8p}{9-2p} \Leftrightarrow p^3-6p-9\le 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p^2+3p+3\right)\le 0 \Leftrightarrow p\le 3.$$

The equality holds iff $a=b=c=1$. By Lemma we obtain:

$$LHS=\sum a\left(1+\lambda\sqrt{b}\right)=\sum a+\lambda\sum a\sqrt{b} \overset{CBS}{\le} \sum a+\lambda\sqrt{\sum a\sum ab} \overset{Lema}{\le} 3+\lambda\sqrt{3\cdot 3}=$$

$$=3(\lambda+1)=RHS.$$

We used $\sum ab\le 3$, $\sum ab \overset{SOS}{\le} \frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 \overset{Lema}{\le} \frac{1}{3}(3)^2=3$. The equality occurs iff $a=b=c=1$.

Remark. Another solution is presented by **José Luis Díaz-Barrero,** Barcelona Math Circle (BMC) in the article ''On the Problem Q120 from Sclipirea Minții No. 37'' – published in this issue of this magazine.

Q121. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania. Find the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}} \int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx$, where $(\gamma_n)_{n\ge 1}$, $\gamma_n=-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ with $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$, and $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ is a continuous function on $(0,\infty)$.

Solution. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n^n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}\cdot\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(2n-1)!!}=$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e^2},\ (1).\ \text{By (MVT)}\ \exists\xi_n\in(\gamma,\gamma_n)\ \text{such that}$$

$$\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx = (\gamma_n - \gamma) f(\xi_n)\,,\ \forall n \in N^*,\ \text{so}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}}\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx = \frac{\sqrt[n]{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}}}{n}\cdot n(\gamma_n-\gamma)f(\xi_n)\,,\ (2).$$

From (1) and (2) yields that $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{3!!}\cdot\sqrt[3]{5!!}\cdot\sqrt[n]{(2n-1)!!}}\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx =$

$$= \frac{2}{e^2} f(\gamma)\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n-\gamma}{\frac{1}{n}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{Cesaoro-Stols}{=}} \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{n\to\infty}\frac{-\gamma_{n+1}+\gamma_n}{\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} \overset{\left(\frac{1}{n}=x\right)}{=} \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2} =$$

$$= \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2(1+x)} = \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2} =$$

$$= \frac{2f(\gamma)}{e^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)+1-1}{2x} = \frac{2f(\gamma)}{2e^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{f(\gamma)}{e^2}\ln e = \frac{f(\gamma)}{e^2}.$$

Q122. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania. Find the limit $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx$, where $(\gamma_n)_{n\geq 1}$, $\gamma_n = -\ln n + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$ and $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ is a continuous function on $(0,\infty)$.

Solution. Using $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, (1), by (MVT) there exists $\xi_n \in (\gamma,\gamma_n)$ such that

$$\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx = (\gamma_n-\gamma)f(\xi_n)\,,\ \forall n\in N^*,\ \text{so}$$

$$\sqrt[n]{n!}\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx = \sqrt[n]{n!}(\gamma_n-\gamma)f(\xi_n) = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n(\gamma_n-\gamma)f(\xi_n)\,,\ (2).\ \text{From (1) and (2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\int_{\gamma}^{\gamma_n} f(x)dx = \frac{1}{e}f\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n\right)\lim_{n\to\infty} n(\gamma_n-\gamma) =$$

$$= \frac{1}{e}f(\gamma)\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n-\gamma}{\frac{1}{n}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{Cesaoro-Stols}{=}} \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{-\gamma_{n+1}+\gamma_n}{\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} \overset{\left(\frac{1}{n}=x\right)}{=} \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2} =$$

$$= \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2(1+x)} = \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2} =$$

$$= \frac{f(\gamma)}{e}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)+1-1}{2x} = \frac{f(\gamma)}{2e}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{f(\gamma)}{2e}\ln e = \frac{f(\gamma)}{2e}.$$

Q123. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău, Romania. Find the limit $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\int_{s_n}^{\frac{\pi^2}{6}} f(x)dx$, where $(s_n)_{n\geq 1}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ and $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ is a continuous function on $(0,\infty)$.

