REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

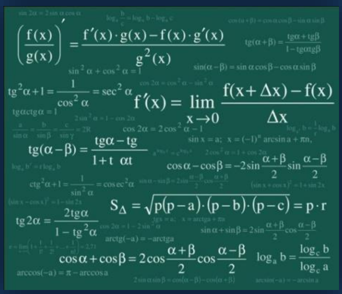
ISSN 2065-6432 - AUGUST 2016

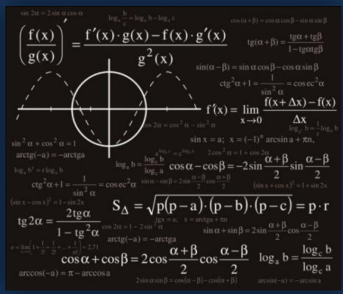
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





1. **Solution to problem 4106 from Crux Mathematicorum …pag. 2**
D.M. Bătinețu – Giurgiu, Neculai Stanciu, Leonard Giugiuc
2. **On some problems from Octogon Mathematical Magazine ... pag. 3**
Neculai Stanciu
3. **Metode de rezolvare a unei probleme din Gazeta Matematică, seria B ... pag. 10**
George Florin Șerban
4. **Metode de rezolvare a unei probleme date la Olimpiada Nationala de Matematică , Faza Județeană 2016 ... pag. 12**
Gheorghe Alexe, George Florin Șerban
5. **Inegalități triunghiulare... pag. 15**
Daniela Tilinca, Adriana Mihaila
6. **În legătură cu o inegalitate în triunghi din Lista Scurtă a ONM 2007 ... pag. 18**
Marin Chirciu
7. **Probleme date la concursurile școlare din județul Olt (II) … pag. 23**
Elena Pirlog
8. **Soluții - Problema lunii IULIE 2016 ... pag. 31**
Propusa de *George Florin Șerban*
9. **CONCURS - Problema lunii AUGUST 2016 ... pag. 33**
Propusă de Constantin Telteu

1. SOLUTION TO PROBLEM 4106 FROM CRUX MATHEMATICORUM

By Leonard Giugiuc

In Crux Mathematicorum, Volume 42, no. 1, 2016, p. 28 was appeared the following problem

4106. Proposed by D.M. Bătinețu – Giurgiu and Neculai Stanciu.

Let ABC be a triangle with $BC = a, AC = b, AB = c$ and circumradius R .Show that

$$\frac{b+c}{a^5}+\frac{c+a}{b^5}+\frac{a+b}{c^5}\geq\frac{2}{3R^4}$$

***Proof by Leonard Giugiuc*:**

By the usual formulas, it's equivalent to

$3[b^5c^5(b+c)+c^5a^5(c+a)+a^5b^5(a+b)]\geq 2abc(4S)^4$ *, where* $S=[ABC]$.

From Hadwiger – Finsler inequality, we have

$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\geq 4S\sqrt{3}$ *and since* $(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\leq 0$,

then clearly $ab+bc+ca\geq 4S\sqrt{3}\Longrightarrow \dfrac{(ab+bc+ca)^4}{9}\geq (4S)^4$.

Hence it's eunough to prove $27[b^5c^5(b+c)+c^5a^5(c+a)+a^5b^5(a+b)]$
$\geq 2abc(ab+bc+ca)^4$.

From AM – GM, $b+c\geq 2(bc)^{\frac{1}{2}}, c+a\geq 2(ca)^{\frac{1}{2}}$ *and* $a+b\geq 2(ab)^{\frac{1}{2}}\Longrightarrow$

$b^5c^5(b+c)+c^5a^5(c+a)+a^5b^5(a+b)\geq 2\left[(bc)^{\frac{11}{2}}+(ca)^{\frac{11}{2}}+(ab)^{\frac{11}{2}}\right]\Longrightarrow$

it's eunough to prove $27\left[(bc)^{\frac{11}{2}}+(ca)^{\frac{11}{2}}+(ab)^{\frac{11}{2}}\right]\geq abc(ab+bc+ca)^4$.

Denote $bc=x^2$, $ca=y^2$ *and* $ab=z^2$ *. Then* $abc=xyz$ *and we need to prove*

$27(x^{11}+y^{11}+z^{11})\geq xyz(x^2+y^2+z^2)^4$ *. Finally, from Chebysev's inequality,*

$3(x^{11}+y^{11}+z^{11})\geq (x^3+y^3+z^3)(x^8+y^8+z^8)\Longrightarrow$

it suffices to prove $27(x^3+y^3+z^3)(x^8+y^8+z^8)$
$\geq 3xyz(x^2+y^2+z^2)^4$ *, which is clearly true*

since $27(x^8+y^8+z^8)\geq (x^2+y^2+z^2)^4$ *and* $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ *. We are done.*

2. ON SOME PROBLEMS FROM OCTOGON MATHEMATICAL MAGAZINE

By Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' School, Buzău, Romania

- In the next we present the solutions of some problems from Octogon Mathematical Magazine.

✓ **Remark.** We let the readers to found the statements of the problems free-online at the following address http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octogon/index.php?menu=archive

PP.22726. By AM-GM inequality we obtain

$$\sum\frac{a}{b}\geq 3 \text{ and } \sum\frac{b}{a}\geq 3.$$

Yields that

$$\left(1+\frac{8}{\sum\frac{a}{b}}\right)\left(1+\frac{8}{\sum\frac{b}{a}}\right)=\frac{\sum\frac{a}{b}+8}{\sum\frac{a}{b}}\cdot\frac{\sum\frac{b}{a}+8}{\sum\frac{b}{a}}\geq\frac{121}{\sum\frac{a}{b}\sum\frac{b}{a}}, \text{ q.e.d.}$$

PP.22738. After extracting the square root and dividing by $a^2b^2c^2$ the given inequality is written as

$$8\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2\left(\sum\frac{b}{a}\right)^2\geq 81\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2\left(\sum\frac{b}{a}\right)^2\geq 81\left(2+\sum\frac{a^2}{b^2}+\sum\frac{b^2}{a^2}\right), (1).$$

We denote $p=\sum\frac{a}{b}, q=\sum\frac{b}{a}$. We have $p^2=\sum\frac{a^2}{b^2}+2\sum\frac{b}{a}$, so

$$\sum\frac{a^2}{b^2}=p^2-2q \quad \text{and analogous } \sum\frac{b^2}{a^2}=q^2-2p.$$

The inequality (1) becomes

$$8p^2q^2-81p^2-81q^2+162p+162q-162\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4p^2(q^2-9)+4q^2(p^2-9)-9(p-3)(5p-3)-9(q-3)(5q-3)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-3)(4pq^2+12q^2-45p+27)+(q-3)(4p^2q+12p^2-45q+27)\geq 0, (2).$$

Since $p,q\geq 3$, to demonstrate (2) it suffices to prove that

$$4pq^2+12q^2\geq 45p, (3).$$

We have

$$4pq^2\geq 36p, (4).$$

Using the well-known inequality $\sum x^2\geq\sum xy$, we obtain

$$q^2=\sum\frac{b^2}{a^2}+2\sum\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\right)\geq\sum\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\right)+2p=3p,$$

and then $12q^2\geq 36p$, which with (4) show that (3) is true.

We have equality if and only if $p=q=3$, i.e. if and only if $a=b=c$.

The proof is complete.

PP.22739. Using the well-known inequality

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$$

we have

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a}{b}\right)^2 \ge \sum\frac{a}{c}.$$

Analogous

$$\sum\left(\frac{b}{a}\right)^2 \ge \sum\frac{c}{a}.$$

Yields that

$$\left(\sum\left(\frac{a}{b}\right)^2+15\sum\frac{a}{c}\right)\left(\sum\left(\frac{b}{a}\right)^2+15\sum\frac{c}{a}\right) \ge \left(16\sum\frac{a}{c}\right)\left(16\sum\frac{c}{a}\right)=256\left(\sum\frac{a}{b}\right)\left(\sum\frac{b}{a}\right), \text{ q.e.d.}$$

PP.22740. The inequality from this problem is not true.

For $a=1, b=2, c=3$, we have

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{25}{6}, \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=\frac{23}{6}.$$

But

$$\left(\frac{25}{6}-3\right)\left(6-\frac{23}{6}\right)+\left(\frac{23}{6}-3\right)\left(6-\frac{25}{6}\right)=\frac{146}{36}>2.$$

PP.22742. We shall prove a strong inequality, i.e.

$$7(a+b)^4+25(a^4+b^4) \ge (2a+b)^4+(a+2b)^4, \text{ (1).}$$

After some algebra the inequality (1) is written

$$15a^4-12a^3b-6a^2b^2-12ab^3+15b^4 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(5a^2+6ab+5b^2) \ge 0$, which is true, q.e.d.

