

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. OTHER SOLUTIONS FOR TWO PROBLEMS FROM THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY ... PAG. 2
Neculai Stanciu, Titu Zvonaru
2. JOURNAL CRUX SOLUTIONS TO PROBLEMS MATHEMATICORUM ... PAG. 4
George Florin Șerban
3. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 27281 DIN GM 10/2016 ... PAG. 7
Marin Chirciu
4. REZOLVAREA ECUAȚIILOR IRAȚIONALE CU AJUTORUL SUBSTITUȚIILOR ... PAG. 11
Pop Adela Terezia
5. NUMERE TRANSCENDENTE ... PAG. 16
Amariei Laura
6. PREDAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE ... PAG. 30
Amariei Laura
7. FRAȚII ZECIMALE. SUME. PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASA A-V-A ... PAG. 41
Apostol Adelina Monica
8. PĂTRATE MAGICE ... PAG. 44
Elena-Marcela Alexandru
9. Soluții – PROBLEMA LUNII IANUARIE 2017... PAG. 50
Biro Istvan
10. PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2017... PAG. 64
Constantin Telteu

1. Other solutions for two problems from The American Mathematical Monthly

by Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Romania and
Titu Zvonaru, Comănești, Romania.

11816. *Proposed by Sabin Tabirca, University College Cork, Cork, Ireland.* Let ABC be an acute triangle, and let B_1 and C_1 be the points where the altitudes from B and C intersect the circumcircle. Let X be a point on arc BC , and let B_2 and C_2 denote the intersections of XB_1 with AC and XC_1 with AB , respectively. Prove that the line B_2C_2 contains the orthocenter of ABC .

The point B_1 is the reflection of the point H with respect to the side AC .

We have

$$\begin{aligned}\angle C_2HB_2 &= \angle C_2HC_1 + \angle C_1HB_1 + \angle B_1HB_2 = \angle C_2C_1C + 180^\circ - \angle BAC + \angle B_2B_1B = \\ &= \angle CBX + \angle BCX + 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BXC + 180^\circ - \angle BAC = \\ &= \angle BAC + 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ, \text{ and we are done.}\end{aligned}$$

11823. *Proposed by Sabin Tabirca, University College Cork, Cork, Ireland.* Let P be a point inside a circle C .

- (a) Prove that there exists a point P' outside C such that, for all chords XY of C through P , $(|XP'| + |YP'|)/|XY|$ is the same. (Here, $|UV|$ denotes the distance from U to V .)
(b) Is P' unique?

(a) We consider a system of coordinate such that the center of the circle is origin of the axes. We assume that the ray of circle is equal with 1 and the point $P(p,0)$ with $0 < p < 1$.

Let the points $X(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Y(\cos \beta, \sin \beta)$ on the circle; since the points X, P, Y are collinear we consider $0 < \alpha < \pi, \pi < \beta < 2\pi$. We have

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 1 \\ p & 0 & 1 \\ \cos \beta & \sin \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = p(\sin \alpha - \sin \beta) \Leftrightarrow$$

$$\sin(\alpha - \beta) = p(\sin \alpha - \sin \beta) \Leftrightarrow p = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

We proof that the point $P'\left(\frac{1}{p}, 0\right)$ satisfy the statements of problem. We have

$$\frac{|P'X| + |P'Y|}{|XY|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{p} - \cos \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \cos \beta\right)^2 + \sin^2 \beta}}{\sqrt{(\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2}} \quad (1)$$

Since

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} - \cos \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha &= \frac{1}{p^2} - \frac{2 \cos \alpha}{p} + 1 = \frac{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} - \frac{2 \cos \alpha \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} + 1 = \\ &= \frac{1 + \cos(\alpha + \beta) + 1 + \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cdot 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \\ &= \frac{2 + 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta)}{2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}, \end{aligned}$$

the relation (1) becomes

$$\frac{|P'X| + |P'Y|}{|XY|} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha - \beta)}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{1}{p}.$$

2. Journal Crux solutions to problems mathematicorum

By George-Florin Serban , Pedagogical High School "D.P.Perpessicius",
Braila , Romania

THE OLYMPIAD CORNER

OC 272 Find all real triples (a; b; c), for which

$$\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab) \\ b(c^2 + a) = a(a + bc) \\ c(a^2 + b) = b(b + ac). \end{cases}$$

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42 , NO.3 , March/ Mars 2016

Solution: $\begin{cases} ab^2 + ac = c^2 + abc \\ bc^2 + ab = a^2 + abc \\ ca^2 + bc = b^2 + abc, \end{cases} \begin{cases} ab^2 - abc = c^2 - ac \\ bc^2 - abc = a^2 - ab \\ ca^2 - abc = b^2 - bc, \end{cases} \begin{cases} ab(b - c) = c(c - a) \\ bc(c - a) = a(a - b) \\ ca(a - b) = b(b - c), \end{cases}$ multiply equations,

$$(abc)^2(a - b)(b - c)(c - a) = abc(a - b)(b - c)(c - a), \quad abc(a - b)(b - c)(c - a)(abc - 1) = 0,$$

If $a = 0$, then $\begin{cases} 0 = c^2, c = 0 \\ 0 = b^2, b = 0. \end{cases}$ If $a = b$, $\begin{cases} a^2(a - c) = c(c - a) \\ ac(c - a) = 0 \\ 0 = a(a - c), \end{cases} \begin{cases} (a^2 + c)(a - c) = 0 \\ ac(c - a) = 0 \\ 0 = a(a - c), \end{cases}$

If $a = c$, then $a = b = c$. If $a = 0$, then $b = c = 0$. If $c = 0$, then $a = b = 0$. If $c = -a^2$, then $a = b = -1, c = -1$. If $abc = 1$. Look like $a, b, c > 0$. If $a < 0$,

$$a(b^2 + c) = c(c + ab) = c^2 + 1 > 0, \text{ then}$$

$$b^2 + c < 0, b^2 < -c, \text{ then } c < 0, c(a^2 + b) = b^2 + 1 > 0, \text{ then } a^2 + b < 0, a^2 < -b, \text{ then } b < 0, \text{ then } abc = 1 < 0, \text{ false. Then } a, b, c > 0,$$

$$\begin{cases} ab^2 + ac = c^2 + 1 \\ bc^2 + ab = a^2 + 1 \\ ca^2 + bc = b^2 + 1, \end{cases} \begin{cases} ab^2c + ac^2 = c^3 + c \\ abc^2 + a^2b = a^3 + a \\ a^2bc + b^2c = b^3 + b, \end{cases} \begin{cases} b + ac^2 = c^3 + c \\ c + a^2b = a^3 + a \\ a + b^2c = b^3 + b, \end{cases} \text{ gather equations,}$$

$$b + ac^2 + c + a^2b + a + b^2c = c^3 + c + a^3 + a + b^3 + b, \quad a^3 + b^3 + c^3 = ac^2 + a^2b + b^2c,$$

$$\text{Look like } a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + a^2b + b^2c,$$

$$\text{By AM-GM, } \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 a^3 b^3} = \sqrt[3]{a^6 b^3} = a^2 b,$$

$$\frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{b^3 b^3 c^3} = \sqrt[3]{b^6 c^3} = b^2 c,$$

$$\frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geq \sqrt[3]{c^3 c^3 a^3} = \sqrt[3]{c^6 a^3} = c^2 a,$$

$$\text{I gather } \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geq a^2b + b^2c + c^2a,$$

Then $a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + a^2b + b^2c$, equality occurs if $a = b = c$, then $a = b = c = 1$.

In conclusion $a = b = c = k, (\forall) k \in \mathbb{R}$.

OC274 Find all triplets (x, y, p) of positive integers such that p is a prime number and

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42, NO.3, March/ Mars 2016

$$\text{Solution: } \frac{xy^3}{x+y} = p, \quad xy^3 = px + py, \quad xy^3 - px = py, \quad x(y^3 - p) = py, \quad x = \frac{py}{y^3 - p} \in \mathbb{N},$$

$(y^3 - p) \mid py$, then $(y^3 - p) \mid py^3$, $(y^3 - p) \mid (y^3 - p)$, then $(y^3 - p) \mid (py^3 - p^2)$ and $(y^3 - p) \mid py^3$,
then $(y^3 - p) \mid (py^3 - py^3 + p^2)$, $(y^3 - p) \mid p^2$, then $(y^3 - p) \in \{1, p, p^2\}$.

$$\text{i) If } y^3 - p = 1 \text{ then } x = \frac{py}{y^3 - p} = py, \quad x = py, \quad y^3 - 1 = p, \text{ then } (y-1)(y^2 + y + 1) = p,$$

$$y^2 + y + 1 > y - 1, \quad y^2 + 2 > 0, \text{ true, then } y - 1 = 1 \text{ and } y^2 + y + 1 = p, \text{ then } y = 2, p = 7, x = 14.$$

ii) If $y^3 - p = p$, $y^3 = 2p$, if $p = 2$, $y^3 = 4$, false. If p odd $y^3 = 2p$, then $2 \mid p$, false, since the power of 2 is a number divisible by 3.

iii) If $y^3 - p = p^2$, $y^3 = p^2 + p$, then $y^3 = p \cdot (p + 1)$, since the power of p is a number divisible by 3, then $p \mid (p + 1)$, false. In conclusion $y = 2, p = 7, x = 14$.

CC217 L'hypotenuse AB d'un triangle rectangle ABC est coupee en trois parties _egales par les points M et N . Sachant que $CM^2 + CN^2 = k \cdot AB^2$, quelle est la valeur de k ?

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42, NO.4, April/ Avril 2016

$$\text{Solution: } AB = c, BC = a, AC = b, \quad AM = MN = NB = \frac{c}{3},$$

$$\triangle ABC, \text{ T.Stewart, } MC^2 \cdot AB = AC^2 \cdot MB + BC^2 \cdot AM - AM \cdot MB \cdot AB,$$

$$MC^2 \cdot c = b^2 \cdot \frac{2c}{3} + a^2 \cdot \frac{c}{3} - \frac{c}{3} \cdot \frac{2c}{3} \cdot c, \quad MC^2 = \frac{2b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2c^2}{9},$$

$$\triangle ABC, \text{ T.Stewart, } NC^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AN + AC^2 \cdot NB - AN \cdot BN \cdot AB,$$

$$NC^2 \cdot c = a^2 \cdot \frac{2c}{3} + b^2 \cdot \frac{c}{3} - \frac{2c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot c, \quad NC^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2c^2}{9},$$

$$MC^2 + CN^2 = \frac{2b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2c^2}{9} + \frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2c^2}{9} = a^2 + b^2 - \frac{4c^2}{9} = k \cdot c^2,$$

$$\triangle ABC, T.Pitagora, a^2 + b^2 = c^2, a^2 + b^2 - \frac{4c^2}{9} = k \cdot c^2, c^2 - \frac{4c^2}{9} = k \cdot c^2, \frac{5c^2}{9} = k \cdot c^2, k = \frac{5}{9}.$$

CC218 Resoudre ce systeme d'equations:
$$\begin{cases} 3^{\ln x} = 4^{\ln y} \\ (4x)^{\ln 4} = (3y)^{\ln 3} \end{cases}$$

Journal Crux Mathematicorum VOLUME 42, NO.4, April/ Avril 2016

Solution: $x > 0, y > 0, \ln 3^{\ln x} = \ln 4^{\ln y}, (\ln x) \cdot (\ln 3) = (\ln y) \cdot (\ln 4), \frac{\ln x}{\ln 4} = \frac{\ln y}{\ln 3} = k,$

$$\ln x = a, \ln y = b, a = k \cdot \ln 4, b = k \cdot \ln 3, \ln(4x)^{\ln 4} = \ln(3y)^{\ln 3}, \ln 4 \cdot \ln 4x = \ln 3 \cdot \ln 3y,$$

$$\ln 4 \cdot (\ln 4 + \ln x) = \ln 3 \cdot (\ln 3 + \ln y), \ln^2 4 + (\ln 4) \cdot (\ln x) = \ln^2 3 + (\ln 3) \cdot (\ln y),$$

$$\ln^2 4 + (\ln 4) \cdot a = \ln^2 3 + (\ln 3) \cdot b, \ln^2 4 + (\ln 4) \cdot (k \cdot \ln 4) = \ln^2 3 + (\ln 3) \cdot (k \cdot \ln 3),$$

$$\ln^2 4 + k \cdot (\ln^2 4) = \ln^2 3 + k \cdot (\ln^2 3), (1+k) \cdot \ln^2 4 = (1+k) \cdot \ln^2 3, (1+k) \cdot (\ln^2 4 - \ln^2 3) = 0,$$

$$\ln^2 4 \neq \ln^2 3, \ln^2 4 - \ln^2 3 \neq 0, k+1=0, k=-1, a=-\ln 4, b=-\ln 3, \ln x = \ln 4^{-1}, \ln y = \ln 3^{-1},$$

$$x = 4^{-1}, y = 3^{-1}, x = \frac{1}{4} > 0, y = \frac{1}{3} > 0, S = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

3. În legătură cu problema 27281 din GM 10/2016

Marin Chirciu¹

1. Articolul propune dezvoltări ale inegalității 27281 din GM 10/2016 .

a1) 27281 „Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a + b + c = 3$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+b)^7}{a^2b^2} + \frac{(b+c)^7}{b^2c^2} + \frac{(c+a)^7}{c^2a^2} \geq 384 \text{ ”.}$$

Traian Tămăian, Carei, Satu Mare

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+b)^7}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+b)^8}{a+b} = \sum \frac{\left[\frac{(a+b)^4}{ab} \right]^2}{a+b} \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2}{\sum (a+b)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2}{6} \geq 384 ,$$

unde ultima inegalitate este echivalentă cu $\left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2 \geq 2304 \Leftrightarrow \sum \frac{(a+b)^4}{ab} \geq 48$,

care rezultă din inegalitatea $\frac{X^4}{A} + \frac{Y^4}{B} + \frac{Z^4}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^4}{9(A+B+C)}$, unde $X, Y, Z, A, B, C > 0$ adevărată

din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^4}{A} + \frac{Y^4}{B} + \frac{Z^4}{C} \right) (A+B+C)(1+1+1)(1+1+1) \geq (X+Y+Z)^4 .$$

Obținem $\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \geq \frac{[\sum (a+b)]^4}{9 \sum ab} = \frac{6^4}{9 \sum ab} \geq 48$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu

$$3 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc , \text{ evident , cu egalitate}$$

pentru $a = b = c = 1$.

a2) „Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a + b + c = 3$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+b)^{2n-1}}{a^2b^2} + \frac{(b+c)^{2n-1}}{b^2c^2} + \frac{(c+a)^{2n-1}}{c^2a^2} \geq 3 \cdot 2^{2n-1} , \text{ unde } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ ”.}$$

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+b)^{2n-1}}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+b)^{2n}}{a+b} = \sum \frac{\left[\frac{(a+b)^n}{ab} \right]^2}{a+b} \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2}{\sum (a+b)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2}{6} \geq 3 \cdot 2^{2n-1} ,$$

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

unde ultima inegalitate este echivalentă

$$\text{cu } \left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2 \geq 6 \cdot 3 \cdot 2^{2n-1} = (3 \cdot 2^n)^2 \Leftrightarrow \sum \frac{(a+b)^n}{ab} \geq 3 \cdot 2^n ,$$

care rezultă din inegalitatea $\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^n}{3^{n-2}(A+B+C)}$, unde $X, Y, Z, A, B, C > 0$

și $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, adevărată din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} \right) (A+B+C)(1+1+1)\dots(1+1+1) \geq (X+Y+Z)^n .$$

Obținem $\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \geq \frac{\left[\sum (a+b) \right]^n}{3^{n-2} \sum ab} = \frac{6^n}{3^{n-2} \sum ab} \geq 3 \cdot 2^n$, unde ultima inegalitate este echivalentă

cu $3 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$, evident, cu egalitate

pentru $a=b=c=1$.

a3) „Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a+b+c=3$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+kb)^{2n-1}}{a^2b^2} + \frac{(b+kc)^{2n-1}}{b^2c^2} + \frac{(c+ka)^{2n-1}}{c^2a^2} \geq 3 \cdot (k+1)^{2n-1}, \text{ unde } n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \text{ și } k \geq 0 .$$

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+kb)^{2n-1}}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+kb)^{2n}}{a^2b^2(a+b)} = \sum \frac{\left[\frac{(a+b)^n}{ab} \right]^2}{a+b} \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2}{\sum (a+b)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \right)^2}{3(k+1)} \geq 3 \cdot (k+1)^{2n-1}$$

unde ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\left(\sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \right)^2 \geq 3^2 \cdot (k+1)^{2n} \Leftrightarrow \sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \geq 3 \cdot (k+1)^n ,$$

care rezultă din inegalitatea $\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^n}{3^{n-2}(A+B+C)}$, unde $X, Y, Z, A, B, C > 0$

și $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, adevărată din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} \right) (A+B+C)(1+1+1)\dots(1+1+1) \geq (X+Y+Z)^n . \text{ Obținem}$$

$\sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \geq \frac{\left[\sum (a+kb) \right]^n}{3^{n-2} \sum ab} = \frac{\left[3(k+1) \right]^n}{3^{n-2} \sum ab} \geq 3 \cdot (k+1)^n$, unde ultima inegalitate este echivalentă

cu $3 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum bc$, evident, cu egalitate

pentru $a=b=c=1$.