Solution. Using $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}$, by (MVT) there exists $\xi_n \in \left(s_n, \frac{\pi^2}{6}\right)$ such that

$\int_{s_n}^{\frac{\pi^2}{6}} f(x)dx = \left(\frac{\pi^2}{6} - s_n\right) f(\xi_n)$, $\forall n \in N^*$, (1). So,

$$\sqrt[n]{n!}\int_{s_n}^{\frac{\pi^2}{6}} f(x)dx = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot f(\xi_n)\cdot n\left(\frac{\pi^2}{6} - s_n\right) = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot f(\xi_n)\cdot\frac{\frac{\pi^2}{6}-s_n}{\frac{1}{n}}$$ and because

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\int_{s_n}^{\frac{\pi^2}{6}} f(x)dx = \frac{1}{e}\cdot f\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi^2}{6}-s_n}{\frac{1}{n}} \overset{Stolz}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \frac{1}{e}f\left(\frac{\pi^2}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{-s_{n+1}+s_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{6}\right)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s_n}{\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \frac{f\left(\frac{\pi^2}{6}\right)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{6}\right)}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{6}\right)}{e}.$$

Remark. On the problems Q121, Q122 and Q123 see [1].

1. Neculai Stanciu, *Evaluating Limits of Integrals Using The Mean Value Theorem*, Crux Mathematicorum, Vol. 52(2), February, 2026, 83-87.



**„Un matematician este un om care,
asemenea unui pictor sau poet, este un creator de modele.”
G. H. Hardy (1877- 1947)**

6. Caleidoscop matematic

REGINA

(Acrostih)

Adesea, printre științe

Re-numită prin... sentințe,

Intră-n top în lumea fină;

Teoretic e regină.

Multe elemente are,

Există prin numărare.

Teoreme-n abundență

Iscă un parfum-esență.

Cine-a zis-o, Gauss oare?

Așezând-o-n jilțul mare...

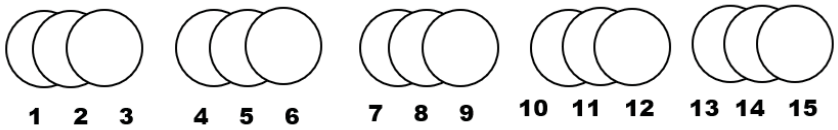
de Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Notă. Citind inițialele primelor cuvinte, de sus în jos, găsiți numele reginei (ARITMETICA).

Probleme propuse

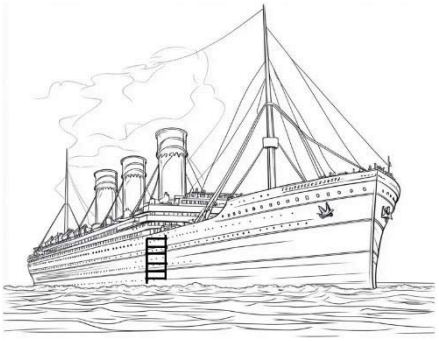
1. Într-un atelier mecanic, muncitorii realizează cutii metalice, câte o cutie dintr-o singură foaie de metal. La șase cutii realizate, resturile rămase de la realizarea cutiilor se pot topi și pot forma o altă foaie metalică. Dacă muncitorii au 36 de foi metalice, să se spună câte cutii se pot face din acestea?

2. Avem cinci bucăți de lanțuri a câte trei zale fiecare pe care trebuie să le unim pentru a face un lanț mai mare. Care este cel mai mic număr de lipiri a zalelor pentru a face lanțul complet?



3. La ora 8,00 un călugăr urcă încet un munte înalt. Cărarea este foarte îngustă și călugărul urcă greu, se mai odihnește, până la urmă ajunge sus pe munte tocmai la asfințitul soarelui. Dimineața exact la ora 8,00 coboară muntele, dar de data aceasta cu o viteză mai mare, deci mult mai rapid ca la urcare. Demonstrați că există un punct în care călugărul va ajunge exact în același moment al zilei ca la urcare.

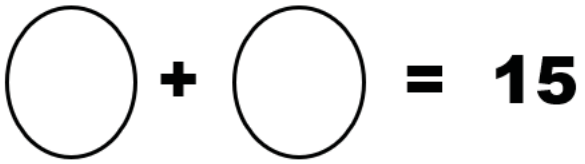
4. În larg nu departe de țărm se află o navă ancorată iar pe o parte a sa se află atârnată o scară de frânghie cu 10 trepte între fiecare treaptă fiind o distanță de 30 de cm. Treapta de jos atinge apa dar din cauza mareei, suprafața apei crește cu 40 cm pe oră. În cât timp apa va acoperi a doua treaptă a scării de frânghie numărată de sus în jos.