Remark. The inequality is true for all real numbers a,b, without the restriction $a,b>0$.

PP.22755. We denote $x=\sum\frac{a_1}{a_2}$, $y=\sum\frac{a_2}{a_1}$.

By AM-GM inequality we deduce that

$$x \ge n,\ y \ge n, \text{ (1).}$$

By (1) and AM-GM inequality, we have

$$x+y+4(n-1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4(n-1)\left(\frac{x}{n^2}+\frac{1}{x}\right)+4(n-1)\left(\frac{y}{n^2}+\frac{1}{y}\right)+$$

$$+(n^2-4n+4)\left(\frac{x}{n^2}+\frac{y}{n^2}\right)\geq \frac{8(n-1)}{n}+\frac{8(n-1)}{n}+2(n^2-4n+4)\cdot\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{2}{n}(8n-8+n^2-4n+4)=\frac{2\left((n+2)^2-8\right)}{n}, \text{ q.e.d}$$

PP.22759. We denote $x=\sum\frac{a_1}{a_2}$, $y=\sum\frac{a_2}{a_1}$.

By AM-GM inequality we deduce that

$$x\geq n,\ y\geq n, (1).$$

By (1) and AM-GM inequality, we have

$$x+y+3n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3\left(\frac{x}{n}+\frac{n}{x}\right)+3\left(\frac{y}{n}+\frac{n}{y}\right)+(n-3)\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right)\geq$$

$$\geq 6+6+n-3+n-3=2(n+3), \text{ q.e.d.}$$

PP.22765. We denote $x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}$.

It is well-known that

$$xy+yz+zx=1 \text{ and } x=\frac{r}{s-a},\ y=\frac{r}{s-b}, x=\frac{r}{s-c}.$$

We obtain

$$y+z=\frac{r}{s-b}+\frac{r}{s-c}=\frac{ar}{(s-b)(s-c)},$$

and other two similar identities.

After some algebra and well-known formulas, yields that

$$(1-xy)(1-yz)(1-zx)=xyz(x+y)(y+z)(z+x)=\frac{4Rr}{s^2}.$$

We shall prove a strong inequality, i.e. we will prove the inequality with the upper bound $\frac{82}{27}$ instead of 10.

Indeed, the inequality to prove is written as

$$\frac{41}{27}\geq\frac{r(4R+r)}{s^2}+\frac{16Rr}{s^2}$$

$\Leftrightarrow 540Rr+27r^2\leq 41s^2$.

By Gerretsen's inequality (the item 5.8. from Bottema) we have

$$s^2\geq 16Rr-5r^2,$$

and it suffices to show that

$$540Rr+27r^2\leq 656Rr-205r^2$$

$\Leftrightarrow 232r^2\leq 116Rr$

$\Leftrightarrow 2r\leq R$, which is true since is Euler's inequality.

PP.22770. We denote $p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, q=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$, with $p,q\geq 3$.

We have

$$\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}{a^2b^2c^2}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{c}\right)=pq-1.$$

The given inequality is written

$$(pq-1)^2\geq 16(p-1)(q-1)\Leftrightarrow p^2q^2-18pq+16p+16q-15\geq 0.$$

Since by AM-GM inequality we have $16p+16q\geq 32\sqrt{pq}$, it suffices to prove that

$$p^2q^2-18pq+32\sqrt{pq}-15\geq 0, \text{ (1).}$$

We denote $pq=t^2$, we have $t\geq 3$and (1) becomes

$t^4-18t^2+32t-15\geq 0\Leftrightarrow (t-3)(t^3+3t^2-9t+5)\geq 0$, true because

$t^3-9t\geq 0\Leftrightarrow t^2\geq 9$.

We have equality if and only if $t=3$ and $p=q$, i.e. if and only if $a=b=c$.

PP.22772. Using the inequality

$$\frac{x^2-xy+y^2}{2x^2-xy+2y^2}\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0,$$

yields that

$$\sum_{cyclic}\frac{(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)(a_2+a_3)}{2a_1^2-a_1a_2+2a_2^2}\geq\sum_{cyclic}\frac{a_2+a_3}{3}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}a_k, \text{ q.e.d.}$$

PP.22778. We think in the statement there is a typo (because the degree of LHS is 0, and the degree of RHS is -1).

We shall prove the inequlity

Quickies SM18 $\sum\frac{\sin A}{\sin B}\leq\frac{s^2-r^2-4Rr}{3Rr}$ **, (1).!!!!!!**

By sine law and the formulas

$$\sum a^2=2(s^2-r^2-4Rr),\ abc=4rRs,$$

the inequality (1) becomes successively

$$\sum\frac{a}{b}\leq\frac{2s\sum a^2}{12rRs}\Leftrightarrow 2\sum a^2c\leq\sum a^3+\sum a^2b\Leftrightarrow\sum(a^3+ac^2)\geq 2\sum a^2c,$$

which is true by AM-GM inequality.

PP.22781. We denote $p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, q=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.

We have

$$p^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2q, \text{ i.e. } \sum\frac{a^2}{b^2}=p^2-2q, \text{ (1).}$$

The inequality from the statement is written

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq(1+p)^2+(1+q)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(2+p^2-2q+q^2-2p)\geq 2+2p+2q+p^2+q^2$$

$$\Leftrightarrow 3p^2+3q^2+6\geq 10p+10q\text{, (2)}$$

Using the well-known inequality $\sum x^2\geq\sum xy$, by (1) we obtain $p^2\geq 3q$.

The inequality (2) is written as

$(p-1)(p-3)+(q-1)(q-3)+2(p^2-3q)+2(q^2-3p)\geq 0$, which is true because by AM-GM inequality we have $p\geq 3, q\geq 3$, q.e.d.

PP.22788. We denote $x=\cos\frac{A}{2}, y=\cos\frac{B}{2}, z=\cos\frac{C}{2}$.

The right inequality.

$$\sum\frac{x}{\lambda x+y+z}-\frac{3}{\lambda+2}=\sum\left(\frac{x}{\lambda x+y+z}-\frac{1}{\lambda+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda+2}\sum\left(\frac{x-y}{\lambda x+y+z}+\frac{x-z}{\lambda x+y+z}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda+2}\left(\sum\frac{x-y}{\lambda x+y+z}+\sum\frac{x-z}{\lambda x+y+z}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda+2}\left(\sum\frac{x-y}{\lambda x+y+z}+\sum\frac{y-x}{x+\lambda y+z}\right)=$$

$$=-\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\sum\frac{(x-y)^2}{(\lambda x+y+z)(x+\lambda y+z)}\leq 0.$$

The left inequality.

First we shall prove that x, y, z are the side of a triangle. Indeed, we have $x\leq y+z\Leftrightarrow\sqrt{a(s-a)}\leq\sqrt{b(s-b)}+\sqrt{c(s-c)}$ and it suffices to show that

$$a(s-a)\leq b(s-b)+c(s-c)$$

$$\Leftrightarrow a(b+c-a)\leq b(a+c-b)+c(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+ac-a^2\leq ab+bc-b^2+ac+bc-c^2$$

$\Leftrightarrow a^2-b^2-c^2+2bc\geq 0\Leftrightarrow(a+b-c)(a-b+c)\geq 0$, true.

We have (*) $\frac{x}{\lambda x+y+z}\geq\frac{2x}{(\lambda+1)(x+y+z)}\Leftrightarrow(\lambda-1)x\leq(\lambda-1)(y+z)\Leftrightarrow x\leq y+z$, true.

By (*) we obtain that

$$\sum\frac{x}{\lambda x+y+z}\geq\sum\frac{2x}{(\lambda+1)(x+y+z)}=\frac{2}{\lambda+1}$$, q.e.d.

PP.22791. We have

$$2(x+y)^2 \le 2x^2+2y^2+5xy=(2x+y)(x+2y),$$

which with other two similar inequalities yields the left inequality.
By AM-GM inequality we obtain that

$$\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \le \frac{3x+3y+3z}{3}, \text{ so}$$

$$(2x+y)(2y+z)(2z+x) \le (x+y+z)^3.$$

Analogous

$$(x+2y)(y+2z)(z+2x) \le (x+y+z)^3.$$

Hence,

$$(2x+y)(x+2y)(2y+z)(y+2z)(2z+x)(x+2z) \le (x+y+z)^6.$$

The proof is complete.