În continuare extindem inegalitatea de la trei variabile la patru variabile.

b1) „Fie a, b, c, d numere reale strict pozitive cu $a + b + c + d = 4$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+b)^7}{a^2b^2} + \frac{(b+c)^7}{b^2c^2} + \frac{(c+d)^7}{c^2d^2} + \frac{(d+a)^7}{d^2a^2} \geq 512 \text{ ”.}$$

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+b)^7}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+b)^8}{a+b} = \sum \left[\frac{(a+b)^4}{ab} \right]^2 \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2}{\sum (a+b)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2}{8} \geq 512 ,$$

$$\text{unde ultima inegalitate este echivalentă cu } \left(\sum \frac{(a+b)^4}{ab} \right)^2 \geq 4096 \Leftrightarrow \sum \frac{(a+b)^4}{ab} \geq 64 ,$$

$$\text{care rezultă din inegalitatea } \frac{X^4}{A} + \frac{Y^4}{B} + \frac{Z^4}{C} + \frac{T^4}{D} \geq \frac{(X+Y+Z+T)^4}{16(A+B+C+D)} , \text{ unde}$$

$X, Y, Z, T, A, B, C, D > 0$ adevărată din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^4}{A} + \frac{Y^4}{B} + \frac{Z^4}{C} + \frac{T^4}{D} \right) (A+B+C+D) (1+1+1+1) (1+1+1+1) \geq (X+Y+Z+T)^4 .$$

$$\text{Obținem } \sum \frac{(a+b)^4}{ab} \geq \frac{\left[\sum (a+b) \right]^4}{16 \sum ab} = \frac{8^4}{16 \sum ab} \geq 64 , \text{ unde ultima inegalitate este echivalentă cu}$$

$$4 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{4} \geq ab+bc+cd+da \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0 , \text{ evident , cu egalitate}$$

pentru $a = b = c = d = 1$.

b2) „Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a + b + c + d = 4$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+b)^{2n-1}}{a^2b^2} + \frac{(b+c)^{2n-1}}{b^2c^2} + \frac{(c+d)^{2n-1}}{c^2d^2} + \frac{(d+a)^{2n-1}}{d^2a^2} \geq 2^{2n+1} , \text{ unde } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ ”.}$$

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+b)^{2n-1}}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+b)^{2n}}{a+b} = \sum \left[\frac{(a+b)^n}{ab} \right]^2 \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2}{\sum (a+b)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2}{8} \geq 2^{2n+1} ,$$

$$\text{unde ultima inegalitate este echivalentă cu } \left(\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \right)^2 \geq 2^{2n+4} \Leftrightarrow \sum \frac{(a+b)^n}{ab} \geq 2^{n+2} ,$$

$$\text{care rezultă din inegalitatea } \frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} + \frac{T^n}{D} \geq \frac{(X+Y+Z+T)^n}{4^{n-2}(A+B+C+D)} , \text{ unde}$$

$X, Y, Z, T, A, B, C, D > 0$ adevărată din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} + \frac{T^n}{D}\right)(A+B+C+D)(1+1+1+1)\dots(1+1+1+1) \geq (X+Y+Z+T)^n.$$

Obținem $\sum \frac{(a+b)^n}{ab} \geq \frac{\left[\sum (a+b)\right]^n}{4^{n-2} \sum ab} = \frac{8^n}{4^{n-2} \sum ab} \geq 2^{n+2}$, unde ultima inegalitate este echivalentă

cu $4 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{4} \geq ab+bc+cd+da \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $a=b=c=d=1$.

b3) „Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a+b+c+d=4$. Să se demonstreze că

$$\frac{(a+kb)^{2n-1}}{a^2b^2} + \frac{(b+kc)^{2n-1}}{b^2c^2} + \frac{(c+kd)^{2n-1}}{c^2d^2} + \frac{(d+ka)^{2n-1}}{d^2a^2} \geq 4 \cdot (k+1)^{2n-1}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \geq 0.$$

Soluție:

Cu inegalitatea lui Bergström obținem:

$$\sum \frac{(a+kb)^{2n-1}}{a^2b^2} = \sum \frac{(a+kb)^{2n}}{a^2b^2(a+b)} = \sum \frac{\left[\frac{(a+kb)^n}{ab}\right]^2}{a+b} \geq \frac{\left(\sum \frac{(a+kb)^n}{ab}\right)^2}{\sum (a+kb)} = \frac{\left(\sum \frac{(a+kb)^n}{ab}\right)^2}{4(k+1)} \geq 4 \cdot (k+1)^{2n-1}$$

unde ultima inegalitate este echivalentă

$$\text{cu } \left(\sum \frac{(a+kb)^n}{ab}\right)^2 \geq 4^2 \cdot (k+1)^{2n} \Leftrightarrow \sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \geq 4 \cdot (k+1)^n,$$

care rezultă din inegalitatea $\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} + \frac{T^n}{D} \geq \frac{(X+Y+Z+T)^n}{4^{n-2}(A+B+C+D)}$, unde

$X, Y, Z, T, A, B, C, D > 0$ adevărată din inegalitatea lui Hölder:

$$\left(\frac{X^n}{A} + \frac{Y^n}{B} + \frac{Z^n}{C} + \frac{T^n}{D}\right)(A+B+C+D)(1+1+1+1)\dots(1+1+1+1) \geq (X+Y+Z+T)^n.$$

Obținem $\sum \frac{(a+kb)^n}{ab} \geq \frac{\left[\sum (a+kb)\right]^n}{4^{n-2} \sum ab} = \frac{[4(k+1)]^n}{4^{n-2} \sum ab} \geq 4(k+1)^n$, unde ultima inegalitate este

echivalentă cu $4 \geq \sum ab \Leftrightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{4} \geq ab+bc+cd+da \Leftrightarrow (a-b+c-d)^2 \geq 0$, evident,

cu egalitate pentru $a=b=c=d=1$.

Bibliografie:

1. Traian Tămâian, Problema 27281, Gazeta Matematică, nr.10/2016.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.

4. Rezolvarea ecuațiilor iraționale cu ajutorul substituțiilor

Prof. Pop Adela Terezia
Colegiul Tehnic “Aurel Vlaicu” Baia Mare

Adesea, rezolvarea ecuațiilor poate fi mult simplificată folosind unele substituții prin care se schimbă necunoscutele, relațiile de substituție reprezentând legătura dintre necunoscutele vechi și necunoscutele noi. Astfel, dacă necunoscuta unei ecuații intră, în ecuația dată, numai în componența unei aceleiași expresii algebrice, ce poate să apară sub diferite forme, se notează expresia în cauză cu o literă nouă. Înlocuirea expresiei, sub diferitele ei forme, în raport cu noua literă, conduce la o altă ecuație, a cărei rezolvare trebuie să fie mai simplă.

Schema de rezolvare a unei ecuații cu o singură necunoscută, cu ajutorul unei substituții, este următoarea, ea rezultând din cele precizate de mai sus :

Ecuația dată : $f(x) = g(x)$, care este de forma $F(h(x)) = G(h(x))$ *Relația de substituție :* $h(x) = y$ *Ecuația nouă :* $F(y) = G(y)$

Rădăcinile ecuației noi (rezultate prin rezolvare) :

$y_1, y_2, \dots$ *Ecuații finale (obținute prin revenire la ecuația de substituție) :*

$h(x) = y_1; \quad h(x) = y_2, \dots$

Rădăcinile ecuației date se obțin prin rezolvarea acestor ecuații finale.

Observații:

a) Relația de substituție joacă un rol important, fiind necesar să revenim la ea spre sfârșitul rezolvării. De aceea, atunci când se fixează o astfel de relație de substituție, se obișnuiește ca ea să se încadreze, pentru a ieși în evidență.

b) Deoarece mulțimea rădăcinilor ecuației date este reuniunea mulțimilor de rădăcini ale ecuațiilor finale, rezultă că, atunci când există mai mult decât o astfel de ecuație finală, rezolvarea ecuației inițiale, constă în rezolvarea unor ecuații, mai simple.

c) Alegerea substituției se face de la caz la caz, astfel încât ea să îndeplinească următoarele condiții :

- prin înlocuire, în ecuația dată, să nu mai rămână vechea necunoscută ;
- noua ecuație să fie mai ușor de rezolvat ;
- ecuațiile finale să fie ușor de rezolvat.

Exemplul 1: Fiind dată ecuația irațională: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{(x-2)(x+2)} = 6 - 2x$, $x \in [2; 3]$.

Se utilizează substituția $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = y$, $y \geq 0$. Atunci

$$y^2 = x - 2 + x + 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} \text{ sau } 2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = y^2 - 2x \text{ și ecuația devine : } y + y^2 = 6,$$

de unde $y_1 = -3$ (nu verifică condiția $y \geq 0$) și $y_2 = 2$. Așadar $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 2$.

Această ecuație se rezolvă prin ridicare la pătrat și se obține soluția $x = 2$.

Cazul când ecuația conține doi radicali cu indici oarecare, sub unul dintre ei existând o expresie de gradul întâi

Presupunând că unul dintre cei doi radicali, are forma $\sqrt[n]{ax+b}$ vom face următoarea substituție : $\sqrt[n]{ax+b} = y$ din care rezultă: $x = \frac{y^n - b}{a}$

Efectuarea acestei substituții va conduce la o ecuație cu o necunoscută y , care nu mai conține decât un singur radical, aceasta rezolvându-se cu ajutorul metodelor clasice.

Observație:

Dacă ambii radicali, ce fac parte din componența ecuației, conțin expresii de gradul întâi, în raport cu necunoscuta, putem substitui pe oricare dintre ei printr-o nouă necunoscută. Se va prefera însă acela, care are un indice mai mare, deoarece în acest caz, gradul ecuației algebrice, ce se va obține în finalul rezolvării, este mai mic :

Exemplul 2: Fie ecuația irațională :

$$\sqrt[4]{5x+1} + \sqrt[5]{x-2} = 3.$$

Se impune condiția de existență $x \in \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$

Deoarece în partea stângă a ecuație avem o funcție strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$, rezultă că ecuația are cel mult o soluție.

Vom alege, pentru substituție, radicalul cu indicele mai mare și vom pune:

$$\sqrt[5]{x-2} = y$$

de unde scoatem : $x = y^5 + 2$ Înlocuind în ecuația data, acesta devine:

$$\sqrt[4]{5 \cdot (y^5 + 2) + 1} + y = 3$$

Efectuând calculele și separând radicalul, obținem ecuația :

$$\sqrt[4]{5y^5 + 11} = 3 - y$$

care urmează a fi ridicată, la puterea a patra, cu condițiile : $5y^5 + 11 \geq 0$ și $3 - y \geq 0$. Prin efectuarea acestei transformări, obținem următoarea ecuație algebrică, de gradul cinci :

$$5y^5 - y^4 + 12y^3 - 54y + 108y - 70 = 0.$$

Căutând

rădăcinile raționale, ale acestei ecuații, se obține rădăcina $y_1 = 1$, deoarece rădăcina găsită verifică condițiile impuse de mai sus, putem spune că ecuația în y are o rădăcină egală cu unu (și probabil și altele). Revenind la substituția făcută inițial, rădăcina $y_1 = 1$ conduce la următoarea ecuație în x : $\sqrt[5]{x-2} = 1$

care se dovedește a avea o singură rădăcina reală, $x_1 = 3$.

Cazuri special de ecuații iraționale

Anumite ecuații iraționale, date spre rezolvare, au forme mai complicate, astfel încât nu se pot aplica metodele clasice. În astfel de situații, căutăm o substituție, care să transforme ecuația dată, într-o ecuație care se poate rezolva prin metodele cunoscute. Alegerea acestei substituții depinde de forma specială a ecuației și se deduce pe baza unor observații, făcute asupra ecuației, după o cercetare atentă.

Exemplu 3: Fiind dată ecuația irațională: $\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + \sqrt[6]{x^2 + x + 1} = 2$

Condiția de existență a radicalului de ordin 6 este $x^2 + x + 1 \geq 0$, care este îndeplinită pentru $\forall x \in \mathbb{R}$

Pentru rezolvarea ecuației efectuăm următoarea substituție :

$$\sqrt[6]{x^2 + x + 1} = y, y \geq 0$$

Condiția, scrisă lângă substituție, rezultă imediat din faptul că noua necunoscută, y , reprezintă un radical cu indicele par. Făcând înlocuirea, în ecuația inițială, obținem următoarea ecuație de gradul al doilea :

$$y^2 + y - 2 = 0$$

care are rădăcinile : $y_1 = 1$ și $y_2 = -2$. Dintre acestea, rădăcina $y_2 = -2$ nu convine, neîndeplinind condiția $y \geq 0$. Oprindu-ne deci, la rădăcina $y_1 = 1$, revenirea la relația de

substituție conduce la ecuația: $\sqrt[6]{x^2 + x + 1} = 1$

După ridicarea ambilor membri ai acestei ecuații, la puterea a șasea, se obține o ecuație algebrică, cu rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = -1$. Aceste două rădăcini verifică ecuația dată, fiind singurele rădăcini ale ei.

Exemplul 4: Fie ecuația irațională : $\sqrt[3]{x^2 + 1} - 6 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[6]{x^4 - 1} = 0$

Să observăm, mai întâi, că valorile reale, ale necunoscutei x , trebuie să verifice următoarea condiție : $x^4 - 1 \geq 0$. Deoarece această condiție se mai poate scrie și sub forma $(x^2 + 1)(x^2 - 1) \geq 0$ ea este echivalentă cu :

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Mai observăm că ecuația dată poate fi scrisă și astfel:

$$\sqrt[6]{(x^2 + 1)^2} - 6\sqrt[6]{(x^2 - 1)^2} + \sqrt[6]{x^2 + 1} \cdot \sqrt[6]{x^2 - 1} = 0,$$

ea fiind o ecuație omogenă, în $u = \sqrt[6]{x^2 + 1}$ și $v = \sqrt[6]{x^2 - 1}$. De aceea, considerând $x \neq \pm 1$ (valori care nu pot fi rădăcini ale ecuației, fapt ce se verifică prin simpla înlocuire), împărțim toată ecuația prin $\sqrt[6]{(x^2 - 1)^2}$ ceea ce permite să o scriem astfel:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2} - 6 + \sqrt[6]{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)} = 0$$

În această formă a ecuației, este utilă următoarea substituție :

$$\sqrt[6]{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)} = y, y \geq 0.$$

Efectuând substituția, obținem ecuația de gradul al doilea :

$$y^2 + y - 6 = 0$$

care admite rădăcinile $y_1 = 2$ și $y_2 = -3$. Dintre acestea, vom păstra numai prima rădăcină,

înlocuirea ei în relația de substituție conducând la ecuația: $\sqrt[6]{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)} = 2$

Rezolvarea, acestei ecuații, duce la următoarele două rădăcini, ce verifică și ecuația dată :

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{65}{63}}$$

Exemplul 5:
$$\frac{(4-x)\sqrt{4-x} + (x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}} = 2$$

Condițiile de existență a radicalilor, conduc la $x \in [2;4]$. Se notează $\sqrt{4-x} = u$, $\sqrt{x-2} = v$, atunci

$$\begin{cases} 4-x = u^2 \\ x-2 = v^2 \end{cases}, \text{ de unde } u^2 + v^2 = 2.$$

În u și v ecuația devine:
$$\frac{u^3 + v^3}{u + v} = 2$$

sau
$$\frac{(u+v)(u^2 - uv + v^2)}{u+v} = 2$$

și cum $u + v \neq 0$, rezultă $u^2 - uv + v^2 = 2$.

