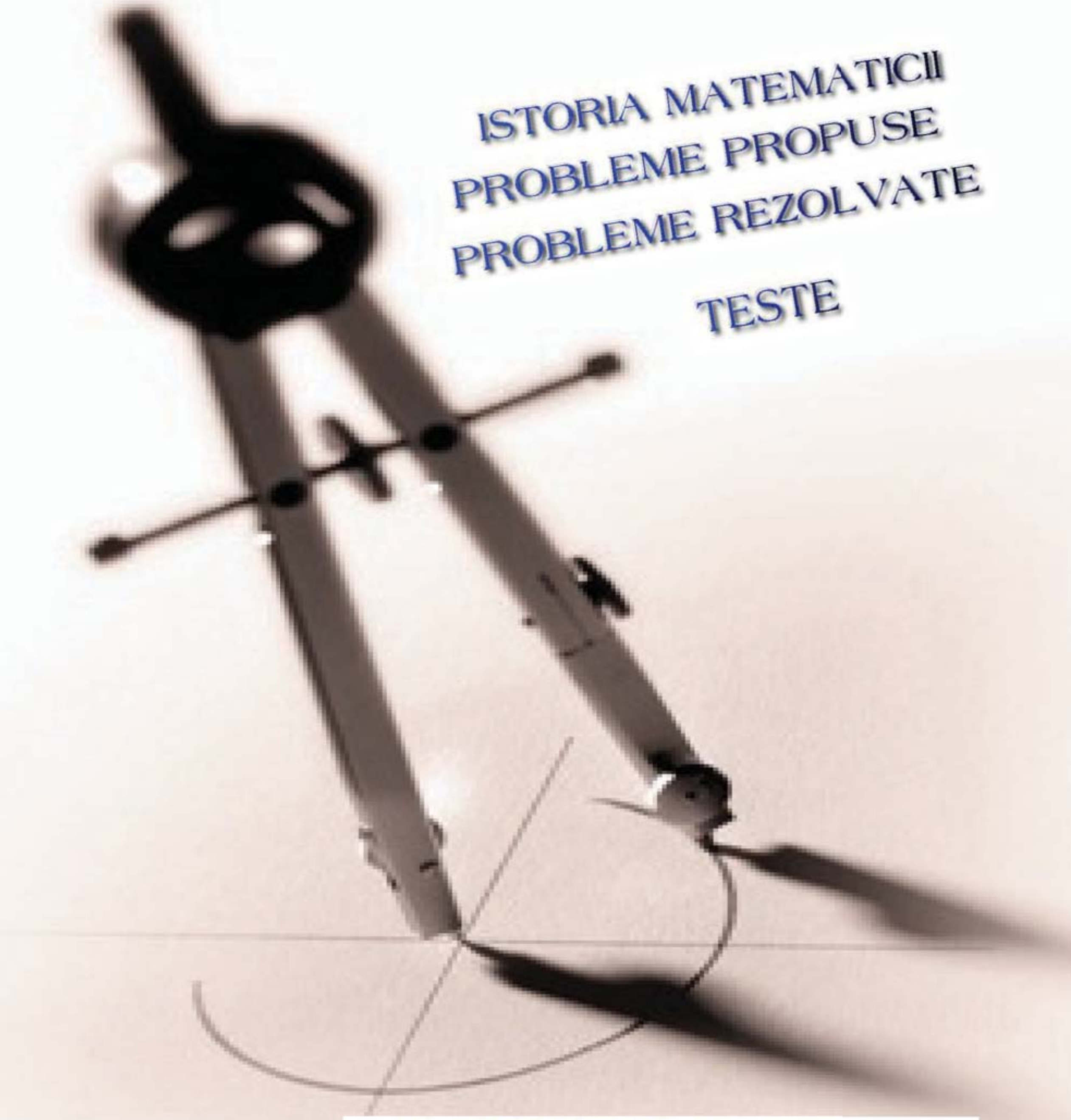
# SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN IX, NR XVIII, 2016

SM

ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE



SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiințe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

# Sclipirea Minţii 18

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An IX, Nr. XVIII, NOIEMBRIE 2016, BUZĂU




## CUPRINS



GÂNDEŞTE CORECT




**REDACTIA**
**Liceul Tehnologic „ Costin Nenitescu”, Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134, Cod. 120012, Tel. 0238725206**
**E_mail: ady_stan2005@yahoo.com**
**Coordonator proiect: Adrian Stan**



**Tipar:** editgraph **Buzău, www.editgraph.ro**


**ACEST NUMĂR ESTE DEDICAT ÎN AMINTIREA DOMNULUI PROFESOR CONSTANTIN APOSTOL**

# IN MEMORIAM

## CONSTANTIN APOSTOL

( 1941-2016 )

**Neculai Stanciu** (la stânga), **Constantin Apostol** (la mijloc), **Marin Simion** (la dreapta)

**Constantin Apostol și Neculai Stanciu**

**Constantin Apostol a fost un om al tăriei de caracter și al harului didactic.**

**A fost mentorul mai multor generații de profesori și elevi.**

**A fost profesorul care mi-a făcut cunoștință cu revistele: Gazeta Matematică, Revista de Matematică din Timișoara și Recreații Matematice.**

**A fost inspector și director de școală.**

**A fost un om bun și înțelegător care nu a judecat și nici nu a fost supărat niciodată pe nimeni și a avut respect față de toți cei pe care i-a întâlnit: ’’Un om în adevăr bun e numai acela care ar fi putut fi rău și n-a fost’’ (Nicolae Iorga).**

**Îmi vor lipsi schimburile de idei săptămânale cu dl. profesor Constantin Apostol; ultima conversație avută a fost când l-am felicitat pentru problema 2, Olimpiada Județeană de Matematică, clasa a VI-a, 2016 și pentru o problemă din lista scurtă, clasa a VIII-a, Olimpiada Națională de Matematică, 2016.**

**Prof. Neculai Stanciu**

**Câteva elemente care justifică profilul științific al profesorului Constantin Apostol.**

**A publicat în prima revistă de matematică a județului Buzău ’’Muncă și Talent – Pitagora’’ următoarele articole:**

**’’Observații privind divizibilitatea valorilor numerice ale polinoamelor’’ în nr. 1, Mai 1972;**
**’’Asupra triunghiurilor care au două laturi respectiv egale și unghiurile cuprinse între ele’’ în nr. 2, Septembrie 1972. În perioada 1973-1974 a funcționat în Zair.**

**În Gazeta Matematică a publicat articolul ’’Concurența linilor importante într-un triunghi’’.**

**A publicat în Gazeta Matematică probleme în special de geometrie sintetică; unele dintre ele fiind strânse într-o culegere intitulată ’’Preocupări Matematice’’ editată la Craiova în 1996.**

**A participat la concursurile organizate de filiale ale SSMR, cu elevi, unde a propus probleme.**

**A participat și a susținut Olimpiadele de Matematică la etapele locale, județene și naționale unde a propus probleme.**

**A colaborat la RMT și Recreații Matematice cu probleme și articole.**

**Și-a dedicat o bună parte din viață activității de colaborare la diverse reviste prin probleme inedite de matematică.**

**Prof. Constantin Rusu**

**Elev fiind in anii \`70-\`80 și lucrând din Gazeta Matematică am întâlnit des frumoase probleme semnate: ”Constantin Apostol, Rm. Sărat”. Apoi soarta a făcut, ca peste câțiva ani, să fim vecini, apoi colegi de cancelarie și colegi în Societatea de Matematică. Am organizat împreună multe ediții ale ”Speranțelor Râmnicene”, cu multe probleme semnate Constantin Apostol. Întâlnirile și discuțiile cu ”Coca” erau adevărate bucurii ale spiritului. Un om generos, un suflet cald, gata oricând să ajute.**

**Dispariția domniei sale este o pierdere grea pentru matematica și învățământul râmnicean.**

**Adio Domnule Profesor Constantin Apostol!**

**Prof. Costică Ambrinoc**

**Unul dintre cei mai deosebiți profesori buzoieni prin calitatea sa umană, a rezultatelor elevilor săi, a nivelului ridicat de profesionalism în tot ceea ce făcea, a prezenței sale constante la toate competițiile și activitățile județene și naționale de matematică cât și prin bogata sa moștenire matematică dar mai ales pentru modestia și dăruirea sa totală către toți cei care-i cereau ajutorul ne face să fim mândri că am cunoscut un om atât de valoros.**

**Fără sprijinul său, revista Sclipirea Minții nu ar fi putut apărea așadar, noi prietenii și discipolii săi îi suntem profund recunoscători păstrându-l veșnic în sufletul nostru.**

**Prof. Adrian Stan**

**„ Numărul este principiul oricărei dimensiuni, oricărei armonii, oricărei proprietăți, oricărei aspirații; este legea universului organizat ”.**
**Etienne de Senancour**
**(1770- 1846)**

# 1. Istoria Matematicii

## O scurtă istorie a numerelor

**Preluare din cartea „Matematică pentru clasa a IX-a”.**
**Adrian Stan. Editura Editgraph. Buzău. 2016.**

Acum circa 4000 î.Hr , în delta Nilului din Egipt, populațiile băștinașe au dezvoltat un sistem de scriere cu simboluri numite hieroglife. Datorită necesității de a cunoaște succesiunea fenomenelor atmosferice și astronomice, egiptenii au realizat calendare lunare și solare. Numerele egiptene erau reprezentate prin simboluri diferite plecând de la 1 la 10 și apoi pentru 100, 1000, etc., toate celelalte erau scrise în funcție de acestea.

Au rămas celebre descoperirile **papirusului Rhind** sau cel al **scribului Ahmes** (2000-1800 î.e.n) unde sunt prezentate mediile aritmetice, geometrice, armonice, formule pentru arii, metode de înmulțiri, împărțiri, calcule cu fracții.

Scrierea cuneiformă o regăsim în Babilon, vechiul Irak, cam tot în aceași perioadă. Aici, în Mesopotamia între cele două râuri Tigru și Eufrat s-a dezvoltat probabil cea mai veche civilizație, cea sumeriană. De la sistemul lor de numerație în baza 60 ne-a rămas exprimarea timpului în 60 de secunde minutul, și 60 de minute ora.

Începând cu anul 1850 arheologii au descoperit peste 400 de tăblițe din argilă scrise în cuneiforme, pe una din ele fiind descoperită o aproximare a numărului $\sqrt{2}$ cu cinci zecimale.

Simbolurile pe care le foloseau romanii pentru numere proveneau de la civilizația etruscă pe care o asimilaseră urmașii Romei începând cu sec 5 î.e.n și până în sec 1 î.Hr.

| | | |
|---|---|---|
| 1 = I | 11 = XI | 25 = XXV |
| 2 = II | 12 = XII | 30 = XXX |
| 3 = III | 13 = XIII | 40 = XL |
| 4 = IV | 14 = XIV | 49 = XLIX |
| 5 = V | 15 = XV | 50 = L |
| 6 = VI | 16 = XVI | 51 = LI |
| 7 = VII | 17 = XVII | 60 = LX |
| 8 = VIII | 18 = XVIII | 70 = LXX |
| 9 = IX | 19 = XIX | 80 = LXXX |
| 10 = X | 20 = XX | 90 = XC |
| | 21 = XXI | 99 = XCIX |

Grecii foloseau pentru numere, literele de la alfabet $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \delta,\ \pi,\ \sigma$, etc., și apoi pentru multiplii lui 10, 100, 1000, etc. Pentru numere cu două cifree ei foloseau două litere, pentru numere cu trei cifre foloseau trei litere. Cum nu aveau foarte multe litere în alfabet ei mai foloseau o serie de simboluri la dreapta literie pentru a arăta că numărul se multiplică. Toate numerele aveau o bară deasupra pentru a se face deosebirea dintre cuvinte și numere.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | Alpha | a | 1 | ι | Iota | i | 10 | ρ | Rho | r | 100 |
| β | Beta | b | 2 | κ | Kappa | k | 20 | σ (ς) | Sigma | s | 200 |
| γ | Gamma | g | 3 | λ | Lambda | l | 30 | τ | Tau | t | 300 |
| δ | Delta | d | 4 | μ | Mu | m | 40 | υ | Upsilon | u | 400 |
| ε | Epsilon | e | 5 | ν | Nu | n | 50 | φ | Phi | ph | 500 |
| ς | Digamma* | st | 6 | ξ | Xi | x | 60 | χ | Chi | ch | 600 |
| ζ | Zeta | z | 7 | ο | Omicron | o | 70 | ψ | Psi | ps | 700 |
| η | Eta | ē | 8 | π | Pi | p | 80 | ω | Omega | ō | 800 |
| θ | Theta | th | 9 | ϙ | Koppa* | q | 90 | ϡ | Sampi* | sp | 900 |

Matematicienii greci ai Antichității au legat studiul matematicii de necesitățile practice ale timpurilor lor: măsurarea înălțimii piramidelor folosind lungimea umbrelor lor, determinarea distanței dintre două puncte inaccesibile, calculul ariei unor suprafețe neregulate, probleme de măsurători și transformări, etc.

Cei mai mari gânditori și reprezentanți ai școlii științifice grecești au fost: **Thales din Milet, Pitagora din Samos, Platon, Aristotel, Eudoxus, Euclid, Eratostene din Cyrene, Arhimede din Sirucaza, Heron din Alexandria, Ptolemeu, Pappos din Alexandria;**

Pe inscripțiile budiste de acum 2000 de ani î.Hr. descoperite în Valea Indusului, s-au descoperit notațiile pentru numere asemănătoare cu cele transmise de către episcopul creştin sirian **Severus Sebokht** (575- 667 ) care a trăit în Mesopotamia în anii 650 .


Matematicianul chinez **Liu Hui** utilizând poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi reușește să determine valoarea exactă cu cinci zecimale a numărului pi, $\pi = 3{,}14159$. De asemenea, el utilizează o metodă de aproximare a soluțiilor unei ecuații, metodă ce avea să fie descoperită mult mai târziu de cel care îi poartă numele: metoda lui Horner. ([1],p15).

Matematicianul indian **Brahmagupta** (589 -668) a introdus în 628 printr-o lucrare de a sa ("Deschiderea Universului"), cifra zero și a dat reguli de calcul aritmetic folosite ulterior la observațiile astronomice pe care le-a monitorizat, fiind conducătorul Observatorului astronomic din Uijjain.

El cunoştea calculul cu fracţii , raționalizarea numitorilor fracţiilor şi ştia şi modul de rezolvare a unor ecuaţii, al calculului rădăcinii pătrate şi al unor probleme de astronomie și sunt descrise operațiile de adunare și scădere cu numere negative.

În plus, se cunoaște că de la el provine formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, scrise în cuvinte fără a folosi simbolurile actuale.

În anul 766, cartea lui **Brahmagupta** era deja tradusă în arabă și se găsea în posesia califului Abu Ja'far Abdallah ibn Muhammad al-Mansur (712 - 775) din Bagdad, care înființase o școală celebră de astronomie și științe.

Matematicianul și astronomul persan **al- Khwarizmi** (circa 825), care învățase la școala califului al-Mansur, traduce multe din textele indiene în arabă, iar prin lucrarea sa "On the Calculation with Hindu Numerals" este cel care a promovat introducerea sistemului în baza 10 de numerație hindus, în lumea arabică. Mai târziu, lucrarea sa a fost tradusă în latină, dând Europei în 976, mai precis în Spania care era sub ocupație arabă, un sistem de numerație mult mai ușor de folosit.

Acest lucru a condus inițial la un conflict între susținătorii lui, numiți " algoriști " de la numele matematicianului **al-Khwarizimi** și acei călugări numiți "abaciști", care foloseau sistemul roman de scriere iar pentru calcul foloseau abacul. ([2], p18).

De aceea, introducerea pe cale largă a sistemului de numerație indo-arab a întârziat cel puțin 500 de ani.

Alți mari oameni de știință arabi au fost **Abu Kamil** (850- 930) care a rezolvat ecuații algebrice de grad cel mult 8, **Abu al-Wafa Buzjani** (940-998) care a introdus definiția tangentei, **Al Biruni** (973-1048) care consideră pentru prima dată cercul trigonometric de rază 1, și de asemenea a găsit regulile de calcul cu sume de puteri și scrierea regulii de trei simplă, **Omar Khayyam** (1048- 1131), preocupat de geometria analitică și neeuclidiană precum și de găsirea soluțiilor ecuațiilor cubice.

Mayașii, circa 36 î.e.n foloseau un sistem în care exista și simbolul pentru cifra 0. Deși cifra zero se găsea în general în cultura popoarelor Americii de Sud, nu se poate spune că a influențat deosebit dezvoltarea matematicii.

Deși **al Khwarizmi** a introdus zero în lumea arabică, denumirea de „zero" provine de la matematicianul venețian **Luca Pacioli** (1445 - 1514), care l-a folosit în textele sale, plecând de la cuvântul arab "zephirum", pentru a denumi cifra 0.

**Leonardo Pisano** (zis și **Fibonacci**) (1170 - 1250) pe când era doar un băiat, a călătorit cu tatăl său care era negustor, în nordul Africii și a luat astfel contact cu scrierea arabă. Nu peste mult timp, s-a dedicat matematicii iar în 1202 prin lucrarae sa „Liber Abaci" avea să facă și el cunoscut sistemul de scriere cu cifre arabe pe care-l va promova: „ Cele nouă simboluri indiene sunt 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Cu aceste nouă și cu semnul 0, orice număr poate fi scris", (apud [2], p 20).

Numerele naturale au fost primele numere folosite căci puteau reprezenta obiecte din natură. Deși matematicienii lumii antice înțelegeau conceptul de infinit, ca cel mai mare număr posibil, de abia în 1655 este introdus prin simbolul $\infty$ de către **John Wallis** în cartea sa " De sectionibus conicis". ([2], p 26).

Numerele negative au apărut la început prin cuvinte sau prin diverse simboluri reprezentând datorii, temperaturi negative, etc., încă din sec 2 î.e.n, în cartea chineză “ Jinzhang suanshu“ ( “The Chapters on the Mathematical Art “) sau într-un manuscris indian datând din sec al VII-lea. De abia în 1489, **Johannes Widmann**(1460-1498) prin cartea sa “Mercantile Arithmetic” ( “Aritmetica comercială”) introduce în Europa simbolul “ – “ pentru numere negative cât și cel pentru plus “+”, semnificând de fapt surplusul(+) și deficitul (-) în problemele economice.

Expresii ale fracțiilor zecimale s-au descoperit în Valea Indusului pe o serie de obiecte arheologice datând din mileniul doi î.Hr iar în lumea arabă, primul text rămas care conține fracțiile zecimale aparțin lui Abu ’ l Hasan al – Uqlidisi (920- 980). Mai târziu în sec. 12, cu ajutorul fracțiilor zecimale matematicianul iranian **Ibn al-Maghribi** deduce valoarea aproximativă a numerelor iraționale.

În Europa, primele încercări de folosire a fracțiilor zecimale s-au realizat în 1492 la **Francesco Pellos** și în 1530 la **Christoff Rudolff**. Cel care avea să fie creditat cu introducerea calculului cu fracții zecimale a fost **Simon Stevin**(1548-1520) în 1585 cu o notație de forma 3 ⓪ 4 ① 7 ② 5 ③ reprezentând în fapt numărul 3,475.

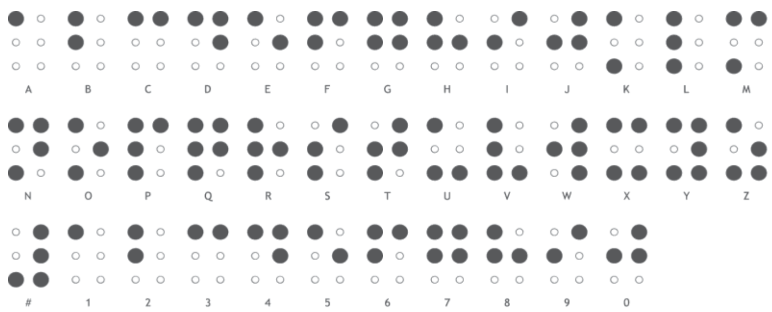
**Francois Viete** (1540 - 1603) folosește o altă metodă de a scrie fracțiile zecimale cu ajutorul unei bare verticale care separa întregii de zecimale. Abia în 1612, germanul **Barholomaeus Pitiscus** (1561- 1613) separa întregii de zecimală printr-un punct iar italianul **Giovanni Magini** (1555- 1617) folosește virgula “ , ” pentru acest lucru.

**Rene Descartes** (1596- 1650) a folosit pentru prima dată actuala scriere a puterilor, și a introdus sistemul de coordonate XOY de reprezentare a punctelor în plan.

În secolul 18 **Leonhard Euler** (1707-1783) introduce notația $i=\sqrt{-1}$ cu proprietatea $i^2=-1$, astfel introducând o nouă clasă de numere, numite numere complexe.

În 1825, **Louis Braille** introduce alfabetul care-i poartă numele, **alfabetul Braille** pentru cei cu deficiențe de vedere. Sistemul de citire este format din litere scrise cu ajutorul unor puncte care ies în relief și pot fi simțite cu ajutorul degetelor, pentru fiecare literă și număr existând un semn diferit obținut prin combinarea celor șase puncte aflate pe o matrice de tipul 3 cu 2, adică trei linii și două coloane.

Dezvoltarea electronicii și a tehnicii de calcul a făcut posibilă dezvoltarea unui limbaj informatic bazat pe scrierea în baza doi cu ajutorul căreia toate numerele , literele și simbolurile se transformă în secvențe de unități de informații, astfel un octet sau byte este format din 8 căsuțe numite biți- cele mai mici unități de informație care iau numai valorile 0 sau 1.




Inginerul american de origine germană **Werner Buchholz** este cel care introduce în 1956 termenul de byte în timp ce lucra la compania IBM.

Cu timpul, au mai apărut și alte simboluri și sisteme de numerație.

În 1976, **Donald Knuts** introduce simbolul “$\wedge$” pentru a introduce ridicarea la putere. Astfel, $n^\wedge k=n^k$, $n^{\wedge\wedge}n=n^{\left(n^n\right)}$ . Ca exemplu, $4^\wedge 2=4^2=16$.

Un sistem de numerație verbal l-a dezvoltat **Jaime Redin** în 1993. Astfel, acest sistem s-a dorit să fie mult mai intuitiv și ușor de folosit. Ca exemplu, numărul 3214 358 se poate scrie astfel: 3M214T358 de la cuvintele M = milion (million) iar T= zeci de mii (thousand).

Așadar, numerele și operațiile cu ele au cunoscut un amplu proces de elaborare și definitivare a lor, cunoștințele au trecut de la o generație la alta, de la o civilizație la alta, de la un continent la altul datorită schimburilor comerciale, a interferării culturilor datorită războaielor și a unor oameni de știință excepționali care studiau din mai multe domenii, de la politică și filozofie până la muzică și arte, de la matematică și științe în general până la cunoașterea mai multor limbi străine.

**Bibliografie:**

**1. Adrian Stan. O scurtă istorie a matematici. Editura Editgraph. Buzău. 2015.**
**2. Anne Rooney. The Story of Mathematics. Arcturus Publishing Limited. London. 2013.**

**Prof. Liceul Tehn. „Costin Nenițescu” Buzău**

**„Ştiinţa nu-i decât o imagine a adevărului”.**
**Francisc Bacon**
**( 1561 – 1626)**

# 2. Articole si note matematice

## Asupra unei inegalităţi a lui Constantin Ionescu-Ţiu

**D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti,**
**Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

În Revista Matematică şi Fizică (R.M.F), Anul VI, nr. 5/1953, pag. 128 , a fost propusă problema:

**847.** *Să se arate că într-un triunghi oarecare avem*: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$, (C.I.Ţ).

În R.M.F, Anul VII, nr. 1/1954 la pag. 21-22 se prezintă următoarea soluţie:
Considerăm inegalitatea cunoscută $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, care se mai poate scrie

$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, sau încă $x+y+z\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{xy+yz+zx}$.

Dacă în ultima inegalitate facem: $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ avem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2p}{abc}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2Rr}},\text{ însă } R\geq 2r.$$

Rezultă atunci că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm o soluţie mai scurtă şi unele generalizări.

Soluţia scurtă pe care o prezentăm se bazează pe folosirea inegalităţii lui *Harald Bergström* (a se vedea [3]). Menţionăm că inegalitatea lui *Harald Bergström* a fost publicată în anul 1949 iar situaţia politică a lumii din perioada 1949-1953 credem că a făcut în aşa fel încât în anul 1953 să nu fie cunoscută de colaboratorii R.M.F. Putem afirma că şi acum mai mulţi colaboratori ai Gazetei Matematice (G.M.) spun că această inegalitate este inegalitatea C-B-S de tip fracţie sau alţii îi zic inegalitatea (C-S). Inegalitatea lui *Harald Bergström* este o inegalitate distinctă de inegalitatea C-B-S dar cele două inegalităţi sunt echivalente ( a se vedea [1] şi [2]).

Prin urmare, conform inegalităţii lui *Bergström* avem: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{9}{2p}$, (1).