PP.22799. By AM-GM inequality we have

$$\sqrt{(2x+y)(y+2z)} \le \frac{2x+y+y+2z}{2}=x+y+z,$$

and then

$$\sum_{cyclic}\frac{(2a_1+a_2)(a_2+2a_3)}{a_1+a_2+a_3} \le \sum_{cyclic}(a_1+a_2+a_3)=3\sum_{k=1}^{n}a_k, \text{ q.e.d.}$$

PP.22800. By AM-GM inequality we have

$$\sqrt[3]{(2x+y)(y+2z)(z+2x)} \le \frac{3x+3y+3z}{3}=x+y+z,$$

and then

$$\sum_{cyclic}\frac{(a_1+2a_2)(a_2+2a_3)(a_3+2a_1)}{(a_1+a_2+a_3)^2} \le \sum_{cyclic}(a_1+a_2+a_3)=3\sum_{k=1}^{n}a_k, \text{ q.e.d}$$

PP.22816. Applying AM-GM inequality and well-known inequality $\left(\sum a\right)^2 \le 3\sum a^2$, we obtain that

$$\sum\sqrt{(1+a+b)(1+b+c)} \le \sum\frac{1+a+b+1+b+c}{2}=3+2(a+b+c)=$$

$$=3+\sum a+\sum a \le 3+\sum a+\frac{3\sum a^2}{\sum a},$$

i.e. the right inequality.

The left inequality is not true; we prove above that

$$\sum\sqrt{(1+a+b)(1+b+c)}\le 3+2\sum a.$$

PP.22826. 1) Since $h_a-2r=\frac{2sr}{a}-2r=\frac{r(b+c-a)}{a}$, we must to prove that

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\le abc, (1).$$

We have

$$(a+b-c)(a-b+c)=a^2-(b-c)^2\le a^2,$$

and with other two similar inequalities by multiplying yields (1).

2)Since $r_a-2r=\frac{sr}{s-a}-2r=\frac{r(2a-s)}{s-a}$, we must to show that

$$(2a-s)(2b-s)(2c-s)\le(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\Leftrightarrow(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)\le(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b), (2).$$

The sum of numbers $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ is positive, also the sum of any two of this numbers. If one of the numbers $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ is negative, then (2) is true. If all of the numbers $3a-b-c, 3b-a-c, 3c-a-b$ are positive , then by AM-GM inequality, we obtain that

$$\sqrt{(3a-b-c)(3b-a-c)}\le\frac{3a-b-c+3b-a-c}{2}=a+b-c.$$

Writing other two similar inequalities and adding up yields (2).

PP.22832. We apply AM-GM inequality for the following $2n-2$ numbers $a_k^{n-1},1,1,\ldots,1$.

Hence,

$$a_k^{n-1}+2n-3\ge 2(n-1)\cdot\sqrt[2(n-1)]{a_k^{n-1}}=2(n-1)\cdot\sqrt{a_k}.$$

Therefore,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{n-1}+2n-3}\le\frac{1}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}}, \text{ q.e.d.}$$

P.22834. We denote with S the area of triangle ABC.

Using the inequality $\sum a^2\ge\sum ab$, and Bergström's inequality, we obtain

$$\sum\frac{a^3}{a+b}=\sum\frac{a^4}{a^2+ab}\ge\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2+\sum ab}\ge\frac{\sum a^2}{2}, (1).$$

$$\sum\frac{a^3}{a+3b}=\sum\frac{a^4}{a^2+3ab}\ge\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2+3\sum ab}\ge\frac{\sum a^2}{4}, (2).$$

It remains to prove that

$\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{8}\ge 6S^2\Leftrightarrow\sum a^2\ge 4S\sqrt{3}$, which is the Ionescu-Weitzenböck' s inequality

3. METODE DE REZOLVARE A UNEI PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICA , SERIA B

George-Florin Șerban , profesor Liceul Pedagogic D.P.Perpessicius , Braila

In Gazeta Matematica , seria B , nr 4 pe 2016 , profesorul Dan Nedeianu , propune spre rezolvare , la clasa a 5-a urmatoarea problema interesanta :

“Determinati numerele naturale x,y,z care veifica simultan relatiile $4x^2 = 5y^2 + 6z^2 + 10$ si

$17x = 5y + 6z + 35$. “

Voi prezenta in continuare doua metode de rezolvare pentru aceasta problema .

Meetoda 1: $4x^2 - 10 = 5y^2 + 6z^2$, $17x - 35 = 5y + 6z$, $17x - 35 \geq 0$ deci $x \geq 3$.

Daca $x \leq y \leq z$, $4x^2 - 10 = 5y^2 + 6z^2 \geq 5x^2 + 6x^2$, $4x^2 - 10 \geq 11x^2$, $-10 \geq 7x^2$ fals .

Daca $x \leq z \leq y$, $4x^2 - 10 = 5y^2 + 6z^2 \leq 4z^2 - 10$ deci $5y^2 + 2z^2 \leq -10$ fals .

Daca $y \leq x \leq z$, $4x^2 - 10 = 5y^2 + 6z^2 \leq 4z^2 - 10$ deci $5y^2 + 2z^2 \leq -10$ fals .

Daca $y \leq z \leq x$, $17x - 35 = 5y + 6z \leq 5x + 6x$ deci $17x - 35 \leq 11x$, $6x \leq 35$, $x \in \{3,4,5\}$.

-Daca $x = 3$, $5y^2 + 6z^2 = 26$, $z = 0$ $\Rightarrow 5y^2 = 26$ fals , $z = 1$ $\Rightarrow$ $5y^2 = 20$, $y = 2$ fals deoarece $y \leq z$, $z = 2$ $\Rightarrow 5y^2 = 2$ fals , $z \geq 3$ $\Rightarrow 5y^2 + 6z^2 = 26 \geq 54$ fals .

-Daca $x = 4$, $5y^2 + 6z^2 = 54$, $z = 0$ $\Rightarrow 5y^2 = 54$ fals , $z = 1$ $\Rightarrow$ $5y^2 = 48$, fals , $z = 2$ $\Rightarrow$ $5y^2 = 30$ fals , $z = 3$ $\Rightarrow 5y^2 = 0$, $y = 0$ fals deoarece nu verifica ecuatia doi din enunt , $z \geq 4$, $5y^2 + 6z^2 = 54 \geq 96$ fals .

-Daca $x = 5$, $5y^2 + 6z^2 = 90$, $z = 0$ $\Rightarrow 5y^2 = 90$ fals , $z = 1$ $\Rightarrow$ $5y^2 = 84$, fals , $z = 2$ $\Rightarrow$ $5y^2 = 66$ fals , $z = 3$ $\Rightarrow 5y^2 = 36$, fals , $z \geq 4$, $5y^2 + 6z^2 = 90 \geq 96$ fals .

Daca $z \leq x \leq y$, $4x^2 - 10 = 5y^2 + 6z^2 \leq 4y^2 - 10$, deci $y^2 + 6z^2 \leq -10$ fals .

Daca $z \leq y \leq x$, $17x - 35 = 5y + 6z \leq 5x + 6x$. deci $17x - 35 \leq 11x$, $6x \leq 35$, $x \in \{3,4,5\}$, am analizat aceste cazuri mai sus . Deci $x = 3, y = 2, z = 1$ este singura solutie care verifica ambele ecuatii din enuntul problemei .

Metoda 2 : Rezolv ecuatia diofantica de gradul intai cu trei necunoscute , $17x = 5y + 6z + 35$,

$5(x - y - 1) = 6(z - 2x + 5)$, 5 nu divide 6 deci $5 | z - 2x + 5$, $\frac{x - y - 1}{6} = \frac{z - 2x + 5}{5} = k \in Z$,

$x - y - 1 = 6k, z - 2x + 5 = 5k, \ y = x - 6k - 1, z = 2x + 5k - 5,$ inlocuiesc y si z in cealalta ecuatie $4x^2 = 5y^2 + 6z^2 + 10$, $4x^2 = 5(x - 6k - 1)^2 + 6(2x + 5k - 5)^2 + 10$.

$4x^2 = 5(x^2 + 36k^2 + 1 - 12kx + 12k - 2x) + 6(4x^2 + 25k^2 + 25 + 20kx - 50k - 20x) + 10$,

$4x^2 = 5x^2 + 180k^2 + 5 - 60kx + 60k - 10x + 24x^2 + 150k^2 + 150 + 120kx - 300k - 120x + 10$

$25x^2 + 330k^2 + 60kx + 240k - 130x + 165 = 0$, $5x^2 + 66k^2 + 12kx + 48k - 26x + 33 = 0$,

$5x^2 + (12k - 26)x + 66k^2 + 48k + 33 = 0$, ecuatie de gradul doi in necunoscuta x .