Rezolvând sistemul
$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 2 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases},$$

se obține
$$\begin{cases} u \cdot v = 0 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$$

Deoarece $u \geq 0$, $v \geq 0$, rămâne $u_1 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ și $u_2 = \sqrt{2}$, $v_2 = 0$ de unde rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = 4$.

Exemplul 6:
$$\sqrt[4]{x+7} - \sqrt[4]{x-9} = 2, \quad x \in [-7;9].$$

Se notează $\sqrt[4]{x+7} = u$, $\sqrt[4]{x-9} = v$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ și ținând seama de ecuația din enunț, se obține sistemul
$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 16 \\ u - v = 2 \end{cases},$$

Din a doua ecuație a sistemului rezultă $u = 2 + v$, se înlocuiește în prima și se obține ecuația în v $(2+v)^4 - v^4 = 16$,

sau $16 + 32v + 24v^2 + 8v^3 + v^4 - v^4 = 16$,

de unde rezultă $v = 0$ sau $v^2 + 3v + 4 = 0$ (ecuație care nu are soluții reale).

Prin urmare $v = 0$ și $u = 2$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+7} = 2 \\ \sqrt[4]{x-9} = 0 \end{cases}$$

se obține $x = 9$.

Exemplul 7: Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația următoare, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a :

$$[2\sqrt{x+1}] + [2\sqrt{x+1} + 0,5] = 4$$

Membrul întâi al ecuației ne trimite la identitatea lui Hermite (cazul $n=2$), anume:

$$[a] + \left[a + \frac{1}{2} \right] = [2a], \forall a \in \mathbb{R}.$$

Notând $a = 2\sqrt{x+1}$, unde $x \in [-1, +\infty)$, (1)

ecuația devine: $[4\sqrt{x+1}] = 4 \Leftrightarrow 4 \leq 4\sqrt{x+1} < 5$,

După câteva calcule elementare, sistemul de inecuații, astfel obținut, conduce la: $x \in [0, \frac{9}{16})$. (2)

Din (1) și (2) rezultă soluția finală $x \in [0, \frac{9}{16})$.

Exemplul 8: Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[3]{1-x \cdot 2^x} + \sqrt[3]{1+x \cdot 2^x} = \frac{3^{2x} + 1}{3^x}.$$

(O.L.M. clasa a X-a, Sibiu 2012)

$$\text{Avem: } \frac{3^{2x} + 1}{3^x} = 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{1-x \cdot 2^x} + \sqrt[3]{1+x \cdot 2^x} \geq 2$$

și obținem relația $\sqrt[3]{1+x \cdot 2^x} \geq 2 - \sqrt[3]{1-x \cdot 2^x}$, care ridicată la puterea a treia, conduce la:

$$1 + x \cdot 2^x \geq 8 - 1 + x \cdot 2^x - 6\sqrt[3]{1-x \cdot 2^x} (2 - \sqrt[3]{1-x \cdot 2^x})$$

Notând $y = \sqrt[3]{1-x \cdot 2^x}$, obținem $6y(2-y) \geq 6 \Leftrightarrow (y-1)^2 \leq 0$, de unde rezultă $y = 1$. Revenind la notație, avem: $x \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ care verifică ecuația dată, prin urmare $S = \{0\}$.

5. METODE DE DEMONSTRARE A UNEI INEGALITĂȚI**Ștefănuț Ciochină****Școala Gimnazială "I. L. Caragiale", Brăila**

În această notă sunt prezentate o serie de metode distincte de rezolvare a unei inegalități întâlnite în Gazeta Matematică nr. 10/2015 (S.L.15.246). Scopul acestei note îl constituie crearea unor exemple de abordare a unei inegalități în concursurile școlare.

Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea $xy + yz + zx = 2$. Să se arate că $xyz(9xyz + x + y + z) \leq 4$ [1].

Soluția 1

Utilizăm inegalitatea lui Schur:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Astfel pentru $t = 0$ obținem

$$(x-y)(x-z) + (y-z)(y-x) + (z-y)(z-x) \geq 0$$

Prin calcul direct rezultă $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (1)

Din (1) rezultă $(xy + yz + zx)^2 \geq 3(xyyz + yzzx + zxx y) = 3xyz(x + y + z)$ (2)

Înmulțind (1) cu pătratul (2) rezultă

$$(xy + yz + zx)^3 \geq 27x^2y^2z^2 \quad (3)$$

Adunând (2) și (3) obținem

$$(xy + yz + zx)^2 + (xy + yz + zx)^3 \geq 3xyz(x + y + z) + 27x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow xyz(9xyz + x + y + z) \leq 4$$

Soluția 2 (George Florin Șerban)

Utilizând inegalitatea mediilor: $\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{3xyz}{xy + yz + xz} \leq \sqrt[3]{xyz}$

$$\Rightarrow 3xyz \leq 2\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 27x^3y^3z^3 \leq 8xyz \Rightarrow x^2y^2z^2 \leq \frac{8}{27} \Rightarrow 9x^2y^2z^2 \leq \frac{8}{3}$$

$$\text{Dar } xyz(9xyz + x + y + z) = 9x^2y^2z^2 + xyz(x + y + z)$$

Rezultă că pentru a demonstra inegalitatea este suficient să demonstrăm că $xyz(x + y + z) \leq \frac{4}{3}$.

Dar această inegalitate este echivalentă cu

$$xyz(x + y + z) \leq \frac{(xy + yz + xz)^2}{3} \Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

Pentru demonstrarea ultimei inegalități aplicăm inegalitatea C.B.S.

$$(x^2yz + xy^2z + xyz^2)^2 \leq (x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)(x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2)$$

$$(x^2yz + xy^2z + xyz^2)^2 \leq (x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)^2$$

$$(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \leq (x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)$$

$$\text{În concluzie, } xyz(9xyz + x + y + z) = 9x^2y^2z^2 + xyz(x + y + z) \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

Soluția 3 (Gheorghe Alexe)

Inegalitatea este echivalentă cu $xyz(9xyz + x + y + z) \leq (xy + yz + zx)^2$

$$9x^2y^2z^2 + xyz(x + y + z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)$$

$$\Rightarrow 9x^2y^2z^2 \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(x + y + z)$$

$$\Rightarrow 9 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$$

$$\text{Avem } (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{9}{2}$$

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{9}{2}$$

Rezultă $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$

Soluția 4 [2]

$$xyz(9xyz + x + y + z) = xyz \left[\frac{1}{2}(xy + yz + zx)(x + y + z) + 9xyz \right]$$

Și $4 = \frac{(xy + yz + zx)^3}{2}$

$$\Rightarrow xyz \left[\frac{1}{2}(xy + yz + zx)(x + y + z) + 9xyz \right] \leq \frac{(xy + yz + zx)^3}{2}$$

$$\Rightarrow xyz \left[(xy + yz + zx)(x + y + z) + 18xyz \right] \leq (xy + yz + zx)^3$$

$$\Rightarrow \sum x^3 y^3 + 3 \sum x^3 y^2 z + 6x^2 y^2 z^2 \geq 18x^2 y^2 z^2 + \sum x^3 y^2 z + 3x^2 y^2 z^2$$

$$\Rightarrow \sum x^3 y^3 + 2 \sum x^3 y^2 z \geq 15x^2 y^2 z^2$$

Aplicând inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 + 2 \sum x^3 y^2 z}{15} \geq \sqrt[15]{x^{30} y^{30} z^{30}} = x^2 y^2 z^2$$

$$\Rightarrow \sum x^3 y^3 + 2 \sum x^3 y^2 z \geq 15x^2 y^2 z^2$$

Bibliografie

1. Gazeta Matematică, seria B, nr. 10/2015
2. <http://www.artofproblemsolving.com>

6. Numere transcendente

- studiu de specialitate -

Prof. Amariei Laura – Georgeta

Colegiul Național „Al. I. Cuza” Galați și

Colegiul Național „V. Alecsandri” Galați

Teoria numerelor este una dintre cele mai vechi și mai active ramuri ale matematicii. Teoria numerelor studiază proprietățile numerelor și relațiile dintre acestea (*în primul rând al numerelor naturale*).

Un capitol important al teoriei numerelor este studiul numerelor transcendente, adică al numerelor care nu sunt rădăcini ale unei ecuații de forma $f(x)=0$, $f(X)$ fiind un polinom cu coeficienți întregi.

Teoria numerelor transcendente a fost obiectul de studiu al multor matematicieni cum ar fi: Hermite, Lindermann, Liouville, care au dat rezultate importante în ceea ce privește demonstrarea ca un număr să fie transcendent. În secolul nostru, teoria numerelor transcendente a cunoscut o dezvoltare deosebită prin lucrările lui: C. L. Siegel, K. Mahler, Th. Schneider, A.O. Ghelfond ș.a.

NUMERE ALGEBRICE

Pentru o mai bună înțelegere a rezultatelor referitoare la numere transcendente, în cele ce urmează vom trata succint noțiunea de număr algebric.

Definiția 1.1. Un număr $\theta \in \mathbb{C}$ se numește **număr algebric** relativ la corpul rațional $\mathbb{Q}$, dacă există cel puțin un polinom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$, astfel încât $f(\theta)=0$.

Observație. 1. Dacă θ este un număr algebric, atunci el satisface cel puțin o ecuație $g(\theta)=0$, unde polinomul $g(X)$ are coeficienți întregi. Evident, putem elimina numitorii lui $f(X)$.

2. Orice $r \in \mathbf{Q}$ este un număr algebric deoarece există $f(X) = X - r$, astfel încât $f(r) = 0$. Dacă $r = \frac{p}{q}$, atunci $g(X) = qX - p$.

Teorema I.1. Orice număr algebric θ satisface o ecuație $f(x) = 0$, unde $f(X)$ este un polinom ireductibil în corpul $\mathbf{Q}$ și normat.

Definiția I.2. Polinomul $f(X)$, ireductibil și normat, a cărui rădăcină este numărul θ se numește **polinomul minimal** atașat numărului algebric θ .

Definiția I.3. Se numește **gradul numărului algebric** gradul polinomului minimal.

Observație. Există numere algebrice de orice grad > 0 .

Fie θ un număr algebric de grad n și $f(X)$ polinomul său minimal. Ecuația $f(x) = 0$ admite n rădăcini în corpul numerelor complexe, pe care le vom nota $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$. Numerele $\theta_i, i = \overline{1, n}$ sunt distincte.

Definiția I.4. Numerele $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ se numesc **numere algebrice conjugate** numărului θ .

Definiția I.5. Se numește **înălțime a numărului algebric** θ numărul $N = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$, unde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sunt coeficienții polinomului $g(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, care se obține din polinomul minimal $f(X)$ al lui θ prin eliminarea numitorilor.

Observație. Există un număr finit de numere algebrice de o înălțime dată.

Într-adevăr, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ fiind numere întregi și $|a_i| < N, (\forall) i = \overline{0, n}$, avem $-N < a_i < N$, adică $a_i = -N + 1, -N + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 2, N - 1$, deci există cel mult $(2N - 1)^{n+1}$ numere algebrice de înălțime N .

Teorema I.2. Mulțimea numerelor algebrice peste corpul $\mathbf{Q}$ este numărabilă².

Demonstrație. Fie A mulțimea numerelor algebrice peste corpul $\mathbf{Q}$. Dacă notăm cu A_N totalitatea numerelor algebrice care au înălțimea N , atunci avem

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N \cup \dots$$

² Spunem că o mulțime A este numărabilă dacă este echivalentă cu mulțimea $\mathbf{N}$, adică poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. Deci, A este numărabilă dacă și numai dacă toate elementele sale pot fi așezate într-un șir $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

și $A_i \cap A_j = \Phi$, $(\forall) i \neq j$, deci s-a obținut o partiție infinită a mulțimii A .

Mulțimea A este numărabilă ca o mulțime numărabilă de mulțimi finite (A_i sunt finite conform observației anterioare).■

Observație. Mulțimea numerelor transcendente este de puterea continuului.

Teorema I.3. Numărul complex θ este un număr algebric de grad cel mult s , dacă există s numere complexe, nu toate nule $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ și s^2 numere raționale a_{ij} ($i, j = \overline{1, s}$), astfel încât θ să satisfacă următoarele condiții:

$$\theta \xi_1 = a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1s} \xi_s$$

$$\theta \xi_2 = a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + \dots + a_{2s} \xi_s$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\theta \xi_s = a_{s1} \xi_1 + a_{s2} \xi_2 + \dots + a_{ss} \xi_s.$$

Demonstrație. Sistemul de condiții poate fi considerat ca un sistem de s ecuații liniare cu s necunoscute $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, nu toate nule, deci determinantul sistemului trebuie să fie nul:

$$0 = \begin{vmatrix} \theta - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1s} \\ -a_{21} & \theta - a_{22} & \dots & -a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \dots & \theta - a_{ss} \end{vmatrix} = \theta^s + a_{s-1} \theta^{s-1} + \dots + a_0. \blacksquare$$

Teorema I.4. Dacă θ și μ sunt numere algebrice, atunci $\theta + \mu$, $\theta - \mu$, $\theta\mu$ sunt numere algebrice.

Demonstrație. Avem

$$\theta^n + a_{n-1} \theta^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{și} \quad \mu^m + b_{m-1} \mu^{m-1} + \dots + b_0 = 0,$$

cu $m, n > 0$ și $a_i, i = \overline{0, n-1}$, $b_j, j = \overline{0, m-1}$ numere raționale.

Introducem numerele complexe $\xi_{h+nk} = \theta^h \mu^k$ cu $0 \leq h < n$, $0 \leq k < m$, deci în total nm numere.

Numerele introduse nu sunt toate nule, deoarece într-o anumită ordine ele sunt: $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, \mu, \theta\mu, \theta^2\mu, \dots, \theta^{n-1}\mu, \dots, \mu^{m-1}, \theta\mu^{m-1}, \dots, \theta^{n-1}\mu^{m-1}$.

În aceste condiții avem:

$$\theta \xi_{h+nk} = \theta^{h+1} \mu^k = \begin{cases} \xi_{h+1+nk}, h+1 < n \\ -a_{n-1} \xi_{n-1+nk} - \dots - a_0 \xi_{0+nk}, h+1 = n \end{cases}$$

și analog

$$\mu \xi_{h+nk} = \theta^h \mu^{k+1} = \begin{cases} \xi_{h+n(k+1)}, k+1 = m \\ -b_{m-1} \xi_{h+n(m-1)} - \dots - b_0 \xi_{h+n \cdot 0}, k+1 = m \end{cases}$$

Deci în orice situație $(\theta \pm \mu) \xi_{h+nk}$ cu $h = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{0, m-1}$ vor fi combinații liniare de numere ξ_{h+nk} cu coeficienți numere raționale și, conform teoremei 3, numărul $\theta \pm \mu$ va fi un număr algebric.

Analog se arată că $\theta \mu \xi_{h+nk}$ vor fi combinații liniare de numere ξ_{h+nk} cu coeficienți numere raționale, deci $\theta \mu$ este număr algebric. ■

Teorema I.5. Dacă θ este un număr algebric și $\theta \neq 0$, atunci $\frac{1}{\theta}$ este tot un număr algebric.

Demonstrație. Fie $g(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ un polinom astfel încât $g(\theta) = 0$, atunci, evident și $\frac{1}{\theta}$ va satisface polinomul $a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$. ■

Teorema I.6. Mulțimea numerelor algebrice peste corpul $\mathbf{Q}$ formează structură de corp.

Demonstrație. Rezultă din ultimele două teoreme.