Dar conform unei inegalităţi a lui *D.S. Mitrinović*, avem: $2p\leq 3\sqrt{3}R$, (M).

Din (1) şi (M) deducem că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{2p}\geq\frac{9}{3\sqrt{3}R}=\frac{\sqrt{3}}{R}$, q.e.d.

**Generalizarea 1.** *Dacă* $m\in\mathbb{R}_+, x,y\in\mathbb{R}_+, x+y\in\mathbb{R}_+^*$, *atunci*

$$\frac{1}{(xa+yb)^m}+\frac{1}{(xb+yc)^m}+\frac{1}{(xc+ya)^m}\geq\frac{(\sqrt{3})^{2-m}}{(x+y)^m R^m},\ (2).$$

*Demonstraţie.* Conform inegalităţii lui *J. Radon* avem

$$W_3=\sum_{cyclic}\frac{1}{(xa+yb)^m}\geq\frac{(1+1+1)^{m+1}}{\left(\sum_{cyclic}(xa+yb)\right)^m}=\frac{3^{m+1}}{(x+y)^m(a+b+c)^m}=\frac{3^{m+1}}{2^m p^m(x+y)^m},\ (3).$$

Din inegalitățile (3) și (M) deducem că $W_3 \geq \frac{3^{m+1}}{(x+y)^m(3\sqrt{3})^m} = \frac{(\sqrt{3})^{2-m}}{(x+y)^m R^m}$, q.e.d.

Egalitate avem dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Observație. Dacă $m = x = 1, y = 0$, atunci din (3) se obține inegalitatea (C.I.Ț).

Generalizarea 2. *Dacă* $m, x, y \in R_+, x + y \in R_+^*$ *iar* $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$ *este un poligon convex înscris în cercul* $C(O, R)$ *având laturile de lungimi* $a_k$, $k = \overline{1,n}$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(xa_k + ya_{k+1})^m} \geq \frac{n}{2^m (x+y)^m R^m \sin^m \frac{\pi}{n}}, \text{ unde } a_{n+1} = a_1, (4).$$

*Demonstrație.* Conform inegalitații lui *J. Radon*, avem

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(xa_k + ya_{k+1})^m} \geq \frac{(\underbrace{1+1+...+1}_{de\ n\ ori})^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(xa_k + ya_{k+1})\right)^m} = \frac{n^{m+1}}{(x+y)^m (\sum_{k=1}^{n} a_k)^m} = \frac{n^{m+1}}{2^m p^m (x+y)^m}, (5),$$

unde $p$ este semiperimetrul poligonului dat.

Conform propoziției 2 de la pag. 60 din [5]: Dacă $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$ este un poligon convex înscris în cercul $C(O, R)$ de semiperimetru $p$ are loc (o generalizare a inegalității lui *D.S. Mitrinović*), adică: $p \leq nR \sin \frac{\pi}{n}$, (D.M). Din inegalitățile (5) și (D.M) obținem că

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(xa_k + ya_{k+1})^m} \geq \frac{n^{m+1}}{(x+y)^m 2^m n^m R^m \sin^m \frac{\pi}{n}} = \frac{n}{2^m (x+y)^m R^m \sin^m \frac{\pi}{n}}, \text{ unde}$$

$a_{n+1} = a_1$, q.e.d.

Avem egalitate în (5) dacă și numai dacă poligonul $A_1A_2...A_n$ este regulat.

Observație.Dacă $n = 3$,atunci $W_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(xa_k + ya_{k+1})^m} \geq \frac{3}{2^m (x+y)^m R^m \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m} = \frac{(\sqrt{3})^{2-m}}{(x+y)^m R^m}$,

adică am obținut inegalitatea (2).

Generalizarea 3. *Dacă* $m \in R_+$, *atunci* $\frac{1}{a^{m+1}} + \frac{1}{b^{m+1}} + \frac{1}{c^{m+1}} \geq \frac{(\sqrt{3})^{1-m}}{R^{m+1}}$, (6).

*Demonstrația 1.* Avem

$$W = \sum_{cyclic} \frac{1}{a^{m+1}} = \frac{(ab)^{m+1} + (bc)^{m+1} + (ca)^{m+1}}{(abc)^{m+1}} = \frac{1}{(abc)^{m+1}} \left( \sum_{cyclic} (ab)^{m+1} \right) \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(ab + bc + ca)^{m+1}}{3^m (abc)^{m+1}}, (7).$$

Dar, $abc = 4RS$ și $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$ (Gordon) și atunci din (7) rezultă

$$W \geq \frac{1}{(4RS)^{m+1}} \cdot \frac{(4\sqrt{3}S)^{m+1}}{3^m} = \frac{(\sqrt{3})^{m+1}}{(\sqrt{3})^{2m} R^{m+1}} = \frac{(\sqrt{3})^{1-m}}{R^{m+1}}, \text{ q.e.d.}$$

*Demonstrația 2.* $W = \sum_{cyclic} \frac{1}{a^{m+1}} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{m+1}}{3^m} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^{m+1}}{3^m} = \frac{3}{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^{m+1}} \overset{AM-GM}{\geq}$

$$\overset{AM-GM}{\geq} \frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m+1}} = \frac{3^{m+2}}{(a+b+c)^{m+1}} = \frac{3^{m+2}}{(2p)^{m+1}}, (8).$$

Din (M) şi (8) rezultă $W \geq \frac{3^{m+2}}{(3\sqrt{3}R)^{m+1}} = \frac{(\sqrt{3})^{1-m}}{R^{m+1}}$, q.e.d.

*Demonstraţia 3.* $W = \frac{1}{a^{m+1}} + \frac{1}{b^{m+1}} + \frac{1}{c^{m+1}} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^{m+1}}} = \frac{3}{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^{m+1}} = \frac{3}{\left(\sqrt[3]{4RS}\right)^{m+1}} =$

$$= \frac{3}{\left(\sqrt[3]{4Rpr}\right)^{m+1}} \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{\left(\sqrt[3]{4Rp \cdot \frac{R}{2}}\right)^{m+1}} \overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{3}{\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}R^3}\right)^{m+1}} = \frac{(\sqrt{3})^{1-m}}{R^{m+1}}, \text{ q.e.d.}$$

**Observaţie.** Dacă $m = 0$, atunci din (6) obţinem inegalitatea (C.I.Ţ).
Egalitate avem dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Alte rezultate:**

*F. Leuenberger* a demonstrat inegalitatea

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$ (*O. Bottema* et. all, Geometric Inequalities, Groningen, 1969).

*Huang* (1993), a propus următoarea problemă deschisă: Găsiţi cea mai mare constantă $k$ astfel încât

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(k \cdot \frac{1}{R} + \frac{3-k}{2} \cdot \frac{1}{r}\right).$$

*Shi, Sc.* (1993), demonstrează $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$

*Chen, J.* (1993), dovedeşte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{R} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{r}\right).$

*Chen, Q.* (1996), arată $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{97}{77} \cdot \frac{1}{R} + \frac{67}{77} \cdot \frac{1}{r}\right).$

În 2014, în *Journal of Inequalities and Applications* (a Springer Open Journal) *Shan-He Wu* şi *Yu-Ming Chu* au obţinut cea mai bună constantă $k = \sqrt[3]{2}$; i.e. au demonstrat că

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{R} + \frac{3-\sqrt[3]{2}}{2} \cdot \frac{1}{r}\right).$$

O altă metodă de a obţine cele mai bune constante pentru inegalităţi în triunghi este prezentată în [4].

**Bibliografie:**

[1] **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu**, *Las desigualdades de Cauchy-Buniakovski-Schwarz y de Bergström son equivalentes e independientes*, Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 49 (julio – agosto 2013).

[2] **D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu**, *La suficiencia de la equivalencia e independencia de las desigualdades de Cauchy-Buniakowski-Schwarz y de Bergström*, Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 50 ( Septiembrie 2013- Mayo 2014).

[3] **H. Bergström**, *A triangle inequality for matrices*, in: Den Elfte Skandinaviske Matematikerkongress, CityTrondheim, 1949, Johan Grundt Tanamus Forlag, 115-118, CityplaceOslo, 1952.

[4] **T. Bîrsan, M. Drăgan, N. Stanciu**,*O metodă de rafinare a unor inegalităţi geometrice*, Recreaţii Matematice, Nr. 1, Ianuarie_Iunie, 2016, 9-14.

[5] **N. Bişboacă**, Teme complementare de geometrie, Editura Bălgrad, Alba Iulia, 1998.

# Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul ” formulei de integrare prin părți”
## - V -

**Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni**

Lucrarea continuă materialul publicat în numerele trecute privind metode de calcul al primitevelor utilizând integrarea prin părți.

În cadrul modelului V) avem câteva tipuri de integrale:

Fie $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$. Atunci,

**1.** $\int P(x)\cdot\sin x dx, x\in\mathbb{R}$

**2.** $\int P(x)\cdot\sin(ax)dx, x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}^*$

**3.** $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\sin(u(x))dx, x\in D_u\cap D'_u$, unde $u:D\to\mathbb{R}$ funcție derivabilă cu derivata continuă.

**4.** $\int P(x)\cdot[\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+...+\sin(a_nx)]dx,\ P(x)=ax+b;\ a,b\in R, a\neq 0,\ a_i\in\mathbb{R}^*, i=\overline{1,n}, n\in N^*$

**5.** $\int[P(x)+c]\cdot P'(x)\cdot[\sin P(x)]dx;\ x\in\mathbb{R}$

**6.** $\int P^2(x)\cdot P'(x)\cdot[\sin P(x)]dx;\ x\in\mathbb{R}$

**7.** $\int P^n(x)\cdot P'(x)\cdot[\sin P(x)]dx, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{R}$

**Exerciții propuse:**

**1.** $\int(x-1)\sin x dx, x\in\mathbb{R}$; **2.** $\int(x^2+x)\cdot\sin(3x)dx, x\in\mathbb{R}$;

**3.** $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\sin u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$. unde $u:D\to\mathbb{R}$ funcție continuă cu derivata continuă.

**4.** $\int\frac{1}{x+1}\cdot[\ln(x+1)]\cdot\sin[\ln(x+1)]dx;\ x\in(-1,+\infty)$

**5.** $\int P(x)\cdot[\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+...+\sin(a_nx)]dx,\ P(x)=ax+b;\ a,b\in R, a\neq 0,\ a_i\in R^*, i=\overline{1,n}, n\in N^*$

**6.** $\int[P(x)+c]\cdot P'(x)\cdot[\sin P(x)]dx;\ x\in\mathbb{R}$

**7.** $\int(x^{p+1}+(p+1)x+a)\cdot(x^p+1)\cdot\sin[x^{p+1}+(p+1)x+a]dx, x\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$

Rezolvare:

**1)** $\int(x-1)\sin x dx, x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: $f'(x)=\sin x\Rightarrow f(x)=\int\sin x dx=-\cos x$; $g(x)=x-1\Rightarrow g'(x)=1$. Aplicăm ( f.i.p.):

$$I=-(x-1)\cdot\cos x+\int\cos x dx=-(x-1)\cdot\cos x+\sin x+c.$$

**2)** $\int(x^2+x)\cdot\sin(3x)dx, x\in\mathbb{R}$

Rezolvare: $f'(x)=\sin(3x)\Rightarrow f(x)=\int\sin(3x)dx=\frac{-\cos(3x)}{3}$

$g(x)=x^2+x\Rightarrow g'(x)=2x+1$. Aplicăm ( f.i.p.):

$$I=-\frac{1}{3}\cdot(x^2+x)\cdot\cos(3x)+\frac{1}{3}\cdot\int(2x+1)\cdot\cos(3x)dx.$$

Notăm cu : $K=\int(2x+1)\cdot\cos(3x)dx$.

$f'(x)=\cos(3x)\Rightarrow f(x)=\int\cos(3x)dx=\frac{\sin(3x)}{3}$; $g(x)=2x+1\Rightarrow g'(x)=2$

$$I=\frac{-1}{3}\cdot\left(x^2+x\right)\cdot\cos(3x)+\frac{1}{9}\cdot(2x+1)\cdot\sin(3x)-\frac{2}{9}\cdot\int\sin(3x)dx\,.$$

$$I=-\frac{1}{3}\cdot\left(x^2+x\right)\cdot\cos(3x)+\frac{1}{9}\cdot(2x+1)\cdot\sin(3x)+\frac{2}{27}\cdot\cos(3x)+c$$

**3)** $\int u'(x)\cdot u(x)\cdot\sin u(x)dx, x\in D_u\cap D'_u$ **.** unde $u:D\to\mathbb{R}$ funcţie continuă cu derivata continuă.

Indicaţie: $f'(x)=u'(x)\cdot\sin u(x)\Rightarrow f(x)=\int u'(x)\cdot\sin u(x)dx=-\cos u(x)$

$g(x)=u(x)\Rightarrow g'(x)=u'(x)$

**4)** $\int\frac{1}{x+1}\cdot[\ln(x+1)]\cdot\sin[\ln(x+1)]dx;\ x\in(-1,+\infty)$**.**

Indicaţie: $f'(x)=\left[\ln(x+1)\right]'\cdot\sin\left[\ln(x+1)\right]\Rightarrow f(x)=-\cos\left[\ln(x+1)\right]$

$g(x)=\ln(x+1)\Rightarrow g(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}=\ln'(x+1)$**.**

**5)** $\int P(x)\cdot[\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+...+\sin(a_nx)]dx,\ P(x)=ax+b;\ a,b\in R, a\neq 0,\ a_i\in R^*, i=\overline{1,n}, n\in N^*$

Indicaţie:

$I=\int P(x)\sin(a_1x)dx+\int P(x)\sin(a_2x)dx+...+\int P(x)\sin(a_nx)dx$

Considerăm integrala: $I_i=\int P(x)\sin(a_ix)dx\ , i=\overline{1,n}$.

$$f'(x)=\sin(a_ix)\Rightarrow f(x)=\int\sin(a_ix)dx=-\frac{\cos(a_ix)}{a_i}$$

$g(x)=P(x)=ax+b\Rightarrow g'(x)=a$. Aplicăm ( f.i.p.): $I_i=-\frac{\cos(a_ix)}{a_i}\cdot(ax+b)+\frac{a}{a_i}\cdot\int\cos(a_ix)dx$

**6).** $\int[P(x)+c]\cdot P'(x)\cdot[\sin P(x)]dx;\ x\in R$ **,cu** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_i\in R, i=\overline{1,n}$

Indicaţie:

$f'(x)=P'(x)\cdot\sin P(x)\Rightarrow f(x)=\int P'(x)\cdot\sin P(x)dx=-\cos P(x)$

$g(x)=P(x)+c\Rightarrow g'(x)=P'(x)$**.**

**7).** $\int\left(x^{p+1}+(p+1)x+a\right)\cdot\left(x^p+1\right)\cdot\sin\left[x^{p+1}+(p+1)x+a\right]dx\ , x\in R,\ p\in N,\ a\in R$

Indicaţie: Aplicăm rezultatul obţinut la exemplul 6):

$P(x)=x^{p+1}+(p+1)x\Rightarrow P'(x)=(p+1)\cdot\left(x^p+1\right)$

$$J=\frac{1}{p+1}\cdot\left\{-\left[x^{p+1}+(p+1)x+a\right]\cdot\cos\left[x^{p+1}+(p+1)x\right]\right\}+\frac{1}{p+1}\cdot\sin\left[x^{p+1}+(p+1)x+a\right]+c$$

**8).** $\int P^2(x)\cdot P'(x)\cdot\left[\sin P(x)\right]dx;\ x\in\mathbb{R}$**, cu** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_i\in R, i=\overline{1,n}$**.**

Indicaţie: $f'(x)=P'(x)\cdot\left[\sin P(X)\right]\Rightarrow f(x)=-\cos P(x)$**.**

$g(x)=P^2(x)\Rightarrow g'(x)=2\cdot P'(x)\cdot P(x)$**.** Aplicăm formula de integrare prin părţi:

$I=-P^2(x)\cdot\cos P(x)+2\cdot\int P(x)\cdot P'(x)\cdot\cos P(x)dx$ . Mai departe, notăm cu

$K=\int P(x)\cdot P'(x)\cdot\cos P(x)dx$ .

$f'(x)=P'(x)\cdot\cos P(x)\Rightarrow f(x)=\int P'(x)\cdot\cos P(x)dx=\sin P(x)$

$g(x)=P(x)\Rightarrow g'(x)=P'(x)$. Mai departe, aplicăm formula de integrare prin părţi

**Profesori, Colegiul "Vasile Lovinescu" , Fălticeni**

# Asupra problemei E:14956

**Marin Chirciu, Pitești**

În G.M.-B nr 1/2016 Alexandru Băltărigă, student, București a propus următoarea problemă:

„Fie $a, b, c > 0$ numere reale. Arătați că: $\dfrac{a^2+bc}{a^2(b+c)}+\dfrac{b^2+ca}{b^2(c+a)}+\dfrac{c^2+ab}{c^2(a+b)}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$."

Vom prezenta o dezvoltare a acestei inegalități și vom propune câteva aplicații ale acesteia în triunghi.

**Fie $a, b, c > 0$ și $n \geq 0$ numere reale. Arătați că:**

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+nc)}+\frac{b^2+ca}{b^2(c+na)}+\frac{c^2+ab}{c^2(a+nb)}\geq\frac{18}{(n+1)(a+b+c)}.$$

Soluție: Avem: $\sum\dfrac{a^2+bc}{a^2(b+nc)}=\sum\dfrac{1}{b+nc}+\sum\dfrac{bc}{a^2(b+nc)}$.

Cu inegalitatea lui Bergström obținem: $\sum\dfrac{1}{b+nc}\geq\dfrac{9}{\sum(b+nc)}=\dfrac{9}{(n+1)\sum a}$ și

$$\sum\frac{bc}{a^2(b+nc)}=\sum\frac{(bc)^2}{a^2bc(b+nc)}\geq\frac{\left(\sum bc\right)^2}{abc\sum a(b+nc)}=\frac{\left(\sum bc\right)^2}{abc\cdot(n+1)\sum bc}=\frac{\sum bc}{(n+1)abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{9}{(n+1)\sum a}, \text{ unde}$$

(1) $\Leftrightarrow \sum a\cdot\sum bc\geq 9abc$, care rezultă din inegalitatea mediilor: $\sum a\geq 3\sqrt[3]{abc}$ și $\sum bc\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Egalitatea are loc dacă $a=b=c$.

Analog, putem obține $\sum\dfrac{a^2+bc}{a^2(nb+c)}\geq\dfrac{18}{(n+1)(a+b+c)}$ și $\sum\dfrac{a^2+bc}{a^2(nb+mc)}\geq\dfrac{18}{(n+m)(a+b+c)}$, unde $m>0$.

**Aplicații ale acestor inegalități în triunghi**

Aplicația 1 . În triunghiul $ABC$ au loc inegalitățile:

$$\sum\frac{r_a^2+r_br_c}{r_b+r_c}\geq 9r;\ \sum\frac{r_a^2+r_br_c}{r_b+nr_c}\geq\frac{18r}{n+1},\ n\geq 0.$$

Soluție: În orice triunghi este adevărată egalitatea: $\sum\dfrac{r}{r_a}=1$. Punând $x=\dfrac{r}{r_a}$, $y=\dfrac{r}{r_b}$, $z=\dfrac{r}{r_c}$ în inegalitatea $\sum\dfrac{x^2+yz}{x^2(y+z)}\geq\dfrac{9}{\sum x}$ obținem prima inegalitate din aplicația 1 și folosind $\sum\dfrac{x^2+yz}{x^2(ny+z)}\geq\dfrac{18}{(n+1)\sum x}$ obținem cea de-a doua inegalitate.

Aplicația 2 . În triunghiul $ABC$ au loc inegalitățile:

$$\sum\frac{h_a^2+h_bh_c}{h_b+h_c}\geq 9r;\ \sum\frac{h_a^2+h_bh_c}{h_b+nh_c}\geq\frac{18r}{n+1},\ n\geq 0.$$

Soluție: Cu identitatea: $\sum\dfrac{r}{h_a}=1$ și cu precizările de la aplicația 1 obținem concluzia aplicației 2.

Aplicația 3 . În triunghiul $ABC$ au loc inegalitățile:

$$\sum\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{9r}{p};\ \sum\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+n\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)}\geq\frac{18r}{(n+1)p},\ n\geq 0.$$

Soluție: Se folosește egalitatea $\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$ și $x=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ ș.a.m.d.

Aplicația 4. În triunghiul ascuțitunghic $ABC$ au loc inegalitățile:

$$\sum\frac{\operatorname{ctg}^2 B\operatorname{ctg}^2 C+\operatorname{ctg}A\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\right)}{\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\right)}\geq 9\prod\operatorname{ctg}A;$$

$$\sum\frac{\operatorname{ctg}^2 B\operatorname{ctg}^2 C+\operatorname{ctg}A\left(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\right)}{\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\left(\operatorname{ctg}B+n\operatorname{ctg}C\right)}\geq\frac{18}{n+1}\prod\operatorname{ctg}A,\ n\geq 0.$$

Soluție: Se folosește egalitatea $\sum\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C=1$ și $x=\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$ ș.a.m.d.

**Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești**

## Some new inequalities

**Mihály Bencze, Bucharest**

In this paper we present some new inequalities.

**Theorem.** If $x_k>0, k=\overline{1,n}$, then $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{x_k}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$.

*Proof.* If $f(x)=arctgx-\int_0^x e^{-t^2}dt$, then $f'(x)=\frac{e^{x^2}-(1+x^2)}{(1+x^2)e^{x^2}}\geq 0, \forall x>0$, therefore

$f(x)\geq f(0)$, or $\int_0^x e^{-t^2}dt\leq arctgx$, but $g(x)=arctgx$ is concave, because $g''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^3}<0$.

From *Jensen's* inequality yields $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{x_k}e^{-t^2}dt\leq\sum_{k=1}^{n}arctgx_k\leq n\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$, q.e.d.

**Corollary 1.** We have the following inequalities:

**1.1.** $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{k}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\left(\frac{n+1}{2}\right)$; **1.2.** $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{k^2}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$;

**1.3.** $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{k^3}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\frac{n(n+1)^2}{4}$; **1.4.** $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{k(k+1)}}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\frac{1}{n+1}$.

**Corollary 2.** If $A_1A_2...A_n$ is a convex polygon, then $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{A_k}e^{-t^2}dt\leq n\cdot arctg\frac{(n-2)\pi}{n}$.

**Corollary 3.** In all triangle $ABC$ holds:

**3.1.** $\sum\int_0^{a}e^{-t^2}dt\leq 3arctg\frac{2s}{3}$; **3.2.** $\sum\int_0^{s-a}e^{-t^2}dt\leq 3arctg\frac{s}{3}$; **3.3.** $\sum\int_0^{ab}e^{-t^2}dt\leq 3arctg\frac{s^2+r^2+4Rr}{3}$;

**3.4.** $\sum\int_0^{r_a}e^{-t^2}dt\leq 3arctg\frac{4R+r}{3}$; **3.5.** $\sum\int_0^{A}e^{-t^2}dt\leq 3arctg\frac{\pi}{3}$.

For many other applications of the teorem from above see [1].

**References**

[1] Octogon Mathematical Magazine (1993-2016).

**Profesor, Liceul Teoretic "Ady Andre" București**

# Inversa unei matrice

**Gabriela Neguțescu, Prahova**

Următorul material își propune găsirea unei metode de determinare a inversei unei matrice nesingulare de ordin n acare respectă relația $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ și a cărei formulă este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, unde A* se numește adjuncta matricei A.

Știm că $A^*$ se scrie ca o matrice transpusă, iar elementele sale se calculează după formula $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$, unde $d_{ij}$ este determinantul obținut din determinantul matricei inițiale, eliminând linia i și coloana j.

În continuare voi trata doar aspectul privind determinarea matricei adjuncte pentru matricile de ordin 2 si 3.

***Adjuncta unei matrice de ordin 2.***

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Adjuncta sa este $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, unde : $a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d = d$,.

$a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot c = c$, $a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot b = b$, $a_{22} = (-1)^{12+2} \cdot a = a$. Deci, $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

*Observăm că adjuncta unei matrice de ordin 2 se obține schimbând elementele de pe diagonala principală între ele, iar elementelor de pe diagonala secundară schimbându-le semnul.*

***Exemplu*** *:* Să determinăm inversa matricei $M = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: Evident, $\det(A) = -1$, $M^* = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

***Adjuncta unei matrice de ordin 3.***

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ și adjuncta sa $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Aplicând formulele de calcul pentru elementele matricei $A^*$, obținem că $A^* = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$.