5. Pe 8 cartonașe sunt înscrise numerele 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, exact ca în figura alăturată. Mutați două cartonașe astfel încât sumele de pe cele două coloane să fie egale

1	3
2	4
7	5
9	8
+ 19	+ 20

6. Adăugați un singur 0 astfel încât relația alăturată să fie adevărată.



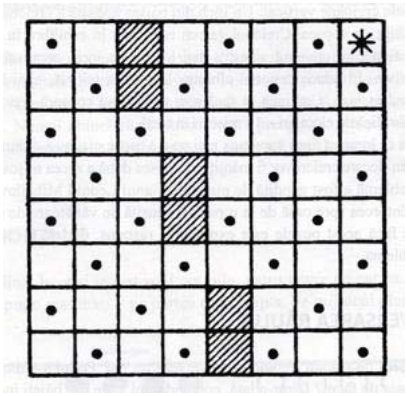
7. În figura de mai jos sunt 12 bețe de chibrit care ne dă relația 6 – 4 = 9 ! Mutați un singur băț pentru a obține o relație adevărată !



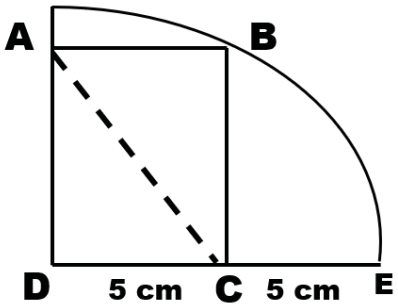
8. Un colecționar are pe masa sa 10 teancuri a câte 10 monede de aur de 1 dinar fiecare numai că un teanc conține monede false și nu știe care este acela doar faptul că o monedă falsă cântărește cu un gram mai mult decât una adevărată. Știind cât cântărește o monedă adevărată, care este numărul minim de cântăriri necesare pentru a identifica teancul cu monede false?



9. Figura de mai jos reprezintă schema unei livezi iar fiecare punct un pom. Un grădinar trebuie să plece din pătratul cu stea și să treacă prin toate pătratele, cu sau fără pomi, unul după altul. Niciodată nu trece printr-un pătrat prin care a mai trecut și înainte, nu merge în diagonală și nu trece nici prin cele șase pătrate hașurate. La sfârșitul acestui drum, grădinarul trebuie să ajungă din nou în pătratul cu stea. Puteți reprezenta un astfel de drum prin trasarea liniilor ?



10. Într-un sfert de cerc se înscrie un dreptunghi ABCD ca în figura alăturată cu $DC = CE = 5\ cm$. Puteți afla cu cât este egală lungimea diagonalei AC ?



11. Pot fi poziționate șase bețe egale (de același fel și aceeași lungime) astfel încât fiecare să le atingă pe celelalte cinci (fără să fie îndoite sau rupte)? Dacă da, cum?

12. Două vapoarașe pornesc în același timp de pe malurile opuse ale unei mări și traversează apa pe ruta perpendiculară pe mal. Fiecare vaporaș se deplasează cu viteză constantă dar unul mai rapid decât celălalt. Ele se întâlnesc într-un punct situat la 6 km de cel mai apropiat țărm. Înainte să pornească înapoi de la malul la care au ajuns, ambele vapoarașe staționează 10 minute. La întoarcere, ele se reîntâlnesc la 4 km de celălalt mal. Care este lungimea distanței dintre maluri?

RĂSPUNSURI CALEIDOSCO MATEMATIC

1. Din cele 36 de foi inițiale se pot face 36 de cutii, iar din resturile de la cele 36 de foi se mai pot realiza 6 foi adică se mai pot face încă 6 cutii. Din resturile de la ultimele 6 foi se mai poate face încă o foaie de metal adică încă o cutie. În total se realizează 36+6+1= 43 de cutii.