NUMERE TRANSCENDENTE

Definiția II.1. Se numește **număr transcendent** numărul real care nu este algebric.

Primul număr real despre care s-a demonstrat că este transcendent este numărul e . Demonstrația a fost dată de matematicianul francez Ch. Hermite în anul 1873.

Teorema II.1. Numărul e este transcendent.

Demonstrație. Demonstrație se realizează prin reducere la absurd.

Presupunem că e este algebric, deci este rădăcină a unui polinom cu coeficienți întregi $f(X) = c_0 + c_1 X + \dots + c_n X^n$, de unde rezultă că $c_0 + c_1 e + \dots + c_n e^n = 0$.

Notăm cu $M = \max_{0 \leq k \leq n} |c_k|$, deci $|c_i| \leq M$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Pentru un n dat, funcția

$$\frac{n^{(n+1)y}}{(y-1)!} \rightarrow 0, \text{ când } y \rightarrow \infty.$$

Vom alege un număr natural prim p , care să satisfacă condițiile:

$$\frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} < \frac{1}{2M(n+1)e^n}, \quad p > |c_0|, \quad p > n.$$

Considerăm funcția $f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-n)^p$.

Atunci

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{x-t} f(t) dt &= -f(x) + e^x f(0) + \int_0^x e^{x-t} f'(t) dt = \\ &= -(f(x) + f'(x)) + e^x (f(0) + f'(0)) + \int_0^x e^{x-t} f''(t) dt = \dots \end{aligned}$$

$f(X)$ fiind un polinom în X de grad $np + p - 1$. Vom continua procesul de mai sus până când ajungem la derivata de ordin $p(n+1)$ care este identic nulă. Vom obține

$$\int_0^x e^{x-t} f(t) dt = -F(x) + e^x F(0), \text{ unde } F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(np+p-1)}(x).$$

Pentru fiecare coeficient c_s , $0 \leq s \leq n$, avem

$$c_s F(s) + c_s \int_0^s e^{s-t} f(t) dt = c_s e^s F(0).$$

În egalitatea de mai sus, sumând membru cu membru pentru $s = \overline{0, n}$, obținem:

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) + \sum_{s=0}^n c_s \int_0^s e^{s-t} f(t) dt = 0.$$

Dezvoltarea lui $f(x)$ după puterile lui x are forma

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} (A_{p-1} x^{p-1} + A_p x^p + \dots),$$

unde $A_{p-1}, A_p, \dots$ sunt numere întregi.

Avem $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(p-2)}(0) = 0$, $f^{(p-1)}(0) = A_{p-1} = (-1)^{np} 1^p \cdot 2^p \cdot \dots \cdot n^p$.

A_{p-1} este un număr întreg care nu se divide cu p deoarece $n < p$.

Din dezvoltarea lui $f(x)$ se observă că $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0), \dots$ sunt numere întregi divizibile cu p . Atunci $F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots$ este o sumă în care primul termen nu este multiplu de p , următorii fiind toți multipli de p . Rezultă că p nu divide $F(0)$.

Dezvoltarea lui $f(x)$ după puterile lui $x - k$, unde $1 \leq k \leq n$, are forma:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} [B_{k,p}(x-k)^p + B_{k,p+1}(x-k)^{p+1} + \dots],$$

unde coeficienții $B_{k,p}, B_{k,p+1}, \dots$ sunt numere întregi.

Prin derivarea lui $f(x)$ scris în dezvoltarea după puterile lui $x - k$ se observă că $F(k) = f(k) + f'(k) + \dots + f^{(np+p-1)}(k)$ este un număr întreg divizibil cu p . În suma $R = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n)$ primul termen nu se divide cu p , iar următorii se divid (fiecare) cu p . Deci R este un număr întreg care nu se divide cu p și avem, pentru $p > n$, $p > |c_0|$, că $R \neq 0$. Deci $|R| \geq 1$.

$$\text{Dar } R + \sum_{s=0}^n c_s \int_0^s e^{s-t} f(t) dt = 0, \text{ de unde rezultă că } |R| = \left| \sum_{s=0}^n c_s \int_0^s e^{s-t} f(t) dt \right|.$$

În fiecare din integralele care apar cu $|R|$, t primește valori care aparțin intervalului $[0, n]$.

Deci:

$$|f(t)| = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} |(t-1)^p (t-2)^p \dots (t-n)^p| \leq \frac{n^{p-1} n^{np}}{(p-1)!},$$

$$\text{de unde rezultă } \left| \int_0^s e^{s-t} f(t) dt \right| < e^n \cdot \frac{n^{(n+1)p}}{(p-1)!}, \text{ pentru } s = \overline{0, n} \text{ și}$$

$$|R| \leq (n+1) M e^n \frac{n^{(n+1)p}}{(p-1)!} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \text{ ceea ce contrazice } |R| \geq 1. \text{ Deci } e \text{ nu poate fi algebric și prin}$$

urmare este transcendent. ■

Observație. Reprezentarea în serie a numărului transcendent e are forma $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, iar ca

fracție continuă

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \cdot n + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

adică $e = [2, \underbrace{1, 2 \cdot 1, 1}, \underbrace{1, 2 \cdot 2, 1}, \underbrace{1, 2 \cdot 3, 1}, \dots, \underbrace{1, 2 \cdot n, 1}, \dots]$.

Extinzând metoda lui Hermite, F. Lindemann a dat o teoremă care stabilește transcendența unei clase destul de largi de numere și pe care o enunțăm:

Teorema II.2. Dacă $A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_n e^{\alpha_n} = 0$, unde $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt numere algebrice, nu toate nule și $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ sunt numere algebrice, atunci α_1 este un număr transcendent.

Ca o consecință a acestei teoreme Lindemann a demonstrat transcendența numărului π .

Teorema II.3. Numărul π este transcendent.

Observația 1. Dacă γ este număr algebric, soluție a ecuației cu coeficienți întregi $\varphi(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, atunci $i\gamma$ este număr algebric, soluție a ecuației cu coeficienți întregi $\varphi(ix)\varphi(-ix) = 0$.

Observația 2. Dacă γ este număr algebric, soluție a ecuației cu coeficienți întregi $\varphi(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, atunci $\gamma' = \gamma a_n$ este număr algebric, soluție a unei ecuații algebrice canonice cu coeficienți întregi, în care coeficientul lui x^n este 1. Această ecuație este

$$a_n^{n-1} \varphi\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0.$$

Teorema se demonstrează prin reducere la absurd.

Presupunem că π este un număr algebric.

Din cele două observații rezultă că există $c \in \mathbb{Z}$ astfel încât πc să verifice ecuația cu coeficienți întregi $x_n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.

Notăm cu $c\beta_1, c\beta_2, \dots, c\beta_n$ rădăcinile acestei ecuații. Printre ele se află și πc , deci există $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\beta_m = i\pi$, deci $e^{\beta_m} = e^{i\pi} = -1$, de unde rezultă că $1 + e^{\beta_m} = 0$.

În aceste condiții avem $(1 + e^{\beta_1}) \cdot (1 + e^{\beta_2}) \cdot \dots \cdot (1 + e^{\beta_n}) = 0$. Dezvoltând acest produs obținem o egalitate de forma

$$(*) \quad C + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_s} = 0,$$

unde $C \in \mathbb{Z}$, iar α_i sunt sume nenule formate din numerele $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Cum $c\beta_1, c\beta_2, \dots, c\beta_n$ sunt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, rezultă că $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_s$ sunt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi.

Considerăm polinomul $P(X) = \frac{(cX)^{p-1}}{(p-1)!} (cX - c\alpha_1)^p (cX - c\alpha_2)^p \dots (cX - c\alpha_s)^p$, unde p este

un număr prim oarecare. Gradul polinomului $P(X)$ este $sp + p - 1$. Atunci $(p-1)!P(X)$ este un polinom în cX cu coeficienți întregi.

Notăm cu $Q(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(sp+p-1)}(x)$. În relația (*) înmulțim cu $Q(0)$ și rezultă $CQ(0) + \sum_{i=1}^s e^{\alpha_i} Q(0) = 0$.

Dar $e^{\alpha_i} Q(0) = Q(\alpha_i) + R(\alpha_i)$, unde $R(\alpha_i) = \alpha_i e^{\alpha_i} \int_0^1 e^{-\alpha_i x} P(\alpha_i x) dx$. Deci avem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = - \sum_{i=1}^s R(\alpha_i).$$

Se observă că:

$$P^{(r)}(0) = \begin{cases} 0, & r < p-1 \\ c^{p-2}(-c\alpha_1)^p(-c\alpha_2)^p \dots (-c\alpha_s)^p, & r = p-1, \text{ iar } P^{(r)}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & r < p \\ L \cdot p, & r \geq p \end{cases} \\ k \cdot p, & r > p-1 \end{cases}$$

Pentru $r \geq p$, coeficienții derivatei $P^{(r)}(x)$ sunt întregi și divizibili cu p . Dar $P^{(r)}(X)$ este un polinom în cX , deci $\sum_{i=1}^s P^{(r)}(\alpha_i)$, pentru $r \geq p$, este o funcție simetrică întreagă de $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_s$, cu coeficienți întregi divizibili cu p .

Deci $CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = CP^{(p-1)}(0) + k \cdot p$, unde $p \in \mathbb{Z}$.

Luând $p > C$, $c, c\alpha_1 c\alpha_2 \dots c\alpha_s$, rezultă că $CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i)$ este un număr întreg nenul.

Vom arăta că $\left| \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) \right| \leq 1$.

Avem $|R(\alpha_i)| \leq H \cdot e^H \cdot M$, unde $H = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_s|)$ și

$$M = \sup_{|x| < H} |P(x)| < \frac{(|c| \cdot H)^{p-1} (2|c| \cdot H)^{ps}}{(p-1)!}, \text{ deci } \left| \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) \right| < k' \cdot \frac{k^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Cum $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k^{p-1}}{(p-1)!} = 0$, rezultă că pentru un p suficient de mare vom avea $\left| \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) \right| < 1$,

$$\text{deci } -1 < \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) < 1.$$

În acest moment am ajuns la o contradicție întrucât egalitatea $CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^s R(\alpha_i)$ nu poate avea loc. Deci π este transcendent. ■

Importanța demonstrării transcendenței numărului π constă în faptul că prin aceasta s-a dat un răspuns negativ unei vechi probleme de matematică enunțată încă din antichitate, cunoscută sub numele de problema cuadraturii cercului (construcția cu rigla și compasul a unui pătrat cu aceeași arie ca a unui cerc dat). În concluzie, cu rigla și compasul se pot construi doar rădăcinile unor clase particulare de ecuații cu coeficienți întregi.

Metoda lui Hermite – Lindemann ne permite să stabilim transcendența multor numere. Astfel, dacă α este algebric, $\alpha \neq 0$, atunci $\ln \alpha$ este număr transcendent.

Presupunând că $\beta = \ln \alpha$ este algebric vom avea $e^\beta = \alpha = \alpha \cdot e^0 \Leftrightarrow \alpha \cdot e^0 - e^\beta = 0$ și ar rezulta că 0 este transcendent. Absurd!

Aceeași metodă ne permite să demonstrăm transcendența numerelor $2^{\sqrt{2}}$, $\log_2 3$, e^π , etc.

Teoria numerelor transcendente a cunoscut o dezvoltare deosebită și prin lucrările lui C.L. Siegel, K. Mahler, Th. Schneider, A.O. Ghelfond ș.a.

Teorema II.4. (Ghelfond) Dacă α este un număr algebric, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ și β este un număr algebric irațional, atunci α^β este un număr transcendent.

NUMERELE TRANSCENDENTE ALE LUI LIOUVILLE

Definiție. Un număr irațional ξ se numește **număr al lui Liouville** (1851) dacă, pentru orice m întreg pozitiv, există o fracție $\frac{g_m}{h_m}$ care să satisfacă inegalitățile:

$$h_m > 1$$

$$\left| \xi - \frac{g_m}{h_m} \right| < \frac{1}{h_m^m}.$$

Definiția ne asigură că pentru orice număr al lui Liouville există un șir de numere raționale care satisfac inegalitățile de mai sus.

$$\text{Astfel, } \left| \xi - \frac{g_{m+1}}{h_{m+1}} \right| < \frac{1}{h_{m+1}^{m+1}} < \frac{1}{h_{m+1}^m} \leq \frac{1}{2^m} \text{ sau } \left| \xi - \frac{g_{m+1}}{h_{m+1}} \right| < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Teorema III.1. Numerele lui Liouville sunt transcendente.

Demonstrație. Dacă ξ ar fi algebric de gradul n , inegalitatea $\left| \xi - \frac{g}{h} \right| < \frac{1}{h^{n+1}}$, ar fi satisfăcută numai de un număr finit de fracții $\frac{g}{h}$. Dar numărul ξ fiind din clasa numerelor lui

Liouville, pentru $(\forall) m \geq n+1$, există o fracție $\frac{g_m}{h_m}$ astfel încât $\left| \xi - \frac{g_m}{h_m} \right| < \frac{1}{h_m^m} < \frac{1}{h_m^{n+1}}$.

Deci ξ nu poate fi algebric și prin urmare este număr transcendent. ■

Teorema III.2. Există numere în clasa numerelor lui Liouville.

Demonstrație. Fie $\xi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_{m+1}}$, unde $q_i \in \mathbf{Z}$, $q_1 \geq 2$, $q_{m+1} > q_m$. Notăm

$$h_p = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_p}}} \text{ și } \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_{m+1}} = \frac{g_p}{h_p}.$$

$$\text{Atunci } \left| \xi - \frac{g_p}{h_p} \right| = \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_{m+1}} = \frac{1}{h_p} \left[\frac{1}{q_{p+1}} + \frac{1}{q_{p+1} q_{p+2}} + \dots \right], \text{ deci}$$

$$\left| \xi - \frac{g_p}{h_p} \right| < \frac{1}{h_p} \left[\frac{1}{q_{p+1}} + \frac{1}{q_{p+1}^2} + \frac{1}{q_{p+1}^3} + \dots \right] = \frac{1}{h_p} \cdot \frac{1}{q_{p+1} - 1}.$$

Dacă alegem $q_{p+1} \geq 1 + h_p^{p-1}$, atunci $\left| \xi - \frac{g_p}{h_p} \right| < \frac{1}{h_p^p}$. Deci există numere în clasa numerelor

lui Liouville. ■

BIBLIOGRAFIE

I. Creangă, C. Cazacu, P. Minuț, Gh. Opaîț, C. Reischer - *Introducere în teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965;

P. Minuț - *Teoria numerelor. Capitle introductive*, Editura Crenguța Gâldău, Iași, 1997;

C. P. Popovici - *Teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.

W. Sierpinski - *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*, Editura Științifică, București, 1966.

7. Predarea sistemelor de ecuații liniare

- studiu de specialitate / experiment -

Prof. Amariei Laura – Georgeta
Colegiul Național „Al. I. Cuza” Galați și
Colegiul Național „V. Alecsandri” Galați

Matematica școlară derivă din matematica știință, dar se deosebește de aceasta nu numai prin întindere și grad de aprofundare, dar și prin faptul că în procesul de învățare, elevul „descoperă” rezultate cunoscute de știință. Matematica școlară condensează cunoștințele de bază ale științei, le simplifică, le particularizează și le face accesibile elevilor.

Tendențele actuale ale evoluției lumii contemporane solicită ca procesul educațional să fie unul ancorat în realitate, corelat cu nevoile societății civile, axat pe orientarea profesională a elevului în funcție de aptitudinile și abilitățile dezvoltate pe parcursul școlarizării sale, ceea ce determină necesitatea realizării unui învățământ al matematicii convergent practicii, eficient și flexibil, capabil să preia din mers multe din achizițiile recente ale științei, care să asigure o pregătire conformă cu cerințele actuale și previzibile ale societății.

În acest context, întrucât sistemele de ecuații liniare reprezintă modelări matematice ale unor situații problemă întâlnite frecvent în viața de zi cu zi, consider că un studiu cu tema „***Strategii didactice utilizate în predarea-învățarea-evaluarea sistemelor de ecuații liniare***”, este unul important atât pentru comunitatea școlară locală, profesori-elevi, pentru părinți sau alți factori locali interesați de învățământ.