**Să încercăm altă metodă :**

Vom alcătui un tablou în care vom scrie elementele matricei A, $\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$,

după care copiem dedesubt elementele primelor două linii ale matricei, așa cum procedăm la calculul determinantului de ordin 3 prin regula lui Sarrus, și apoi copiem la dreapta primele două coloane ale tabloului inițial. Mai departe, separăm prima linie și prima coloană de celelalte prin linii. Am obținut un tablou care conține 4 linii și patru coloane.

$$\begin{array}{c|cccc} a & b & c & a & b \\ \hline d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$

Din liniile 1 și 2 formăm trei determinanți de ordin 2, respectiv :

$d_1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = ei - fh = a_{11}$, $d_2 = \begin{vmatrix} f & d \\ i & g \end{vmatrix} = fg - di = a_{12}$,

$d_3 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = dh - eg = a_{13}$ .

La fel, din liniile 2 și 3 obținem trei determinanți de ordin 2, respectiv :

$$d_4=\begin{vmatrix} h & i \\ b & c \end{vmatrix}=ch-bi=a_{21},\quad d_5=\begin{vmatrix} i & g \\ c & a \end{vmatrix}=ai-cg=a_{22},\quad d_6=\begin{vmatrix} g & h \\ a & b \end{vmatrix}=bg-ah=a_{23}$$

Din liniile 3 și 4 obținem :

$$d_7=\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}=bf-ce=a_{31},\quad d_8=\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}=cd-af=a_{32},\quad d_9=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=ae-bd=a_{33}$$

Determinanții $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_9$ , scriși pe verticală, vor da matricea $A^*$, deci

$$A^*=\begin{pmatrix} d_1 & d_4 & d_7 \\ d_2 & d_5 & d_8 \\ d_3 & d_6 & d_9 \end{pmatrix}$$

***Exemplu :*** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . Atunci,

$\det(A)=60-12-18-20=10$ iar tabloul din care scoatem determinanții $d_i$ este

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | −3 | 2 | 1 |
| 4 | 6 | 0 | 4 | 6 |
| −1 | 1 | 5 | −1 | 1 |
| 2 | 1 | −3 | 2 | 1 |
| 4 | 6 | 0 | 4 | 6 |

$d_1=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=30$ ; $d_2=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-20$ ; $d_3=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=10$ ;

$d_4=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-8$ ; $d_5=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=7$ ; $d_6=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$ ;

$d_7=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=18$ ; $d_8=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-12$ ; $d_9=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=8$

$$A^*=\begin{pmatrix} 30 & -8 & 18 \\ -20 & 7 & -12 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=A\cdot\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*=\frac{1}{\det(A)}\cdot A\cdot A^*=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 & -8 & 18 \\ -20 & 7 & -12 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 60-20-30 & -16+7+9 & 36-12-24 \\ 120-120 & -32+42 & 72-72 \\ -30-20+50 & 8+7-15 & -18-12+40 \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

***Varianta 2 de calcul a elementelor matricei adjuncte :***

Procedăm similar ca în varianta 1 , dar lucrăm pe coloane .

Astfel , din coloanele 1 și 2 obținem determinanții $d_1$ , $d_2$ și $d_3$ ,
din coloanele 2 și 3 obținem determinanții $d_4$ , $d_5$ și $d_6$
din coloanele 3 și 4 obținem determinanții $d_7$ , $d_8$ și $d_9$ și completăm matricea $A^*$ pe orizontală $A^*=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & d_9 \end{pmatrix}$

Prin această metodă se pot evita unele greseli, cum ar fi, omiterea factorului $(-1)^{i+j}$ în calculul elementelor $a_{ij}$, alcătuirea determinanților reduși, obținuți din determinantul matricei inițiale.

**Bibliografie:**

**https://www.youtube.com/watch?v=osnnqbYYpk**

**Prof. , Școala Gimnazială Comuna Talea, Prahova**

# În legătură cu problema G86 din Recreaţii Matematice nr. 2/2005

**Nela Ciceu, Roșiori, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău**

Punctul de plecare al acestor rânduri este:

**Problema 1 (problema G86 din RecMat nr. 2/2005).** *''Fie $n \geq 3$ un număr natural impar, iar $A \subset N$ o mulţime cu $n^2 - 2n + 2$ elemente. Să se arate că putem alege $n$ numere din mulţimea $A$ cu proprietatea că suma lor se divide cu $n$.''*

**Titu Zvonaru, Comăneşti**

Soluţia, apărută în nr. 2/2006 al RecMat, este următoarea:

Scriem $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, unde $A_i$ conţine toate elementele lui $A$ care dau restul $i$ la împărţirea prin $n$.

Dacă cel puţin o mulţime $A_i$ este vidă, cum $n^2 - 2n + 2 = (n-1)(n-1) + 1$, din principiul cutiei rezultă că există măcar o mulţime $A_j$ care conţine cel puţin $n$ elemente, luând $n$ dintre ele, suma acestora se divide evident cu $n$. Dacă toate mulţimile $A_i, i = \overline{0, n-1}$ sunt nevide, alegem câte un element din fiecare mulţime. Suma acestora, modulo $n$, este $1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} (\bmod n)$ şi cum $n$ este impar, $n-1$ este par şi rezultă că $\dfrac{n(n-1)}{2} \equiv 0 (\bmod n)$.

La Concursul Viitori Olimpici din august 2015, la clasa a VIII-a, a fost propusă următorea problemă (enunţ parţial):

**Problema 2.** ''*Demonstraţi că orice mulţime formată din 11 numere naturale are cel puţin o submulţime cu şase elemente a căror sumă este divizibilă cu 6.*''

Folosind problema 1 observăm că pentru a putea alege o submulţime cu şase elemente a căror sumă este divizibilă cu 6, trebuie ca mulţimea $A$ să fie formată din $(6-1)^2 + 1 = 26$ numere naturale. Problema 2 sugerează faptul că numărul de elemente ale mulţimii $A$ din enunţul problemei 1 poate fi micşorat.

În cele ce urmeză vom demonstra următoarea:

**Lemă.** ''*Fie $n = pq$, unde $p < q$ sunt două numere naturale impare prime între ele. Orice mulţime formată din $q(p-1)^2 + (q-1)^2 + 1$ numere naturale are cel puţin o submulţime formată din $n$ elemente a căror sumă este divizibilă cu $n$.*''

Fie $A$ mulţimea dată. Notăm $k = (p-1)^2 + 1, t = (q-1)^2 + 1$. Conform problemei 1, pentru orice mulţime formată din $t$ numere naturale putem alege $q$ elemente a căror sumă este divizibilă cu $q$. Din mulţimea $\{a_1, a_2, ..., a_t\}$ alegem $q$ numere cu suma divizibilă cu $q$, fie acestea $a_1, a_2, ..., a_q$ a căror sumă este $s_1$. Din mulţimea $\{a_{q+1}, a_{q+2}, ..., a_{q+t}\}$ cu $t$ elemente alegem numerele $a_{q+1}, a_{q+2}, ..., a_{2q}$ cu suma $s_2$ divizibilă cu $q$. Analog obţinem sumele $s_3, s_4, ..., s_{k-1}$ divizibile cu $q$. După alegerea acestor sume ne rămân încă $t$ elemente şi astfel putem obţine şi suma $s_k$ divizibilă cu $q$.

Aplicând acum afirmaţia din problema 1 pentru mulţimea $\{s_1, s_2, ..., s_k\}$ obţinem $p$ elemente, de exemplu $s_1, s_2, ..., s_p$ a căror sumă este divizibilă cu $p$. Cum fiecare termen al sumei este divizibil cu $q$, suma este divizibilă cu $pq$.

Să exemplificăm cum Lema îmbunătăţeşte rezultatul din problema 1.

Pentru a fi siguri că putem alege 15 numere cu suma divizibilă cu 15, conform problemei 1 avem nevoie de o mulţime $A$ formată din $(15-1)^2 + 1 = 197$ numere naturale. Aplicând lema, din orice mulţime $A$ formată din $5(3-1)^2 + (5-1)^2 + 1 = 37$ numere naturale putem alege 15 numere cu suma divizibilă cu 15.

Deoarece $q(p-1)^2+(q-1)^2+1<(pq-1)^2 \Leftrightarrow q(q-1)(p^2-1)+1>0$, rezultă că într-adevăr lema dă o estimare mai bună decât cea oferită de problema 1.
Deoarece $q(p-1)^2+(q-1)^2+1<p(q-1)^2+(p-1)^2+1 \Leftrightarrow (q-p)(p-1)(q-1)>0$,
deducem că e mai convenabil să alegem prima dată sumele divizibile cu $q$ şi apoi suma divizibilă cu $p$.

## Aplicaţii de tip Weyl

**Daniel Sitaru, Claudia Nănuți, Drobeta Turnu- Severin,**

**Abstract:** In this article we will present a construction modality of some new problems starting from a problem (S: L16.22) published in Gazeta Matematică nr. 1/2016.

**Teorema H. Weyl**: Fie $K$ un corp infinit și $P,Q\in K[x];r\in K;P\not\equiv 0;$
$P(r)\neq 0;Q(r)=0$. În aceste condiții $Q\equiv 0$.
**Corolar 1 (Răzvan Satnoianu):** Fie $A\in M_n(\mathbb{C});P\in\mathbb{C}[x];P=\det A$;
Dacă $P\not\equiv 0,Q\in\mathbb{C}[x];Q(A)=0_n$ atunci $Q\equiv 0$.
**Corolar 2 (Răzvan Satnoianu):** Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{C});\ \lambda\in\mathbb{C}$ atunci:

$$\det(AB+\lambda I_n)=\det(BA+\lambda I_n)$$

**Demonstrație:** Fie $Q(x)=\det(XB+\lambda I_n)-\det(BX+\lambda I_n)$
Fie $A\in M_n(\mathbb{C});\det A\neq 0;P=\det A\not\equiv 0$

$$\begin{aligned}Q(A)&=\det(AB+\lambda I_n)-\det(BA+\lambda I_n)=\\&=\det(AB+\lambda I_n)-\det[A^{-1}(AB+\lambda I_n)A]=\\&=\det(AB+\lambda I_n)-\det(A^{-1})\det(AB+\lambda I_n)\det A=\\&=\det(AB+\lambda I_n)-\det(AB+\lambda I_n)=0\end{aligned}$$

Rezultă $Q\equiv 0\Rightarrow \det(AB+\lambda I_n)=\det(BA+\lambda I_n)$

**S: L16.22:** Fie $A,B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Arătați că: $BABA+BA+I_3$ este inversabilă. (**Eugen Radu).**

**Soluție:** $\det(BABA+BA+I_3)=\det(B(ABA+A)+I_3)=$

$$=\det\left((ABA+A)B+I_3\right)=\det(ABAB+AB+I_3)=$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&3&1\\0&0&1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

Putem extinde problema la o matrice din $M_n(\mathbb{C})$:
**Generalizarea nr. 1:** Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=C$ și
$\det(C^2+C+I_n)\neq 0$. În aceste condiții: $BABA+BA+I_n$ este inversabilă.
**Soluție:** $\det(BABA+BA+I_n)=\det(B(ABA+A)+I_n)=$

$$=\det\left((ABA+A)B+I_n\right)=\det(ABAB+AB+I_n)=\det(C^2+C+I_n)\neq 0$$

Continuarea naturală a extinderii este cuprinsă în:
**Generalizarea nr. 2:** Fie $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=C$ și $\det(C^3+C^2+C+I_n)\neq 0$.
În aceste condiții: $BABABA+BABA+BA+I_n$ este inversabilă.
**Soluție:** $\det(BABABA+BABA+BA+I_n)=$

$$=\det(B(ABABA+ABA+A)+I_n)=\det\left((ABABA+ABA+A)+B+I_n\right)=$$

$$= \det(ABABAB + ABAB + AB + I_n) = \det(C^3 + C^2 + C + I_n) \neq 0$$

**Generalizarea nr. 3:** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = C$;
$\det(C^m + C^{m-1} + \cdots + C^2 + C + I_n) \neq 0; m \in \mathbb{N}; m \geq 3$
În aceste condiții: $(BA)^m + (BA)^{m-1} + (BA)^{m-2} + \cdots + BA + I_n$ este inversabilă.
**Soluție:** $\det((BA)^m + (BA)^{m-1} + (BA)^{m-2} + \cdots + BA + I_n) =$

$$= \det(B(A(BA)^{m-1} + A(BA)^{m-2} + \cdots + A) + I_n) =$$
$$= \det(B(A(BA)^{m-1} + A(BA)^{m-2} + \cdots + A)B + I_n) =$$
$$= \det((AB)^m + (AB)^{m-1} + \cdots + AB + I_n) =$$
$$= \det(C^m + C^{m-1} + \cdots + C^2 + C + I_n) \neq 0$$

În continuare, propunem cititorului să aplice aceleași modalități de generalizare pentru următoarele probleme:
**1.** Fie $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ care comută oricare două câte două și $A+B+C+D=O_n$
Să se arate că: $\det(BC - AD)\det(CA - BD)\det(BA - CD) \geq 0$. (**Nicolae Mușuroia**)
**Soluția autorului:**

$$BC - AD = BC - A(-A - B - C) = BC + A^2 + AB + AC = (A + C)(A + B)$$
$$CA - BD = CA - B(-A - B - C) = CA + BA + B^2 + BC = (A + B)(B + C)$$
$$BA - CD = BA - C(-A - B - C) = BA + CA + CB + C^2 = (B + C)(A + C)$$
$$\det(BC - AD) \cdot \det(CA - BD) \cdot \det(BA - CD) =$$
$$= \det\big((BC - AD)(CA - BD)(BA - CD)\big) =$$
$$= (\det(A + B))^2(\det(B + C))^2(\det(A + C))^2 \geq 0.$$

**2.** Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(A - B) + B(A + B) = 0_2$. Să se arate că:
$\det(A^2 + B^2 - I_2) \geq 1$. (**Radu Pop**)

**Soluția autorului:** Din ipoteză rezultă că:

$$A^2 + B^2 = AB - BA \Rightarrow \mathrm{Tr}(A^2 + B^2) = \mathrm{Tr}\,(AB - BA) = 0$$

$\det(A^2 + B^2 - xI_2) = x^2 - \mathrm{Tr}\,(A^2 + B^2)x + \det(A^2 + B^2)$, de unde
$\det(A^2 + B^2 - I_2) = 1 + \det(A^2 + B^2) \geq 1$.

**Bibliografie:**
[1] **Daniel Sitaru**, *Math Phenomenon*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016
[2] **Daniel Sitaru**, **Radu Gologan, Leonard Giugiuc**, *300 Romanian Mathematical Challenges*, Editura Paralela 45, Pitești 2016
[3] **Daniel Sitaru, Claudia Nănuți, Diana Trăilescu, Leonard Giugiuc**, *Inequalities*, Editura Ecko-Print, Dr. Tr. Severin, 2015
[4] **Răzvan Satnoianu**, *Teorema Weyl și identități matriceale*, RMC 3/1994.
[5] *Colecția Gazeta Matematică* seria A și B.
[6] *Colecția Didactica Matematică*

**Profesori, Colegiul Național „Theodor Costescu", Drobeta Turnu – Severin, Mehedinți**

**„Un om de succes este acela care poate construi o fundație solidă cu cărămizile pe care alții le aruncă în el".**

**David Charles Brink (n. 1939)**

**„Nu încerc să aflu răspunsurile, doresc să înțeleg întrebările”.**
**Confucius (cca 550- 470 î.Hr)**

# 3. Probleme rezolvate

## ▪ Învăţământ primar

**P:377. Un crescător de fazani lasă moștenire celor cinci fiice ale sale 6700 fazani, în următoarele condiții: prima fiică primește o treime, a doua fiică o pătrime, a treia fiică o șesime, a patra fiică o optime, iar a cincea fiică 400 fazani. Câți fazani au primit primele patru fiice?**

**Andreea și Mircea Mario Stoica**, Arad

**Rezolvare:** 6700 – 400 = 6300. Notăm cu x numărul de fazani. Atunci, $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}=6300 \Rightarrow$ $\frac{8x+6x+4x+3x}{24}=6300 \Rightarrow \frac{21}{24}x=6300 \Rightarrow x=7200$. Atunci, prima fiică primește $7200:3=2400$, a doua primește $7200:4=1800$, a treia primește $7200:6=1200$, a patra primește $7200:8=900$.

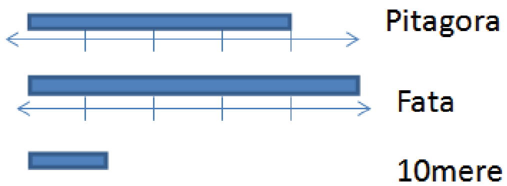
**P:378. Aflați numere naturale de două cifre pentru care diferența dintre număr și răsturnatul său să fie egală cu cifra zecilor.**

**Nicolae Ivășchescu, Canada**

**Rezolvare:** **Dacă** $\overline{ab}$ este numărul atunci $\overline{ba}$ este răsturnatul său și $\overline{ab}-\overline{ba}=a \Leftrightarrow$ 10a+b – 10b – a = a de unde rezultă $a=9$, $b=8 \Rightarrow$ $\overline{ab}=98$. Verificare: $98-89=9$.

**P:379. Odată Pitagora a fost întrebat ce a mâncat în ziua aceea iar el a răspuns: până acum am mâncat doar mere, de două ori două cincimi din cât a mâncat fata mea și tot au mai rămas 10 mere. Dacă aș fi mâncat cu șapte mere mai mult decât fata mea nu ar mai fi rămas niciun măr. Câte mere a mâncat Pitagora?** **Adrian Stan, Buzău**

Rezolvare: Notăm cu 5x numărul de mere mâncat de fată, atunci Pitagora a mâncat de două ori două cincimi din cât a mâncat fata adică patru cincimi din 5x însemnând 4x.




Numărul total de mere este 4x + 5x + 10.

Dacă ar fi mâncat cu șapte mai mult decât fata, atunci, 5x+7 +5x reprezintă numărul total de mere pe care-l egalăm cu 4x + 5x+ 10.

Așadar, din 4x + 5x + 10 = 5x+7 +5x rezultă x=3 adică fata a mâncat 5·3=15 mere, iar Pitagora 4·3=12 mere.

## ▪ Clasa a V-a

**G:596. Determinați mulțimile X și Y știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:**

**a)** $X \cup Y = \{2008; 2009; 2010; 2011; 2012; 2013\}$; **b)** $X \cap Y = \{2008; 2009\}$;

**c)** $X \cap \{2010; 2011\} = \varnothing$; **d)** $Y \cap \{2012; 2013\} = \varnothing$;

**Doina Stoica, Mircea Mario Stoica,** Arad

**Rezolvare:**
Din b) rezultă $2008 \in X, 2009 \in X, 2008 \in Y, 2009 \in Y$, din a) și c) rezultă $2010 \notin X, 2010 \in Y$, $2011 \notin X, 2011 \in Y$ și din a) și d) rezultă $2012 \in X, 2012 \notin Y, 2013 \in X, 2013 \notin Y$.

Așadar, $X = \{2008; 2009; 2012; 2013\}, Y = \{2008; 2009; 2010; 2011\}$.

**G:597. Comparați numerele** $A = 1 + 2014 + 2014^2 + 2014^3 + ..... + 2014^{2015}$ **și** $B = \dfrac{2014^{2016}}{2013} - \dfrac{1}{2013}$**.**

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

**Rezolvare:** **(1)** $A = 1 + 2014 + 2014^2 + 2014^3 + ..... + 2014^{2015} \,\big|\bullet 2014 \Rightarrow$

**(2)** $2014 \cdot A = 2014 + 2014^2 + 2014^3 + ..... + 2014^{2015} + 2014^{2016}$**.**

Prin scăderea egalităților (2) - (1) rezultă $A = \dfrac{2014^{2016} - 1}{2013} = B$.

**G:598. Arătați că** $\dfrac{1}{1489} + \dfrac{1}{1490} + \dfrac{1}{1491} + .... + \dfrac{1}{1983} + \dfrac{1}{1984} \rangle \dfrac{1}{4}$**.**

**Doina Stoica, Mircea Mario Stoica,** Arad

**Rezolvare:** Cum fiecare fracție este mai mare decât $\dfrac{1}{1984}$, rezultă că

$$\frac{1}{1489} + \frac{1}{1490} + \frac{1}{1491} + .... + \frac{1}{1983} + \frac{1}{1984} \rangle 496 \cdot \frac{1}{1984} = \frac{1}{4}.$$

**G:599. Fie mulțimea** $M = \{1; 3; 5; .....; 151\}$**. Arătați că mulțimea M se poate împărți în 38 de submulțimi disjuncte două câte două, fiecare conținând două elemente a căror sumă să fie cub perfect.**

**Marian Voinea ,** București

**Rezolvare**:
Fie $A(a;b)$ una din submulțimile cerute ale lui M care respectă condițiile: $a + b = c^3$, $c \in \mathbb{N}^*$.
Cum a și b sunt impare atunci $c^3$ este par, $4 \le a + b \le 300 \Rightarrow c^3 \in [4; 300] \Rightarrow c^3 \in \{8; 64; 216\}$.
Fie $M = \{1; 3; 5; ....; 63\} \cup \{65; 67; 69; ....; 151\}$. Din fiecare submulțime se găsesc următoarele submulțimi care respectă cerințele date:
$\{1; 63\}, \{3; 61\}, ......, \{31, 33\}$, 16 submulțimi pentru care $a^2 + b^2 = 64 = 4^3$.
$\{65; 151\}, \{67; 149\}, ......, \{107, 109\}$, 22 submulțimi pentru care $a^2 + b^2 = 216 = 6^3$.
În total sunt 38 de submulțimi.

**G:600. Fie** $a, b \in \mathbb{N}^*$ **astfel încât** $2b - 3a = 17$**. Arătați că** $b \ge 10$.

**Ionuț Florin Voinea**, București

Rezolvare: **Evident,** $a \ge 1$, **iar** $2b = 3a + 17 \Rightarrow 2b \ge 3 \cdot 1 + 17 \Rightarrow 2b \ge 20 \Rightarrow b \ge 10$.

**G:601**. **Să se determine cardinalul mulţimii** $\left\{\overline{abc} / \, a+b=ac,\right\}$ **ştiind că b şi c sunt numere prime.**

**Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**Rezolvare**: Relaţia dată se scrie $b=a(c-1)$, de unde:

$a=1, c-1=b \Rightarrow c=b+1$, şi cum b, c sunt prime consecutive atunci $b=2, c=3 \Rightarrow \overline{abc}=123$;

$a=b, c-1=1 \Rightarrow c=2 \Rightarrow \overline{abc} \in \{222,332,552,772\}$. Cardinalul mulţimii date este 5.

**G:602**. **Arătaţi că numărul** $A=\frac{2^{2015}-2^{2010}}{2^{2014}+2^{2008}}\cdot 2015$ **este pătrat perfect.**

**Mariana Mitea,** Cugir, Alba

**Rezolvare**: Numărul A se poate scrie:

$A=\frac{2^{2015}-2^{2010}}{2^{2014}+2^{2008}}\cdot 2015=\frac{2^{2010}(2^5-2^0)}{2^{2008}(2^6-2^0)}\cdot 2015=\frac{2^{2010}\cdot 31}{2^{2008}\cdot 65}\cdot 2015$ , de unde după simplificări

obţinem $A=2^2\cdot 31^2=62^2$, deci A este un pătrat perfect.

**G:603**. **a) Determinaţi numerele prime** $a,b,c$ **ştiind că** $13\cdot a+78\cdot b+86\cdot c=2015$.
**b) Dacă** $\overline{abb}+\overline{bac}+\overline{cbc}=2013+3\cdot c+x$ **şi** $x\rangle 11$**, arătaţi că numărul x este număr compus.**

**Mariana Mitea,** Cugir, Alba

**Rezolvare:**
a) Avem 2015=5·13·31, deci 2015=$M_{13}$, iar cum şi 78=13·6=$M_{13}$ deducem că 86·c=$M_{13}$ şi cum 86≠$M_{13}$ rezultă că c=$M_{13}$; însă c este număr prim, iar atunci c=13 şi obţinem
$13\cdot a+78\cdot b+86\cdot 13=2015$.
Putem să împărţim egalitatea prin 13 şi obţinem $a+6\cdot b+86=155$ de unde $a+6\cdot b=69$.
Cum 6·b=$M_3$ iar 69=3·23=$M_3$ deducem că a=$M_3$; însă a este număr prim, iar atunci a=3 şi obţinem $3+6\cdot b=69$ ceea ce implică b=11.
b) Egalitatea dată $\overline{abb}+\overline{bac}+\overline{cbc}=2013+3\cdot c+x$ este echivalentă cu:
$110a+121b+99c=11\cdot 183+x$ de unde rezultă că $x=M_{11}$ şi cum $x\rangle 11$ rezultă că $x$ este număr compus .

**G:604**. **Demonstraţi că numărul** $117^{6k+1}, k\in\mathbb{N}^*$ **se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte şi ca o diferenţă de două cuburi perfecte.**

**Ionuţ Florin Voinea**, Bucureşti

**Rezolvare:** Se observă că $117^{6k+1}=\left(6^2+9^2\right)\cdot 117^{6k}=\left(6\cdot 117^{3k}\right)^2+\left(9\cdot 117^{3k}\right)^2$.