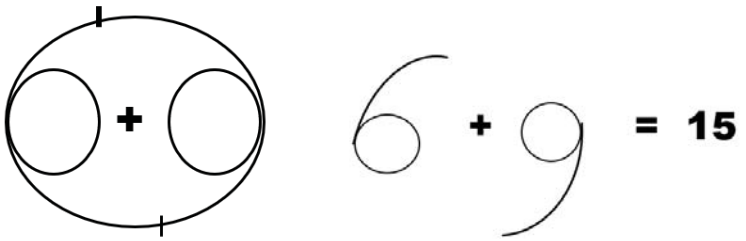
2. Mai întâi deschidem cele trei zale de la o bucată de lanț, de exemplu de la primul, adică zalele 1, 2, și 3 și prin intermediul acestora se vor lipi zalele 6 cu 7 , 9 cu 10 și 12 cu 13, rezultând 3 lipiri-numărul minim.

3. Există un punct în care în același moment al zilei se află călugărul deoarece dacă considerăm doi călugări care în aceeași zi, unul urcă și celălalt coboară, ei desigur se vor întâlni la un moment dat , acela fiind punctul comun de întâlnire în același moment al zilei.

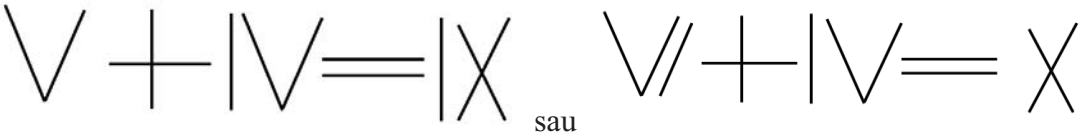
4. Fiind un fenomen fizic și nava fiind in larg înțelegem că apa va crește o dată cu nava și cu frânghia respectivă, deci niciodată apa nu va ajunge la respectiva treaptă.

5. Cartonașul cu numărul 9 se va întoarce pentru a deveni numărul 6 și se va muta pe cealaltă coloană în locul lui 8 iar 8 va veni pe coloana 1, se obține astfel suma pe fiecare coloană egală cu 18.

6. Se va trasa un singur cerc tangent la ambele cercuri și se vor șterge porțiunile exact pentru a lăsa numerele 6 și 9 care adunate dau 15.



7.



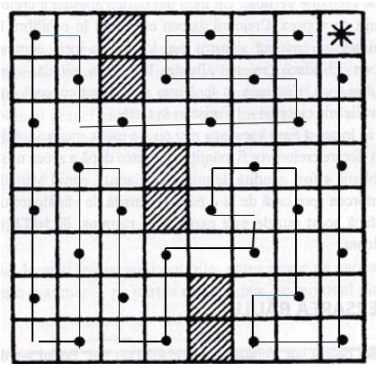
8. Se ia din fiecare teanc monede astfel, din primul , o monedă, din al doilea, două monezi, din al treilea, trei monezi și așa mai departe, din al zecelea teanc se iau toate și se cântăresc.

Cum $1+2+3+4+.....+9+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55$ înseamnă că dacă toate monezile ar fi adevărate, atunci cele luate și cântărite ar da o greutate de 55 înmulțit cu greutatea unei monezi.

În cazul nostru dacă de exemplu apare o diferență de 4 grame înseamnă că monedele false se găsesc în teancul al patrulea și așa pentru orice diferență apărută ne dăm seama care este teancul cu monedele false.

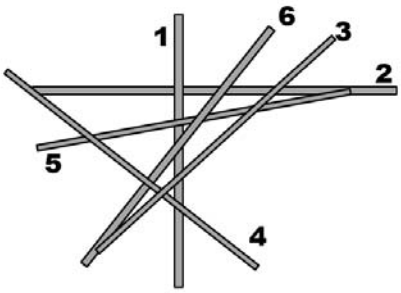


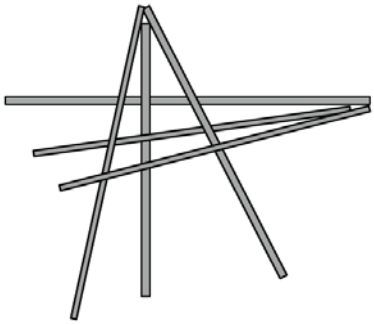
9. Un traseu posibil ar fi cel din figura alăturată.