Calculez $\Delta = (12k - 26)^2 - 20 \cdot (66k^2 + 48k + 33) = 144k^2 - 624k + 676 - 1320k^2 - 960k - 660 \geq 0$,

$-1176k^2 - 1584k + 16 \geq 0$, $147k^2 + 198k - 2 \leq 0$, $147k^2 + 198k \leq 2$, $k(147k + 198) \leq 2$, $k \in Z$.

Pentru $k \geq 1$, $k(147k + 198) \geq 1 \cdot 345 = 345$ fals . Pentru $k \leq -2$ e fals deoarece $k(147k + 198) > 2$. Ramane de analizat cazurile $k = 0, k = -1$.

Pentru k=0 , inlocuim k in ecuatia de gradul doi de mai sus si obtinem $5x^2 - 26x + 33 = 0$,

$(x - 3) \cdot (5x - 11) = 0$, $5x - 11 = 0, x = \frac{11}{5} \notin N$, $x - 3 = 0, x = 3 \in N$, $y = x - 6k - 1, z = 2x + 5k - 5,$ $y = 2 \in N, z = 1 \in N$

Pentru $k = -1$, inlocuim k in ecuatia de gradul doi de mai sus si obtinem $5x^2 - 38x + 51 = 0$,

$\Delta = (-38)^2 - 20 \cdot 51 = 1444 - 1020 = 424$, nu este patrat perfect , deci ecuatia de gradul doi nu are solutii numere naturale.

In concluzie $x = 3, y = 2, z = 1$ este singura solutie a acestei probleme.

4. METODE DE REZOLVARE A UNEI PROBLEME DATE LA OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICA , FAZA JUDETEANA 2016

Gheorghe Alexe , profesor , Liceul Tehnologic "Nicolae Titulescu " , Insuratei
George-Florin Serban , profesor , Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" , Braila

Vom prezenta in continuare doua metode de rezolvare a unei probleme date la olimpiada nationala , faza judeteana 2016 , diferite de cele din barem.

Fie $A \in M_2(C)$ **astfel incat** $\det(A^2+A+I_2)=\det(A^2-A+I_2)=3$ **. Demonstrati ca**

$A^2(A^2+I_2)=2I_2$ **. (Clasa a 11-a)**

Solutie : Metoda 1

Folosesc formula (i) $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B)$ **,**

$\det(A^2+A+I_2)+\det(A^2-A+I_2)=6=2\cdot(\det(A^2+I_2)+\det A)$ **, (1)** $\det(A^2+I_2)+\det A=3$ **,**
$\det(A^2+I_2)=3-\det A$ **, (2)** $\det(A^2-I_2)=2(\det A)^2+\det A-1$ **din (i). Folosesc formula**

$\det(A+B+C)+\det A+\det B+\det C=\det(A+B)+\det(B+C)+\det(A+C), (\forall)A,B,C\in M_2(C)$,

$\det(A^2+A+I_2)+\det^2 A+\det A+\det I_2=\det(A^2+I_2)+\det(A^2+A)+\det(A+I_2)$ si

$\det(A^2-A+I_2)+\det^2 A+\det(-A)+\det I_2=\det(A^2+I_2)+\det(A^2-A)+\det(-A+I_2)$ si obtin

(3) $\det(A+I_2)\cdot(1+\det A)=(1+\det A)^2$ **, (4)** $\det(A-I_2)\cdot(1+\det A)=(1+\det A)^2$ **,**

(5) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=2\det A+2$ **, (i)**

(6) $\det(A+I_2)\cdot(1+\det A)=\det(A-I_2)\cdot(1+\det A)=(1+\det A)^2$, le scad

(7) $(1+\det A)\cdot[\det(A+I_2)-\det(A-I_2)]=0$.

Cazul I Daca $\det A=-1$, $\det(A^2+I_2)=4$ si $\det(A^2-I_2)=0$, $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=0$, (5)

$\det(A^2-I_2)=\det(A-I_2)\det(A+I_2)=0=\det(A-I_2)=\det(A+I_2)$

$\begin{cases}(A+I_2)^2-Tr(A+I_2)\cdot(A+I_2)+\det(A+I_2)\cdot \mathrm{I}_2=O_2\\(A-I_2)^2-Tr(A-I_2)\cdot(A-I_2)+\det(A-I_2)\cdot \mathrm{I}_2=O_2\end{cases}$, fie $TrA=t$, $4A=4A+2t\cdot I_2$, $t=0$,

$A^2-(TrA)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2$, $A^2=I_2$.

Cazul II $\det(A+I_2)=\det(A-I_2)$, $\det(A+I_2)=\det(A-I_2)=\det A+1$, (5)
$\det(A^2-I_2)=\det(A-I_2)\det(A+I_2)=(\det A+1)^2=2(\det A)^2+\det A-1=(\det A)^2+2\det A+1$,
$(\det A)^2-\det A-2=0$, $\det A\in\{-1,2\}$. Daca $\det A=-1$ am rezolvat . Daca $\det A=2$, $t=0$,
$A^2+2I_2=O_2$, $A^2=-2I_2$, rezulta $A^2(A^2+I_2)=2I_2$, in cele doua cazuri .

Metoda 2 :

Fie m_A polinomul minimal al matricei A , $A^2(A^2+I_2)=2I_2$ **,** $A^4+A^2-2I_2=O_2$ **,**
$A^4+A^2-I_2-I_2=O_2$ **,**
$(A^2-I_2)\cdot(A^2+I_2)+(A^2-I_2)=(A^2-I_2)\cdot(A^2+2I_2)=(A+I_2)(A-I_2)(A-\sqrt{2}iI_2)(A+\sqrt{2}iI_2)$

Deci $m_A\,|\,(x^4+x^2-2)=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$. Daca $grad(m_A(x))=1$,avem :

Daca $m_A(x)=x+1$, $m_A(\mathrm{A})=A+I_2=O_2$, $A=-I_2$, $\det(A^2+A+I_2)=\det(I_2-I_2+I_2)=1=3$ fals .
Daca $m_A(x)=x-1$, $m_A(\mathrm{A})=A-I_2=O_2$, $A=I_2$, $\det(A^2+A+I_2)=\det(I_2+I_2+I_2)=9=3$ fals.
Daca $m_A(x)=x+\sqrt{2}i$, $m_A(\mathrm{A})=A+\sqrt{2}iI_2=O_2$, $A=-\sqrt{2}iI_2$,
$\det(A^2+A+I_2)=\det(-2I_2-\sqrt{2}iI_2+I_2)=(-1-\sqrt{2}i)^2=3$ fals . Daca $m_A(x)=x-\sqrt{2}i$,
$m_A(\mathrm{A})=A-\sqrt{2}iI_2=O_2$, $A=\sqrt{2}iI_2$, $\det(A^2+A+I_2)=\det(-2I_2+\sqrt{2}iI_2+I_2)=(-1+\sqrt{2}i)^2=3$, fals .
Daca $grad(m_A(x))=2=grad(\mathrm{p}_A(x))$, unde p_A este polinomul caracteristic al matricei A.

Aplic Teorema lui Frobenius , m_A si p_A au aceiasi divizori ireductibili peste C[x] .

$A^2-(TrA)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2$, $TrA=a$, $\det A=b$, $A^2=aA-b\cdot I_2$. Daca $m_A(x)=x^2-1$,
$m_A(\mathrm{A})=A^2-I_2=O_2$, $A^2=I_2$, $p_A(x)=x^2-ax+b=\det(A-xI_2)$, deci $a=0,b=-1$,
$\det(A^2+A+I_2)=\det(I_2+A+I_2)=\det(A+2I_2)=p(-2)=4+2a+b=4+0-1=3$,
$\det(A^2-A+I_2)=\det(I_2-A+I_2)=\det(-A+2I_2)=p(2)=4-2a+b=4+0-1=3$. $A^2=I_2$,
atunci $A^2(A^2+I_2)=2I_2$ **.**
Daca $m_A(x)=x^2+2$, $m_A(\mathrm{A})=A^2+2I_2$, $A^2=-2I_2$,deci $a=0,b=2$
$\det(A^2+A+I_2)=\det(-2I_2+A+I_2)=\det(A-I_2)=p(1)=1-a+b=1-0+2=3$,

$\det(A^2 - A + I_2) = \det(-2I_2 - A + I_2) = \det(-A - I_2) = p(-1) = 1 + a + b = 1 + 0 + 2 = 3$, Daca $m_A(x) = (x-1)(x+\sqrt{2}i) = \mathrm{x}^2 + (\sqrt{2}i - 1)x - \sqrt{2}i$, $a = \sqrt{2}i - 1, b = -\sqrt{2}i$,