$117^{6k+1}=\left(5^3-2^3\right)\cdot 117^{6k}=\left(5\cdot 117^{2k}\right)^3+\left(2\cdot 117^{2k}\right)^3$.

**G:605**. **Arătaţi că fracţiile** $F_1=\frac{2^{n+1}\cdot 5^{m+2}\cdot 10}{3^{p+3}\cdot 7^{q+1}\cdot 21}$ **şi** $F_2=\frac{2^n\cdot 5^{m+3}\cdot 4}{3^{p+4}\cdot 7^q\cdot 49}$ **sunt echivalente, oricare ar fi** $n,m,p,q\in\mathbb{N}$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

**Rezolvare**: Folosim faptul că $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ sunt echivalente $\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$. În cazul nostru,
$\left(2^{n+1}\cdot 5^{m+2}\cdot 10\right)\cdot\left(3^{p+4}\cdot 7^q\cdot 49\right)=2^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 3^4\cdot 2^4\cdot 5^m\cdot 3^p\cdot 7^q=\left(3^{p+3}\cdot 7^{q+1}\cdot 21\right)\left(2^n\cdot 5^{m+3}\cdot 4\right)$.

## ▪ Clasa a VI- a

$\boxed{\text{G:606}}$. **Arătați** că **numărul** $A=1!+2!+3!+...+2015!$ **nu este pătrat perfect, unde** $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot....\cdot n,\ n\in\mathbb{N}.$

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**Rezolvare:** Ultima cifră a lui n! este $u(n!)=0,\ \forall n\geq5$, atunci, $u(A)=u(1!+2!+3!+4!)+0=u(32)=2.$ Cum ultima cifră a lui A este 2 rezultă că A nu e pătrat perfect.

$\boxed{\text{G:607}}$. **Cercetați dacă fracția** $\dfrac{8n+3}{5n+2}$ **este ireductibilă , pentru orice n număr natural.**

**Ion Stănescu,** Buzău

**Rezolvare:** Presupunem că fracția se simplifică adică există un cel mai mare divizor pentru numărător și numitor:

Fie $d|8n+3$ și $d|5n+2$. Atunci, $d|(8n+3)\cdot5$ și $d|(5n+2)\cdot8$, de unde rezultă că $d|(40n+16-40n-15)\Rightarrow\ d|1$, deci $d=1$. Așadar, fracția este ireductibilă.

**G:608. Să se arate că pentru orice număr natural n , expresia** $E=2\cdot10^{n+3}+3\cdot10^{n+2}+4$**, este divizibilă cu 36.**

**Marin Simion,** Rm. Sărat

**Rezolvare**: Deoarece $10^{n+3}=\underbrace{\overline{1000....0000}}_{n+3 zerouri}$ si $10^{n+2}=\underbrace{\overline{1000...000}}_{n+2 zerouri}$ obținem:

$$E=2\cdot\underbrace{\overline{1000.......0000}}_{n+3zerouri}+3\cdot\underbrace{\overline{1000....000}}_{n+2zerouri}+4=\underbrace{\overline{23000.....004}}_{n+1zerouri}$$

Deoarece suma cifrelor acestui număr este 2+3+0+0+.....+4=9$\Rightarrow E\vdots9$; în plus $E\vdots4$ deoarece ultimele două cifre formează un număr divizibil cu 4. Cum (9,4)=1 (numerele 9 și 4 sunt prime între ele ) și $9\cdot4=36\ \Rightarrow E\vdots36$.

$\boxed{\text{G:609}}$. **Dacă** $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ **și** $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{x+z}=\dfrac{z}{x+y}$ **atunci** $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}$ **este un cub perfect.**

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**Rezolvare**: Cum $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{x+z}=\dfrac{z}{x+y}=\dfrac{x+y+z}{2(x+y+z)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\ 2x=y+z,\ 2y=x+z,$

$2z=x+y\Rightarrow x=y=z$ Atunci, $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}=\dfrac{3x^3}{3}=x^3.$

$\boxed{\text{G:610}}$. **Determinați numerele naturale a, b, c știind că :** $\dfrac{a+2014}{2014}=\dfrac{b+2015}{2015}=\dfrac{c+2016}{2016}$ **și**

**2a + 3b = 5c-7.**

**Marin Simon,** Rm. Sărat

**Rezolvare**: Deoarece $\dfrac{a+2014}{2014}=\dfrac{b+2015}{2015}=\dfrac{c+2016}{2016}$ obținem :

$\dfrac{a}{2014}+\dfrac{2014}{2014}=\dfrac{b}{2015}+\dfrac{2015}{2015}=\dfrac{c}{2016}+\dfrac{2016}{2016}$ de unde deducem că $\dfrac{a}{2014}=\dfrac{b}{2015}=\dfrac{c}{2016}$.

Notând cu k valoarea comună a celor trei rapoarte obținem a = 2014k , b = 2015k și c=2016k , de unde înlocuind în a doua relație obținem $2\cdot2014k+3\cdot2015k=5\cdot2016k-7$ și obținem k =1.Găsim astfel : a = 2014, b = 2015 și c = 2016 .

**G:611**. **Fie** $a,b\in(0;\infty)$ **astfel încât** $a+b=2$ **. Arătați că** $(ab)^{2016}(a^2+b^2)\le 2$ **. În ce caz avem egalitate?**

**Constantina Prunaru, Roxana Vasile,** Craiova

**Rezolvare:** Fie $a=1+\alpha,\ b=1-\alpha$ cu $0\le\alpha\le1$. Atunci, inegalitatea dată devine
$(1-\alpha^2)^{2016}\cdot 2(1+\alpha^2)\le 2 |:2\Rightarrow\ (1-\alpha^2)^{2015}\cdot(1-\alpha^4)\le 1$ adevărată deoarece
$(1-\alpha^2)^{2015}\le 1,\ (1-\alpha^4)\le 1$. Egalitate pentru $\alpha=0\Leftrightarrow a=b=1$.

**G:612**. **Să se afle câte numere de forma** $\overline{abcde}$ **există, știind că** $\overline{abc}$ **este prim și că:** $\overline{ab}$ **(a + bd + ce) = 150.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**Rezolvare:** Din relația dată rezultă că $\overline{ab}$ /150, adică $\overline{ab}\in\{10,15,25,30,50,75\}$. Avem situațiile:

1). $\overline{ab}$ = 10, de unde a =1, b = 0, ce=14 $\Rightarrow c=2, e=7$ ; $c=7, e=2\Rightarrow \overline{abc}=107$ este prim, și atunci $\overline{abcde}=\overline{107d2}$ , în total 10 numere;

2). $\overline{ab}$ =15 $\Rightarrow$ a = 1, b = 5, 5d + ce = 9. Distingem subcazurile:

a) d = 0 $\Rightarrow$ ce = 9 $\Rightarrow$ c=1,e=9 sau c=9, e=1sau e = c = 3 $\Rightarrow \overline{abc}$ = 151; $\overline{abc}=159$ sunt numere prime, iar $\overline{abc}=153$ număr compus, și atunci mai există 2 numere:15109 și 15901;

b) d = 1 $\Rightarrow$ ce = 4, $\Rightarrow$ c = 1,e = 4, $\overline{abc}$ = 151, număr prim, celelalte două situații fiind false, rezultă că mai avem numărul 15114 ;

3). $\overline{ab}$ = 25 $\Rightarrow$ a = 2, b = 5, 5d + ce = 4, de unde numai pentru d = 0 egalitatea este posibilă, și atunci ce = 4, și atunci obținem numărul 25104;

4). $\overline{ab}$ = 30 $\Rightarrow$ a =3, b = 0, ce = 2 $\Rightarrow$ $\overline{abc}$ este număr compus, atât pentru c = 1cât și pentru c = 2;

5). Dacă $\overline{ab}\in\{50, 60, 75\}$ nu obținem soluții. În concluzie, se obțin 14 numere.

## ▪ Clasa a VII-a

**G:613**. **Fie numărul** $A=\sqrt{2015^4+2\cdot2014^2-4029^2}$. **Arătați că** $\sqrt{A+1}\in\mathbb{N}$ **.**

**Mariana Mitea,** Cugir, Alba

Rezolvare:

$$A=\sqrt{2015^4+2\cdot(2015-1)^2-(2\cdot2015-1)^2}=\sqrt{2015^4+2\cdot(2015^2-2\cdot2015+1)-(4\cdot2015^2-4\cdot2015+1)}=$$

$$=\sqrt{2015^4-2\cdot2015^2+1}=\sqrt{(2015^2-1)^2}=2015^2-1.$$

Așadar, $\sqrt{A+1}=\sqrt{2015^2-1+1}=\sqrt{2015^2}=2015\in\mathbb{N}.$

**G:614**. **Să se demonstreze că** $\sqrt{A}\in\mathbb{N}$ **unde** $A=\left[\left(\frac{2n-1}{4}-\frac{n+1}{3}+\frac{n^2+8}{12}\right):\frac{n+1}{6}+\frac{n^2+n}{2}\right]\bullet 2,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

**Nicolae Ivășchescu,** Canada

**Rezolvare**: După aducerea la acelaşi numitor se obţine
$$A=\left(\frac{n^2+2n+1}{2(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\cdot 2=\left[\frac{n+1}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\cdot 2=(n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{A}=\sqrt{(n+1)^2}=n+1\in\mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{G:615}}$. **Arătaţi că** $\dfrac{(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{3}\geq ab+bc+ac,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

**Rezolvare:** Făcând calculul algebric în membrul stâng obţinem $\dfrac{\cancel{3}(a^2+b^2+c^2)}{\cancel{3}}\geq ab+bc+ac\Rightarrow$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geq 0$ cu egalitate când $a=b=c$.

**G:616**. **a) Arătaţi că** $\left(x^2+7x+1\right)^2 > 9x\left(x+1\right)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

**b) Folosind eventual a) să se arate că** $A=9^{8052}+5\cdot 9^{6039}+33\cdot 9^{4026}+5\cdot 9^{2013}+1$ **este compus.**

**Monica Matei, Carmen Terheci,** Craiova

**Rezolvare:**

a) Dacă $x\leq 0$, e evident. Pentru $x>0$ rezultă $x^2+7x+1\geq 9x\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ şi $x^2+7x+1>(x+1)^2\Leftrightarrow 5x>0$. Prin înmulţirea celor două inegalităţi rezultă relaţia cerută.

b) Se observă că $x^4+5x^3+33x^2+5x+1=\left(x^2+7x+1\right)^2-9x(x+1)^2$. Punând în loc de x numărul $9^{2013}$ rezultă $A=\left(9^{2\cdot 2013}+7\cdot 9^{2013}+1\right)^2-9^{2014}(9^{2013}+1)^2=$

$=\left(9^{4026}+7\cdot 9^{2014}+1-9^{1007}(9^{2013}+1)\right)\cdot\left(9^{4026}+7\cdot 9^{2013}+1+9^{1007}(9^{2013}+1)\right)$.

**G:617**. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2$. Arătaţi că $3(x+y)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$.

**Constantina Prunaru**, Craiova

**Rezolvare:**

Din $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{2}{y+\sqrt{y^2+1}}=2(\sqrt{y^2+1}-y)$ şi $y+\sqrt{y^2+1}=\dfrac{2}{x+\sqrt{x^2+1}}=2(\sqrt{x^2+1}-x)$, prin adunarea relaţiilor rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

$\boxed{\text{G:618}}$. **Determinaţi numerele** $\overline{abcd}$ **formate din cifre prime, ştiind că:**
**2a + ad + 3b + bd + cd² + 4cd + 3c = d³ + 7d² + 15d + 9.**

**Gheorghe Ghiţă,** Buzău

**Rezolvare:** Egalitatea dată se mai poate scrie:
$2a + ad + 3b + bd + cd^2 + 4cd + 3c = d^3 + 6d^2 + 9d + d^2 + 6d + 9 \Leftrightarrow$
$a(d + 2) + b(d + 3) + c(d^2 + 4d + 3) = d(d^2 + 6d + 9) + (d + 3)^2 \Leftrightarrow$
$a(d + 2) + b(d + 3) + c(d + 1)(d + 3) = (d + 1)(d + 3)^2$.

Din ultima formă se deduce că $d + 3 \mid a(d + 2)$, de unde rezultă că $d + 3 \mid a$, deoarece d + 2 şi d + 3 sunt numere naturale consecutive, şi prin urmare prime între ele. Cum **a** este număr prim şi divizibil cu d + 3, rezultă a = d + 3 şi atunci a=5 şi d=2.

Relaţia devine: b + 3c = 11, cu soluţiile: b = 2, c = 3, şi b = 5, c = 2.Aşadar, $\overline{abcd}\in\{5232, 5522\}$.

**G:619**. **Se consideră pătratul** $ABCD$. **În exteriorul pătratului se construiesc triunghiurile** $\triangle ABE$, $\triangle BCF$, $\triangle CDG$ **şi** $\triangle ADH$ **echilaterale. Arătaţi că raportul dintre aria suprafeţei patrulaterului** $EFGH$ **şi dublul ariei suprafeţei** $\triangle CHE$ **este supraunitar.**

**Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

**Rezolvare:** Se demonstrează că patrulaterul $EFGH$ este pătrat fie arătând că diagonalele sunt perpendiculare, au acelaşi mijloc şi sunt congruente, fie arătând că toate unghiurile sunt drepte şi două laturi alăturate sunt congruente. $A_{EFGH} = EF^2$. Se arată apoi că $\triangle CHE$ este echilateral şi că $[CE] \equiv [EF]$.

$A_{\triangle CHE} = \frac{EF^2\sqrt{3}}{4}$. Raportul cerut este $\frac{A_{EFGH}}{2A_{\triangle CHE}} = \frac{EF^2}{2\cdot\frac{EF^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

**G:621**. **Demonstrați că în interiorul unui pătrat de latură a = 32 cm, există 128 de puncte distincte astfel încât distanța dintre oricare două astfel de puncte vecine determinate este de $\left(2-\sqrt{2}\right)$ cm și alte 512 puncte distincte astfel încât distanța dintre ele să fie de $\sqrt{2}$ cm respectiv 2 cm.**

**Dumitru Vieriu,** Dorohoi

**Rezolvare:**

Demonstrația are la bază faptul că singurele triunghiuri care au mijloacele înălțimilor lor coliniare sunt cele dreptunghice, conform teoremei liniei mijlocii în triunghi. Fie triunghiul $\Delta\ ABC$ cu $m(A) = 90^0$,

$BC = a,\ AB = c,\ AC = b.$ Atunci, $r + R = \frac{S}{p} + \frac{abc}{4S} = \frac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} + \frac{a}{2} = \frac{bc}{a+b+c} + \frac{a}{2}.$ După aducerea la același numitor și din faptul că $a^2 = b^2 + c^2$ se obține cerința.

Observație: Se poate folosi direct și faptul că într-un triunghi dreptunghic, $R = \frac{a}{2}$.

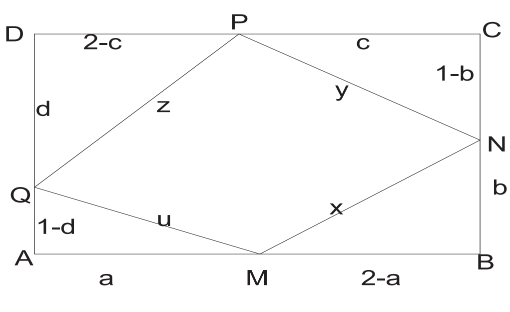
**Observație (Titu Zvonaru)**

Altfel, ducem un segment paralel cu AB, pe care îl împărțim în părți egale fiecare de lungime $2-\sqrt{2}$, apoi luăm alt segment paralel cu AB, la distanța mai mare decât $2-\sqrt{2}$ de primul segment, etc.

**G:622**. **Se consideră dreptunghiul** $ABCD$, **cu** $AB = 2$ **şi** $BC = 1$. **Fie** $M \in [AB]$, $N \in [BC], P \in [CD]$ **şi** $Q \in [DA]$, **calculaţi** $: \min(MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2)$, **respectiv** $\max(MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2)$.

**D.M. Bătineţu-Giurgiu,** Bucureşti , **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare:** Avem notaţiile şi figura de mai jos.




(1) $MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = (2-a)^2 + b^2 + (1-b)^2 + c^2 +$

$+ d^2 + (2-c)^2 + a^2 + (1-d)^2 = 5 + 2(a-1)^2 + 2(b-\frac{1}{2})^2 + 2(c-1)^2 + 2(d-\frac{1}{2})^2$.

(2) $0 \le (a-1)^2 \le 1; 0 \le (b-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}; 0 \le (c-1)^2 \le 1; 0 \le (d-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$.

Din (1) şi (2) se obţine că: $5 \le x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \le 10$.

Deci , $\min(MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2) = 5$ şi $\max(MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2) = 10$.

Maximul se realizează când punctele $M, N, P, Q$ se găsesc la mijlocul laturilor, iar minimul când $P \equiv Q \equiv D, M \equiv N \equiv B$.

**G:623. Fie ABCD un trapez cu $AB = 2015$ și CD astfel încât $CD \parallel AB$. Fie $M, P \in (AD)$ și $N, Q \in (BC)$ astfel încât $MN \parallel PQ \parallel AB$ și Aria (DCNM) = A(MNQP) + Aria (PQAB). Determinați lungimile segmentelor $[MN]$ și $[PQ]$.**

**Lucian Tuțescu, Roxana Vasile**, Craiova

**Rezolvare:**

Fie $AD \cap BC = \{O\}$. Fie $S = Aria(ODC)$ și $S_0 = Aria(DCNM) = Aria(MNQP) + Aria(PQAB)$.

Din $\Delta ODC \sim \Delta OAB \Rightarrow \dfrac{S}{S + 3S_0} = \dfrac{1}{2015^2} \Rightarrow (2015^2 - 1) \cdot S = 3S_0 \Rightarrow \dfrac{S_0}{S} = 2015 \cdot 672.$

$\Delta ODC \sim \Delta OMN \Rightarrow \dfrac{S}{S + S_0} = \dfrac{1}{MN^2} \Rightarrow MN^2 = 1 + \dfrac{S_0}{S} = 1 + 2015 \cdot 672 \Rightarrow MN = \sqrt{1 + 672 \cdot 2015}$.

$\Delta ODC \sim \Delta OPQ \Rightarrow \dfrac{S}{S + 2S_0} = \dfrac{1}{PQ^2} \Rightarrow PQ^2 = 1 + 2 \cdot \dfrac{S_0}{S} = 1 + 2 \cdot 2015 \cdot 672 \Rightarrow PQ = \sqrt{2708161}$.

## ▪ Clasa a VIII-a

**G:624. Să se demonstreze inegalitatea: $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} + \sqrt{132 + \sqrt{132 + \sqrt{132}}} \langle 17$.**

**Cristina Isaia**, Galați

**Rezolvare:** Avem: $\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{20 + \sqrt{20}} < \sqrt{20 + 5} = 5$, $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} < \sqrt{20 + 5} = 5$, (1).

$\sqrt{132} < \sqrt{144} = 12$, $\sqrt{132 + \sqrt{132}} < \sqrt{132 + 12} = 12$,

$\sqrt{132 + \sqrt{132 + \sqrt{132}}} < \sqrt{132 + 12} = 12$, (2).

Prin adunarea inegalităţilor (1) şi (2) obţinem inegalitatea dorită.

**G:625. Să se arate că numărul $A = 9n^4 - 18n^3 + 3n^2 + 6n + 1$ este natural impar și pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.**

**Viorica Dogaru,** Giurgiu

**Rezolvare:** $A = (3n^2 - 3n)^2 - 2(3n^2 - 3n) + 1 = (3n^2 - 3n - 1)^2 \rangle 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $k = n(n-1) \vdots 2$ atunci,

$A = (3 \cdot 2k - 1)^2 = 36k^2 - 12k + 1 = 2(18k^2 - 6k + 1) + 1$ este un număr impar pătrat perfect.

**G:626. Determinați numerele întregi $x_1, x_2, x_3, ......, x_{2015}$ care verifică egalitatea: $x_1^{2015} + 5x_2^{2015} + 5^2 x_3^{2015} + ..... + 5^{2014} x_{2015}^{2015} = 2015 x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{2015}$.**

**Dumitru Săvulescu, Marian Voinea,** București

**Rezolvare:**

Evident, $x_1 \vdots 5 \Rightarrow x_1 = 5x_1'$, $x_1' \in \mathbb{Z}$. Înlocuind pe $x_1$ *cu* $5x_1'$ și apoi împărțind cu 5 se obține :

$5^{2014} (x_1')^{2015} + x_2^{2015} + 5x_3^{2015} + ..... + 5^{2013} x_{2015}^{2015} = 2015 x_1' x_2 \cdot ... \cdot x_{2015}$.

Repetând procedeul pentru $x_2, x_3, ......, x_{2015}$ rezultă că oricare dintre numerele de la $x_1$ la $x_{2015}$ se divid cu 5 la orice putere deci, sunt nule. În concluzie, $x_1 = x_2 = x_3 = ...... = x_{2015} = 0$.

**G:627. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(5x+3)=10x-9$ și $g(x)=2x-15$. Arătați că funcțiile sunt egale.**

**Claudia Popa,** Buzău

**Rezolvare:**

Din 5x+3= t rezultă $x=\dfrac{t-3}{5}$, deci, $f(t)=10\cdot\dfrac{t-3}{5}-9=2t-15$. Așadar, $f(x)=12x-15=g(x)$.

**G:628. Aflați valorile întregi ale lui n pentru care fracția $F=\dfrac{n^3-n^2-48}{n^3+5n^2+18n+24}\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\}$.**

**Nicolae Ivășchescu,** Craiova

**Rezolvare:** $n^3-n^2-48=(n^3-64)-(n^2-16)=(n-4)(n^2+3n+12)$ iar $n^3+5n^2+18n+24=(n^3+8)+(4n^2+16n+16)+n^2+2n==(n+2)(n^2+3n+12)$. Așadar, după simplificare fracția devine $F=\dfrac{n-4}{n+2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{-8,-5,-4,-3,-1,0,1,4\}$.

**G:629. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ sistemul $\begin{cases}x\cdot y+x\cdot z=14\\ x\cdot y+y\cdot z=18\\ x\cdot z+y\cdot z=20\end{cases}$;**

**Mircea Mario Stoica**, Arad

**Rezolvare:**

Prin adunarea ecuațiilor sistemului rezultă $x\cdot y+y\cdot z+x\cdot z=26$. Din fiecare ecuație în parte se va obține $x\cdot y=6,\ x\cdot z=8,\ y\cdot z=12$ iar după înmulțirea ultimelor trei relații se obține $x\cdot y\cdot z=24$.
În final, $S=\{(2;3;4)\}$.

**G:630. Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{3x-2}{7}\right]=x-1149,\ x\in\mathbb{R}$ unde, $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.**

**Doina Stoica, Mircea Mario Stoica,** Arad

**Rezolvare:** Din $x-1149\in\mathbb{Z}$ și $\left[\dfrac{3x-2}{7}\right]\le\dfrac{3x-2}{7}\langle\left[\dfrac{3x-2}{7}\right]+1$ **rezultă** $x\in\mathbb{Z}$ și $x-1149\le\dfrac{3x-2}{7}\langle x-11149+1$. În final, se obține $x\in(2008,5;2010,25]\cap\mathbb{Z}=\{2009;2010\}$.

**G:631. Demonstrați că într-un triunghi cu mijloacele înălțimilor coliniare, suma dintre lungimea razei cercului înscris și lungimea razei cercului circumscris este egală cu semisuma lungimilor a două laturi ale triunghiului.**

**Dumitru Vieriu,** Dorohoi

**Rezolvare:**

Demonstrația are la bază faptul că singurele triunghiuri care au mijloacele înălțimilor lor coliniare sunt cele dreptunghice, conform teoremei liniei mijlocii în triunghi. Fie triunghiul $\Delta\ ABC$ cu $m(A)=90^0$, $BC=a,\ AB=c,\ AC=b.$ Atunci, $r+R=\dfrac{S}{p}+\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{bc}{a+b+c}+\dfrac{a}{2}$. După aducerea la același numitor și din faptul că $a^2=b^2+c^2$ se obține cerința.

$\boxed{G:632}$. **Dacă** $a,\ b,\ c>0$ **si** $n\ge 0$ **demonstrați că** $\dfrac{a^3}{b+nc}+\dfrac{b^3}{c+na}+\dfrac{c^3}{a+nb}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2}{n+1}$ **.**

**Marin Chirciu,** Pitești

**Rezolvare:** Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz: $\dfrac{A^2}{X}+\dfrac{B^2}{Y}+\dfrac{C^2}{Z}\ge\dfrac{(A+B+C)^2}{X+Y+Z}$ , (CS)

unde $A,\ B,\ C\in\mathbb{R}$, $X,\ Y,\ Z>0$ obținem:

$$\sum\frac{a^3}{b+nc}=\sum\frac{a^4}{ab+nac}\overset{(CS)}{\ge}\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(n+1)(ab+bc+ca)}\overset{(1)}{\ge}\frac{a^2+b^2+c^2}{n+1},$$

unde (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a=b=c$.