10. Observăm că raza cercului este egală cu DE=10 cm, dar și DB este diagonală în cerc, prin urmare AC = BD = 10 cm.

11. Două exemple de aranjare sunt cele din figurile alăturate.





12. Fie x distanța în km dintre cele două maluri.

Pentru drumul dus avem $I.\begin{cases} vap1 \quad d_1 = 6 \ km \\ vap2 \quad d_2 = x-6 \ km \end{cases}$

iar pentru drumul de întors avem: $II.\begin{cases} vap1 \quad d_1^I : x+4 \ km \\ vap2 \quad d_2^I : 2x-4 \ km \end{cases}$. Raportul distanțelor parcurse de vaporașe sunt două numere egale:

$$\frac{x-6}{6} = \frac{2x-4}{x+4} \Rightarrow x^2 - 14x = 0 \Rightarrow x = 4 \ km.$$

"Binele nu face zgomot și zgomotul nu face bine."
Emanoil Bacaloglu
(1830- 1891)





7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 38** al revistei de matematică „**SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype (**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 39** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2027**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

„ științele exacte constituie baza oricărei culturi intelectuale pentru că prin ele învățăm legile care domină natura și care ne domină și pe noi; fără o cunoștință profundă a naturei vom plana în regiuni imaginare și vom purta în noi totdeauna caracterul de ușurință și superficialitate care ne este propriu…”.

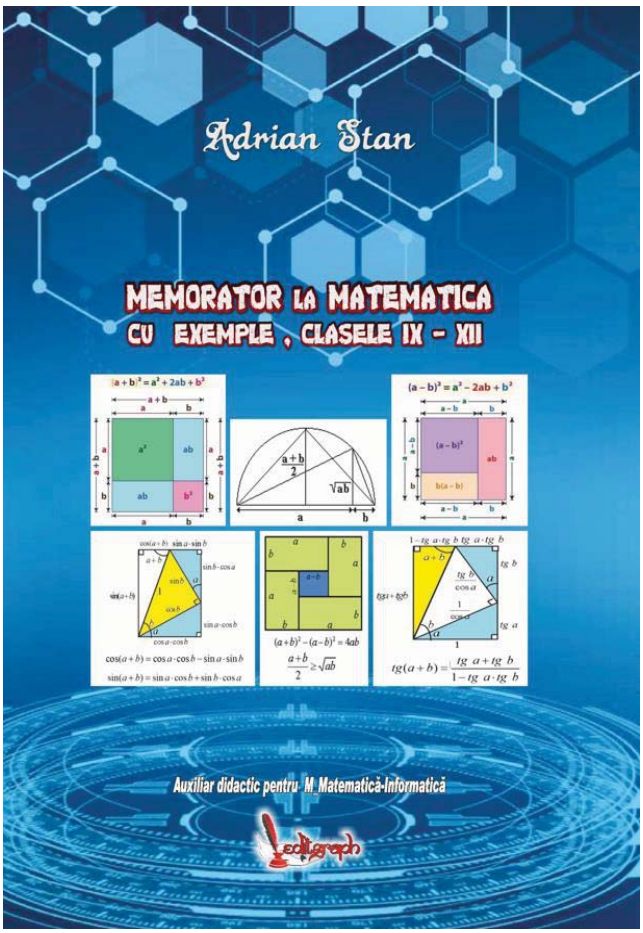
Emanoil Bacaloglu (1830 – 1891)



Bacaloglu a fost printre primii mari oameni de știință români, fiind fizician, chimist și matematician cu numeroase lucrări în aceste domenii, fondator al „Societății de științe fizice” (1890) și profesor de fizică și chimie la marile universități din București. A studiat la Leipzig unde l-a avut ca profesor și pe matematicianul A. F Möbius și apoi la Paris unde și-a luat Bacalaureatul (1857) și unde i-a avut ca profesori pe M. Chasles, A.L. Cauchy, C. Hermite.

A creat o parte din terminologia în limba română pentru aceste științe.

Apariții editoriale



Lucrarea conține noțiunile teoretice din toate lecțiile din programa școlară pentru specializarea matematică - informatică, fiind însoțite de exemple și de probleme rezolvate pentru toate formulele introduse.