Experiența acumulată în calitate de participant activ la realizarea actului educațional confirmă că astfel de cercetări experimentale pot fi efectuate de către toate cadrele didactice în unitățile școlare în care funcționează, având în vedere că evaluarea a constituit fundament pentru activități educative, lecții deschise, teme de referat, fiind totodată și o provocare pentru toate cadrele didactice dornice și interesate de a concepe aceste studii calitative, de a le prezenta într-un mod obiectiv și de a-și asuma responsabilitățile ce decurg de aici.

Deci, scopul primordial al studiului este reprezentat de analiza obiectivă a calității evaluării cunoștințelor asimilate de elevi la disciplina matematică și de a emite ipoteze, cu titlu de generalitate, pe baza rezultatelor obținute și interpretate.

Trebuie precizat însă faptul că, în ultima perioadă, există o tendință de depreciere calitativă a activității de învățare a elevilor la matematică și că dezinteresul celor mai mulți elevi față de învățare, și mai ales față de propriile rezultate, este în totală disonanță cu așteptărilor noastre, ale profesorilor, ale părinților, ale societății în general.

Cunoașterea în profunzime a elementelor referitoare la evaluarea cunoștințelor asimilate de elevi, modul de realizare a evaluărilor și ce tehnici și metode de apreciere a rezultatelor școlare sunt mai apropiate de interesul lor scăzut pentru învățare, a modului în care evaluarea influențează evoluția comportamentului elevilor la ora de matematică, determină pe fiecare cadru didactic în parte să își îndrepte atenția asupra acestui domeniu ca parte componentă a întregului proces didactic.

Încă de la debutul meu în cariera de dascăl, am manifestat interes și preocupare pentru prezentarea conținuturilor prevăzute de programa școlară și care necesitau a fi asimilate de către elevi, într-un mod cât mai atractiv, prin utilizarea unui limbaj matematic adecvat vârstei și nivelului de cunoștințe, dar ținând cont și de gradul de motivare al acestora. Pe parcursul activității la catedră, am realizat cercetări metodico-pedagogice pe diferite eșantioane de elevi, cu diverse ipoteze de lucru.

În scopul atingerii obiectivelor cercetării didactice realizate la unitatea școlară în care îmi desfășor activitatea și la clasele de elevi pe care le coordonez, am ales ca metodă experimentul psihopedagogic/didactic.

Etapele realizării studiului de specialitate:

1. Formularea și definirea problemei

Pe parcursul derulării experimentului, mi-am propus să stabilesc eficiența predării temei „Sisteme de ecuații liniare” (*temă de studiu cuprinsă în unitatea de învățare cu același nume*,

pentru care au fost alocate un număr de șapte ore de curs) prin utilizarea de strategii didactice diferite la două clase de elevi cu un nivel comparativ al cunoștințelor asimilate.

De asemenea, prin experimentul pedagogic realizat, mi-am propus să identific un procedeu mai eficient, care să contribuie la dezvoltarea gândirii logice, la învățare activă și conștientă. Astfel, în prima etapă, pentru o clasă am aplicat un stil de lucru bazat pe utilizarea de metode clasice combinate cu instruirea programată (*desfășurarea a trei ore de curs din cele alocate pentru studiul temei propuse cu ajutorul sistemului AEL – rezolvarea sistemelor prin regula lui Cramer*), iar pentru cea de a doua clasă am utilizat numai strategii bazate pe metode tradiționale.

Pentru ca rezultatele experimentului să fie cât mai elocvente, în a doua etapă, pe parcursul ultimelor patru ore de curs alocate temei în cauză (*rezolvarea sistemelor prin metoda lui Gauss*) am schimbat modul de lucru la cele două clase, aplicând metode clasice combinate cu instruirea programată pentru cea de-a doua clasă și metode tradiționale pentru prima clasă.

2. Formularea ipotezelor

Lecțiile desfășurate în laboratorul de informatică prin aplicarea de metode moderne în combinație cu cele clasice sunt mai eficiente decât cele realizate prin aplicarea de metode tradiționale.

3. Elaborarea planului experimental

a) Stabilirea eșantionului

Pentru desfășurarea experimentului, am selectat două clase din încadrarea proprie: clasa a XI-a A (22 elevi) și clasa a XI-a G (21 elevi) cu nivel de informații și nivel aptitudinal asemănătoare, astfel încât cercetările experimentale să poată fi comparate și experimentul să fie edificator pentru ipoteza fixată.

b) Stabilirea procedeeleor prin care se controlează variabilele

Am constituit cele două eșantioane, astfel:

Pentru prima etapă:

- clasa a XI-a A – eșantionul experimental;
- clasa a XI-a G – eșantionul de control.

Pentru a doua etapă:

- clasa a XI-a G – eșantionul experimental;
- clasa a XI-a A – eșantionul de control.

c) Elaborarea instrumentelor de măsurare și prelucrare a datelor

- elaborarea testului inițial;
- stabilirea criteriilor de apreciere (*baremului*);
- elaborarea testelor de evaluare curentă (*după primele trei ore și la finalul unității de învățare*);
- elaborarea modelului de prelucrare statistică a datelor.

Testului inițial se aplică în vederea identificării cunoașterii nivelului inițial al cunoștințelor elevilor cu privire la tema studiată și al gradului de omogenitate a colectivelor de elevi.

4. Aplicarea planului experimental

Pentru cele două clase cuprinse în experiment se aplică același test inițial cu următorul conținut:

TEST ÎNIȚIAL

Matrice inversabile

- Fie matricea $A \in M_3(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Calculați $\det A$;
 - Determinați A^{-1} .
- Determinați matricea $X \in M_{2,3}(\mathbf{R})$, știind că: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.
- Se consideră matricele : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze matricea B^2 ;
 - Să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;
 - Să se arate că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$.

NOTĂ:

- timp de lucru 50 minute;
- se acordă 2 puncte din oficiu;
- barem de corectare:

1. a) 1p
b) 1,5p

2. 1,5p

3. a) 1p
b) 1,5p
c) 1,5p

Rezultatele obținute în urma corectării lucrărilor elaborate de elevii celor două clase sunt evidențiate în tabelul următor:

Lucrarea	Număr elevi	Nota								Media
		3	4	5	6	7	8	9	10	
a XI-a A	22	-	1	2	5	6	4	3	1	7,04

a XI-a G	21	-	-	3	4	6	5	2	1	7,09
----------	----	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Din analiza datelor obținute se observă că elevii clasei a XI-a A, care a fost aleasă drept eșantion experimental pentru prima etapă, a obținut la testul inițial media 7,04 cu 0,05 mai mică decât media obținută de eșantionul de control reprezentat de elevii clasei a XI-a G, ceea ce reflectă un nivel apropiat al cunoștințelor asimilate până la acest moment.

Pentru derularea primei etape a experimentului pedagogic, se organizează și realizează lecțiile astfel:

- clasa a XI-a G - eșantionul de control – derulează actul de predare într-o clasă obișnuită, utilizându-se ca metode didactice tradiționale: conversația, demonstrația, problematizarea și exercițiul;

- clasa a XI a A - eșantionul experimental pentru acest moment al experimentului – derulează activitatea educațională prin combinarea metode tradiționale, utilizate pentru prezentarea cunoștințelor, cu metode de instruire programată, pentru explicarea, demonstrarea și exemplificarea noțiunilor noi prin lecții aplicative în laboratorul de informatică, utilizând sistemul AEL.

Având la dispoziție datele obținute în urma aplicării testului inițial, respectiv o evidență riguroasă a greșelilor tipice și lacunelor acumulate, pe perioada derulării primei etape a experimentului, s-a reușit o mai bună organizare a timpului de lucru, stabilirea temelor de maxim interes pentru elevi, cunoașterea echilibrului dintre cantitatea și calitatea cunoștințelor, elasticitate în evaluarea cunoștințelor elevilor, ținând seama de dotarea lor intelectuală și de gama de informații acumulate, precum și eficiența studiului de efectuat, adică progresul grupului experimental față de grupul de control.

Pe parcursul lecțiilor s-a observat o mai mare mobilitate în acțiuni și un interes sporit față de tema studiată, manifestat de elevii clasei experimentale.

La finalizarea celor trei ore de curs alocate pentru predarea temei „Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin regula lui Cramer”, elevii de la cele două clase cuprinse în proiect au fost supuși unei noi testări de verificare a cunoștințelor asimilate.

Scopul acestui test a fost de a urmări capacitatea de gândire a elevilor, manifestată într-o acțiune independentă, priceperea acestora de a-și ordona și organiza activitatea într-o succesiune de acțiuni, gradul de operaționalitate a cunoștințelor, ritmul de lucru, ținând seama de cerințele programei și de obiectivele operaționale specifice temei de parcurs.

S-a insistat asupra consolidării noțiunilor aplicate și au fost clarificate confuziile identificate sau semnalate.

TEST DE EVALUARE CURENTĂ – 1

Regula lui Cramer

1. Aplicând regula lui Cramer, să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} -2x + 5y = -1 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$.

2. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x - my + z = 2m \\ x - 2y + z = -1 \\ mx + m^2y - 2z = 2 \end{cases}$ să fie de tip Cramer

și să se rezolve în acest caz.

3. Se consideră sistemul de ecuații $A \cdot X = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Să se rezolve sistemul de ecuații prin metoda matriceală;

b) Să se scrie ecuațiile sistemului;

c) Să se rezolve sistemul de ecuații prin regula lui Cramer.

NOTĂ:

- timp de lucru 50 minute;

- se acordă 2 puncte din oficiu;

- barem de corectare: 1. 1,5p

2. 2p

3. a) 1,5p

b) 1p

c) 2p

În urma corectării lucrărilor realizate de elevii celor două clase, au fost obținute următoarele rezultate:

Lucrarea	Număr elevi	Nota								Media
		3	4	5	6	7	8	9	10	
a XI-a A experiment	22	-	-	-	2	5	5	6	4	8,22
a XI-a G de control	21	-	-	2	4	5	5	3	2	7,42

Din analiza datelor integrate în tabel se observă că diferența dintre rezultatele obținute de eșantionul experimental este evident mai mare față de cele ale eșantionului de control, 0,8 puncte, ceea ce confirmă parțial ipoteza enunțată la început.

Aceste rezultate confirmă secvențial ipoteza cercetării întreprinse, și anume eficiența aplicării tehnologiilor didactice active, a sistemului de lecții de predare – învățare – evaluare în comparație cu sistemul clasic de predare-verificare.

Pentru confirmarea deplină a ipotezei enunțate, în următoarele patru ore de curs, se trece la derularea etapei a doua, rolul clasei experimentale modificându-se, beneficiarii metodelor activ-participative fiind elevii clasei a XI-a G, iar rolul eșantionului de control, la care au fost aplicate metode tradiționale, revenind colectivului clasei a XI-a A.

De această dată, se observă că elevii care au făcut parte din grupul experimental în prima etapă nu mai sunt la fel de activi, iar pentru asimilarea conținuturilor este necesară o perioadă mai îndelungată de timp, în timp ce grupul experimental din această etapă a devenit mai interesat pentru acumularea noilor cunoștințe.

La finalul celor patru ore de curs, a fost aplicat un nou test de evaluare curentă, tematica de verificare fiind „Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda lui Gauss”.

TEST DE EVALUARE CURENTĂ – 2

Metoda lui Gauss

1. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}.$$

2. Să se discute după valorile lui $m \in \mathbf{R}$ și să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} x - 4y + (2m + 3)z = 0 \\ x - my - z = 0 \\ 2x + y = 8 \end{cases}.$$

3. Se dă sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} (1 + m)x + y + z = 1 \\ x + (1 + m)y + z = m \\ x + y + (1 + m)z = m^2 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbf{R}.$$

a) Să se calculeze determinantul sistemului.

b) Pentru ce valori ale lui m sistemul este compatibil determinat?

c) Să se rezolve sistemul pentru $m = 0$.

NOTĂ:

- timp de lucru 50 minute;

- se acordă 2 puncte din oficiu;

- barem de corectare: 1. 1,5p

2. 2p

3. a) 1,5p

b) 1p

c) 2p

După corectarea lucrărilor elaborate de către elevii cuprinși în cadrul experimentului, au fost obținute rezultatele cuprinse în următorul tabel:

Lucrarea	Număr elevi	Nota								Media
		3	4	5	6	7	8	9	10	
a XI-a A de control	22	-	-	-	4	6	5	4	3	7,82
a XI-a G experimental	21	-	-	-	2	4	5	6	4	8,28

Analiza rezultatelor obținute în această etapă de noul grup experimental a crescut simțitor față de cele obținute anterior, media pe clasă fiind cu aproximativ 0,8 puncte mai mare decât cea precedentă, dar s-a înregistrat și o creștere a calității procesului instructiv-educativ în raport cu eșantionul de control.

De asemenea, se poate constata un regres semnificativ al elevilor din eșantionul de control, aceștia înregistrând o medie mai mică decât cea a grupului experimental, dar și cu 0,4 puncte mai puțin față de rezultatele înregistrate de ei în prima etapă, moment în care aparțineau eșantionului experimental.

Prin aplicarea testelor la celor două clase, s-a realizat:

- o verificare permanentă a cunoștințelor elevilor;
- o mai bună organizare a timpului de lucru;
- evidența riguroasă a greșelilor tipice;
- stabilirea temelor de maxim interes pentru elevi;
- cunoașterea echilibrului dintre cantitatea și calitatea cunoștințelor;
- imagine relevatoare asupra potențelor creative ale unor elevi;
- un grad mai ridicat de operaționalizare a cunoștințelor, elevii fiind implicați în procesul de învățare.

Astfel, rezultatul cercetării întreprinse *îmi confirmă ipoteza* și anume **eficiența lecțiilor de predare – învățare - evaluare în comparație cu lecțiile clasice de predare-verificare.**

Rezultatul cercetării efectuate are importanță pentru teoria pedagogică sub aspectul că, dacă elevii aplică în mod conștient și individual noțiunile noi, atunci se realizează o consolidare mai temeinică a acestora și se formează deprinderea de a lucra independent cu cunoștințele asimilate. De asemenea, forma de verificare aplicată permite o mai bună sistematizare a cunoștințelor și, în consecință, asigură un spor de calitate și un control ritmic în pregătirea elevilor.

Experimentul realizat, într-un interval relativ scurt de timp și cu un consum redus de resurse didactice, a evidențiat rezultate și concluzii încurajatoare pentru organele de decizie în

ceea ce privește introducerea unor modalități și procedee care să asigure o mai mare eficiență și un randament școlar mai mare în învățarea matematicii, dar și a celorlalte discipline de studiu.

5. Concluzii

Multitudinea de metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare dă posibilitatea elevului să aleagă algoritmul eficient pentru determinarea soluțiilor (*în cazul sistemelor compatibile*) sau să demonstreze că nu admite soluții (*în cazul celor incompatibile*).

Noțiunea de sistem de ecuații liniare este predată pentru prima dată elevului de clasa a VIII-a, care și-a însușit cunoștințele referitoare la determinarea soluțiilor pentru o ecuație de gradul I, cu una sau două necunoscute (*ecuații diofantice*), reprezentarea punctelor într-un sistem de axe de coordonate, respectiv reprezentarea grafică a funcției de gradul I.

În acest moment, elevul intră în contact cu determinantul unei matrice pătratică de ordinul 2 (*fără ca acesta să fie denumit astfel*), respectiv cu noțiunile de sistem compatibil sau incompatibil.

Reluarea și aprofundarea în clasa a XI-a a noțiunii de sistem de ecuații liniare (*de această dată cu mai multe necunoscute*) este propice înțelegerii algoritmilor complecși de determinare a soluțiilor, întrucât rezolvatorii beneficiază de un bagaj mai bogat de cunoștințe, din care nu lipsesc cele referitoare la matrice, matrice inversabilă, rangul unei matrice, determinanți, proprietăți și metode de calcul ale determinanților, noțiuni expuse în primele trei capitole ale lucrării.