<u>Nota</u> Pentru $n=2$ se obține **Ucraina 1996.**

$\boxed{G:633}$. **Dacă** $a,\ b,\ c>0$ **să se arate că:** $\dfrac{a^3+b^3}{ab(a+b)+c^3}+\dfrac{b^3+c^3}{bc(b+c)+a^3}+\dfrac{c^3+a^3}{ca(c+a)+b^3}\ge 2$ **.**

**Marin Chirciu,** Pitești

**Rezolvare:** Avem: $a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$,

evident, cu egalitate pentru $a=b$.

Obținem: $\dfrac{a^3+b^3}{ab(a+b)+c^3}+\dfrac{b^3+c^3}{bc(b+c)+a^3}+\dfrac{c^3+a^3}{ca(c+a)+b^3}\ge\sum\dfrac{a^3+b^3}{a^3+b^3+c^3}=\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3}=2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

$\boxed{G:634}$. **În cubul** $ABCDA'B'C'D'$ **se înscrie prisma triunghiulară regulată** $CMNC'M'N'$**, unde** $M\in(AB),N\in(AD)$, $M'\in(A'B'),N'\in(A'D')$. **Determinați raportul volumelor celor două corpuri:** $\dfrac{V_{cub}}{V_{prisma}}$**.**

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București , **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare:** Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele $M\in(AB),N\in(AD)$ astfel încât triunghiul $CMN$ să fie echilateral. Vom determina latura pătratului $ABCD$ în funcție de latura triunghiului $CMN$. Din congruența triunghiurilor $MBC$ și $NDC$ avem figura de mai jos:

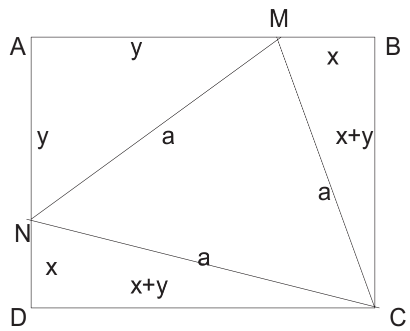
Rezultă: $\begin{cases} y^2+y^2=a^2\Rightarrow y=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\\ (x+y)^2+x^2=a^2\end{cases}$. Înlocuim $y=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ în a doua ecuație și rezultă

$2x^2+ax\sqrt{2}-\dfrac{a^2}{2}=0$. Apoi, $x=\dfrac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Dacă notăm latura pătratului cu $l$, avem

$l=x+y=\dfrac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. Obținem

$\dfrac{V_{cub}}{V_{prisma}}=\dfrac{l^2\cdot l}{a^2\cdot l}=\dfrac{l^2}{a^2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. □



**G:635. Fie ABCD un romb cu AB = 3a, iar AC= 4a, unde $AC \cap BD = \{O\}$ ; în interiorul $\Delta BDC$ se ia un punct E astfel încât $CBE = CDE$ .**
**a) Arătaţi că punctele A, C, E sunt coliniare;**
**b) Pe planul rombului se ridică perpendiculara $ME = a\sqrt{3}$ ; dacă CE = a , aflaţi măsura unghiului diedru dintre $(ABC)$ şi (MBD), precum şi $m(MAC)$.**
**c) Dacă N este mijlocul lui AM, iar $NE \cap MO = \{P\}$, arătaţi că $NE \perp (MBD)$ .**

**Mariana Mitea,** Cugir, Alba

**Rezolvare:**

a) Din $\begin{cases} \sphericalangle ODC \equiv \sphericalangle OBC \\ \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle CBE \end{cases}$ rezultă $\sphericalangle ODE \equiv \sphericalangle OBE$ de unde $\Rightarrow$ ΔOBE =isoscel, deci DE≡BE.

Dacă $[DE] \equiv [BE]$ şi AC este mediatoarea lui $[BD]$, rezultă că E∈AC, deci punctele A, C, E sunt coliniare.

b) Aplic $T_{3\perp}$ şi $\Rightarrow m[\sphericalangle(ABC),(MBD)] = m(\sphericalangle MOE) = 60^0$ iar din ΔMEA$\Rightarrow m(\sphericalangle MAC) = 30^0$ .

c) $\begin{cases} BD \perp MO \\ BD \perp AE \\ MO \cap AE = \{O\} \end{cases} \Rightarrow BD \perp (MEA)$ şi cum NE⊂(MEA) ⇒BD⊥NE (2).

Triunghiul ΔMEA este dreptunghic în E și NE=mediană, $m(\sphericalangle AME) = 60^0$ $\Rightarrow$ ΔMNE echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MEN) = 60^0$ (1).

Din (1) și $m(\sphericalangle MEA) = 90^0$, O∈AE, P∈MO $\Rightarrow m(\sphericalangle OEP) = 30^0$ .

Din ΔPOE cu $m(\sphericalangle E) = 30^0$, $m(\sphericalangle O) = 60^0 \Rightarrow m(\sphericalangle OPE) = 90^0$, deci OP⊥NE (3).

Din (2), (3) şi $BD \cap PO = \{O\} \Rightarrow NE \perp (MBD)$ .

# ▪ Clasa a IX-a

**L:432. Să se demonstreze că nicio putere de număr prim nu poate fi număr perfect. (Numim număr perfect, acel număr întreg care este egal cu suma divizorilor săi din care se exclude el însuși).**

**Lucian Dan Grigore,** Craiova

**Rezolvare:** Fie p număr prim. Atunci, o putere a sa este $p^k$ iar ca să fie număr perfect trebuie ca suma divizorilor săi, S, să fie egal cu el însuși.

$S = 1 + p + p^2 + p^3 + ... + p^{k-1} = \dfrac{p^k - 1}{p-1}$. Dacă p = 2 rezultă p-1 =1 adică $S = p^k - 1 \langle p^k$.

Dacă $p \rangle 2 \Rightarrow p-1 \rangle 1 \Rightarrow S = \dfrac{p^k - 1}{p-1} \langle p^k - 1 \langle p^k$. Prin urmare, $p^k$ nu este perfect.

**L:433. Determinaţi numărul şi poziţia soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, x \in (-\infty, -2] \\ -2, x \in (-2, 1) \\ -x^2 + 6x - 7, x \in [1, \infty) \end{cases}.$$

**Sorina Văcărean,** Cluj-Napoca

**Rezolvare:** Se reprezintă geometric curba $y=f\left(x\right)$ și dreapta $y=m$. Dacă $m\in\left(-\infty,-6\right)$ ecuația are o soluție, $x\in\left(3+2\sqrt{2},\infty\right)$. Dacă $m=-6$ ecuația are două soluții, $x_1=-4$, $x_2=3+2\sqrt{2}$. Dacă $m\in\left(-6,-2\right)$ ecuația are trei soluții, $x_1\in\left(-6,-4\right)$, $x_2\in\left(-4,-2\right)$, $x_3\in\left(5,3+2\sqrt{2}\right)$. Dacă $m=-2$ ecuația are o infinitate de soluții, $x\in\left\{-6\right\}\cup\left[-2,1\right]\cup\left\{5\right\}$. Dacă $m\in\left(-2,2\right)$ ecuația are trei soluții, $x_1\in\left(-4-2\sqrt{2},-6\right)$, $x_2\in\left(1,3\right)$, $x_3\in\left(3,5\right)$. Dacă $m=2$ ecuația are două soluții, $x_1=-4-2\sqrt{2}$, $x_2=3$. Dacă $m\in\left(2,\infty\right)$ ecuația are o soluție, $x\in\left(-\infty,-4-2\sqrt{2}\right)$.

**L:434. Fie $a,b\in\left(0;1\right)$ cu $a+b=1$. Să se arate că $\dfrac{5b+23ba^3}{1-a^6}+\dfrac{5a+23ab^3}{1-b^6}\geq 8$.**

**Marcel Chiriță**, București

**Rezolvare:**

Inegalitatea dată este echivalentă cu $14\left(\dfrac{b}{1-a^3}+\dfrac{a}{1-b^3}\right)-9\left(\dfrac{b}{1+a^3}+\dfrac{a}{1+b^3}\right)\geq 8$. **(*)**

$$\frac{b}{1-a^3}+\frac{a}{1-b^3}=\frac{a+b-a^4-b^4}{(1-a^3)(1-b^3)}=\frac{1-(a^2+b^2)^2+2a^2b^2}{(1-a)(1-b)(1+a+a^2)(1+b+b^2)}=\frac{4ab-2a^2b^2}{ab(a^2b^2+2ab+a^2+b^2+2)}=$$

$=\dfrac{ab(4-2ab)}{ab(a^2b^2+3)}=\dfrac{4-2ab}{a^2b^2+3}$. S-a folosit faptul că $a+b=1$.

Analog ,

$$\frac{b}{1+a^3}+\frac{a}{1+b^3}=\frac{a+b+a^4+b^4}{(1+a^3)(1+b^3)}=\frac{1+(1-2ab)^2-2a^2b^2}{(ab+a+b+1)(a^2b^2-ab^2-ba^2+ab+a^2+b^2-a-b+1)}=...=\frac{2}{ab+2}$$

Notăm $x\ =ab\leq\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$, inegalitatea (*) devine

$$\frac{14(4-2ab)}{a^2b^2+3}-\frac{18}{ab+2}\geq 8\Big|:2\Leftrightarrow\frac{28-14x}{x^2+3}-\frac{9}{x+2}\geq 4.$$

$(28-14x)(x+2)-9(x^2+3)\geq 4(x+2)(x^2+3)\Leftrightarrow\ \ 4x^3+31x^2=12x-5\leq 0\Leftrightarrow$

$(4x-1)(x^2+8x+5)\leq 0$, evidentă deoarece $x^2+8x+5\rangle 0,\ \forall x\rangle 0$. Egalitate pentru $a=b=\dfrac{1}{2}$.

**L:435. Fie numerele reale nenule și pozitive $a,b,c$. Să se demonstreze că $(b+c)^2,(c+a)^2,(a+b)^2$ sunt laturile unui triunghi dacă și numai dacă $a+b+c>\max\left\{\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b},\dfrac{ab}{c}\right\}$.**

**Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

**Rezolvare:** Avem:

$$(b+c)^2<(c+a)^2+(a+b)^2\Leftrightarrow bc<a(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c>\frac{bc}{a}$$

$$(c+a)^2<(a+b)^2+(b+c)^2\Leftrightarrow ac<b(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c>\frac{ac}{b}$$

$$(a+b)^2<(c+a)^2+(c+b)^2\Leftrightarrow ab<c(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c>\frac{ab}{c}.$$

Cum aceste trei condiții trebuiesc îndeplinite simultan rezultă concluzia.

**L:436. Să se determine $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ astfel încât $x-y=x^3-y^3=x^5-y^5$.**

**Ana Cismaru**, Malu Mare, Dolj

**Rezolvare:**

Pentru început este evident că $(x,y)=(t,t), t\in\mathbb{R}$ verifică relațiile date . Fie $x\neq y$. Atunci, din datele problemei obținem $1=x^2+xy+y^2$ și de asemenea $1=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ . Cum $1=(x^2+y^2)\underbrace{\left(x^2+xy+y^2\right)}_{=1}-x^2y^2 \Rightarrow\ x^2+y^2-x^2y^2=1 \Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1)=0 \Rightarrow\ x^2=1$ sau $y^2=1$.

Dar $1=x^2+xy+y^2$, așadar soluțiile sunt: $S=\{(t;t),(-1;0),(-1;1),(0;-1),(0;1),(1;-1),(1;0)\}$.

**L:437. Determinați toate perechile $(x,y)$ de numere întregi astfel încât:**
$x^2y^2-x^2-xy-y^2+x+y=0$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București, **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare:** $x^2y^2-x^2-xy-y^2+x+y=0 \Leftrightarrow (x^2y^2-x^2-y^2+1)-(xy-x-y+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1)-(x-1)(y-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)[(x+1)(y+1)-1]=0$.
Așadar avem două familii de soluții: $(x,y)=(1,a)$ și $(x,y)=(b,1)$, unde $a$ și $b$ sunt numere întregi, precum și soluțiile care provin din $(x+1)(y+1)-1=0$.

Soluțiile ecuației $(x+1)(y+1)-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y+1=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x+1=-1 \\ y+1=-1 \end{cases}$.

sunt $(x,y)=(0,0)$ respectiv $(x,y)=(-2,-2)$.

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+6xyz+3+(x+y+z)^2+2(x+y+z)\ \rangle\ 0.$

Prin urmare, ecuația are soluțiile $(x,y)\in\{(1,a),(b,1),(0,0),(-2,-2)\}$, unde $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}$.□

**L:438. În triunghiul ABC cu notațiile obișnuite și cu $m(A)=90^0$ se știe că a = 2b – c. Să se calculeze $\sin 2B$.**

**Adrian Stan,** Buzău

**Rezolvare**: Din $a=2b-c\,|()^2 \Rightarrow a^2=4b^2-4b+c^2$ (*) și cum într-un triunghi dreptunghic există relația

$a^2=b^2+c^2$, atunci, din (*) rezultă $3b^2-4bc=0\,|:b \Rightarrow b=\dfrac{4c}{3} \Rightarrow a=\dfrac{5c}{3}$.

În triunghiul dreptunghic ABC, avem $\sin B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{5}$ iar $\cos B=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$, atunci,

$\sin 2B=2\sin B\cdot\cos B=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$.

**Variantă (Titu Zvonaru)** Din $a=2b-c \Leftrightarrow 2\sin B=1+\cos B$
$\Leftrightarrow 4\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=2\cos^2\dfrac{B}{2} \Rightarrow tg\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow tgB=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \sin 2B=\dfrac{24}{25}$.

**L:439. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:**
$12\left(\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}\right)\le \mathrm{ctg}\dfrac{A}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{B}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{B}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{A}{2}$.

**Marin Chirciu,** Pitești

**Rezolvare:** În orice triunghi sunt adevărate relațiile: $\sum\sin^2\dfrac{A}{2}=1-\dfrac{r}{2R}$ și $\sum\mathrm{ctg}\dfrac{A}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{4R+r}{r}$.

Inegalitatea se scrie $12\left(1-\dfrac{r}{2R}\right)\le\dfrac{4R+r}{r} \Leftrightarrow 12-\dfrac{6r}{R}\le\dfrac{4R}{r}+1 \Leftrightarrow \dfrac{4R}{r}+\dfrac{6r}{R}\ge 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R^2 - 11Rr + 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R-3r) \geq 0$, evident, deoarece $R \geq 2r$ (inegalitatea lui Euler) și $4R - 3r \geq 5r > 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $R = 2r \Leftrightarrow IO^2 = 0 \Leftrightarrow I \equiv O \Leftrightarrow \Delta ABC$ este echilateral.

**L:440. Dacă ABCD este un patrulater convex care satisface simultan condițiile:**
**i)** $AB + CD \geq BC + AD$; **b) Cercurile construite pe AB și CD ca diametre sunt tangente exterioare. Demonstrați că ABCD este trapez, paralelogram sau romb.**

**Ion Pătrașcu**, Craiova

**Rezolvare:**
Fie M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și $[CD]$ iar P mijlocul lui $[AC]$. Atunci, în triunghiul MNP avem $MN \leq NP + PM = \dfrac{AD + BC}{2}$ (1). Din ii) rezultă că $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $AB + CD = BC + AD$ (3). Cum $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$ (4), atunci din (1) și (4) rezultă $AD \parallel BC$ (5).

Dacă AD e diferit de BC atunci din (5) rezultă că ABCD e trapez. Dacă AD = BC atunci din (5) rezultă că ABCD e paralelogram. Dacă AD = BC și în i) avem egalitate atunci ABCD este romb.

**L:441. În interiorul pătratului ABCD cu latura de lungime 1 cm se consideră un punct M astfel încât** $MBC = MDB = 15^0$. **Să se calculeze lungimea segmentului** $[MC]$.

**Marcel Chiriță**, București

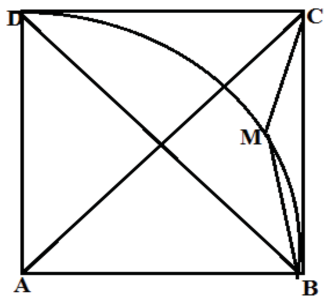
**Rezolvare:**
Fie cercul de centru A și rază 1, $C(A,1)$. Din

$MBC = MDB \Rightarrow M \in C(A,1) \Rightarrow DM = 1$ și $MAB = 30^0$.

Din $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Rightarrow MC = MB$. În

$\Delta\ BAM \Rightarrow MB^2 = AB^2 + MA^2 - 2AB \cdot MA \cdot \cos(MAB)$

Obținem $MB = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MC = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.




**L:442 . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că înălțimea din A este jumătate din înălțimea din C și bisectoarea din A este jumătate din bisectoarea din C .**

**Constantin Apostol**, Rm. Sărat

**Rezolvare:** Vom utiliza notațiile : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, cu $h_a$, lungimea înălțimii din A, cu $h_c$, lungimea înălțimii din C, cu $l_a$, lungimea bisectoarei din A și cu $l_c$, lungimea bisectoarei din C .

Din $S_{ABC} = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ și $h_a = \dfrac{h_c}{2}$, deducem $a = 2c$ (1) .

Știind că lungimea bisectoarei din A verifică egalitatea $l_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$, iar lungimea bisectoarei din C verifică egalitatea $l_c^2 = ab - \dfrac{abc^2}{(a+b)^2}$, iar $l_a = \dfrac{l_c}{2}$, vom avea :

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = 4\left[bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right]$$ și cu relația (1), deducem $$2bc - \frac{2bc^3}{(2c+b)^2} = 4\left[bc - \frac{4bc^3}{(b+c)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2bc - \frac{2bc^3}{(2c+b)^2} = 4bc - \frac{16bc^3}{(b+c)^2}$$, de unde, după simplificare cu $2bc$, $$\Rightarrow \frac{8c^2}{(b+c)^2} - \frac{c^2}{(2c+b)^2} = 1.$$

Se verifică, fără dificultate, că egalitatea are loc dacă $b = c\sqrt{3}$ ; într-adevăr, vom obține : $\frac{8c^2}{(c\sqrt{3}+c)^2} - \frac{c^2}{(2c+c\sqrt{3})} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3+2\sqrt{3}+1} - \frac{1}{4+4\sqrt{3}+3} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = 1$; după raționalizarea numitorilor, $\Rightarrow 8-4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$.

Așadar, laturile triunghiului ABC sunt date de relațiile : $a = 2c$ și $b = c\sqrt{3}$. În plus, numerele a, b și c verifică relația lui Pitagora : $(2c)^2 = (c\sqrt{3})^2 + c^2$; deci triunghiul ABC este dreptunghic, cu $m(A) = 90^0$; din egalitățile $a = 2c$ și $b = c\sqrt{3}$, deducem că $m(C) = 30^0$ și $m(B) = 60^0$.

## ▪ Clasa a X-a

**L:443. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x^2-2x+1} - 3 = 0$.** **Adrian Stan**, Buzău

**Rezolvare**: Evident, $x \geq 1$.

Ecuația dată este echivalentă cu $\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right| + |x-1| - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Rightarrow x \in \{2;5\}$. Din condițiile de existență rezultă $1 \leq x \leq 3$. Așadar, $S = \{2\}$.

**L:444. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p$. Arătați că $\left\{\sum_{k=p}^{n} \sqrt[(k+1)!]{k+1}\right\} \langle \frac{1}{p!}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.**

**Dana Camelia, Ileanan Didu**, Craiova

**Rezolvare:**

Se folosește inegalitatea lui Bernoulli: $\left(1+\frac{k}{(k+1)!}\right)^{(k+1)!} \rangle\ 1+k \Rightarrow 1+\frac{k}{(k+1)!} \rangle \sqrt[(k+1)!]{k+1} \rangle\ 1 \Rightarrow$

$n-p+1+\sum_{k=p}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \rangle \sum_{k=p}^{n} \sqrt[(k+1)!]{k+1} \rangle n-p+1$. Mai trebuie arătat că $\sum_{k=p}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=p}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} =$
$= \sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)!} \langle \frac{1}{p!}$.

**L:445. Fie $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. Arătați că $\sin 2x \langle \frac{1}{2x^2 - x^4}$.**

**Lucian Tuțescu, Lucian Dan Grigore**, Craiova

**Rezolvare:**

Fie $0 \langle x \langle \frac{\pi}{3} \langle \sqrt{2}$. Atunci, $2x^2 - x^4 = x^2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) \rangle 0$. Inegalitatatea dată este echivalentă cu $\frac{2}{\sin 2x} \rangle 4x^2 - 2x^2$ și cum $\frac{2}{\sin 2x} = tgx + ctgx$ rezultă să demonstrăm că $tgx + ctgx = 2x^4 \rangle 4x^2$ ceea ce este adevărat deoarece $tgx + ctgx + x^4 + x^4 \rangle 4\sqrt[4]{tgx \cdot ctgx \cdot x^4 \cdot x^4} = 4x^2$. Egalitatea nu este posibilă căci ar rezultă $tgx = ctgx = x$ care nu e posibilă pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

**L:446. Numerele complexe a, b, c, având modulele egale, sunt afixele unui triunghi isoscel. Arătați că numerele complexe ab, bc, ac sunt de asemenea afixele vârfurilor unui triunghi isoscel.**

**Ana Cismaru,** Malu Mare, Dolj

**Rezolvare:**

Fie $|a|=|b|=|c|=r\rangle 0$ și $A(a),\ B(b),\ C(c)$ cu AB=AC. Rezultă $|a-b|=|a-c|=s\rangle 0$ și $|b-c|=t\rangle 0$.

Atunci, $|ab-bc|=|b||a-c|=rs$, $|bc-ca|=|c||b-a|=rs$ **și** $|ca-ab|=|a||c-b|=rt$ **.**

**L:447. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[5]{x+242}$.**

**Lucian Tuțescu,** Craiova, **Andrei Micu,** Melinești, Dolj

**Rezolvare:** Fie $\sqrt[12]{x}=t,\ t\geq 0$ ,$(x\geq 0)$. Atunci, ecuația dată devine

$$t^6+t^4+t^3=\sqrt[5]{t^{12}+242}\Leftrightarrow t^{15}(t^3+t+1)^5=t^{12}+242$$

$\Rightarrow \left(t^3+t+1\right)^5=\dfrac{1}{t^3}+\dfrac{242}{t^{15}}$. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(t)=\left(t^3+t+1\right)^5$ este strict crescătoare iar funcția $g:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ \ g(t)=\dfrac{1}{t^3}+\dfrac{242}{t^{15}}$ este strict descrescătoare. Atunci, ecuația f(x) = g(x) are cel mult o soluție. Cum t =1 este soluție atunci, x=1 este soluție unică.

**L:448. Fie $x_1,x_2,....,x_{2n+1},\ n\geq 1$, numere strict pozitive astfel încât $x_1+x_2+....+x_{2n+1}=2n+1$.**

**Arătați că $\dfrac{x_1}{nx_1^{\ 2}+n+1}+\dfrac{x_2}{nx_2^{\ 2}+n+1}+....+\dfrac{x_{2n+1}}{nx_{2n+1}^{\ \ 2}+n+1}\leq 1$. În cez avem egalitate ?**

**Lucian Tuțescu, Teodora Rădulescu,** Craiova

**Rezolvare:**

Deoarece $nx_1^{\ 2}+n+1=x_1^{\ 2}+....+x_1^{\ 2}+1+1+...+1\geq(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{(x_1^{\ 2})^n\cdot 1^{n+1}}=(2n+1)\sqrt[2n+1]{x_1^{\ 2n}}$ .

$$\frac{x_1}{nx_1^{\ 2}+n+1}\leq\frac{x_1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x_1^{\ 2n}}}=\frac{1}{2n+1}\cdot\sqrt[2n+1]{x_1}\ ,\ \text{iar}\ \sqrt[2n+1]{x_1}=\sqrt[2n+1]{x_1\cdot 1\cdot 1...\cdot 1}\leq\frac{x_1+1+1+...+1}{2n+1}=\frac{x_1+2n}{2n+1}.$$

Așadar, $\dfrac{x_1}{nx_1^{\ 2}+n+1}\leq\dfrac{x_1+2n}{(2n+1)^2}$**.** Trecând la sumă se obține

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{x_i}{nx_i^{\ 2}+n+1}\leq\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\left[2n+1+(2n+1)2n\right]=1.$$

**L:449. Calculați suma $S=\displaystyle\sum_{i=0}^{2015}\frac{x_i^{\ 3}}{1-3x_i+3x_i^{\ 2}}$ unde $x_i=\dfrac{i}{2015},\ \ i\in\{0;1;2;...;2015\}$.**

**Cristian Moanță, Oana Preda,** Craiova

**Rezolvare**:

Cum $1-3x+3x^2=x^3+(1-x)^3$. Considerăm funcția $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$ , atunci

$$1-x_i=1-\frac{i}{2015}=\frac{2015-i}{2015}=x_{2015-i}\ (*).$$

Rezultă $f(x_i)+f(x_{2015-i})=\dfrac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3}+(1-x_i)^3}+\dfrac{x_{2015-i}^{\ \ \ 3}}{x_{2015-i}^{\ \ \ 3}+(1-x_{2015-i})^3}=1$

Așadar, $S=\displaystyle\sum_{i=0}^{2015}f(x_i)=\sum_{i=0}^{1007}\left(f(x_i)+f(x_{2015-i})\right)=1008.$

**L:450.** **Dacă** $a=\sqrt[2012]{2012}$, $a_0=1, a_{n+1}=a^{a_n}\ (n\geq 0)$ **comparaţi numerele: 2012 şi** $a_{2013}$ **( de exemplu,** $a_3=a^{a^a}$ **, un turn de puteri ale lui** $a$ **).**

**Neagu Mihai,** Rm. Sărat

**Rezolvare :** Fie $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=a^x$. Definim $f^1(x)=f(x)$ şi $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$, unde $f^n(x)=(\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{de\ n\ \text{ori}\ f})(x)$. Observăm că $2012>a$ şi că $f$, respectiv $f^n$ sunt strict crescătoare. Aşadar avem: $2012>a\Rightarrow 2012=f^{2012}(a)>f^{2012}(a)=a_{2013}$. Prin urmare 2012 este mai mare.□

**L:451.** **Fie** $n,\ k\in\mathbb{N},\ n\geq k\geq 1$**. Să se arate că numărul** $x=C_{2n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(C_{n+k-1}^kC_{n+k}^k-C_{n+k-1}^nC_{n+k}^n\right)$ **este pătrat perfect, pentru orice număr natural n,** $n\geq 2$.