Auxiliarul didactic își propune să cuprindă toate noțiunile din clasele IX - XII pentru a fi util atât elevilor cât și cadrelor didactice fie pentru învățarea la clasă a lecțiilor, fie pentru a-și recapitula noțiunile pentru bacalaureat.

Exemplele folosite nu sunt grele, sunt de nivel ușor și mediu pentru a se putea face trecerea de la teorie la aplicarea și înțelegerea ei.

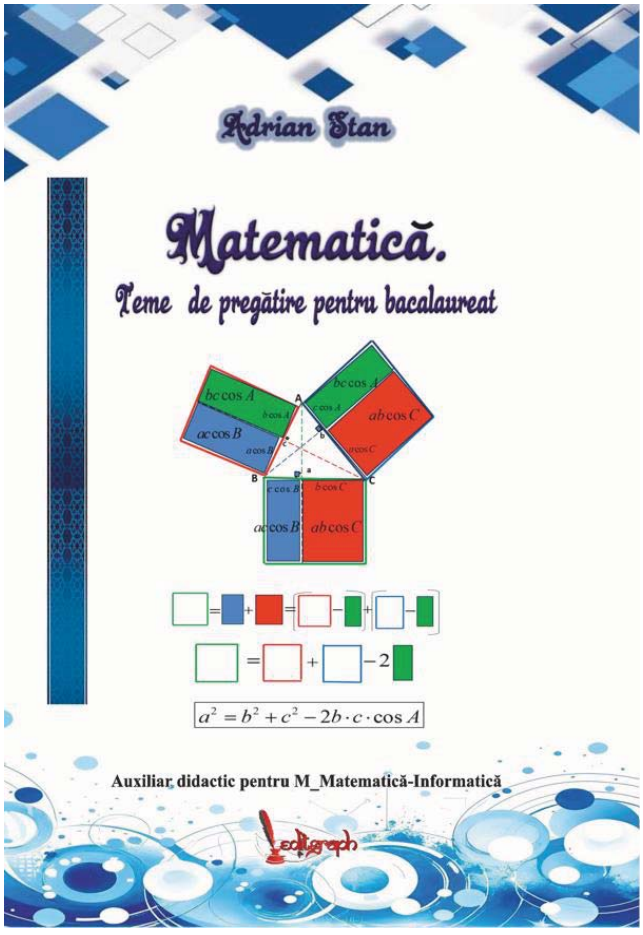
Cartea este în format B5 - tip manual și are 250 de pagini.

Lucrarea conține o amplă sinteză de exerciții prin care se poate face o recapitulare pentru examenul de bacalaureat. Astfel, există 11 teme de pregătire care urmăresc structura modelului de bacalaureat pentru specializarea matematică informatică.

Primele 6 teme de pregătire conțin exerciții din materia claselor a IX-a și a X-a structurate după tipurile de exerciții care apar la Subiectul I: Numere rela și numere complexe, Funcții, Ecuații, Combinatorică, Calcul vectorial și trigonometrie și Ecuațiile dreptei în plan.

Celelalte teme sunt reprezentate de algebra și analiza matematica pentru fiecare din clasele a XI-a și a XII-a și cuprind atât exerciții noi propuse cât și subiectele date în ultimii ani.

Cartea este în format B5 - tip manual și are 230 de pagini.



VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 38 ANUL XIX - NOIEMBRIE 2026

Cuprins

1. Istoria matematicii 1

Spiru C. Haret - Omul Școlii de Ionel Tudor – Călugăreni și Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice 3

On the Problem Q 120 from SM37 de Jose Luis Diaz- Barrero .. 3

O clasă de probleme cu integrale definite de D.M. Bătinețu- Giurgiu, Neculai Stanciu 6

Asupra metodei de rezolvare și rafinare a inegalităților de Marius Drăgan, Neculai Stanciu 9

Despre inegalitatea lui Gerretsen- Doucet de Mihăly Bencze 11

Asupra unor limite integrale de Cătălin Angelo Ioan 12

Dezvoltări ale unor probleme din Mathematical Reflections II de Marin Chirciu. 15

Factorialul n! de Nicolas Diaconu, Truică Ana 18

3. Probleme rezolvate 21

4. Probleme propuse 52

5. Quickies 59

6. Caleidoscop matematic 63

7. Poșta redacției 68

LEI 22 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 – 6601