În aceste condiții, suntem oarecum surprinși de faptul că începând de la ciclul primar sunt propuse spre rezolvare probleme în care intervin sisteme de ecuații liniare, a căror soluții trebuie determinate fără a avea la dispoziție noțiuni precum cele anterior menționate. Rezolvarea sistemelor de ecuații în acest caz se reduce, în special, la aplicarea unor metode figurative (*grafice*), combinate cu metoda „mersului înapoi”.

Funcție de vârsta elevului de la clasă, sistemele de ecuații liniare propuse spre rezolvare au grade diferite de dificultate, iar metodele aplicate sunt specifice nivelului de cunoștințe înmagazinate.

Din experimentul prezentat, putem deduce faptul că sistemul de calcul ca mijloc de învățământ este extrem de eficient în derularea procesului instructiv-educativ.

Calculatorul poate fi folosit atât în cazul instruirii, cât și în cazul învățării. Avantajele folosirii acestui mijloc de învățământ de mare eficiență sunt:

- stimularea gândirii logice;
- crearea motivației interne a învățării;
- dezvoltarea creativității;
- adaptarea învățării la ritmul și stilul personal al elevului;
- realizarea unui feedback permanent.

Calculatorul nu poate înlocui profesorul și nici orele de studiu individual. Depinde de profesor ca să aleagă momentul propice pentru introducerea acestui mijloc de învățământ, ca secvență în cadrul procesului instructiv-educativ.

Progresul elevilor este evidențiat de creșterea gradului de realizare a obiectivelor instruirii, creștere materializată în mărimea valorii notelor pentru nivelul de cunoștințe și deprinderi atins. În acest sens, ilustrarea grafică este convingătoare.

La orele de matematică din cadrul laboratorului AEL, lecțiile au devenit mult mai plăcute pentru elevi, iar transferul de cunoștințe s-a realizat într-un interval mai scurt de timp, în funcție de posibilitățile intelectuale ale fiecărui elev.

În urma documentării pe baza bibliografiei consultate, a experienței didactice și a probelor de evaluare aplicate, au putut fi desprinse următoarele concluzii:

- predarea-învățarea sistemelor de ecuații liniare, trebuie privită ca un fenomen complex, dar unitar, care angajează întreaga personalitate umană;
- compunerea și rezolvarea de probleme, dezvoltă creativitatea ca dimensiune psihologică, ce este universal existentă, distribuindu-se în rândul tuturor copiilor dezvoltăți normal.

În cadrul matematicii, predarea-învățarea sistemelor de ecuații liniare are bogate valențe formative, fiind o modalitate principală de a dezvolta gândirea independentă a elevilor.

În scopul stimulării potențialului creativ al elevilor, profesorul trebuie să fie cel puțin neutru față de evoluția acestuia, în sensul de a nu-i înăbuși manifestările și dezvoltarea, să intervină conștient și activ pentru îndepărtarea blocajelor obiective și subiective ale creativității elevilor, să preia și să dezvolte în mod organizat potențialul creativ al fiecărui copil.

E absolut necesar, ca profesorul să cunoască pe cât posibil situația potențialului psihologic al fiecărui elev în parte. Se impune astfel măsurarea prin diferite probe și modalități a potențialului creativ al elevilor, aceste probe trebuind să aibă două faze: una inițială și una finală. În intervalul de timp dintre ele trebuie să se lucreze intens cu elevii; rezultatele finale vor reda progresul

obținut de elevi în ceea ce privește însușirea cunoștințelor, dar și în ceea ce privește dezvoltarea capacităților creatoare (*astfel de probe se pot aplica la început și la sfârșit de capitol, semestru sau an școlar*).

Rezultatele obținute oferă informații detaliate care pot fi luate în calcul la elaborarea măsurilor ameliorative pentru elevi, astfel: elevii cu capacități reduse de înțelegere și asimilare vor primi spre rezolvare sarcini de nivel reproductiv și de cunoaștere pentru a-i ajuta să realizeze obiectivele programei; iar celor cu potențial creativ, li se vor crea condiții propice, în care să li se poată dezvolta nestânjenit capacitățile creative.

În însușirea cunoștințelor de către elevi un rol important îl are munca independentă. În ora de matematică elevii trebuie să lucreze, să facă efort nu numai aplicativ, cât mai ales mintal creator. În cadrul activității independente din clasă, trebuie să realizăm și învățarea în ritm propriu, deoarece într-o clasă de elevi există mai multe nivele de gândire și ritmuri de lucru variate, specifice fiecărui elev.

În cadrul metodelor active de predare-învățare, trebuie stimulată imaginația matematică și ingeniozitatea elevilor astfel încât să găsească singuri cât mai multe căi de rezolvare a unei probleme, să facă conexiuni între noțiunile studiate.

Este imperios necesar ca elevii să fie obișnuiți ca singuri să caute de lucru, să creeze probleme și exerciții pe care să le rezolve și în felul acesta ora de matematică să fie o oră densă, în care elevii să lucreze mai mult, profesorul lucrând cu clasa, cât și cu fiecare elev în parte, astfel elevii înțeleg că matematica este o știință a realității înconjurătoare, indispensabilă diverselor activități umane practice, nu e doar o activitate abstractă pură.

Studiul de față, face simțită armonia interioară a matematicii, capabilă să trezească conștiința că există probleme matematice atrăgătoare, pentru înțelegerea cărora nu este nevoie de un talent special și nici o pregătire care să depășească nivelul claselor elementare.

Consider că scopul propus a fost confirmat și că predarea-învățarea sistemelor de ecuații liniare se datorează, în mare parte, atât capacităților intelectuale ale elevilor, cât și însușirii corecte a metodelor diverse de predare a acestor cunoștințe.

8. Frații zecimale. Sume.

Probleme propuse pentru clasa a-v-a

Profesor Apostol Adelina Monica
Școala Gimnazială „Nicolae Iorga” Ploiești

1. Arătați ca numerele $\frac{1}{33}$ și $\frac{1}{333}$ au a-84-a zecimală aceiași cifră.
2. Determinați cifrele a și b din egalitatea: $\overline{1,ab} + \overline{0,(a)} = \overline{1,47(a)}$
3. Arătați că orice număr de forma $\frac{1}{7xy}$, scris cu virgulă, conține o perioadă.
4. Scrieți cu virgulă suma: $S = 1 + 0,(3) + 0,00(3) + 0,000(3)$
5. Calculați: $\frac{1}{0,069(4)}$
6. Ordonati crescător numerele:
 $A = 1,2(3) + 2,3(4) + 3,4(5) + 4,5(6)$
 $B = 1,(23) + 2,(34) + 3,(45) + 4,(56)$
 $C = 1,(233) + 2,(344) + 3,(455) + 4,(566)$
7. Dacă $a \neq 9$ este cifră, verificați dacă numărul $[\overline{0,0(a)} + \overline{0,(a)}] : [\overline{a,(a)} - \overline{a,a}]$ este număr natural.
8. Determinați cifrele distincte a și b astfel încât: $[\overline{a,(b)} + \overline{b,(a)}] : (a+b) = \frac{a+b}{3a}$
9. Determinați cifrele distincte a; b; c și d astfel încât: $\overline{a,b} + \overline{b,c} + \overline{c,d} + \overline{d,a} = 6,(6)$
10. Scrieți numărul $\overline{3,21(abc)}$ sub forma de fracție, știind că a 100-a zecimală este 1, a 200-a zecimală este 3, și a 300-a zecimală este 2.
11. Arătați ca fracția $\frac{1}{10n+1}$ este o fracție periodică, oricare ar fi numărul $n \in \mathbb{N}^*$
12. Rezolvați ecuația: $\overline{0,(x1)} + \overline{0,(x2)} + \dots + \overline{0,(x9)} = x$

13. Aflați cea de-a 100-a zecimală a numărului $\frac{6}{7} + \frac{7}{6}$

14. Determinați cifrele nenule a; b și c pentru care $\overline{0,(abc)} = [0,(a) + 0,(b) + 0,(c)] : 3$

15. Se dau numerele: $\overline{0,(a)}$ și $\overline{0,(b(c))}$, unde $a \neq 9$ și $b \neq 9$. Verificați dacă suma lor poate fi o fracție zecimală periodică simplă.

16. Aflați $a \in \mathbb{N}$ astfel încât: $1+2+3+\dots = \overline{aa}$

17. Calculați: $40+41+42+\dots+89+90$

18. Calculați: $1_{(2)} + 10_{(2)} + 100_{(2)} + 1000\dots 0_{(2)}$ (100 de zerouri)

19. Calculați: $123+125+127+\dots+271$

20. Scrieți mai simplu: $1+8+8\cdot 9+8\cdot 9^2+8\cdot 9^3+\dots+8\cdot 9^{98}$

21. Aflați suma numerelor naturale mai mici decât 1000, care împărțite la 7 dau restul 11.

22. Rezolvați ecuația: $1+3+5+7+\dots+x=10000$

23. Calculați: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100}$

24. Calculați: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{99\cdot 101}$

25. Se consideră șirul: $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, \dots$. Calculați suma primilor 100 termeni ai șirului.

26. Scrieți cât mai simplu numărul: $n = 100\cdot 99 - 99\cdot 98 + 98\cdot 97 - 97\cdot 96 + \dots + 4\cdot 3 - 3\cdot 2 + 2\cdot 1$

27. Arătați că: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \leq \frac{1}{2}$

28. Rezolvați ecuația: $x+2x+6x+7x+11x+12x+\dots+51x+52x=583\cdot 584$

29. Calculați: $S = 18+108+1008+10008+\dots+10000\dots 008$ (100 zerouri)

30. Calculați: $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\dots+97+98-99$

31. Calculați: $9+99+999+\dots+9999\dots99$ (100 de cifre)

32. Determinați numerele $\overline{abc}$ dacă: $1+3+5+\dots+\overline{bc} = \overline{abc}$

33. Calculați: $S=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+\dots+100\cdot 100!$

34. Calculați: $3\cdot 1!-4\cdot 2!+5\cdot 3!-6\cdot 4!+\dots+203\cdot 201!$

9. Pătrate magice

Prof. Elena-Marcela ALEXANDRU

Școala gimnazială Nr. 3 Baia, structura Bogata

Pătratul magic este un tablou (matrice) cu n^2 numere (de regulă distincte) așezate pe n linii și n coloane astfel încât suma celor n numere de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe cele două diagonale să fie aceeași. Această sumă se va numi *magică*, iar cele n^2 numere se numesc *elementele* pătratului magic.

Pătratele magice se clasifică astfel:

- *pătrate magice impare* dacă n este impar;
- *pătrate magice pare*, care la rândul lor sunt de două tipuri:
 - *pătrate magice par pare* dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ și
 - *pătrate magice impar pare* dacă $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Matematicienii Giorolamo Cardano (1501-1576), Bachet de Mésiriac (1581-1638), Pierre Fermat (1601-1665), Phelippe de La Hire (1640-1718) și Leonhard Euler (1707-1783) s-au ocupat de studiul pătratelor magice.

Proprietăți:

1. Dacă se mărește (micșorează) cu același număr fiecare element al său un pătrat magic rămâne pătrat magic.

	$\xRightarrow{+7}$																			
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> </table>	2	9	4	7	5	3	6	1	8		<table border="1"> <tr><td>9</td><td>16</td><td>11</td></tr> <tr><td>14</td><td>12</td><td>10</td></tr> <tr><td>13</td><td>8</td><td>15</td></tr> </table>	9	16	11	14	12	10	13	8	15
2	9	4																		
7	5	3																		
6	1	8																		
9	16	11																		
14	12	10																		
13	8	15																		
	$\xRightarrow{-1}$																			
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> </table>	2	9	4	7	5	3	6	1	8		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>0</td><td>7</td></tr> </table>	1	8	3	6	4	2	5	0	7
2	9	4																		
7	5	3																		
6	1	8																		
1	8	3																		
6	4	2																		
5	0	7																		

2. Dacă se înmulțește (împarte) fiecare element al său cu același număr diferit de zero un pătrat magic rămâne pătrat magic.

	$\cdot 4$																			
	$\Rightarrow$																			
<table border="1"> <tr><td>32</td><td>12</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>20</td><td>36</td></tr> <tr><td>24</td><td>28</td><td>8</td></tr> </table>	32	12	16	4	20	36	24	28	8		<table border="1"> <tr><td>8</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>2</td></tr> </table>	8	3	4	1	5	9	6	7	2
32	12	16																		
4	20	36																		
24	28	8																		
8	3	4																		
1	5	9																		
6	7	2																		
	$\cdot 2$																			
	$\Rightarrow$																			
<table border="1"> <tr><td>32</td><td>12</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>20</td><td>36</td></tr> <tr><td>24</td><td>28</td><td>8</td></tr> </table>	32	12	16	4	20	36	24	28	8		<table border="1"> <tr><td>64</td><td>24</td><td>32</td></tr> <tr><td>8</td><td>40</td><td>72</td></tr> <tr><td>48</td><td>56</td><td>16</td></tr> </table>	64	24	32	8	40	72	48	56	16
32	12	16																		
4	20	36																		
24	28	8																		
64	24	32																		
8	40	72																		
48	56	16																		

3. Dacă elementele unui pătrat magic sunt numerele $1, 2, 3, \dots, n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ atunci suma magică este $S = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$.

Dacă $n = 4k$ atunci suma magică este $S = 2k(16k^2 + 1)$.

Dacă $n = 4k + 2$ atunci suma magică este $S = 32k^3 + 48k^2 + 26k + 5$.

Dacă se mărește (scade) fiecare element cu x atunci $S' = S \pm nx$.

Dacă se înmulțește (împarte) fiecare element cu $x \neq 0$ atunci $S' = S \cdot x$, respectiv $S' = S : x$.

Metode de construire a pătratelor magice impare:

Metoda lui Bachet de Mésiriac:

Se notează coloanele de la stânga la dreapta, iar liniile de sus în jos cu litere în ordine alfabetică.

Elementele vor fi notate cu două litere, prima literă reprezentând coloana, iar a doua literă reprezentând linia.

Acest pătrat se repetă la infinit în planul său atât pe orizontală cât și pe verticală.

Se va construi un pătrat magic cu $n = 5$ cu elementele $1, 2, 3, \dots, 25$.

cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc
cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd
ce	de	ee	ae	be	ce	de	ee	ae	be	ce	de
ca	da	ea	aa	ba	ca	da	ea	aa	ba	ca	da
cb	db	eb	ab	bb	cb	db	eb	ab	bb	cb	db
cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc
cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd
ce	de	ee	ae	be	ce	de	ee	ae	be	ce	de
ca	da	ea	aa	ba	ca	da	ea	aa	ba	ca	da
cb	db	eb	ab	bb	cb	db	eb	ab	bb	cb	db
cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc
cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd
ce	de	ee	ae	be	ce	de	ee	ae	be	ce	de
ca	da	ea	aa	ba	ca	da	ea	aa	ba	ca	da
cb	db	eb	ab	bb	cb	db	eb	ab	bb	cb	db
cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc
cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd
ce	de	ee	ae	be	ce	de	ee	ae	be	ce	de
ca	da	ea	aa	ba	ca	da	ea	aa	ba	ca	da
cb	db	eb	ab	bb	cb	db	eb	ab	bb	cb	db
cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc	ec	ac	bc	cc	dc
cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd	ed	ad	bd	cd	dd

Figura 1

Se consideră un pătrat magic având căsuțele goale, apoi se completează cu căsuțe goale pentru obținerea unui pătrat ca în figura 2. Aceste căsuțe auxiliare se repetă ca în figura 1. În căsuțele auxiliare se așază în ordine crescătoare pe „paralelele” cu diagonal principal numerele 1,2,3,4,5 apoi 6,7,8,9,10 ..., respectiv 21,22,23,24,25. (figura 2). Numerele care au rămas în interiorul pătratului magic de bază rămân pe loc, adică numerele 11, 7, 3, 12, 8, 17, 13, 9, 18, 14, 23, 19, 15. Se transfer numerele din căsuțele exterioare în căsuțele corespunzătoare ale pătratului de bază obținându-se pătratul magic din figura 3.