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:**

$$C_{n+k-1}^k-C_{n+k-1}^n=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}-\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}=\frac{(n+k-1)!\cdot n-(n+k-1)!\cdot k}{n!k!}=\frac{(n-k)}{(n+k)}\cdot\frac{(n+k)!}{n!\cdot k!}=\frac{(n-k)}{(n+k)}\cdot C_{n+k}^k$$

Atunci, $x=C_{2n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(C_{n+k-1}^k-C_{n+k-1}^n\right)\cdot C_{n+k}^k=C_{2n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n+k}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n-1}C_{n+k}^k\right)^2=\left(C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+...+C_{2n-1}^{n-1}\right)^2\in\mathbb{N}$,

deoarece $C_{2n-1}^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n+k}=\frac{(2n-1)!}{n!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{(n+1)(n+2).....(n+n-1)}=\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!}=1$.

**L:452.** **Să se demonstreze inegalitatea:**

$$\sqrt{1+C_{n-1}^1}+\sqrt[3]{1+C_{n-1}^2}+...+\sqrt[n]{1+C_{n-1}^{n-1}}<\frac{2^n+n^2-2n-1}{n}, n\in N, n\geq 2.$$

**Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**Rezolvare**: Conform inegalităţii lui Bernoulli: $(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x, \forall x>-1, \forall\alpha\in(0,1)$, cu egalitate pentru x = 0, avem: $(1+C_{n-1}^{k-1})^{\frac{1}{k}}<1+\frac{C_{n-1}^{k-1}}{k}=1+\frac{C_n^k}{n}\Leftrightarrow\sqrt[k]{1+C_{n-1}^{k-1}}\leq 1+\frac{C_n^k}{n}$, şi apoi prin însumare, rezultă:

$$\sum_{k=2}^n\sqrt[k]{1+C_{n-1}^{k-1}}<\sum_{k=2}^n\left(1+\frac{C_n^k}{n}\right)=n-1+\frac{\sum_{k=2}^nC_n^k}{n}=n-1+\frac{2^n-n-1}{n}=\frac{2^n+n^2-2n-1}{n}, \text{ c.c.t.d.}$$

**L:453.** **În triunghiul ABC, mediana** $[AM]$, $(M\in[BC])$**, are mijlocul D, iar perpendiculara pe mijlocul segmentului** $[DM]$ **trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC. Să se arate că** $m(BDC)=90^0$**.**

**Marcel Chiriţă**, Bucureşti

**Rezolvare:**

Se alege ca origine a unui sistem de axe XOY, punctul M, (MC ca axa OX, şi perpendiculara pe BC în M va fi axa OY. Atunci, $M(0;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $A(a;b)$, $D(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$, $N(\frac{a}{4},\frac{b}{4})$.

A arăta că $m(BDC)=90^0\Leftrightarrow BD\perp CD\Leftrightarrow m_{BD}\cdot m_{CD}=-1$. Cum $m_{BD}=\frac{b}{a+2}$, $m_{CD}=\frac{b}{a-2}\Rightarrow$ $BD\perp CD\Leftrightarrow a^2+b^2=4$.

Atunci, $m_{AM}=\frac{b}{a}$, $m_{HN}=-\frac{a}{b}$ şi deci dreapta HN are ecuaţia $y-\frac{b}{4}=-\frac{a}{b}(x-\frac{a}{4})$. (1)

Punctul H se află la intersecția înălțimii $[AQ]$ de ecuație x = a și a înălțimii $[BH]$. Din

$m_{AC} = \dfrac{b}{a-1}$, $m_{BH} = \dfrac{1-a}{b} \Rightarrow$ ecuația dreptei BH este $y = \dfrac{1-a}{b}(x+1)$.

Atunci, $H: \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{1-a}{b}(x+1) \end{cases} \Rightarrow H(a; \dfrac{1-a^2}{b})$. Înlocuind coordonatele lui H în ecuația (1)

obținem $a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow m(BDC) = 90^0$.

**L:454. Dacă $a, b, c > 0$ cu $abc = 1$ și $-9 \le n \le 4$, demonstrați că: $a+b+c+\dfrac{n}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{n+9}{3}$.**

**Marin Chirciu,** Pitești

**Rezolvare:** Dacă $-\infty \langle\ n \le \dfrac{9}{2}$ : deoarece $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$, este suficient să arătam că

$$\sum a + \frac{n}{\sum ab} \ge \sum a + \frac{3n}{\left(\sum a\right)^2} = n\left(\frac{\sum a}{9} + \frac{\sum a}{9} + \frac{3}{\left(\sum a\right)^2}\right) + \frac{(9-2n)\sum a}{9} \ge n + \frac{9-2n}{3} = \frac{n+9}{3}.$$

Dacă $n < 0$: deoarece $ab+bc+ca \ge 3$, avem $\sum a + \dfrac{n}{\sum ab} \ge \sum a + \dfrac{n}{3} \ge 3 + \dfrac{n}{3} = \dfrac{n+9}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

## ▪ Clasa a XI-a

**L:455. Fie $(a_n)_{n\ge1} \in \mathbb{R}$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + (n+1)b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b \rangle 1$. Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n\ge1}$ și calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(b-1)^2 \cdot a_n\right]^{\sin\frac{1}{n}}$.**

**Stelian Piscan,** Giurgiu

**Rezolvare:** Din $a_{n+1} - a_n = (n+1)b^n$, dând lui n valori de la 1 la n-1 și adunând relațiile se obține

$a_n = a_1 + 2b + 3b^2 + ..... + nb^{n-1} = 1 + 2b + 3b^2 + ..... + nb^{n-1} = \dfrac{nb^{n+1} - (n+1)b^n + 1}{(b-1)^2}$. S- a folosit formula

$1 + 2x + 3x^2 + .... + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, n \ge 1, x \ne 1.$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(b-1)^2 \cdot a_n\right]^{\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[nb^{n+1} - (n+1)b^n + 1\right]^{\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[nb^n(b-1-\frac{1}{n}+\frac{1}{nb^n})\right]^{\sin\frac{1}{n}} = b \text{ ,unde}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sin\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)\cdot\sin\frac{1}{n}} = 1,\ \lim_{n\to\infty} b^{n\cdot\sin\frac{1}{n}} = b^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = b,\ \lim_{n\to\infty}\left(b-1-\frac{1}{n}+\frac{1}{nb^n}\right)^{\sin\frac{1}{n}} = (b-1)^0 = 1$$

**L:456. Considerăm șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+na_n}, n \ge 1$.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a_k}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București , **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare.** Se arată prin inducţie că $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Apoi, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Astfel că, $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Deci, $\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Aşa că, $a_n = \frac{2}{n(n-1)+2}$, şi urmează $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2$.

Din $\frac{1}{a_k} = 1 + \frac{k(k-1)}{2}$ avem: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[1 + \frac{k(k-1)}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{k^2(k-1)}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

$= \frac{1}{2}\left[n(n+1) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$, şi rezultă uşor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k} = \frac{1}{8}$.

**L:457. Să se calculeze:** $\lim_{x\to 1} \frac{tg\sqrt{4x+2} - tg\sqrt{2x+4}}{tg\sqrt{2x+1} - tg\sqrt{x+2}}$. **Adrian Stan,** Buzău

**Rezolvare:** $\lim_{x\to 1} \frac{tg\sqrt{4x+2} - tg\sqrt{2x+4}}{tg\sqrt{2x+1} - tg\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\sqrt{4x+2} - \sqrt{2x+4})}{\cos\sqrt{4x+2} \bullet \cos\sqrt{2x+4}} \bullet \frac{\cos\sqrt{2x+1} \cdot \cos\sqrt{x+2}}{\sin(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2})} =$

$= \frac{\cos^2\sqrt{3}}{\cos^2\sqrt{6}} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x+2} - \sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}} = \frac{\cos^2\sqrt{3}}{\cos^2\sqrt{6}} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{(4x+2-2x-4)\cdot(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2})}{(2x+1-x-2)\cdot(\sqrt{4x+2} + \sqrt{2x+4})} =$

$= \frac{\cos^2\sqrt{3}}{\cos^2\sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{x-1} = \frac{\cos^2\sqrt{3}}{\cos^2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2$. S-a folosit formula $tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

**L:458. Calculaţi** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{i} \left[\sqrt{(5k-4)(5k+1)}\right]}{\sum_{k=2}^{n} k^2}$. **Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

**Rezolvare:** Pornind de la $(5k-2)^2 \le (5k-4)(5k+1) < (5k-1)^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, avem $5k-2 \le \sqrt{(5k-4)(5k+1)} < 5k-1$, de unde $\left[\sqrt{(5k-4)(5k+1)}\right] = 5k-2$. Astfel,

$\sum_{k=2}^{i}\left[\sqrt{(5k-4)(5k+1)}\right] = \sum_{k=2}^{i}(5k-2) = \frac{5i^2+i-6}{2}$. Numărătorul este $\sum_{i=2}^{n} \frac{5i^2+i-6}{2} = \frac{n(n-1)(5n+14)}{6}$.

Limita cerută este $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+9n^2-14n}{2n^3+3n^2+n-6} = \frac{5}{2}$.

**L:459. Determinaţi toate tripletele $(x, y, z)$ de numere reale astfel încât :**

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}} = \log_2(4-y), \quad \frac{y}{\sqrt{y^2-2y+4}} = \log_2(4-z); \quad \frac{z}{\sqrt{z^2-2z+4}} = \log_2(4-x).$$

**Neagu Mihai,** Rm. Sărat

**Rezolvare** : Se observă că $x, y, z \in (-\infty, 4)$. Prima relaţie se rescrie ca $y = 4 - 2^{\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}}$.

Analog, celelalte. Se ia funcția $f(t)=4-2^{\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+4}}}$, $t\in(-\infty;4)$ care are derivata negativă prin urmare f este descrescătoare. Deci, $f(f(f(t)))$ este descrescătoare $\forall t\in(-\infty,4)$.
Deasemeni din ipoteză avem $f(x)=y; f(y)=z; f(z)=x \Rightarrow f(f(f(x)))=x$.

Vom arăta că din $f(f(f(x)))=x$ rezultă $f(x)=x$. Notăm $f^3(x)\overset{not}{=}f(f(f(x)))$, care este descrescătoare.
Presupunem $f^3(x)=x$ și $f(x)<x$. Avem $f(x)=f(f^3(x))=f^3(f(x))>f^3(x)=x$, contradicție!

Similar din $f(x)>x$ rezultă contradicție! Deci $f(x)=x$. Rezultă $x=4-2^{\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}}$, apoi din faptul că

$4-x$ este descrescătoare și că $2^{\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}}$ este crescătoare $\forall x\in(-\infty,4)$ rezultă că $f(x)=x$ are cel mult o soluție. Observăm că $f(2)=2$. Așadar $(x,y,z)=(2,2,2)$.□

**$\boxed{\text{L:460}}$. Fie $ABC$ un triunghi, $AD$ înălțimea din $A$, $E$ și $F$ mijloacele laturilor $AC$, respectiv $AB$. Pentru un punct oarecare $P$ din planul triunghiului $ABC$, fie $Y$ și $Z$ simetricele acestuia față de punctele $E$, respectiv $F$. Dacă $P'$ este mijlocul lui $DP$ și $M=BY\bigcap CZ$, arătați că dreapta $MP'$ trece printr-un punct fix.**

**Neculai Stanciu**, Buzău, **și Titu Zvonaru,** Comănești

**Rezolvare:** Alegem un sistem ortogonal de coordonate astfel încât $D(0,0), A(0,a), B(b,0), C(c,0)$.

Rezultă că $E\left(\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right)$ și $F\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$. Fie $P'\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$ și deducem ușor că $Y(c-p,a-q), Z(b-p,a-q)$.

Să presupunem deocamdată că $a\neq q, p\neq b-c, p\neq -b+p$.

Ecuația dreptei $BY$ este $\frac{x-b}{c-p-b}=\frac{y}{a-q}\Leftrightarrow x(a-q)+y(p+b-c)-ab+bq=0$, (1).

iar ecuația dreptei $CZ$ este $x(a-q)+y(p-b+c)-ac+cq$ ,(2)

Deoarece $b\neq c\Rightarrow p+b-c\neq p-b+c$, sistemul format din ecuațiile (1) și (2) are soluție; obținem $M\left(\frac{b+c-p}{2},\frac{a-q}{2}\right)$. Pentru a nu mai analiza cum arată ecuațiile dreptelor $BY$ și $CZ$ în cazurile $a=q$ sau $p=b-c$ sau $p=-b+c$, e mai ușor să verificăm că punctul $M$ se află pe dreptele $BY$ și $CZ$.

$B,Y,M$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & 0 & 1\\ c-p & a-q & 1\\ \frac{b+c-p}{2} & \frac{a-q}{2} & 1\end{vmatrix}=0$, adevărat deoarece ultima linie este jumătate din suma primelor două linii. Analog rezultă că și punctele $C,Z,M$ sunt coliniare.

Cum $P'\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$ și $M\left(\frac{b+c-p}{2},\frac{a-q}{2}\right)$, observăm că mijlocul segmentului $[MP']$ are coordonatele $\left(\frac{b+c}{4},\frac{a}{4}\right)$ și deci este un punct fix.

**$\boxed{\text{L:461}}$. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-2b)\left(\frac{a}{a-b}\right)^x+(2a-b)\left(\frac{b}{a-b}\right)^x-a-b$**

**cu $a\rangle 2$, $b\rangle 0$. Să se arate că f nu este injectivă și să se rezolve ecuațiile:**

$(a-2b)\cdot a^x+(2a-b)\cdot b^x=(a+b)\cdot(a-b)^x$ **în** $\mathbb{R}$ **și** $\frac{a^n+b^n}{a^n+(a-b)^n}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$ **în** $\mathbb{N}$.

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:**

Din $f(1)=f(3)=0$ rezultă că f nu este injectivă iar soluțiile primei ecuații sunt soluțiile ecuației $f(x)=0 \Rightarrow x\in\{1;3\}$. Dacă ecuația ar mai admite și o altă soluție atunci, conform consecinței teoremei lui Rolle, ar însemna ca ecuația $f^{I}(x)=0$ să admită două soluții ceea ce nu este valabil. Singura soluție a ecuației $f^{I}(x)=0$ este $x=\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{b-2a}{a-2b}\cdot\frac{\ln\frac{b}{a-b}}{\ln\frac{a}{a-b}}\right)$. Pentru x = n, ecuația dată este echivalentă cu $f(n)=0$ care are de asemenea aceleași soluții, $x\in\{1;3\}$.

$\boxed{\text{L:462}}$. **Un determinant de ordinul trei are valoarea d. Să se calculeze semnul lui d știind că elementele de pe diagonala principală sunt egale cu $\frac{1}{2}$, iar suma elementelor de pe fiecare linie și fiecare coloană este egală cu 1.**

**Constantin Dinu,** Buzău

**Rezolvare**: Fie $d=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & x & y\\ z & \frac{1}{2} & t\\ u & v & \frac{1}{2}\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{2}\\ z+t=\frac{1}{2}\\ u+v=\frac{1}{2}\end{cases}$ $si$ $\begin{cases} z+u=\frac{1}{2}\\ x+v=\frac{1}{2}\\ y+t=\frac{1}{2}\end{cases}$. În final, $d=3x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{L:463}}$. **Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$, de forma $X=\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, care verifică egalitatea** $X^2+X=\frac{1}{4}I_2.$

**Constantin Dinu**, Buzău

**Rezolvare**: $X^2+X=\frac{1}{4}I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy\\ -2xy & x^2-y^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+x=\frac{1}{4}\\ 2xy+y=0\end{cases}$.

Așadar, $x=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2},\ y=0$.

$\boxed{\text{L:464}}$. **Dacă $A\in M_2(R)$ să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\det(A+nI_2)}{\det(A^2+nI_2)}\right]^n=e^{Tr(A)-Tr^2(A)+2\det(A)}$, unde Tr(A) reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A, det(A), determinantul matricei A.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**Rezolvare:** Din relația $\det(A-xI_2)=x^2-Tr(A)x+\det(A)$ rezultă $\det(A+nI_2)=n^2+Tr(A)\cdot n+\det(A)$, (1), și $\det(A^2+nI_2)=n^2+Tr(A^2)\cdot n+\det(A^2)$, (2).

Se verifică uşor că are loc relaţia: $Tr(A^2) = Tr^2(A) - 2\det(A)$. (3)

Din faptul că $\det(A^2) = \det^2(A)$ şi prin intermediul lui (3) relaţia (2) se scrie:

$\det(A^2 + nI_2) = n^2 + [Tr^2(A) - 2\det(A)]n + \det^2(A)$. (4)

Cu notaţiile Tr(A) = t şi det(A) = d limita dată se scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\det(A+nI_2)}{\det(A^2+nI_2)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+tn+d}{n^2+(t^2-2d)n+d^2}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+tn+d}{n^2+(t^2-2d)n+d^2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(t-t^2+2d)n^2+dn-d^2n}{n^2+(t^2-2d)+d^2}}=e^{t-t^2+2d}.$$

**L:465. Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că dacă exista $x\in[a,b]$ astfel încât $f(x)-f'(x)\notin\{f(a);f(b)\}$ , atunci $\ln\left(\left|f'(x)-f(x)+f(a)\right|\right)-\ln\left(\left|f'(x)-f(x)+f(b)\right|\right)\neq a-b$. Demonstrați că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.**

**Florin Stănescu,** Găești, Dâmbovița

**Rezolvare:** Construim $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R},\varphi(x)=\left(f(x)-f(a)\right)e^{b-x}+\left(f(b)-f(x)\right)e^{a-x}$ Avem $\varphi(a)=\varphi(b)=f(b)-f(a)$, astfel din teorema lui Rolle există $c_1\in(a,b)$ astfel încât $\varphi'(c_1)=0\Rightarrow$ $e^{b-c_1}\left(f'(c_1)-f(c_1)+f(a)\right)+e^{a-c_1}\left(-f'(c_1)+f(c_1)-f(b)\right)=0\Rightarrow e^{a-b}\left(f'(c_1)-f(c_1)+f(b)\right)=$ $f'(c_1)-f(c_1)+f(a)$. Presupunem prin absurd că $f'(c_1)-f(c_1)+f(b)\neq 0$. Atunci, și $f'(c_1)-f(c_1)+f(a)\neq 0$, deci

$$e^{a-b}=\frac{f'(c_1)-f(c_1)+f(a)}{f'(c_1)-f(c_1)+f(b)}>0\Rightarrow\left|\frac{f'(c_1)-f(c_1)+f(a)}{f'(c_1)-f(c_1)+f(b)}\right|=\frac{f'(c_1)-f(c_1)+f(a)}{f'(c_1)-f(c_1)+f(b)}\Rightarrow$$

$$a-b=\ln\left(\left|\frac{f'(c_1)-f(c_1)+f(a)}{f'(c_1)-f(c_1)+f(b)}\right|\right),$$ contradicție cu enunțul. Astfel,

$f'(c_1)-f(c_1)+f(b)=0\Rightarrow f'(c_1)-f(c_1)+f(a)=0\Rightarrow f(a)=f(b)$, deci conform teoremei lui Rolle există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

## ▪ Clasa a XII-a

**L:466. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $2x^5+5x^4-5x^2+1=0$; b) $x^6+3x^5-5x^3+3x-1=0$.**

**Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:**

a) Observăm că $-\frac{1}{2}$ este soluție, prin urmare, f este divizibil cu $x+\frac{1}{2}$, deci $f\,\vdots\,(2x+1)$, de unde rezultă că $f(x)=(2x+1)(x^4+2x^3-x^2-2x+1)$. Cum $x^4+2x^3-x^2-2x+1=(x^2+x)^2-2(x^2+x)+1=(x^2+x-1)^2$ rezultă că ecuația f(x) = 0 are soluțiile $x_1=-\frac{1}{2},x_{2,3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_{4,5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Se folosește faptul că dacă notăm $g(x)=x^6+3x^5-5x^3+3x-1$ atunci, $g^I(x)=3f(x)$.

**L:467. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante care verifică egalitatea: $f(x^{2016}+x+1)=f(x)\cdot g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că gradul polinomului f este par.**

**Dumitru Săvulescu**, București

**Rezolvare:** Presupunem că gradul lui f este impar. Atunci rezultă că f are cel puțin o rădăcină reală. Fie " r " cea mai mare astfel de rădăcină. Atunci, $f(r^{2016}+r+1)=f(r)\cdot g(r)=0\Rightarrow r^{2016}+r+1$ este de asemenea rădăcină a lui f. Atunci, obligatoriu gradul lui f trebuie să fie par.

**L:468. a) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^{2n+1}-x^{2n}-x^{2n-1}-...-x^2-x-2=0,\ n\in\mathbb{N}^*$.**
**b) Arătați că pentru $n\in\mathbb{N}^*$ există egalitățile:**

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}+\sin\frac{3\pi}{2n+1}+\sin\frac{5\pi}{2n+1}+....+\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\sin\frac{6\pi}{2n+1}+....+\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+....+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+....+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

**Ionel Tudor, Călugăreni,** Giurgiu

**Rezolvare:**

a) Ecuația dată este echivalentă cu $(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+...+x+1)-(x^{2n}+x^{2n-1}+...+x+1)=0$ sau $(x-2)(x^{2n}+x^{2n-1}+...+x+1)=0\Rightarrow$ $x=2$ sau $x^{2n}+x^{2n-1}+...+x+1=0\Leftrightarrow x^{2n+1}-1=0\Rightarrow$ $x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n+1},\ k=\overline{1,2n}$. Altfel, $x_1=2$ și $x_{k+1}=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n+1},\ k=\overline{1,2n}.$

b) Scriind prima relație a lui Viete pentru ecuația de la a) și anume, $x_1+x_2+...+x_{2n+1}=1$ sub forma

$$2+\sum_{k=1}^{2n}x_{k+1}=1 \text{ sau } \sum_{k=1}^{2n}\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=-1\Rightarrow\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\cdot\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}=-1\Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=-1 \text{ și } \sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}=0.\quad (*)$$

Mai departe se folosește faptul că

$$\sin\frac{(2n+2i)\pi}{2n+1}=\sin\left[\pi+\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\right]=-\sin\frac{(2i-1)\pi}{2n+1},\ \forall i=\overline{1,n},$$

$$\cos\frac{(2n+2j)\pi}{2n+1}=\cos\left[\pi+\frac{(2j-1)\pi}{2n+1}\right]=-\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n+1},\ \forall j=\overline{1,n},$$ și înlocuind în (*) se obțin egalitățile cerute.

**L:469. Fie $F:[0;1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=e^{-x^2}$.**

**a) Știind că $F(0)=0$, să se arate că $\int_0^1 F(x)dx\le\frac{1}{2}$;** **b) Să se arate că $\frac{1}{e}\langle\int_0^1 f(x)dx\langle\frac{\pi}{4}$.**

**Adrian Stan ,** Buzău

**Rezolvare:**

a) Fie $g(x)=F(x)-x.$ $g^I(x)=F^I(x)-x^I=f(x)-1\le0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ g este descrescătoare pe $[0;1]$.

Atunci, $g(1)\le g(x)\le g(0)\Rightarrow F(x)-x\le F(0)\Rightarrow F(x)\le x$. Așadar, $\int_0^1 F(x)dx\le\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$;

b) Cum $-x^2\ge-1\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx\ge\int_0^1 e^{-1}dx=\frac{1}{e}$, iar din $e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{-x^2}\le\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

**L:470. Calculați $I=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln\left[(1+t)(1+t^4)\right]dt$.**

**Răzvan Drînceanu, Gabriela Drînceanu ,** Craiova

**Rezolvare:** Observăm că $I=I_1+I_2$ unde $I_1=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln(1+t)dt$ și $I_2=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln(1+t^4)dt$.