$m_A(\mathrm{A}) = A^2 + (\sqrt{2}i - 1)\,\mathrm{A} - \sqrt{2}i \cdot I_2 = O_2$, $A^2 = (-\sqrt{2}i + 1)\,\mathrm{A} + \sqrt{2}i \cdot I_2$,

$\det(A^2 + A + I_2) = \det((-\sqrt{2}i + 1)\,\mathrm{A} + \sqrt{2}i \cdot I_2 + A + I_2) = \det((-\sqrt{2}i + 2)\,\mathrm{A} + (\sqrt{2}i + 1) \cdot I_2)$,

$\det((-\sqrt{2}i + 2)\,\mathrm{A} + (\sqrt{2}i + 1) \cdot I_2) = (-\sqrt{2}i + 2)^2 \det(\mathrm{A} + \dfrac{\sqrt{2}i + 1}{-\sqrt{2}i + 2} \cdot I_2) = (-4\sqrt{2}i + 2)\det(\mathrm{A} + \dfrac{\sqrt{2}i}{2} \cdot I_2)$

$(-4\sqrt{2}i + 2)\det(\mathrm{A} + \dfrac{\sqrt{2}i}{2} \cdot I_2) = (-4\sqrt{2}i + 2) \cdot p(-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}) = (-4\sqrt{2}i + 2) \cdot [\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}i}{2}(\sqrt{2}i - 1) - \sqrt{2}i]$

$= (-4\sqrt{2}i + 2) \cdot (\dfrac{-3}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}i}{2}) = 3\sqrt{2}i - 15 = 3$ fals . Analog se analizeaza celelate cazuri (care sunt false) , $m_A(x) = (x-1)(x-\sqrt{2}i)$, $m_A(x) = (x+1)(x-\sqrt{2}i)$ si $m_A(x) = (x+1)(x+\sqrt{2}i)$.

5. INEGALITATI “TRIUNGHIULARE”

Profesor Tilinca Daniela - Şcoala “Fanus Neagu” Braila
Profesor Mihaila Adriana - Liceul Teoretic “Mihail Sebastian”

Inegalitatile reprezinta un capitol vast al matematicii cu aplicatii diverse atit in algebra cit si in geometrie.Probleme care la prima vedere par dificile se rezolva elegant si usor cu inegalitati.In ultima vreme la olimpiadele scolare apar foarte multe probleme ce contin inegalitati sau se rezolva mai usor cu inegalitati.Vom prezenta citeva exercitii aparute la olimpiade si concursuri scolare care sunt interesante prin tehnica de rezolvare si care au la baza inegalitatea triunghiului.Ideea temei a pornit de la exercitiul numarul 3 dat la olimpiada nationala 2016 la clasa a VIII-a.

1)Daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc relatia

$$\frac{3}{2}\le\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{a+c}{a+c+2b}+\frac{a+b}{a+b+2c}<\frac{5}{3}(ONM-2016-clasa\ \text{a-}VIII-a)$$

Inegalitatea intra in categoria inegalitatilor conditionate ,numerele a,b,c fiind laturile unui triunghi ,sunt pozitive si verifica inegalitatea triunghiului ,adica a<b+c,b<c+a,c<a+b

In prima parte inlocuind $b+c+2a=m;a+c+2b=n;a+b+2c=p \Rightarrow a=\frac{3m-n-p}{4}$;

$$b=\frac{3n-m-p}{4};c=\frac{3p-n-m}{4}$$

$$\frac{3}{2}\le\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m+p-n}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}/\cdot 2 \text{ si distribuind parte cu parte} \Rightarrow$$

$$(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})+(\frac{m}{p}+\frac{p}{m})+(\frac{n}{p}+\frac{p}{n})\ge 6 \text{ adevarata pentru ca daca a,b>0} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$$

inegalitatea a<b+c $\Leftrightarrow$ 3a+3b+3c>4a+2b+2c $\Leftrightarrow \frac{2}{3(a+b+c)}<\frac{1}{2a+b+c}\Leftrightarrow\frac{4a}{3(a+b+c)}<\frac{2a}{2a+b+c}$

$$\Leftrightarrow\frac{4a}{3(a+b+c)}<1-\frac{b+c}{2a+b+c};ana\log\frac{4b}{3(a+b+c)}<1-\frac{a+c}{2b+a+c};\frac{4c}{3(a+b+c)}<1-\frac{a+b}{2c+a+b}$$

adunand inegalitatile obtinute obtinem $\frac{4}{3}<3-(\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{a+c}{a+c+2b}+\frac{a+b}{a+b+2c})\Leftrightarrow$

$$\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{a+c}{a+c+2b}+\frac{a+b}{a+b+2c}<\frac{5}{3}$$

2)Daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc dubla inegalitate

$ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 < 2ab+2ac+2bc$

Rezolvare

Prima parte este o inegalitate cunoscuta care inmultita cu 2 si trecuti toti termenii in aceiasi parte obtinem inegalitatea $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 \geq 0$

pentru partea a doua folosim inegalitatea tringhiului sub forma $|b-c| < a; |a-c| < b; |b-a| < c$

prin ridicare la patrat =>$(b-c)^2 < a^2; (a-c)^2 < b^2; (a-b)^2 < c^2$ si adunate parte cu parte=>

$a^2+b^2+c^2 < 2ab+2ac+2bc$

3) Daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$(concurs Ungaria)

Rezolvare

Inegalitatea se poate deconditiona astfel: a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi daca si numai daca exista trei numere pozitive x,y,z astfel incat sa avem a=y+z,b=z+x,c=x+y inlocuind in inegalitate obtinem neconditionata

$(y+z)(y-z)^2+(z+x)(z-x)^2+(x+y)(x-y)^2+4(x+y)(x+z)(y+z) > (y+z)^3+(x+z)^3+(y+x)^3$

$\Leftrightarrow 8xyz > 0$

4)Aratati ca in orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$\frac{a}{p^2+ap+bc}+\frac{b}{p^2+bp+ca}+\frac{c}{p^2+cp+ba} < \frac{1}{p}$ unde p=perimetrul triunghiului

Rezolvare

folosim inegalitatea tringhiului sub forma $|b-c| < a; |a-c| < b; |b-a| < c$

prin ridicare la patrat =>$(b-c)^2 < a^2; (a-c)^2 < b^2; (a-b)^2 < c^2 \Rightarrow (b+c)^2-a^2 < 4bc \Rightarrow$

$p(p-a) < bc \Rightarrow p^2 < ap+bc \Rightarrow \frac{1}{p^2+ap+bc} < \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{a}{p^2+ap+bc} < \frac{a}{2p^2};$

analog $\frac{b}{p^2+bp+ca} < \frac{b}{2p^2}; \frac{c}{p^2+bp+ca} < \frac{c}{2p^2}$ adunand relatiile parte cu parte =>

$\frac{a}{p^2+ap+bc}+\frac{b}{p^2+bp+ca}+\frac{c}{p^2+cp+ba} < \frac{1}{p}$

5)Daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0\ (OIM)$

Rezolvare

Inegalitatea se poate deconditiona astfel: a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi daca si numai daca exista trei numere pozitive x,y,z astfel incat sa avem a=y+z,b=z+x,c=x+y inlocuind in inegalitate obtinem neconditionata

$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geq 0 \Rightarrow$

$xy^3+yz^3+zx^3\geq x^2yz+y^2xz+z^2xy$ /:xyz=> $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geq x+y+z$ dar folosind inegalitatea

$\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}+\frac{x^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$;a,b,c>0(CBS)=> $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z$

6)Daca a,b,c,d sunt laturile unui patrulater atunci are loc inegalitatea

$(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)\leq(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$

Re*zol* var*e*

Daca a,b,c,d sunt laturile unui patrulater atunci a,b,c,d>0 si suma oricaror trei dintre ele este mai mare decat al patrulea .Deconditionam inegalitatea folosind substitutiile

x=b+c+d-a;y=c+d+a-b;z=d+a+b-c;t=a+b+c-d =>x,y,z,t>0=>

$a=\frac{y+z+t-x}{4}$ $b=\frac{x+z+t-y}{4}$ $c=\frac{y+x+t-z}{4}$ $t=\frac{y+z+x-t}{4}$ => dupa inlocuire $xyzt\leq\frac{z+t}{2}\cdot\frac{x+t}{2}\cdot\frac{y+x}{2}\cdot\frac{z+y}{2}$

care se sparge in $\sqrt{zt}\leq\frac{z+t}{2},\sqrt{xt}\leq\frac{x+t}{2},\sqrt{zy}\leq\frac{z+y}{2},\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$

cu egalitate daca x=y=z=t =>a=b=c=d

Cu aceleasi metode mentionate se rezolva exercitiile:

7) Aratati ca daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$\frac{2}{3}\leq\frac{a}{b+c+2a}+\frac{b}{a+c+2b}+\frac{c}{a+b+2c}<1$

8)Aratati ca daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

9)Aratati ca daca a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leq\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ unde p este semiperimetrul triunghiului.