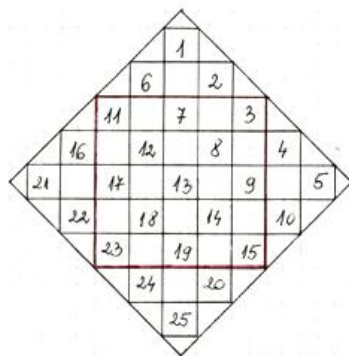


Figura 2

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figura 3

Se obțin 8 soluții.

Metoda lui La Hire:

Fie următoarele progresii aritmetice:

I: $1, 2, 3, 4, \dots, n$ și II: $0, n, 2n, 3n, \dots, n(n-1)$.

Dacă se adună fiecare termen al progresiei aritmetice I cu fiecare termen al progresiei aritmetice II se obțin toți termenii progresiei aritmetice $1, 2, 3, \dots, n^2$.

Exemplu:

4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2
1	2	3	4	5

și

10	15	20	0	5
20	0	5	10	15
5	10	15	20	0
15	20	0	5	10
0	5	10	15	20

$\Rightarrow$

14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	12	4
18	24	5	6	12
1	7	13	19	25

Se obțin $8(n-3)(n-4)(n!)^2$ soluții.

Pentru $n = 5$ rezultă 230400 soluții.

Metode de construire a pătratelor magice par pare:

Metoda lui Dellaney și Mondésir:

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Metodă modernă:

64	2	62	4	5	59	7	57
9	55	11	53	52	14	50	16
48	18	46	20	21	43	23	41
25	39	27	37	36	30	34	32
33	31	35	29	28	38	26	40
24	42	22	44	45	19	47	17
49	15	51	13	12	54	10	56
8	58	6	60	61	3	63	1

Observații:

1. Se consideră pătratele magice doar pentru $n \geq 2$.
2. Pentru $n = 2$ nu există pătrate magice cu numere distincte.
3. Pentru $n = 3$ există un singur pătrat magic cu 8 soluții.
4. Pentru $n = 4$ Frénicle de Bessy a demonstrat că pentru numerele $1, 2, \dots, 16$ există 880 soluții diferite din care se obțin 7040 cazuri posibile.
5. Există pătrate magice cu bordure, cu cruce, cu ramă, cu compartimente, pătrate magice semidiabolice, diabolice și pătrate hipermagice.

Pătratele magice și pătratele multimagice (în care găsim același produs pe linii, coloane și diagonale) se pot folosi și în cadrul orelor de matematică la nivel de gimnaziu sau la clasele primare pentru înțelegerea proprietăților numerelor naturale sau a regulilor de calcul în mulțimea numerelor reale.

Exemplu de exerciții la clasa a VII-a:

- 1) Verificați dacă pătratul de mai jos este multimagic:

$\sqrt{77}$	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{5}$	1
5	$\sqrt{5}$	$3\sqrt{11}$	$\sqrt{21}$
3	$5\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{55}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{7}$	15

2) Completați pătratul multimagic de mai jos:

		$3\sqrt{6}$
	$3\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
		$6\sqrt{6}$

3) Completați pătratul de mai jos astfel încât să devină un pătrat multimagic:

2		
	$4\sqrt{2}$	
4		16

Prin utilizarea jocului didactic sau a exercițiului de energizare cu pătrate magice ca metodă modernă de predare-învățare-evaluare ce contribuie la formarea deprinderilor de calcul numeric, elevii vor fi atrași spre disciplina matematică. Astfel un obiect riguros cum este matematică va deveni mai atractiv, mai distractiv.

Bibliografie:

1. *Exerciții și probleme pentru cercurile de matematică pentru clasa a VII-a*, Petre și Cătălin Eugen Năchilă, Editura Nomina, 2012
2. *Auxiliar la manualele alternative, clasa a VII-a*, coordonator Artur Bălăucă, Editura Axa, 2000

10. Problema lunii IANUARIE 2017 - Soluții

“În triunghiul ABC fie D mijlocul lui AC , E mijlocul lui BC , F mijlocul lui BE și G mijlocul lui EC . Să se calculeze valoarea raportului $\frac{MN}{NP}$, unde M, N, P sunt punctele de intersecție ale lui BD cu AF, AE respectiv AG .”

Prof. Biro Istvan

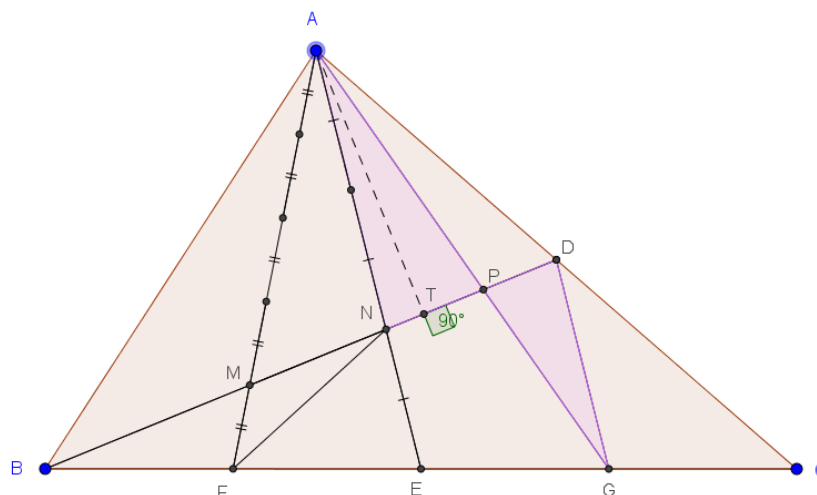
Soluție autor: Dacă notăm cu Q simetricul lui B față de D , atunci $ABCQ$ este paralelogram și din asemănarea triunghiurilor BMF cu QMA , BNE cu QNA , BPG cu QPA obținem următoarele:

$$\left. \begin{aligned} \frac{MQ}{BM} = 4 &\Rightarrow BM = \frac{BQ}{5} \\ \frac{NQ}{BN} = 2 &\Rightarrow BN = \frac{BQ}{3} \\ \frac{PQ}{BP} = \frac{4}{3} &\Rightarrow BP = \frac{3BQ}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{BN - BM}{BP - BN} = \frac{7}{5}.$$

Alte soluții:

1. Prof. Neștescu Gabriela

Soluția I



DG linie mijlocie în $\triangle ACE \Rightarrow DG \parallel AE \Rightarrow \triangle DPG \sim \triangle NPA \Rightarrow$

$$\frac{DP}{NP} = \frac{DG}{NA} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow \frac{DP}{NP} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{2}{3}AE} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow \frac{DP}{NP} = \frac{PG}{PA} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} DP = 3k \\ NP = 4k \end{cases} \Rightarrow ND = 7k$$

N centru de greutate în $\triangle ABC \Rightarrow BN = 2ND \Rightarrow BN = 14k$

În $\triangle AFG$ aplicăm teorema lui Menelaus (B,M,P coliniare cu $B \in FG$, $M \in AF$, $P \in AG$) și obținem :

$$\frac{PA}{PG} \cdot \frac{BG}{BF} \cdot \frac{MF}{MA} = 1 \quad (1)$$

Cum $BG = \frac{3}{4}BC$ și $BF = \frac{1}{4}BC$ obținem $\frac{BG}{BF} = 3$.

Înlocuim în (1) :

$$\frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \frac{MF}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{1}{4} \Rightarrow MA = \frac{4}{5}AF$$

Notăm $A(ABC) = a$.

Cum $BF = FE = EG = GC$ obținem că

$$A(ABF) = A(AFE) = \frac{a}{4}$$

$$\text{În } \triangle BAF, MA = \frac{4}{5}AF \Rightarrow A(BMA) = \frac{4}{5}A(BAF) = \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{5}$$

$$\text{În } \triangle AFE, NA = \frac{2}{3}AE \Rightarrow A(AFN) = \frac{2}{3}A(AFE) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{6}$$

$$\text{În } \triangle AFN, MA = \frac{4}{5}AF \Rightarrow A(NMA) = \frac{4}{5}A(AFN) = \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a}{15}$$

Considerând $AT \perp BD$, $T \in BD$ avem :

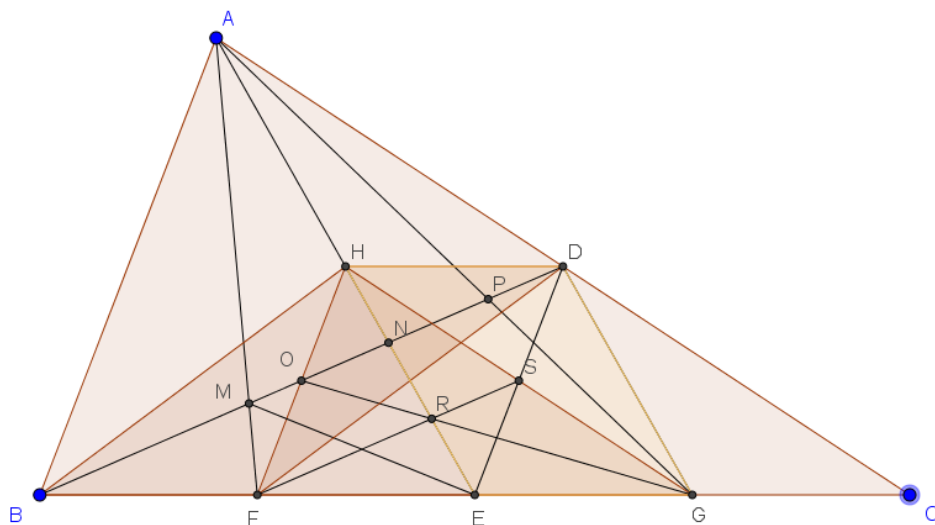
$$\frac{A(ABM)}{A(AMN)} = \frac{BM \cdot AT/2}{MN \cdot AT/2} \Rightarrow \frac{BM}{MN} = \frac{\frac{a}{5}}{\frac{2a}{15}} \Rightarrow \frac{BM}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} BM = 3t \\ MN = 2t \end{cases}$$

Cum $BM + MN = BN$, obținem $3t + 2t = 14k$, deci $t = \frac{14k}{5}$, de unde

$$MN = \frac{28k}{5}$$

În concluzie ,

$$\frac{MN}{NP} = \frac{\frac{28k}{5}}{4k} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$$

Soluția II

AE și BD mediane în $\triangle ABC \Rightarrow N$ centru de greutate $\Rightarrow ND = \frac{1}{3} BD$

DG linie mijlocie în $\triangle ACE \Rightarrow DG \parallel AE \Rightarrow \triangle DPG \sim \triangle NPA \Rightarrow$

$$\frac{DP}{NP} = \frac{DG}{NA} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow \frac{DP}{NP} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{2}{3}AE} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow \frac{DP}{NP} = \frac{PG}{PA} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DP + NP}{NP} = \frac{3 + 4}{4} \Rightarrow \frac{ND}{NP} = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NP = \frac{4}{7} ND = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} BD = \frac{4}{21} BD$$

Notez $BC=4a$, H mijloc $[AE]$ și $BD \cap HF = \{O\}$.

H și D mijloace $[AE]$, respectiv $[AC] \Rightarrow HD$ linie mijlocie în $\triangle AEC \Rightarrow \begin{cases} HD \parallel EC \Rightarrow HD \parallel BC \\ HD = \frac{EC}{2} = a \end{cases}$

$HD \parallel BC \Rightarrow HD \parallel BF \Rightarrow \begin{cases} HD = BF = a \\ \end{cases} \Rightarrow HDFB$ paralelogram $\Rightarrow \begin{cases} O \text{ mijloc } [BD] \\ O \text{ mijloc } [HF] \end{cases}$

În $\triangle HFG$, notez: $GO \cap HE = \{R\}$ și $FR \cap HG = \{S\}$.

$\begin{cases} O \text{ mijloc } [HF] \Rightarrow GO \text{ mediană} \\ E \text{ mijloc } [FG] \Rightarrow HE \text{ mediană} \\ O \cap HE = \{R\} \end{cases} \Rightarrow R \text{ centru de greutate în } \triangle HFG \Rightarrow$

$$\Rightarrow HR = \frac{1}{3} HE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AE = \frac{1}{6} AE \text{ și } AR = \frac{5}{6} AE$$

R centru de greutate în $\triangle HFG \Rightarrow S$ mijloc $[HG]$

$HD \parallel BC \Rightarrow HD \parallel GE \Rightarrow \begin{cases} HD = GE = a \end{cases} \Rightarrow HDGE$ paralelogram

$\Rightarrow$ mijlocul diagonalei $[HG]$ coincide cu mijlocul diagonalei $[DE]$

$\Rightarrow S$ mijloc $[DE]$

În $\triangle EBD$:

$$\left. \begin{array}{l} S \text{ mijloc } [ED] \\ F \text{ mijloc } [EB] \end{array} \right\} \Rightarrow SF \text{ linie mijlocie} \Rightarrow \begin{cases} SF \parallel DB \\ SF = \frac{DB}{2} \end{cases}$$

$$SF \parallel DB \Rightarrow MN \parallel FR \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle AFR \Rightarrow \frac{MN}{FR} = \frac{AN}{AR} = \frac{\frac{2}{3}AE}{\frac{5}{6}AE} = \frac{4}{5} \Rightarrow MN = \frac{4}{5}FR$$

$$R \text{ centru de greutate în } \triangle HFG \Rightarrow FR = \frac{2}{3}FS = \frac{2}{3} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{3}BD$$

$$\text{Deci } MN = \frac{4}{5}FR = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}BD = \frac{4}{15}BD$$

$$\text{Astfel, } \frac{MN}{NP} = \frac{\frac{4}{15}BD}{\frac{4}{21}BD} = \frac{7}{5}$$

2. Prof. Nela Ciceu, Roșiori, Bacău și Roxana Mihaela Stanciu, Buzău.

Punctul N este centrul de greutate al triunghiului ABC. Folosim teorema lui Menelaus (în ordinea $\triangle AGC$ și transversala B-P-D, $\triangle BGP$ și transversala A-M-F, $\triangle BEN$ și transversala A-M-F):

$$\begin{aligned} \frac{BG}{BC} \cdot \frac{DC}{DA} \cdot \frac{PA}{PG} &= 1 \Rightarrow \frac{PA}{PG} = \frac{4}{3}, \frac{PA}{AG} = \frac{4}{7} \\ \frac{AP}{AG} \cdot \frac{FG}{FB} \cdot \frac{MB}{MP} &= 1 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MB}{MP} = 1 \Rightarrow \frac{MB}{MP} = \frac{7}{8} \\ \frac{AN}{AE} \cdot \frac{FE}{FB} \cdot \frac{MB}{MN} &= 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{MB}{MN} = 1 \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{MN}{MP} &= \frac{7}{12} \quad \text{deci} \quad \frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

3. Prof. George-Florin Șerban, Liceul Pedagogic “D.P.Perpessicius”, Brăila

În triunghiul $\triangle AEC$, aplicăm teorema lui Menelaos, transversala D,N,B, $\frac{AN}{EN} \cdot \frac{EB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$,

$$\frac{AN}{EN} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1, \quad \frac{AN}{EN} = 2,$$

În triunghiul $\triangle AEF$, aplicăm teorema lui Menelaos, transversala N,M,B, $\frac{AM}{FM} \cdot \frac{FB}{EB} \cdot \frac{EN}{AN} = 1$,

$$\frac{AM}{FM} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{AM}{FM} = 4,$$

În triunghiul $\triangle AFG$, aplicăm teorema lui Menelaos, transversala P,M,B, $\frac{AM}{FM} \cdot \frac{FB}{GB} \cdot \frac{GP}{AP} = 1$,

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{GP}{AP} = 1, \quad \frac{AP}{GP} = \frac{4}{3},$$

Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, (afixe), $z_F = \frac{z_2 + \frac{1}{3}z_3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3z_2 + z_3}{4}$, unde $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{3}$, $z_E = \frac{z_2 + z_3}{2}$,

$$z_G = \frac{z_3 + \frac{1}{3}z_2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3z_3 + z_2}{4}, \text{ unde } \frac{GC}{BG} = \frac{1}{3}, \quad z_M = \frac{z_1 + 4z_F}{5} = \frac{z_1 + 4 \cdot \frac{3z_2 + z_3}{4}}{5} = \frac{z_1 + 3z_2 + z_3}{5},$$

$$z_N = \frac{z_1 + 2z_E}{3} = \frac{z_1 + 2 \cdot \frac{z_2 + z_3}{2}}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}, \text{ N este centrul de greutate al triunghiului ABC.}$$

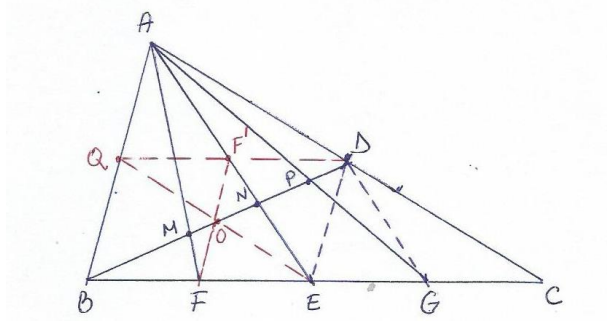
$$z_P = \frac{z_1 + \frac{4}{3}z_G}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{z_1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3z_3 + z_2}{4}}{\frac{7}{3}} = \frac{3z_1 + z_2 + 3z_3}{7},$$

$$MN = |z_M - z_N| = \left| \frac{z_1 + 3z_2 + z_3}{5} - \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right| = \left| \frac{-2z_1 + 4z_2 - 2z_3}{15} \right|,$$

$$NP = |z_N - z_P| = \left| \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} - \frac{3z_1 + z_2 + 3z_3}{7} \right| = \left| \frac{-2z_1 + 4z_2 - 2z_3}{21} \right|,$$

$$\frac{MN}{NP} = \left| \frac{-2z_1 + 4z_2 - 2z_3}{15} \right| \cdot \left| \frac{21}{-2z_1 + 4z_2 - 2z_3} \right| = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}.$$

4. Prof. Alexandru Elena-Marcela, Școala Gimnazială Nr.3 Baia



Fie Q mijlocul $[AB]$, rezultă conform reciprocei teoremei liniei mijlocii că F' este mijlocul $[AE]$.