Avem $I_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln(1+t^2)\right)^I\cdot\ln(1+t)dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\ln(1+t)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+t^2)\cdot\frac{1}{1+t}dt=$

$\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+t^2)\cdot\frac{1}{1+t}dt.$ Din $t^2=x\Rightarrow I_2=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln(1+t^4)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}dx$. Așadar, $I=\frac{1}{2}\ln^2 2.$

**L:471**. **Calculaţi:** $\int_0^a \frac{dx}{1+a^{bx-\frac{ab}{2}}}dx,$ **unde** $a>0, a\neq 1, b\in R^*$ **.**

(În legătură cu problema 25432/GM/11/2005, Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran, Arad}

**Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**Rezolvare**: Cu schimbarea de variabilă a – x = t, integrala dată I, devine:

$$I=\int_a^o \frac{-dt}{1+a^{ab-bt-\frac{ab}{2}}}=\int_0^a \frac{dx}{1+a^{-bx+\frac{ab}{2}}}=\int_0^a \frac{a^{bx-\frac{ab}{2}}}{1+a^{bx-\frac{ab}{2}}}dx, \qquad 2I=I+I=\int_0^a \frac{dx}{1+a^{bx-\frac{ab}{2}}}+\int_0^a \frac{a^{bx-\frac{ab}{2}}}{1+a^{bx-\frac{ab}{2}}}dx=\int_0^a dx=a, \qquad I=\frac{a}{2}.$$

Observaţie: Pentru a = 3, b = 2, se obţine problema 25432/GM/11/2005.

**L:472**. **Dacă** $f, f', f''$ **şi** $f'''$ **sunt funcţii continue pe** $[0,4]$ **astfel încât** $f(4)=3, f'(4)=2, f''(4)=1$ **şi** $\int_0^4 f(x)dx=5$**, calculaţi:** $\int_0^4 x^3 f'''(x)dx$ **.**

**D.M. Bătineţu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare**: Se aplică integrarea prin părţi de trei ori.

$$\int_0^4 x^3 f'''(x)dx = x^3 f''(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 3x^2\cdot f''(x)dx = x^3 f''(x)\Big|_0^4 - 3x^2\cdot f'(x)\Big|_0^4 + \int_0^4 6x\cdot f'(x)dx$$

$$= x^3 f''(x)\Big|_0^4 - 3x^2\cdot f'(x)\Big|_0^4 + 6x\cdot f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 6\cdot f(x)dx = 64-48\cdot 2+6\cdot 4\cdot 3-30=10.$$

**L:473**. **Fie** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **și legea de compoziție** $x*y=axy+bx+by+c,$ **definită pe** $\mathbb{R}$**, pentru orice** $x,y\in\mathbb{R}$ **.**

**a) Determinați b și c în funcție de a astfel încât - 4 să fie element neutru;**

**b) Cu b și c astfel determinați, arătați că legea este asociativă. Aflați apoi a, știind că simetricul lui – 6 este - 6;**

**c) Pentru a, b, c determinați anterior, calculați 1*2*3*....*n,** $n\in\mathbb{N}$.

**Constantin Dinu,** Buzău

**Rezolvare:**

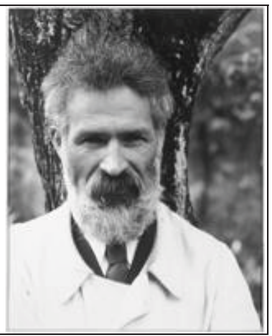
a) Se verifică comutativitatea și din $x*(-4)=-4 \Rightarrow b=4a+1,\ si\ c=16a+4$ ;

b) $x*y=axy+(4a+1)x+(4a+1)y+16a+4$ și se verifică asociativitatea;

c) Din a), b) rezultă că a =1, b= 5, c=20, de unde $x*y=(x+5)(y+5)-5 \Rightarrow 1*2*3*....*n=\frac{(n+5)!}{5!}-5$ .

„**Trebuie să încerci necontenit să urci foarte sus, dacă vrei să vezi foarte departe...** ”

**Constantin Brâncuși (1876-1957)**



**„Aceluia care cunoaște toate răspunsurile,**
**nu i s-au pus toate întrebările".**
**Confucius (550- 470 î.Hr.)**

# 4. Probleme propuse

## ▪ Clasa a V-a

**G: 636.** Determinați mulțimile A, B și C știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $A\cup B\cup C=\{2008;2009;2010;2011\}$; 2) $A\setminus B=\{2008;2009\}$;

3) $A\setminus C=\{2009;2010\}$; 4) $B\setminus C=\{2010;2011\}$.

**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G: 637.** Găsiți numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab}=a^2+b^3$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 638.** Un număr zecimal este mai mic decât 0,03 şi are 4 zecimale. Zecimalele a doua şi a patra, diferite între ele, au suma de trei ori cât diferenţa lor (în ordinea dată). Aflaţi numărul.

**Ion Stănescu**, Buzău

**G: 639.** Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $a+b^c+c^b=\overline{cc}$, cu a,b,c prime, distincte.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 640.** Să se determine perechile $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ știind că $\overline{0,xx(y)}-\overline{0,yy(x)}=0,01(5)\cdot 7$.

**Adrian Stan**, Buzău

**G: 641.** a) Arătați că există o infinitate de triplete de numere naturale $(x;y;z)$ pentru care numărul $3^x+3^y+3^z$ este pătrat perfect.

b) Arătați că nu există niciun triplet de numere naturale $(x;y;z)$ pentru care numărul $6^x+6^y+6^z$ să fie pătrat perfect.

**Marin Chirciu**, Pitești

**G: 642.** Să se arate că dacă numărul $x_n=3^{2016}+3^{2017}+3^{2018}+3^{2019}+3^n$, $n\in\mathbb{N}$ este pătrat perfect, atunci $n\in\{4k,4k+2\}$, $k\in\mathbb{N}$. Să se dea exemplu de două pătrate perfecte de forma $x_n$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

**G: 643.** a) Aflați restul împărțirii numărului 2022 la 49;

b) Scrieți numărul 2122 ca sumă a șase pătrate perfecte distincte.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

**G: 644.** Determinați $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $x^3+25=333....33$. ( n cifre de 3).

**Luiza Dumitrescu**, Craiova

**G: 645.** Verificați dacă suma pătratelor primelor 2017 numere naturale prime este număr prim.

**Ciuperceanu Marian**, Craiova

**G: 646.** Aflaţi toate numerele naturale $x,y,z$ care verifică ecuaţia $2^x+4^y+6^z=13$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**G: 647.** Aflați $x\in\mathbb{N}$ știind că $x^x+(x+1)^x+(x+2)^x+(x+3)^x=54$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 648.** Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $xy+p^2=qy^2$ unde p şi q sunt numere prime.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G: 649.** Fie $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{2x}+2^{3y}=2^{5z}$. Arătați că $x+y+z\geq 25$.

**Marian Voinea**, București

# ▪ Clasa a VI-a

**G: 650**. Fie numărul $N = \underbrace{3333.....3}_{n\ de\ 3}$. Aflați numărul natural x astfel încât $x^2 + 8 = N$.

elevă **Denisa Draghia**, **Nicolae Tomescu**, Craiova

**G: 651**. Verificați dacă numărul $2009 \cdot 2012 \cdot 2015 \cdot 2018 + 81$ este pătrat perfect.

**Marian Ciuperceanu** , Craiova

**G: 652**. Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ îndeplinesc egalitatea $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc} + \overline{ad}$?

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**G: 653**. Arătați că numărul $\overline{\underbrace{1111....1}_{2017\ de 1}2\underbrace{111...1}_{2017\ de 1}}$ se divide cu 121.

**Lucian Tuțescu, Dan Lucian Grigore**, Craiova

**G: 654**. Se consideră fracția $F = \frac{(n+3)^3 - 10n}{303}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că fracția se simplifică pentru orice n număr natural;
b) Să se determine n pentru care fracția F este echiunitară.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G: 655**. Rezolvaţi, în $\mathbb{Z}$, ecuaţia $2xy - x + 6y = 1$. **Ion Stănescu**, Buzău

**G: 656**. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + 3y + 10 = xy + 7x$. **Adrian Stan**, Buzău

**G: 657**. Dacă numărul a are 2n cifre toate egale cu 1, iar numărul b are n cifre toate egale cu 2, atunci numărul $\frac{a-b}{9}$ este un pătrat perfect, $\forall n \geq 1$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G: 658**. Fie $A = \left(1 - \frac{2016}{2016+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2016}{2016+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2016}{2016+3}\right) \cdot .......... \cdot \left(1 - \frac{2016}{2016+2015}\right)$ și

$B = (1+2016) \cdot \left(1 + \frac{2016}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2016}{3}\right) \cdot .......... \cdot \left(1 + \frac{2016}{2015}\right)$. Calculați $A \cdot B$.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 659**. Rezolvați în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2017}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 660**. Demonstrați că numărul $A = \frac{(2!)!}{(2!)^{1!}} + \frac{(3!)!}{(3!)^{2!}} + \frac{(4!)!}{(4!)^{3!}} + \frac{(5!)!}{(5!)^{4!}}$ este un număr natural, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...... \cdot n$.

**Dumitru Vieriu**, Dorohoi

# ▪ Clasa a VI-a

**G: 661**. Determinați mulțimile $X, Y, Z$ știind că satisfac simultan condițiile:

1) $X \cup Y \cup Z = \{1;3;5;7;9\}$; 2) $(X \setminus Y) \times (Y \setminus Z) = \{(1;5),(3;5),(1;9),(3;9)\}$;

3) $(Y \setminus X) \times (X \setminus Z) = \{(7;5),(9;5)\}$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

**G: 662**. Rezolvați în numere întregi ecuația $y^2 + 2y = x^4$. **Anicuța Bețiu**, Craiova

**G: 663.** a) Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E=\left(x^4-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

b) Arătați că există $n\in\mathbb{N}^*$, pentru care $n^n=4095,5^2+63,5^2+63,5$ .

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G: 664.** Dacă $a^8+\frac{1}{a^8}=2,\ a\in\mathbb{R}^*$ , determinați-l pe a.

**Marian Ciuperceanu**, Craiova

**G: 665.** Să se arate că $x^{2016}+x^{2014}-x^{1008}-x^{1007}+1\ \rangle\ 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

**Adrian Stan**, Buzău

**G: 666.** Rezolvați în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuația: $\frac{\left(\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}+\sqrt{9xy}-\sqrt{xy}\right)^2}{16}=2017,\ x,y\in\mathbb{R}_+$.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 667.** Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care avem:

a) $\sqrt{\left(\overline{aa}+\overline{bb}\right)\left(a+b\right)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{aa}$; b) $\sqrt{\left(\overline{aa}+\overline{bb}\right)\left(a+b\right)+\overline{aa}\cdot b}=\overline{bb}$.

**Nicolae Ivășchescu**, Canada

**G: 668.** Un teren trebuie acoperit cu gazon, al cărui preț este de 1,5 lei/$m^2$. Terenul este format din trei triunghiuri dreptunghice, în care se știe că o catetă, respectiv ipotenuza sunt, fiecare, dublul a două numere naturale consecutive, suma acestor numere consecutive fiind un pătrat perfect de doua cifre.

**Victoria Popa**, Timișoara

**G: 669.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases}x^2+4y=-7\\ y^2+2x=2\end{cases}$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**G: 670.** Să se determine cardinalul mulţimii A = $\{\overline{xyz}\ /\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=1\}$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G: 671.** Fie triunghiul ABC astfel încât $\sin A\geq\frac{b^2+c^2}{2bc}$, unde $b=AC, c=AB$, AN este mediana din A a triunghiului ABC, D este simetricul lui A față de N, iar CK mediana din C a triunghiului BCD. Știind că BC=16 cm, calculați NP, unde $\{P\}=CK\cap AD$.

elevă **Denisa Draghia**, Craiova

# ▪ Clasa a VIII-a

**G: 672.** Rezolvați în $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, ecuația: $\sqrt{2016}-\sqrt{x+2016-\sqrt{2016}}=y$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G: 673.** Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+10},\ x\in\mathbb{R}$.

**Marian Ciuperceanu**, Craiova

**G: 674.** Explicați de ce ecuația $\sqrt{x+28}+\sqrt{x+53}=4$ nu are soluție.

**Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

**G: 675**. Dacă $a,b,c\rangle 0$, arătați că $\frac{a^{16}+b^{16}+c^{16}}{a^5b^5c^5}\ge a+b+c$. **Marin Chirciu**, Pitești

**G: 676**. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|\frac{x^4-3x^2-1}{x-2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$. **Adrian Stan**, Buzău

**G: 677**. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]=x$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

**Roxana Cristina Vasile**, Craiova

**G: 678**. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(2x-1;-x+5)$.

**Nicolae Ivăşchescu**, Canada

**G: 679**. Se consideră ecuația $x^2-2\cdot 19^n x-2017=0$, $n\in\mathbb{N}$.
a) Să se arate că ecuaţia nu are rădăcini rationale;
b) Dacă $x_1,x_2$ sunt rădăcinile ecuaţiei date, atunci arătaţi că $x_1^2+x_2^2$ este divizibil cu 6 oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**G: 680**. Demonstraţi că pentru orice numere reale $a,b,c$ pozitive, nenule, pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c}+\frac{2(1+3b)}{c+a}+\frac{2(1+3c)}{a+b}+\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc}\le\frac{1}{abc}.$$

(O întărire a problemei E:14278 din G.M.-B 12/2011, propusă de A. Dragomir).

**Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**G: 681**. Dacă x, y≥0, $\alpha,\beta>0$, atunci $\frac{x^n}{\alpha^{n-1}}+\frac{y^n}{\beta^{n-1}}\ge\frac{x+y}{\alpha+\beta}\left(\frac{x^{n-1}}{\alpha^{n-2}}+\frac{y^{n-1}}{\beta^{n-2}}\right)$, unde n$\in N^*$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**G: 682**. Determinați lungimile a,b,c ale triunghiului ABC care verifică egalitățile $\frac{abc}{b+c-a}=10k^2$, $\frac{abc}{c+a-b}=15k^2$, $\frac{abc}{a+b-c}=30k^2$, unde $k\rangle 0$. **Marin Chirciu**, Pitești

## ▪ Clasa a IX-a

**L: 474**. Fie $a,b,c\ \rangle\ 0$, astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Arătați că $a^9+b^9+c^9+6a^3b^3c^3\le a^7+b^7+c^7$.

**Marin Chirciu**, Pitești

**L: 475**. Fie $a,b,c,d\rangle 0$ astfel încât $abc+abd+acd+bcd=4$. Arătați că $a^2(bc+cd+db)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)+d^2(ab+bc+ca)\ge 12abcd$.

**Gabriel Nemțaru**, Melinești, Dolj

**L: 476**. Arătați că: a) există perechile $(x_k,y_k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $k=\overline{1,20}$ astfel că $\sum_{k=1}^{20}\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=210$;

b) există perechile $(x_k,y_k)\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*$, $k=\overline{1,20}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{20}\frac{1+x_ky_k}{x_k+y_k}=210$;

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L: 477**. Se consideră ecuația $(x+y)^2+3x+y=2016$. Să se arate că ecuația are o infinitate de soluții întregi $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ care verifică relația $x-y\le 2017$. Să se arate că ecuația dată are o singură soluție $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L: 478**. Demonstraţi inegalitatea $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le\dfrac{\sum ab^2+\sum a^2b+2\sum ab+2\sum a}{18}$, unde $a,b,c\ge 0$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**L: 479**. Fie $x,y,z\rangle 0,\ xyz=1$. Arătați că $(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)\ge(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$.

**Lucian Tuțescu**, Craiova, **Marian Voinea**, București

**L: 480**. Fie $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2\ge 3$. Arătați că $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ge 3$.

**Ana Cismaru**, Malu Mare, Dolj

**L: 481**. Se consideră şirul $a_1=a\ne 2$, $a_2=\dfrac{2a}{a-2}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n^2-1)a_n^2}{n(n-1)a_n^2-(n^2-1)a_n+n(n+1)}$ pentru $n\ge 2$. Să se demonstreze, că: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=n\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$ pentru orice $n\ge 1$.

**Adalbert Kovács**, Satu Mare

**L: 482**. Calculaţi : $\dfrac{(n+1)!}{2^n}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\cdot k!}{2^k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k!}{2^k}$.

**D.M. Bătineţu-Giurgiu**, București şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L: 483**. Fie triunghiul AOB cu $m(\sphericalangle AOB)=90^0$ și punctul $C\in(AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle AOC)=15^0$. Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{OA}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{OB}=\dfrac{4}{OC}$.

**Marin Chirciu**, Pitești

**L: 484**. Să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{p}{r+4R}\ge\sqrt{\dfrac{r}{R+r}}$, unde r, R, p sunt notaţiile obişnuite într-un triunghi.

**Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**L: 485**. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $a+b+c\ge 3$, să se arate că:

$$\sum\frac{a^2}{b+c+1}\ge\frac{a+b+c}{3}\left(1+16\sum\frac{(a-b)^2}{(a+4b+4c)(4a+b+4c)}\right).$$

**Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L: 486**. Fie ABCD un patrulater înscris într-un cerc de rază R și circumscris altuia de rază r şi a , b , c , d laturile acestuia ( a și c sunt laturi opuse ). Demonstraţi că : $\dfrac{R^2}{r^2}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{d^2}+\dfrac{d^2}{b^2}\right)$

**Vasile Jiglău** , Arad

# ▪ Clasa a X-a

**L: 487**. Să se scrie într-o formă restrânsă numărul $n=2^{30}-6\cdot 2^{36}+15\cdot 2^{42}-20\cdot 2^{48}+15\cdot 2^{54}-6\cdot 2^{60}+2^{66}$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L: 488**. Fie $a,b\ \rangle\ 1$ astfel încât $a^3=b+1$. Rezolvați ecuația $\log_a(1+\sqrt[3]{x})=\log_b x$.

**Marin Chirciu**, Pitești

**L: 489**. Rezolvați ecuația $(2^x+4^x)\cdot(3^x+6^x)=4\cdot 12^x$. **Adrian Stan**, Buzău

**L: 490**. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $[\log_4 x]+[\log_4 2x]=\log_2 2\sqrt{x}$.

( S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real $a$ .)

**Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

**L: 491**. Fie $x_1, x_2, ...., x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + .... + x_n = 0$ și $a \rangle 0$. Arătați că

$\log_2(1+a^{x_1}) + \log_2(1+a^{x_2}) + ...... + \log_2(1+a^{x_n}) \geq n$ .

**Marin Chirciu**, Pitești

**L: 492**. Fie $m, n$ numere naturale nenule şi $x, y, z > 0$ cu proprietatea că $x^n + y^n + z^n = 3$.
Să se arate că:

$$\frac{x^{m+n}}{y^n + z^n} + \frac{y^{m+n}}{z^n + x^n} + \frac{z^{m+n}}{x^n + y^n} \geq \frac{3}{2}.$$

**Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai** Stanciu, Buzău

**L: 493**. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \sqrt[n]{x^2+2x+1} - 6\sqrt[n]{y+2} = -14 \\ \sqrt[n]{y^2+4y+4} - 4\sqrt[n]{x+1} = 1 \end{cases}$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**L: 494**. Să se arate că ecuația $x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 2 = 0$ are o singură rădăcină reală, care este: $\alpha = 2 + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{81}$ .

**Adalbert Kovacs**, Satu Mare

**L: 495**. Să se rezolve în intervalul (-2, $\infty$ ), ecuația $(x+2)^{2016} + 2 = \sqrt[2016]{x + 2^{2016}} + 2^{2016}$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L: 496**. Arătați că produsul $P = \prod_{k=2}^{1000}(k^2 - 1)$ se divide cu $5^{495}$ și nu se divide cu $5^{496}$.

**Luiza Cremeneanu**, **Constantina Prunaru**, Craiova

**L: 497**. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ și $f : A \to A$ cu proprietatea $f(f(x)) = x^2$, $\forall x \in A$. Să se arate că dacă $A = \mathbb{C}$, atunci există f cu proprietatea de mai sus.

**Aurel Chiriță**, Slatina

**L: 498**. Fie $a_1, a_2, a_3, ....., a_n$ n numere strict pozitive ( $n \in \mathbb{N}^*$). Arătați că

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1+n} + \frac{1}{a_2+n} + ..... + \frac{1}{a_n+n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ..... + \frac{1}{a_n}} \geq 1.$$ În ce caz avem egalitate?

**Ileana Didu, Camelia Dană**, Craiova

**L: 499**. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = -5 \end{cases}$.

**Hanganu Aurel Toma**, Calafat, Dolj

**L: 500**. Fie ABCD un trapez cu bazele AB=2b,CD = 2a ( $b \rangle 2a$ ) și M și N respectiv mijloacele segmentelor AB respectiv CD. Dacă MN = b-a și triunghiul ADB este isoscel (AD=BD) determinați unghiurile trapezului.

**Lucian Tuțescu, Carmen Terheci**, Craiova

## ▪ Clasa a XI-a

**L: 501**. Să se determine poziția punctului P(a;b) în reperul cartezian xOy, știind că $b_k = \lg^{-1}(2 \cdot 10^k)$, $k \in \mathbb{N}$

$a \rangle 0$, și $b = \lim_{n \to \infty}\left(-\lg 5 \cdot \lg^{-1} 2 + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot b_{k+1}\right)^{\lg(n+1)}$.

**Stelian Piscan**, Giurgiu

**L: 502.** Să se calculeze $A^n, n \in N^*$, unde $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & e & a \end{pmatrix}, e \in R^*, bc + de = 1, a, b, c, d \in R.$

**Gheorghe Ghiţă**, Buzău

**L: 503.** Se consideră sistemul: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 13y - 5z = 0 \\ x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$, unde x, y, z $\in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.
b) Să se rezolve sistemul.
c) Să se găsească o soluţie $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a sistemului pentru care

$$(x_0+3)^2 + (y_0+4)^2 - (z_0+1)^2 + y_0 = x_0{}^2 + y_0{}^2 - z_0{}^2 - y_0 + 39.$$

**Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

**L: 504.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{7} \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. Să se arate că

$f^{II}(x) = f(x) \cdot \left( \frac{28}{9} x^2 + \frac{17}{3} + \frac{1}{x^2} \right).$ **Adrian Stan**, Buzău

**L: 505.** Câte numere de forma $\left((2116)^{\sin x}\right)^{\sin x} + \left((2116)^{\cos x}\right)^{\cos x}$, ( $x \in R$ ) sunt întregi ?

**D.M. Bătineţu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L: 506.** Arătaţi că dacă $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4.......\sqrt[n]{n}}}} \langle 2$.

**Ramona Puchiu**, **Luminiţa Mihalache**, Craiova

**L: 507.** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx}{\sin x}$ şi apoi să se deducă faptul că $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**L: 508.** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3k^2+1}{4k^6 + 3k^2(k^2+1) - 1}$.

**Lucian Tuţescu, Liviu Smarandache**, Craiova

**L: 509.** Se consideră funcţia $f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \left|x^2 - 4x\right| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$. Să se arate că f este continuă pe domeniul maxim de definiţie E. **Constantin Dinu**, Buzău

## Clasa a XII-a

**L: 510.** Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X],\ f(X) = X^4 - 10X^3 + 100X + 100,$ $g(X) = 2X^3 - 15X^2 + 50$. Arătaţi că rădăcinile reale ale polinoamelor se separă şi să se determine rădăcinile reale ale lui f;

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**L: 511.** Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{125}, +, \cdot)$ ecuaţia $x^3 + \hat{6} \cdot x + 27 = \hat{0}$, ştiind că are o soluţie unică.

**Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

**L: 512**. Determinați polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $P^2(x^2) = x \cdot (x+1) \cdot P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

**Roxana Vasile, Drăghici Ani**, Craiova

**L: 513**. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

a) Să se arate că suma cuburilor rădăcinilor ecuației $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ este un pătrat perfect.

b) Să se arate că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$

c) Să se demonstreze că $f(x)f''(x)<\left(f'(x)\right)^2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

**Iuliana Trașcă**, Scornicești, Olt

**L: 514**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $x^2 \ge \int_0^x f(t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Arătați că f(0)=0.

**Marian Voinea, Florentin Vișescu**, București

**L: 515**. Folosind dezvoltarea binomială $(\sqrt{x}-1)^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 0$ deduceți identitatea

$$\frac{C_n^0}{n+2}-\frac{C_n^1}{n+1}+\frac{C_n^2}{n}-\frac{C_n^3}{n-1}+...+(-1)^n\cdot\frac{C_n^n}{2}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

**Ionel Tudor**, Călugăreni, **Stelian Piscan**, Giurgiu

**L: 516**. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+3\cos x}{2\cos x+3\sin x}dx>\frac{\pi}{2}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L: 517**. Să se arate că $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx\cdot\int_0^1\ln^2(x+1)}>2\ln 2-1$.