Bibliografie:

1)"Va place matematica"-Traian Cohal –editura Moldova
2) "Inegalitati-idei si metode"Mihai Onucu Drimbe-editura Gil
3) "Olimpiadele nationale ale Romaniei si Republicii Moldova"-Artur Balauca-editura Taida

6. ÎN LEGĂTURĂ CU O INEGALITATE ÎN TRIUNGHI DIN LISTA SCURTĂ A ONM 2007

Marin Chirciu[1]

La Olimpiada Națională de Matematică desfășurată la Pitești în perioada 9-14 aprilie 2007 printre problemele avute în atenția comisiei de selecție, de la clasele a IX-a și a X-a se află o inegalitate în triunghi propusă de Cosmin Pohoață, elev București,

„Demonstrați că în orice triunghi $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9r}{4R+r}\geq 4$”

Articolul își propune să dezvolte această inegalitate și să pună în evidență și alte inegalități referitoare la cantitatea remarcabilă din triunghi $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2$, care apare în:

$$\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+1\geq 4;\quad \sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2\geq 1;\quad \sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}\geq\sqrt{3};$$

$$\sum\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{4R}\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+1\right]\geq\frac{1}{R};\quad \sum\frac{\operatorname{cosec}A}{p-a}=\frac{1}{2r}\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+1\right]\geq\frac{2}{r}.$$

În continuare vom demonstra următoarele inegalități:

a) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9r}{4R+r}\geq 4$.

Cosmin Pohoața,ONM 2007,SHL

b) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{nr}{4R+r}\geq 3+\frac{n}{9}$, unde $n\in[-27,\ 9]$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție:</u> Inegalitatea este echivalentă cu $p^2\left[(n+27)(4R+r)-9nr\right]\leq 9(4R+r)^3$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. Rămâne de demonstrat că

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(n+27)(4R+r)-9nr\right]\le 9\left(64R^3+48R^2r+12Rr^2+r^3\right)$.

După calcule obținem $\left(R-2r\right)\left[(36-4n)R^2+(45-4n)Rr+(9-3n)r^2\right]\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\ge 2r$ și din $n\le 9$.

Obs. Pentru $n=9$ se obține a).

c) $\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2+\dfrac{16r}{9R}\ge\dfrac{35}{9}$.

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu $p^2\left(35R-16r\right)\le 9R(4R+r)^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Rămâne de demonstrat că

$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(35R-16r\right)\le 9R\left(16R^2+8Rr+r^2\right)$.

După calcule obținem $\left(R-2r\right)^2\left(R+3r\right)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\ge 2r$.

c₁) $\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2+\dfrac{2r}{R}\ge 4$.

Art of Problem Solving, 6/2016

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu $2p^2(2R-r)\le R\left(4R+r\right)^2$, adevărată din $p^2\le\dfrac{R\left(4R+r\right)^2}{2(2R-r)}$ (mai tare decât inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$) care rezultă din $H\Gamma^2=4R^2\left[1-\dfrac{2p^2(2R-r)}{R\left(4R+r\right)^2}\right]\ge 0$, unde $\Gamma=$ punctul lui Gergonne (intersecția liniilor AA_1, BB_1, CC_1, unde A_1, B_1, C_1 sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului ABC).

c₂) $\sum\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}\ge 2-8\prod\sin\dfrac{A}{2}$.

Crux Mathematicorum 9/1983, Jack Garfunkel,USA

Soluție:Deoarece $\sum\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}=\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2-2$ și $\prod\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{4R}$,inegalitatea c_2) este echivalentă cu inegalitatea c_1).

d) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 3+\frac{n}{2}$, unde $-6\leq n\leq\frac{16}{9}$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu $p^2\left[(n+6)R-2nr\right]\leq 2R(4R+r)^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. Rămâne de demonstrat că

$$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(n+6)R-2nr\right]\leq 2R\left(16R^2+8Rr+r^2\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left[(8-4n)R^2+(8-4n)Rr-3nr^2\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

d$_1$) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 3+\frac{n}{2}$, unde $n\in[-6,\ 2]$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu $p^2\leq\frac{2R(4R+r)^2}{(n+6)R-2nr}$, adevărată din inegalitatea lui Gergonne $p^2\leq\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2(2R-r)}$. Rămâne de demonstrat că $\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2(2R-r)}\leq\frac{2R(4R+r)^2}{(n+6)R-2nr}\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow R(2-n)\geq 2r(2-n)$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$ și $n\leq 2$

e) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{r}{4R+r}\geq\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{r}{R}\geq\frac{7}{2}$.

Soluție: Prima inegalitate este echivalentă cu $\frac{9r}{2(4R+r)}\geq\frac{r}{R}\Leftrightarrow 9R\geq 8R+2r\Leftrightarrow R\geq 2r$, inegalitatea lui Euler.

A doua inegalitate rezultă din d) pentru $n = 1$.

e$_1$) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9r}{4R+r}\geq\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{2r}{R}\geq 4$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Prima inegalitate este echivalentă cu $R\geq 2r$, inegalitatea lui Euler. Pentru a doua inegalitate luăm $n = 2$ în d$_1$).

Obs. e$_1$) este o îmbunătățire a lui a).

f) $\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2+\left(\dfrac{p}{r}\right)^2\ge 30$.

g) $\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2+n\left(\dfrac{p}{r}\right)^2\ge 27n+3$, unde $n\ge 0$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Folosind inegalitatea lui Gerretsen: $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$, obținem:

$\dfrac{(4R+r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2}+n\cdot\dfrac{16Rr-5r^2}{r^2}\overset{(1)}{\ge}27n+3$, unde (1) este echivalent cu:

$(R-2r)\left[64nR^2+(4+64n)Rr+(4+48n)r^2\right]\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\ge 2r$.

Obs. Pentru $n = 1$ se obține f).

h) $\dfrac{4R+r}{p}\ge\sqrt{3}$.

Inegalitatea lui T. Doucet, 1872

Soluție: Folosim inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

i) $\dfrac{4R+r}{p}\le\dfrac{p}{3r}$.

G. Colombier – T. Doucet, 1872

Soluție: Folosim inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

i$_1$) $\sqrt{3}\le\dfrac{4R+r}{p}\le\dfrac{p}{3r}\Leftrightarrow 3\le\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2\le\dfrac{p^2}{9r^2}\Leftrightarrow\ 9r(4R+r)\le 3p^2\le(4R+r)^2$.

Nuov.Ann.Math.31(1872),G. Colombier – T. Doucet,O.Bottema,cdp

Soluție: Vezi h) și i).

j) $1+\left(\dfrac{4R+r}{p}\right)^2\le\dfrac{2R}{r}$.

Soluție:

Inegalitatea este echivalentă cu $p^2(2R-r)\ge 2(4R+r)^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\ge 16Rr-5r^2$. Rămâne de demonstrat că $\left(16Rr-5r^2\right)(2R-r)\ge r(4R+r)^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(R-2r)(8R-r)\ge 0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\ge 2r$.

k) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+2n-3\le\frac{nR}{r}$, unde $n\ge1$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu $p^2\left[nR+(3-2n)r\right]\ge r(4R+r)^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\ge16Rr-5r^2$. Rămâne de demonstrat că

$\left(16Rr-5r^2\right)\left[nR+(3-2n)r\right]\ge r(4R+r)^2 \Leftrightarrow (R-2r)\left[(16n-16)R+98-5n)r\right]\ge0$, evident din inegalitatea lui Euler: $R\ge2r$ și $n\ge1$.

l) $4-\frac{9r}{4R+r}\le\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\le\frac{2R}{r}-1$.

Soluție: Vezi a) și j).

m) $3+\frac{n}{9}-\frac{nr}{4R+r}\le\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\le3-2n+\frac{nR}{r}$, unde $1\le n\le9$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Vezi b) și k).

n) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\ge2+\frac{2r}{R}$.

RMT 1/1990, C. Cocea, Iași

Soluție: Se folosește inegalitatea lui Doucet: $4R+r\ge p\sqrt{3}$ și se obține

$$M_s=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\ge3\overset{(1)}{\ge}2+\frac{2r}{R}=M_d$$, unde $(1)\Leftrightarrow R\ge2r$, inegalitatea lui Euler.

n$_1$) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\ge n\left(\frac{r}{R}-\frac{1}{2}\right)+3$, unde $n\ge0$.

Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Se folosește inegalitatea lui Doucet: $4R+r\ge p\sqrt{3}$ și inegalitatea lui Euler: $R\ge2r$.