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**L: 518**. Să se arate că $\displaystyle\int_4^5\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx \langle \ln\sqrt{2},\ \forall x\rangle 4,\ |a|\rangle 1$. **Aurel Chiriță**, Slatina

**L: 519**. Calculați $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\ln\left[(1+t)(1+t^4)\right]dt$.

**Gabriela Drînceanu, Răzvan Drînceanu**, Craiova

**L: 520** Să se calculeze integrala:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^n}{x^{3n+1}+x^{2n+2}+x^{2n}+x^{n+1}+x^{n-1}+1}dx,\ \text{unde } a>0, n\in N.$$

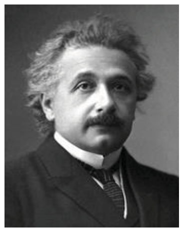
**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L: 521**. Fie $f,g:[0;1]\to(0;\infty)$, două funcții continue. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 g(x)\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\right)=\int_0^1 g(x)\ln f(x)dx.$$

**Nicolae Papacu**, Slobozia

**"A person who never made a mistake never tried anything new."**
**Albert Einstein**
**(1879- 1955)**



# 5. QUICKIES

**A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 30, 2017.**

## PROPOSALS – QUICKIES

**Q29.** Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $(a_n)_{n\geq 1}, a_1=1, a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{\sqrt[k]{k!}}, \forall n\geq 2$. Calculate $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$.

**Q30**. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. Prove that in all triangle $ABC$ holds

$$\sum\frac{\sin A}{\sin B}\leq\frac{s^2-r^2-4Rr}{3Rr}.$$

**Q31**. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. If $a,b,c>0$, then prove that

$$\sum\frac{1}{a^2}\geq\frac{18}{\sum a^2+\sum ab}.$$

**Q32**. Proposed by Nela Ciceu and Roxana Mihaela Stanciu, Romania. If $x,y,z$ are positive real numbers such that $xyz=1$, then prove that

$$\frac{1}{(x+y)^2+(x+1)^2+4}+\frac{1}{(y+z)^2+(y+1)^2+4}+\frac{1}{(z+x)^2+(z+1)^2+4}\leq\frac{1}{4}.$$

## SOLUTIONS – QUICKIES

**Q25**. Proposed by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. Prove that: if $a,b,c,d$ are positive real numbers such that $a+b+c+d=1$, then

$$\frac{1}{a^3+3bcd}+\frac{1}{b^3+3cda}+\frac{1}{c^3+3dab}+\frac{1}{d^3+3abc}\leq\frac{1}{4abcd}.$$

**Solution by** Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

By the AM-GM inequality $a^3+3bcd\geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}$, so $\frac{1}{a^3+3bcd}\leq\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}}$. Therefore

$\frac{1}{a^3+3bcd}+\frac{1}{b^3+3cda}+\frac{1}{c^3+3dab}+\frac{1}{d^3+3abc}\leq\frac{1}{\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}}$. Note that $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}}\leq\frac{1}{4abcd}$ is equivalent to $\sqrt[4]{abcd}\leq\frac{1}{4}$ which follows by the AM-GM inequality and the hypothesis that $a+b+c+d=1$.

**Solution by** author. Since $a+b+c+d=1$, the given inequality it can be written as

$$\frac{a}{3}-\frac{abcd}{a^3+3bcd}+\frac{b}{3}-\frac{abcd}{b^3+3cda}+\frac{c}{3}-\frac{abcd}{c^3+3dab}+\frac{d}{3}-\frac{abcd}{d^3+3abc}\geq\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a^3+3bcd}+\frac{b^4}{b^3+3cda}+\frac{c^4}{c^3+3dab}+\frac{d^4}{d^3+3abc}\ge\frac{1}{4}$$

Applying AM-GM inequality we have $3bcd\le b^3+c^3+d^3$, and it remains to show that

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+d^4\ge\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)(a+b+c+d).$$

The last inequality is true, since yields by Chebyshev's inequality.

**Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

**Q26. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania.** In all triangle $ABC$ holds $\sum a^2m_b^2m_c^2\ge 27s^2R^2r^2$.

**Solution by Titu Zvonaru, Comănești, Romania.**

Because $a^2b^2c^2=16s^2R^2r^2$ and $16m_b^2m_c^2=(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)$ the inequality to prove is written successively $\sum a^2(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)\ge 27a^2b^2c^2$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(4a^4-2b^4-2c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+5b^2c^2)\ge 27a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum a^6-2\sum a^2b^4-2\sum a^4b^2+2\sum a^4b^2+2\sum a^2b^4+15a^2b^2c^2\ge 27a^2b^2c^2$$

$\Leftrightarrow \sum a^6\ge\sum a^2b^2c^2$, which is true by AM-GM inequality.

**Also solved by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

**Q27. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

Compute $I_n=\int\frac{x^{n+1}+(n-1)(n+1)x^{n-1}}{(x^n+n^2)^2}dx$, unde $n\in N^*$.

**Solution by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

$$I_n=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n+1}+(n-1)n(n+1)x^{n-1}}{(x^n+n^2)^2}dx=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n-1}\left(x^2+(n-1)(n+1)\right)}{(x^n+n^2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n-1}\left(x^2+n^2-1\right)}{(x^n+n^2)^2}dx=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n-1}\left(x^2+n^2\right)-nx^{n-1}}{(x^n+n^2)^2}dx=\frac{1}{n}\ln(x^n+n^2)+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n+n^2}+C.$$

**Q28. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

If $B_n(t)=n^{1-t}\left(\frac{(n+1)^{2t}}{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t}-\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\right)$, with $t>0$, then compute $\lim_{n\to\infty}B_n(t)$.

**Solution by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

We have $B_n(t)=n^{1-t}\cdot\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\cdot(u_n-1)=\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^t\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,\forall n\ge 2$, (1)

where we denoting $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2t}\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^t,\forall n\ge 2$. We have $\lim_{n\to\infty}u_n=1$ and then we obtain

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1$. We also have: $\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(e_n^{2t}\cdot\left(\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t\right)=e^{2t}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\right)^t=e^{2t}\cdot e^{-t}=e^t$.

By (1) and above we obtain that: $\lim_{n\to\infty}B_n(t)=e^t\cdot 1\cdot\ln e^t=te^t$

**Observation.** For $t=1$ we obtain that: $\lim_{n\to\infty}B_n(1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e$,

i.e. the limit of well-known **D.M Bătinețu-Giurgiu' s sequence.**

**Also solved by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.**

**„ Mâna care scrie bine poate să-ți dea un șut mai eficient decât un picior bine încălțat. ”**
**Rivarol (1753 - 1801)**

# 6. Caleidoscop matematic

**1.** Problema 4108 din Crux Mathematicorum nr. 1/2016 (propusă de *Alessandro Ventullo*) cere să se scrie numărul 2010 ca sumă de pătrate consecutive şi dacă numărul 2014 se poate scrie ca sumă de pătrate consecutive. Pornind de la această problemă, prezentăm toate numerele de patru cifre care se scriu în două moduri ca suma unor pătrate consecutive (aceste scrieri sunt obţinute cu ajutorul calculatorului):

$1405 = 7^2 + 8^2 + ...+ 16^2 = 26^2 + 27^2$
$1730 = 6^2 + 7^2 + ...+ 17^2 = 23^2 + 24^2 +25^2$
$2030 = 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$
$3281 = 5^2 + 6^2 + ...+ 21^2 = 40^2 + 41^2$
$3655 = 8^2 + 9^2 + ...+ 22^2 = 25^2 + 26^2 +26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2$
$3740 = 6^2 + 7^2 + ...+ 22^2 = 18^2 + 19^2 + ... + 25^2$
$4510 = 15^2 + 16^2 + ...+ 25^2 = 28^2 + 29^2 + 30^2 + 31^2 +32^2$
$4705 = 17^2 + 18^2 + ...+ 26^2 = 48^2 + 49^2$
$4760 = 8^2 + 9^2 + ...+ 24^2 = 23^2 + 24^2 + ... + 29^2$
$4900 = 1^2 + 2^2 + ...+ 24^2 = 49^2$
$5244 = 20^2 + 21^2 + ...+ 28^2 = 22^2 + 23^2 + ... + 29^2$
$5434 = 7^2 + 8^2 + ...+ 25^2 = 17^2 + 18^2 + ... + 27^2$
$5915 = 15^2 + 16^2 + ...+ 27^2 = 26^2 + 27^2 + ... + 32^2$
$5929 = 18^2 + 19^2 + ...+ 28^2 = 77^2$
$7230 = 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$
$7574 = 8^2 +9^2 + ...+ 28^2 = 42^2 + 43^2 + 44^2 + 45^2$
$8415 = 8^2 + 9^2 + ... + 29^2 = 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2$
$8464 = 7^2 + 8^2 + ...+ 29^2 =92^2$
$9385 = 26^2 + 27^2 + ...+ 35^2 = 68^2 + 69^2$.

**Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău.**

**2.** În nota *''O problemă interesantă''* din revista Mateinfo.ro, mai, 2016, profesorul *George-Florin Şerban* găseşte un exemplu de număr de patru cifre $\overline{abcd}$ care verifică proprietăţile

i) $\overline{cd}$ este pătrat perfect; ii) $\overline{abcd} = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)$.

Cu ajutorul calculatorului se poate deduce uşor că singurul număr care verifică condiţia

$$\overline{abcd} = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \text{ este } 2016.$$

Dacă se elimină factorul $(c+d)$ obţinem numărul 1512 - care este singurul număr de patru cifre cu proprietatea că $\overline{abcd} = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$.

**Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău.**

**3.** Care dintre următoarele patru egalități: $2011 = 31^2$, $2013 = 33^2$, $2015 = 35^2$ şi $2017 = 97^2$ nu poate să fie adevărată?

Rezolvare: Studiem pe rând egalitățile, care pot fi adevărate într-o anumită bază de numerație

Dacă $x$ este baza de numerație, atunci prima egalitate se scrie: $2 \cdot x^3 + x + 1 = (3 \cdot x + 1)^2$, o ecuație de gradul

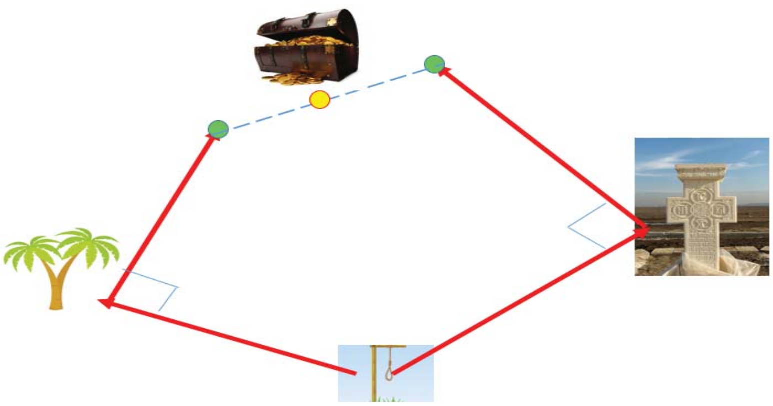
3 cu soluțiile $x = 5$, $x = 0$ şi $x = -\frac{1}{2}$, dintre care numai 5 putem accepta ca baza de numerație.
În acest caz: $\mathbf{2011_5 = (31_5)^2}$. Deci prima egalitate este adevărată!
A doua egalitate se scrie: $2\cdot x^3 + x + 3 = (3\cdot x + 3)^2$ o ecuație de gradul 3 cu soluțiile: $x = 6$, $x = -1$ şi $x = -\frac{1}{2}$, dintre care numai 6 putem accepta ca baza de numerație. În acest caz: $\mathbf{2013_6 = (33_6)^2}$.
Deci a doua egalitate este adevărată!
A treia egalitate se scrie: $2\cdot x^3 + x + 5 = (3\cdot x + 5)^2$, o ecuație de gradul 3 cu o singură soluție reală, irationala: $x = \frac{\sqrt[3]{4158-3\sqrt{78621}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{4158+3\sqrt{78621}}}{6} + \frac{3}{2}$, cu o valoare aproximativă: $x = 6.835355141$; x nu poate fi bază de numerație Deci a treia egalitate nu este adevărată!
A patra egalitate se scrie: $2\cdot x^3 + x + 7 = (9\cdot x + 7)^2$, o ecuație de gradul 3 cu soluțiile:
$x = 42$, $x = -1$ şi $x = -\frac{1}{2}$, dintre care numai pe 42 putem accepta ca bază de numerație.
În acest caz: $\mathbf{2017_{42} = 2\cdot 42^3 + 42 + 7 = 148225 = 385^2 = (9\cdot 42 + 7)^2 = (97_{42})^2}$.
$\mathbf{2017_{42} = (97_{42})^2}$. Deci a patra egalitate este adevărată!
**În concluzie: a treia egalitate nu poate fi adevărată!**

**Kovacs Bela, Satu Mare**

## Comoara ascunsă

**4.** În cartea profesorului Al. Froda "Eroare şi paradox în matematică" - Editura "Enciclopedica Română", Bucureşti 1971, apare problema numită " Comoara ascunsă".
Ea face parte din aşa numitul "folclor matematic''. Iată enunţul problemei, citat din cartea mai sus pomenită:

Un fragment de pergament găsit din întîmplare indică unui aventurier prin câteva însemnări criptice şi prin unele îndrumări sumare modul de aflare a unei comori ascunse pe vremuri de un pirat într-o mică insula în Oceania. Iată desenul anexat indicaţiilor:

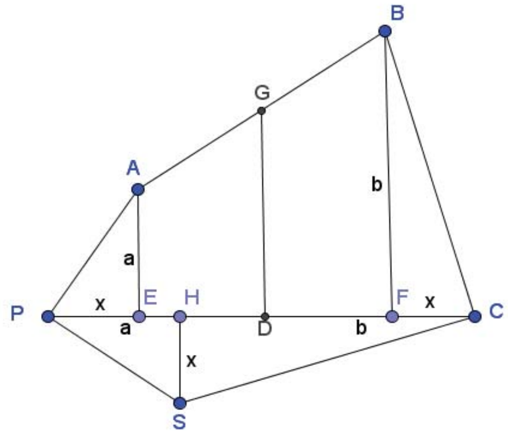


Iată şi instrucțiunile scrise pe verso la desen: mergi de la spânzurătoare pâna la palmier şi făcând un unghi drept spre dreapta mergi acelaşi număr de paşi ca de la spânzurătoare la palmier. Înseamnă locul şi întoarce-te la spânzurătoare. Du-te la crucea de piatră şi cotind în unghi drept la stânga mergi acelaşi număr de paşi ca de la spânzurătoare la cruce. Înseamnă locul. Comoara se află la mijlocul segmentului a cărui capete sunt locurile însemnate. Aventurierul ajuns pe insulă găseşte palmierul şi crucea de piatră, dar nici urmă de spânzurătoare. Şi totuşi găseşte comoara conform instructiunilor . Cum ?
Autorul divulgă poanta, şi anume, că locul comorii nu depinde de locul spânzurătorii. Dar el consideră rezolvarea "elementară " şi o lasă pe seama cititorului.

**Kovacs Bela, Satu Mare şi Cernea Ivan (Ilan), Israel**

**Rezolvarea geometrică**

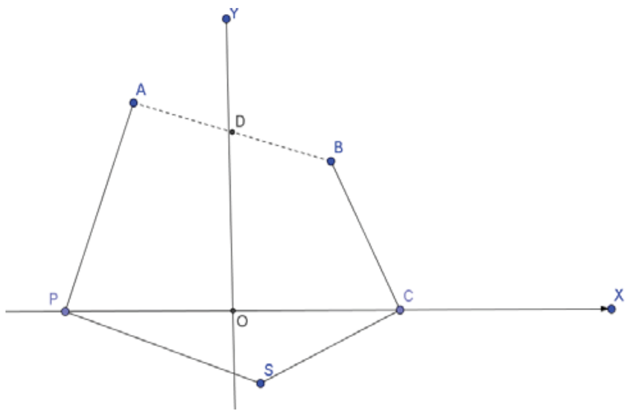
Notăm cu P și C punctele fixe în care se găsesc palmierul și crucea de piatră.
Notăm cu S locul spânzurătorii ales la aleator. Notăm cu A și B punctele care se obtin mergând de la spânzurătoare la palmier și respectiv la cruce , cotind la dreapta și respectiv la stânga în unghi drept și parcurgând aceeași distantă .
( $\angle SPA = \angle SCB = 90^0, SP = PA, SC = CB$ ). Construim $SH \perp PC, AE \perp PC, BF \perp PC.$
Fie $PH = a, CH = b, SH = x$.
Singurele elemente fixe din desenul de mai sus sunt punctele P și C și lungimea segmentului PC adica $a+b$.




Folosind teoremele de congruență ale triunghiurilor dretunghice, se poate demonstra destul de ușor ca triunghiurile dreptunghice SHP și PEA respectiv SHC și CFB sunt congruente ( cazul ipotenuză și unghi ascuțit ). De aceea $PE = SH = FC = x,\ AE = a,\ BF = b$.
Locul "comorii"este punctul G , mijlocul segmentului AB.
Construim GD linia mijlocie a trapezului dreptunghic AEFB. $DG = \dfrac{a+b}{2}$ , constantă. Punctul D este mijlocul segmentului EF dar și al segmentului PC , este punct fix, deci și G este un punct fix .
Deci "comoara" se află pe mediatoarea segmentului fix PC și la distanța de jumătate din lungimea (constantă) a segmentului PC.
Este vorba de un punct fix a carui poziţie nu depinde de punctul S.

**Rezolvarea cu ajutorul numerelor complexe (planul Gauss)**

Alegem dreapta PC ca axa X și mijlocul segmentului PC ca origine a axelor.
Fie punctele fixe C(a,0) , P(-a,0) și punctual variabil S(x,y). (cruce , palmier ,spânzurătoare).
Notăm afixele acestor puncte $z_C = a, z_P = -a, z_S = x + iy.$ Rotim segmentul PS cu 90 de grade în sens trigonometric în jurul punctului P obținând astfel segmentul PA.
Deci : $(z_S - z_P)\cdot i = z_A - z_P$.
Rezultă : $z_A = (z_S - z_P)\cdot i + z_P$.




Înlocuind obținem: $z_A = (x + iy + a)\cdot i - a$. Deci: $z_A = -a - y + i(x+a)$.
Tot aşa ,rotim segmentul CS cu 90 de grade în sens contrar sensului trigonometric în jurul punctului C, obținând segmentul CB. Aşadar $(z_S - z_C)\cdot(-i) = z_B - z_C$.
Rezultă : $z_B = (z_C - z_S)\cdot i + z_C$. Înlocuind obţinem: $z_B = (a - x - iy)\cdot i + a$ .
Deci : $z_B = a + y + i(a - x)$. Pentru a obține afixul mijlocului segmentului AB, locul comorii, calculăm :
$\dfrac{z_A + z_B}{2} = ai.$
Deci comoara se gaseşte în punctul (0,a) a cărui poziție nu depinde de alegerea lui S.

**Kovacs Bela, Satu Mare şi Cernea Ivan (Ilan), Israel**

**„Studiază mai întâi știința și continuă apoi cu practica născută din această știință”.**
**Leonardo da Vinci (1452 - 1519)**

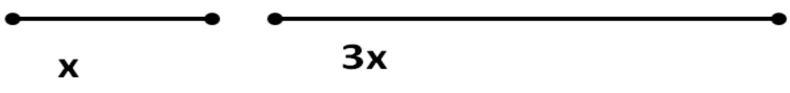
# 7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 18** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

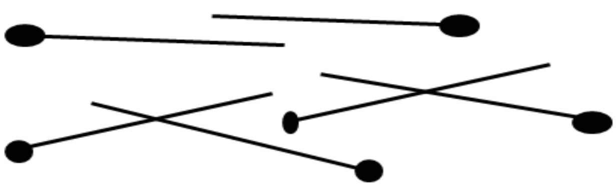
Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate( **salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 19** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2017**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

**1. Care segment conține mai multe puncte ?**




**2. Se pot construi patru triunghiuri echilaterale cu ajutorul a șase bețe de chibrit?**



**Răspunsurile pe pagina Clubul de Matematică Sclipirea Mintii / Facebook**

Concursul Național
REVISTE ȘCOLARE
Etapa județeană
2016

ROMÂNIA
Ministerul Educației Naționale și Cercetării Științifice
Inspectoratul Școlar Județean Buzău

PREMIUL I

Se acordă REVISTEI ȘCOLARE – Inv. Liceal, științific - matematică

*„Sclipirea minții"*

De la Liceul tehnologic *„ Costin Nenițescu"* Buzău

Inspector Școlar General,
Prof. Florina STOIAN

Inspector educație permanentă,
Prof. Vasile NECULĂIASA

*Buzău, mai 2016*

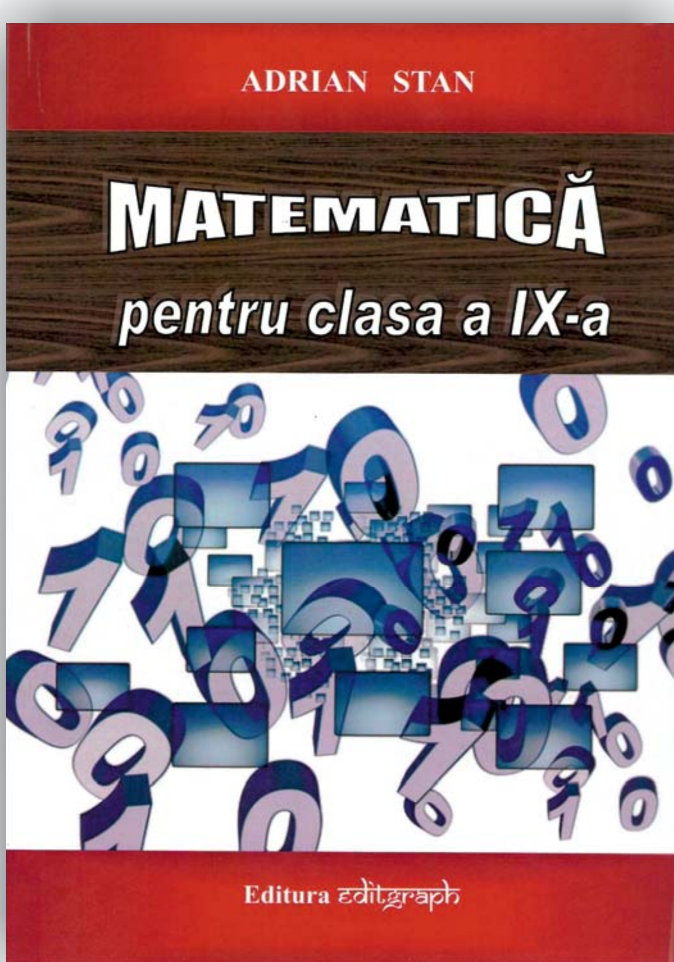

Apărută recent la o editură de prestigiu, editura Paralela 45, cartea domnului profesor Marin Chirciu, „ Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performnață ” conține în cele 294 de pagini, numeroase inegalități publicate de autor în reviste de specialitate precum și altele date la concursuri de matematică alături de inegalități celebre cărora le-a găsit foarte multe aplicații selectate din revistele internaționale. Printre acestea întâlnim inegalitățile lui Jensen, Gerretsen, Mitrinovic, Euler, Bergström cât și multe inegalități trigonometrice.

Cartea abundă în inegalități dintre cele mai diverse unele dintre ele fiind preluate din Gazeta matematică, Match, IneMath, Octogon, sau de la concursurile și olimpiadele internaționale, dar toate acestea sunt însoțite de rezolvări complete și detaliate pentru a veni în sprijinul elevilor, studenților sau profesorilor în pregătirea lor pentru diversele concursuri sau examene.

Format: tip manual, nr. pag. 294.

Pentru comenzi, puteți solicita informații la adresa de e_mail:

marin.chirciu @yahoo.com




Cartea “Matematică pentru clasa a IX-a„ , face parte din categoria auxiliarelor școlare utilizate la clasă de către elevi și profesori pentru a îmbunătăți procesul de predare și învățare, pentru a asigura o bază de cunoștințe teoretice și aplicative la nivelul programei școlare matematică M2 – tehnologic.

Cartea conține foarte multe exerciții rezolvate tocmai pentru a veni în întâmpinarea elevilor care doresc să lucreze mai mult și să se verifice cu această ocazie.

Conținutul cărții este împărțit în așa fel ca să se poată lucra la clasă, pe fiecare lecție în parte astfel, lecția conține noțiunile teoretice cu exemple, probleme rezolvate și probleme propuse.

Cartea este de asemenea însoțită la început de sinteze de teorie matematică iar la sfârșit de teste de recapitulare din materia de clasa a IX-a precum și de o selecție de probleme date la concursuri.

Format: tip manual, nr. pag. 266;

**REVISTA SCLIPIREA MINŢII**
NR. 18 ANUL IX - NOIEMBRIE 2016

Cuprins





editgraph

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601