Bibliografie:

1. Cosmin Pohoață, A 58-a Olimpiadă Națională de Matematică, Pitești 9-14 aprilie 2007, Supliment al revistei Gazeta Matematică.
2. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.

7. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE SCOLARE DIN JUD. OLT

Propuse de prof. Elena Pirnog

1. Fie $n,k\in N^{*},k>2$ două numere date şi mulţimea $G=(n,\infty)\setminus\{n+1\}$ pe care definim legea

$$x*y=(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}+n,(\forall)x,y\in G$$

Demonstraţi că perechea $(G,*)$ formează grup abelian.

Soluţie:

G₀. Arătăm că "$*$" este lege de compoziţie pe G, adică $(\forall)x,y\in G$ avem $x*y\in G$

$$x*y=(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}+n>n \text{ deoarece } (x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}>0$$

$$x*y\neq n+1\Leftrightarrow(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}+n\neq n+1\Leftrightarrow(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}\neq 1$$

Adevărat deoarece $x-n\neq 1$şi $\lg\sqrt[k]{y-n}\neq 0\Leftrightarrow y-n\neq 1$

G_1. Asociativitate

$$(x*y)*z=x*(y*z),(\forall)x,y,z\in G$$

$$(x*y)*z=\left((x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}+n\right)*z=\left[(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}}+n-n\right]^{\lg\sqrt[k]{z-n}}+n=$$

$$=(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}\cdot\lg\sqrt[k]{z-n}}+n \quad (1)$$

$$x*(y*z)=x*\left[(y-n)^{\lg\sqrt[k]{z-n}}+n\right]=(x-n)^{\lg\sqrt[k]{(y-n)^{\lg\sqrt[k]{z-n}}+n-n}}+n=$$

$$=(x-n)^{\lg(y-n)\frac{\lg\sqrt[k]{z-n}}{k}}+n=(x-n)^{\lg\sqrt[k]{y-n}\cdot\lg\sqrt[k]{z-n}}+n \quad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ legea este asociativă.

G_2. Element neutru

$(\exists)\ e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x,\ (\forall) x \in G$

$$x * e = x \Leftrightarrow (x-n)^{\lg \sqrt[k]{(e-n)}} + n = x \Leftrightarrow (x-n)^{\lg \sqrt[k]{e-n}} = x - n \Leftrightarrow \frac{1}{k}\lg(e-n) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = 10^k + n \in G \ (e > n \text{ şi } e \neq n+1)$$

G$_3$. <u>Elemente simetrizabile</u>

$(\forall) x \in G \quad (\exists) x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = e \Leftrightarrow (x-n)^{\lg \sqrt[k]{x'-n}} + n = 10^k + n \Leftrightarrow (x-n)^{\lg \sqrt[k]{x'-n}} = 10^k$$

$$\Leftrightarrow \lg \sqrt[k]{x'-n} \cdot \lg(x-n) = \lg 10^k \Leftrightarrow \lg(x'-n) \cdot \lg(x-n) = k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x'-n) = \frac{k^2}{\lg(x-n)} \Leftrightarrow x' - n = 10^{\frac{k^2}{\lg(x-n)}} \Leftrightarrow x' = 10^{\frac{k^2}{\lg(x-n)}} + n > n$$

să arătăm că

$x' \neq n+1$ adică $10^{\frac{k^2}{\lg(x-n)}} \neq 1$, adevărat deoarece $k \neq 0$

G$_4$. <u>Comutativitate</u>

$x * y = y * x (\forall) x, y \in G$.

$x * y = y * x \Leftrightarrow (x-n)^{\lg \sqrt[k]{y-n}} + n = (y-n)^{\lg \sqrt[k]{x-n}} + n$ logaritmând avem

$\lg \sqrt[k]{y-n} \cdot \lg(x-n) = \lg \sqrt[k]{x-n} \cdot \lg(y-n) \Leftrightarrow \lg(y-n) \cdot \lg(x-n) = \lg(x-n) \cdot \lg(y-n)$ adevărat.

Olimpiada de matematică, etapa locală (profil M$_1$)

– Slatina 2012 –

2. Fie funcţia $f : R \to R,\ f(x) = e^{mx} - x + 1$

Unde $m = \min\limits_{x \in R_+} \left(x^2 - x + 1,\ \ 2012^x \right)$

1. Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei *f*
2. Calculaţi $\int_1^2 f(x)dx$

Soluţie.

Fie funcţia $g : R_+ \to R, g(x) = x^2 - x + 1$

Pe $[0,\infty)$ funcţia *g* admite un minim:

$y_{\min} = \frac{3}{4}$ pentru $x = \frac{1}{2}$

Funcţia $h : R_+ \to R, h(x) = 2012^x$ este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, deci

$\min h(x) = 2012^0 = 1$

$m = \min\left\{\frac{3}{4}, 1\right\} = \frac{3}{4}$

$f(x) = e^{\frac{3}{4}x} - x + 1,\quad f'(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}x} - 1.\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{4}x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\ln\frac{4}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}\ln\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + + +

Intervalele de monotonie sunt:

Pe $\left(-\infty, \frac{4}{3}\ln\frac{4}{3}\right]$ funcţia *f* este descrescătoare, Pe $\left[\frac{4}{3}\ln\frac{4}{3},\infty\right)$ funcţia *f* este crescătoare.

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(e^{\frac{3}{4}x}-x-1\right)dx=\int_1^2 e^{\frac{3}{4}x}dx-\int_1^2 xdx-\int_1^2 dx$$

$$=\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x}\Big|_1^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-x\Big|_1^2=\frac{4}{3}\left(e^{\frac{3}{2}}-e^{\frac{3}{4}}\right)-\frac{5}{2}$$

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici" etapa locală,

– Slatina 2011 –

3. Se consideră funcţia $f:R\to R$

$$f(x)=\begin{cases}\left(x^2+2x-3\right)\operatorname{sgn}\left(x^2+2x-3\right), & x\le -4\\ \sqrt{x^2+9}, & x>-4\end{cases}$$

Arătaţi că funcţia *f* admite primitive pe *R* şi calculaţi mulţimea primitivelor sale.

<u>Soluţie:</u>

Notăm cu $g:R\to R,\quad g(x)=x^2+2x-3$

Din tabelul de semne al funcţiei *g*,

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g(x)$		$++++++$	0	$-----$	0	$++++++$	

pe $(-\infty,-4]$

$g(x)>0\Rightarrow \operatorname{sgn}(x)=1$

Deci $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\le -4\\ \sqrt{x^2+9}, & x>-4\end{cases}$

Pentru a arăta că *f* admite primitive pe *R* este suficient să arătăm că *f* este continuă pe *R*

Cum f este continuă pe $(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$ şi $f(-4-0)=f(-4)=f(-4+0)=5$ rezultă că f estecontinuă în punctul $x=-4$ şi deci continuă pe *R*. În concluzie, *f* admite primitive pe *R*.

Pentru a determina mulţimea primitivelor funcţiei *f*, procedăm astfel:

Presupunem că $F:R\to R$ este o primitivă a lui *f* de forma

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+C_1, & x\le -4\\ \dfrac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{x^2+9}+9\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right]+C_2, & x>-4\end{cases}$$

Determinăm constantele C_1 şi C_2 astfel încât funcţia *F* să fie continuă şi derivabilă pe *R*.

$$F(-4-0)=F(-4)=F(-4+0)\Leftrightarrow \frac{20}{3}+C_1=-10+C_2\Leftrightarrow\frac{50}{3}+C_1=C_2$$

Deci

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+C, & x\le -4\\ \dfrac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{x^2+9}+9\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right]+\dfrac{50}{3}+C, & x>-4\end{cases}$$

Funcţia *F* este continuă pe *R* şi derivabilă pe $R\setminus\{-4\}$, în $x=-4$ avem

(conform corolarului teoremei lui Lagrange) $F_s'(-4)=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x<-4}} f(x)=+5=\lim\limits_{\substack{x\to-4\\ x>-4}} f(x)=F_d'(-4)$

Deci *F* este derivabilă pe *R*

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici" etapa locală,

– Slatina 2012 –

4.

I. Pe **Z** definim legea de compoziţie

$$x * y = xy + 3x + 3y + 6$$

a) Determinaţi elemental neutru al legii "$*$"

b) Care sunt elementele simetrizabile

Soluţie:

a) $(\exists)e \in Z$ a.î. $x * e = e * x = x, \ (\forall)x \in Z$

$$x * e = x \Leftrightarrow xe + 3x + 3e + 6 = x \Leftrightarrow e(x+3) = -2(x+3) \Rightarrow e = -2$$

$$e * x = x \Leftrightarrow ex + 3e + 3x + 6 = x \Leftrightarrow e(x+3) = -2(x+3) \Rightarrow e = -2$$

b) $(\forall)x \in Z, \ (\exists)x' \in Z \ a. \ i \ x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = e \Leftrightarrow xx' + 3x + 3x' + 6 = -2 \Leftrightarrow x'(x+3) = -8 - 3x \Leftrightarrow x' = \frac{-8-3x}{x+3}$$

$x' = -3 + \dfrac{1}{x+3}, \quad x' \in Z$ dacă $x \in \{-2, -4\}$

$x' * x = e \Leftrightarrow x'x + 3x' + 3x + 6 = -2 \Leftrightarrow x'(x+3) = -3x - 8$ adică

$$x' = -3 + \frac{1}{x+3} \in Z \quad dacă \ x \in \{-2, -4\}$$

Deci elementele simetrizabile sunt -2 şi -4

II. Se dă funcţia $f : [-3,3] \to R, \ f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Să se demonstreze că $0 \le \int_{-3}^{3} f(x)dx \le 18$

Soluţie:

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}, \quad f'(x)=0 \ \ pt. \ \ x=0$$

x	-3		0		3
$f'(x)$		$+ + + + + + + + + + + +$	0	$- - - - - - - - - -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$M=3, \ \ m=0$

Aplicăm teorema de medie: $0[3-(-3)]\le \int_{-3}^{3} f(x)dx \le 3(3+3)$ adică $0\le \int_{-3}^{3} f(x)dx \le 18$

III. Se comsideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c, \quad a,b,c\in R$

Să se determine numerele reale *a,b,c* ştiind că $f(i)-f(1)=2008$, unde $i^2=-1$

Soluţie:

$$f(i)-f(1)=-a-b+i(b-a)$$

$$-a-b+i(b-a)=2008 \Rightarrow a=b=-1004, \ \ c\in R$$

IV. Se consideră funcţiile $f,g;R\to R; \ \ f(x)=3^x, \ \ g(x)=3^{2-x}$

Să se arate că $\int_0^1 (f(x)dx-g(x)dx)\le 0$

Soluţie:

$$\int_0^1 (f(x)dx-g(x)dx)=\int_0^1 \left(3^x-3^{2-x}\right)dx=\left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^1+\left.\frac{3^{2-x}}{\ln 3}\right|_0^1=\frac{-4}{\ln 3}\le 0$$

5. Calculaţi:

$\int \frac{a\sqrt{x^2-k^2}+b\sqrt{x^2+k^2}}{\sqrt{x^4-k^4}}\,dx$ unde $a, b \in R;\ k > 0\ şi\ x > k$

Soluţie:

$$\int \frac{a\sqrt{x^2-k^2}+b\sqrt{x^2+k^2}}{\sqrt{x^4-k^4}}\,dx = \int \frac{a\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{(x^2-k^2)(x^2+k^2)}}\,dx + \int \frac{b\sqrt{x^2+k^2}}{\sqrt{(x^2-k^2)(x^2+k^2)}}dx$$

$$= \int \frac{a}{\sqrt{x^2+k^2}}dx + \int \frac{b}{\sqrt{x^2-k^2}}dx = a\,ln\left(x+\sqrt{x^2+k^2}\right) + \frac{b}{2k}ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right| + c$$

6. Pe $(0,\infty)$ definim legea de compoziţie $x * y = x^{lgy^n}, unde\ \ n \in N^*$

1. Arătaţi că legea $" * "$ este comutativă şi cercetaţi existenţa elementului neutru.
2. Pentru *n=2* rezolvaţi ecuaţia $3 * 10^x = 9$

Soluţie:

1. Comutativitate

$x * y = y * x, (\forall)x, y \in (0,\infty)$ adică

$x^{lgy^n} = y^{lgx^n}, (\forall)x, y \in (0,\infty)$.

Logaritmând în baza 10 egalitatea de mai sus, avem:

$lg\left(x^{lgy^n}\right) = lg\left(y^{lgx^n}\right) \Leftrightarrow lg\,y^n \cdot lgx = lg\,x^n \cdot lgy \Leftrightarrow n\,lgy\lg x = n\,lgx\,lgy$, adevărat $\Rightarrow$ legea $" * "$ este comutativă.

Element neutru

$(\exists)\ e \in (0,\infty)$ astfel încât $x * e = e * x = x, (\forall)\ x \in (0,\infty)$

Legea fiind comutativă e suficient să arătăm că $x * e = x$ adică $x^{lg\,e^n} = x \Leftrightarrow lg\,e^n = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lg e = \frac{1}{n} \Leftrightarrow e = 10^{\frac{1}{n}} \in (0,\infty)$$

2.

$3 * 10^x = 9 \Leftrightarrow 3^{lg(10^x)^2} = 9 \Leftrightarrow 3^{lg10^{2x}} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x} = 9 \Leftrightarrow x = 1$

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici" etapa locală,

– Slatina 2013 –

8. SOLUȚII PROBLEMA LUNII IULIE 2016

Fie numerele $a,b>0$ **,** $a-b\geq\frac{1}{2}$ **si** $(a-b)^2\geq a+b$ **. Sa se arate ca** $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq\frac{1}{4}$ **.**

Prof. George-Florin Șerban ,Brăila

Soluție autor: $a^2-2ab+b^2-a-b\geq 0$, $4a^2-8ab+4b^2-4a-4b\geq 0$, $(4a^2+4b^2+1-8ab+4b-4a)-8b-1\geq 0$, $(2a-2b-1)^2\geq(\sqrt{8b+1})^2$, $2a-2b-1\geq\sqrt{8b+1}$, deoarece $2a-2b-1\geq 0$, deci $a\geq\frac{2b+1+\sqrt{8b+1}}{2}$. Arat ca $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq\frac{1}{4}$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq\frac{1}{2}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\geq\sqrt{\frac{2b+1+\sqrt{8b+1}}{2}}-\sqrt{b}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{2b+1+\sqrt{8b+1}}{2}}\geq\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, ridic la patrat

$\frac{2b+1+\sqrt{8b+1}}{2}\geq b+\frac{1}{2}+\sqrt{2b}$, $2b+1+\sqrt{8b+1}\geq 2b+1+2\sqrt{2b}$, $\sqrt{8b+1}\geq 2\sqrt{2b}$, $8b+1\geq 8b$ (A).

ALTE SOLUȚII

1. Prof. Nela Ciceu, Bacău şi prof. Roxana Mihaela Stanciu, Buzău.

$$(a-b)^2\geq a+b\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq a+b$$

$$\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq\frac{a+b}{a+b+2\sqrt{ab}}\geq\frac{a+b}{a+b+a+b}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq\frac{1}{4}$$

Observaţie. Una dintre condiţiile din enunţul problemei şi anume $a-b\geq\frac{1}{2}$ nu este necesară!

2. Prof. Biro Istvan

Să presupunăm că există numerele pozitive a și b care satisfac concomitent condițiile din enunț și egalitatea $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\frac{1}{2}$. Rezultă că $a=b+\sqrt{2b}+\frac{1}{2}$ și nu satisface ultima condiție deoarece $(a-b)^2=2b+\sqrt{2b}+\frac{1}{4}<b+\sqrt{2b}+\frac{1}{2}+b=a+b$. În concluzie avem de arătat o inegalitate strictă care într-adevăr este adevărată:

$$(a-b)^2-(a+b)+\frac{1}{4}>0 \qquad / \ + \ (a+b)^2$$

$$(a+b)^2-(a+b)+\frac{1}{4}>(a+b)^2-(a-b)^2$$

$$\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2>4ab$$

$$a+b-\frac{1}{2}>2\sqrt{ab} \text{ , } deoarece \ a+b>a-b\geq\frac{1}{2} \text{ ,}$$

inegalitate echivalentă cu $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>\frac{1}{4}$.

9. CONCURS - PROBLEMA LUNII AUGUST 2016

Se consideră unghiul propriu ascuţit xOy **în spaţiu şi un punct** $M \in Int\, xOy$ **. Fie** $N \in (Ox$ **şi** $P \in (Oy$ **astfel încât perimetrul triunghiului** MNP **să fie minim. Considerând că** $\left[Ox,\ \alpha = m\left(OM, Ox\right),\ m = d\left(O, M\right)\right)$ **sunt fixe, iar** $(Oy$ **variabilă, să se determine locul geometric al punctului** P**.**

Autor: Prof. Constantin Telteu,

COLEGIUL NATIONAL DE ARTE „REGINA MARIA”, Constanţa

Din athiva www.mateinfo.ro (P.S.18.10.2010)