$[QD]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă $QD \parallel BC$ și $QD = \frac{BC}{2} = BE = EC$

$QD \parallel BE$ și $QD = BE$ rezultă că $QDEB$ este paralelogram și fie O intersecția diagonalelor BD și QE .

$[DG]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC , de unde $DG \parallel AE$ și $DG = \frac{AE}{2}$.

O este centru de simetrie, de unde $OF' = OF$, cum F este mijlocul $[BE]$

În triunghiul ABC , AE și BD sunt mediane a căror intersecție este punctul N , deci N este centrul de greutate al triunghiului ABC , de unde $ND = \frac{1}{3}BD$ și $BN = \frac{2}{3}BD$.

$OF \parallel AB$, OF este linie mijlocie în $\triangle BQE$, atunci $\triangle OFM \sim \triangle BAM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OF}{BA} = \frac{FM}{AM} = \frac{OM}{BM}, \quad \frac{OF}{BA} = \frac{\frac{1}{2}BQ}{2BQ} = \frac{1}{4} \Rightarrow BM = 4OM \text{ și } BO = OD$$

$$BO = BM + MO = 4OM + OM = 5OM \Rightarrow OM = \frac{BO}{5} = \frac{\frac{1}{2}BD}{5} = \frac{1}{10}BD.$$

$OF' \parallel DE$, OF' este linie mijlocie în $\triangle QED$, atunci

$$\triangle OF'N \sim \triangle DEN \Rightarrow \frac{OF'}{DE} = \frac{F'N}{EN} = \frac{ON}{DN}, \quad \frac{OF'}{DE} = \frac{\frac{1}{2}DE}{DE} = \frac{1}{2}.$$

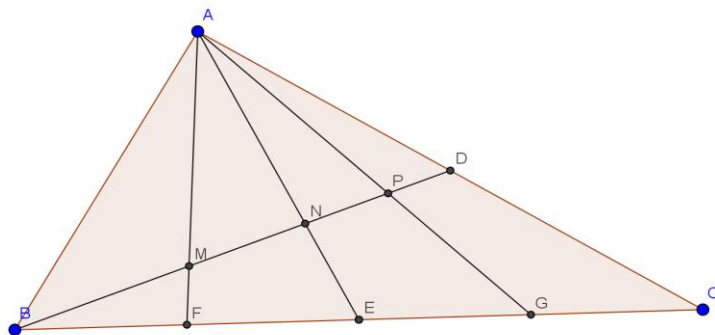
DO și EF' sunt mediane în $\triangle QED$ rezultă că N este și central de greutate al $\triangle QED$, de unde $DN = 2ON$.

$$OD = 3ON \Rightarrow ON = \frac{OD}{3} = \frac{\frac{1}{2}BD}{3} = \frac{1}{6}BD$$

$$MN = MO + ON = \frac{1}{10}BD + \frac{1}{6}BD = \frac{8}{30}BD = \frac{4}{15}BD, \text{ iar}$$

$$NP = \frac{1}{3}OD = \frac{\frac{1}{2}BD}{3} = \frac{1}{6}BD. \text{ Atunci raportul } \frac{MN}{NP} = \frac{\frac{4}{15}BD}{\frac{1}{6}BD} = \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{1} = \frac{8}{5}.$$

5. Prof. Mocanu Ana Gabriela, Liceul Teoretic „ȘERBAN VODĂ” Slănic



$$BF = FE = EG = GC \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{1}{3}; \frac{BE}{EC} = 1; \frac{BG}{GC} = 3$$

$$AD = DC \Rightarrow \frac{AC}{AD} = 2$$

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul BDC și transversala A-M-F

$$\Rightarrow \frac{DM}{MB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{DM}{MB} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{DM}{DM + MB} = \frac{3}{3 + 2} \Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{3}{5} \Rightarrow DM = \frac{3}{5}DB(*)$$

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul BDC și transversala A-N-E

$$\Rightarrow \frac{DN}{NB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{DN}{NB} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{DN}{NB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DN}{DN + NB} = \frac{1}{1 + 2} \Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow DN = \frac{1}{3}DB(**)$$

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul BDC și transversala A-P-G

$$\Rightarrow \frac{DP}{PB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PB} \cdot 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{DP}{DP + PB} = \frac{1}{1 + 6} \Rightarrow \frac{DP}{DB} = \frac{1}{7} \Rightarrow DP = \frac{1}{7}DB(***)$$

$$(*) \& (**) \Rightarrow MN = DM - DN = \frac{3}{5}DB - \frac{1}{3}DB = \frac{4}{15}DB$$

$$(**) \& (***) \Rightarrow NP = DN - DP = \frac{1}{3}DB - \frac{1}{7}DB = \frac{4}{21}DB$$

$$\frac{MN}{NP} = \frac{\frac{4}{15}DB}{\frac{4}{21}DB} = \frac{7}{5}$$

6. Profesor, Taclit Daniela Nadia , Colegiul Național "Radu Greceanu", Slatina, Olt

SOLUȚIA I

Fie, în reperul cartezian XOY, triunghiul ABC, A(2a,2b), B(0,0) și C(2c,0). AE și BD mediane, atunci N este centrul de greutate al triunghiului ABC, N((2a+2c)/3, 2b/3).

F(c/2,0), E(c,0) și G(3c/2,0).

{M}=AF∩BD, M((2a+2c)/5, 2b/5), prin rezolvarea sistemului: 2bx-(2a-c/2)y=bc și bx-y(a+c)=0;

{P}=AG∩BD, P(6/7*(a+c), 6b/7), prin rezolvarea sistemului: 2bx+y(3c/2-2a)=3bc și bx-y(a+c)=0;

Aplicând formula distanței, în plan, obținem: $MN^2 = 16/15^2 * [(a+c)^2 + b^2]$ și $NP^2 = 16/21^2 * [(a+c)^2 + b^2]$. Atunci, $MN/NP = 7/5$.

SOLUȚIA II

AE și BD mediane, atunci N este centrul de greutate al triunghiului ABC, $NE/NA = 1/2$ și $BN/BD = 2/3$.

APLICĂM TEOREMA MENELAUS :

-în triunghiul AFE și transversala B-M-N:

$$BF/BE * NE/NA * MA/MF = 1; 1/2 * 1/2 * MA/MF = 1, \text{ atunci } MA/MF = 4 \text{ și } FA/FM = 5 \quad (1)$$

-în triunghiul AFG și transversala B-M-P:

$$BF/BG * PG/PA * MA/MF = 1; 1/3 * 4 * PG/PA = 1, \text{ atunci } PG/PA = 3/4 \text{ și } PG/GA = 3/7 \quad (2)$$

-în triunghiul ANP și transversala E-G-B:

$$BN/BP * PG/GA * EA/EN = 1; 3/7 * 3 * BN /BP = 1, \text{ atunci } BN /BP = 7/9; BN/NP = 7/2 \quad (3)$$

- în triunghiul ANM și transversala E-F-B:

$$BM/BN * FA/FM * EN/EA = 1; 1/3 * 5 * BM /BN = 1, \text{ atunci } BM /BN = 3/5 \text{ și } BM/NM = 3/2 \quad (4)_a$$

Din (4) obținem $MN = 2/5 * BN$ și din (3) obținem $NP = 2/7 BN$, atunci $MN/NP = 2/5 * 7/2 = 7/5$.

SOLUȚIA III- vectorial

$$\overrightarrow{AE} = \text{vector median, atunci } \overrightarrow{AE} = 1/2 * (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}); (1) \quad \overrightarrow{AF} = 1/2 * (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = 1/4 * (3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}); (2)$$

$$\overrightarrow{BD} = 1/2 * (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = 1/2 * (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}); (3)$$

$\overrightarrow{BM}$ vector de poziție al punctului M, $MA/MF = 4$ (T.M. relația (1), vezi soluția II),

$$\overrightarrow{BM} = 1/5 * (\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BF}) = 1/5 * (-\overrightarrow{AB} + 4 * 1/4 * \overrightarrow{BC}) = 1/5 * (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}); (4)$$

Din relația (3):

$$\overrightarrow{BN} = 2/3 * \overrightarrow{BD} = 1/3 * (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}), (5)$$

Din (5) și (4) obținem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = 1/15 * (2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}), (6)$$

$\overrightarrow{BP}$ vector de poziție al punctului P, $PG/PA = 3/4$ (T.M. relația (2) ,vezi soluția II),

$$\overrightarrow{BP} = 4/7 * (\overrightarrow{BG} + 3/4 * \overrightarrow{BA}) = 3/7 * (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}), (7)$$

Din relațiile (7) și (5):

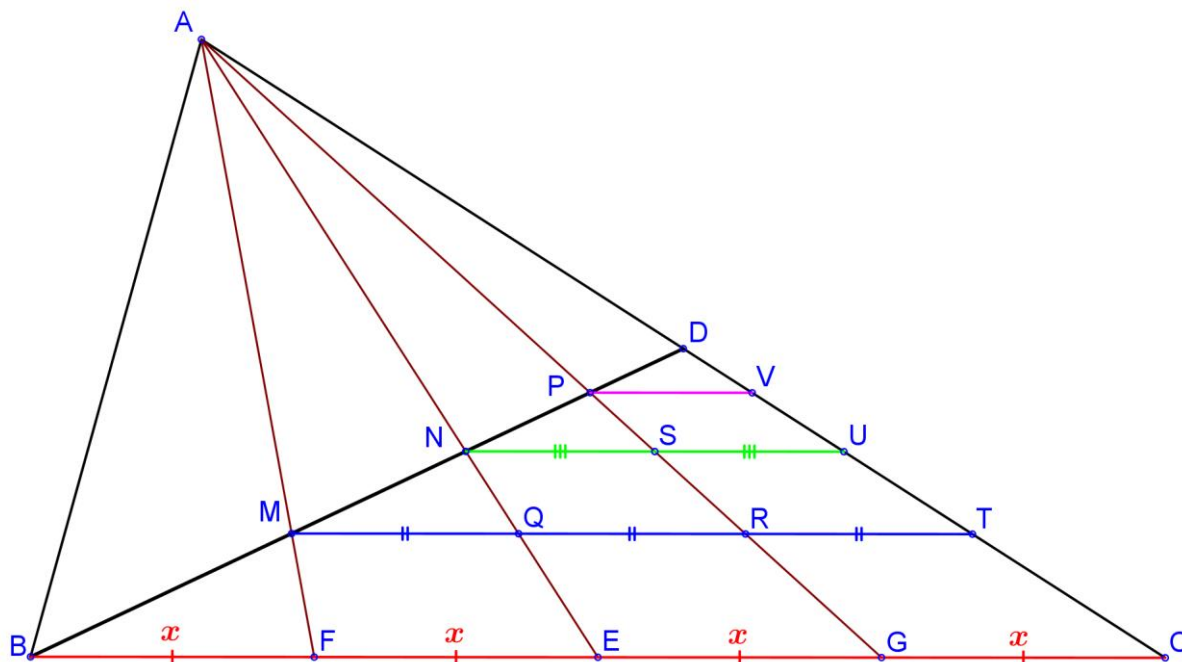
$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BN} = 1/21 * (2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}), (8).$$

Din relațiile (6) și (8) obținem: $MN/NP = 7/5$.

7. Prof. Constantin Telteu, Colegiul Național de Arte „Regina Maria”, Constanța

Prima soluție:

În figura de mai jos, am dus prin punctele M, N, P paralele la BC . Consider evidentă congruența segmentelor marcate la fel.



Cu teorema lui Menelaus în triunghiul AFE pentru transversala BN , obținem:

$$\frac{BF}{BE} \cdot \frac{EN}{AN} \cdot \frac{AM}{MF} = 1. \text{ Ținând cont că } N \text{ este centrul de greutate al triunghiului } ABC, \text{ din egalitatea}$$

$$\text{precedentă obținem: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{MF} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MF} = 4 \Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{4}{5}.$$

$$\triangle AMR \sim \triangle AFG \Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{MR}{FG} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{MR}{2x} \Rightarrow MR = \frac{8x}{5}.$$

$$\triangle ANS \sim \triangle AEG \Rightarrow \frac{AN}{AE} = \frac{NS}{EG} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{NS}{x} \Rightarrow NS = \frac{2x}{3}.$$

$$\triangle PNS \sim \triangle PMR \Rightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{NS}{MR} \Rightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{5}{8x} \Rightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{PN}{PM - PN} = \frac{5}{12 - 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{PN} = \frac{7}{5}. (1)$$

BONUS:

$$\triangle NMQ \sim \triangle NBE \Rightarrow \frac{MN}{NB} = \frac{MQ}{BE} \Rightarrow \frac{MN}{NB} = \frac{4x}{5} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{2}{3}. (2)$$

Cu teorema lui Menelaus în triunghiul AGC pentru transversala BD , obținem:

$$\frac{BG}{BC} \cdot \frac{DC}{DA} \cdot \frac{PA}{PG} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PG} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{4}{7}.$$

$$\triangle APV \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{PV}{GC} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{PV}{x} \Rightarrow PV = \frac{4x}{7}.$$

$$\triangle DPV \sim \triangle DNU \Rightarrow \frac{DP}{DN} = \frac{PV}{NU} \Rightarrow \frac{DP}{DN} = \frac{4x}{7} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{DP}{PN} = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

$$\text{Din (1)} \Rightarrow PN = \frac{5 \cdot MN}{7}; \quad \text{din (2)} \Rightarrow MB = \frac{3 \cdot MN}{2};$$

$$\text{Din (3)} \Rightarrow DP = \frac{3}{4} \cdot PN = \frac{3}{4} \cdot \frac{5 \cdot MN}{7} = \frac{15 \cdot MN}{28}.$$

$$BD = BM + MN + NP + PD = \frac{15 \cdot MN}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = \frac{4}{15} \cdot BD; \quad PN = \frac{4}{21} \cdot BD; \quad MB = \frac{2}{5} \cdot BD; \quad DP = \frac{1}{7} \cdot BD.$$

Folosind formula pentru lungimea medianei BD, putem determina aceste segmente în funcție de laturile triunghiului.

A doua soluție:

Considerăm un sistem de coordonate ca în figura de mai jos.

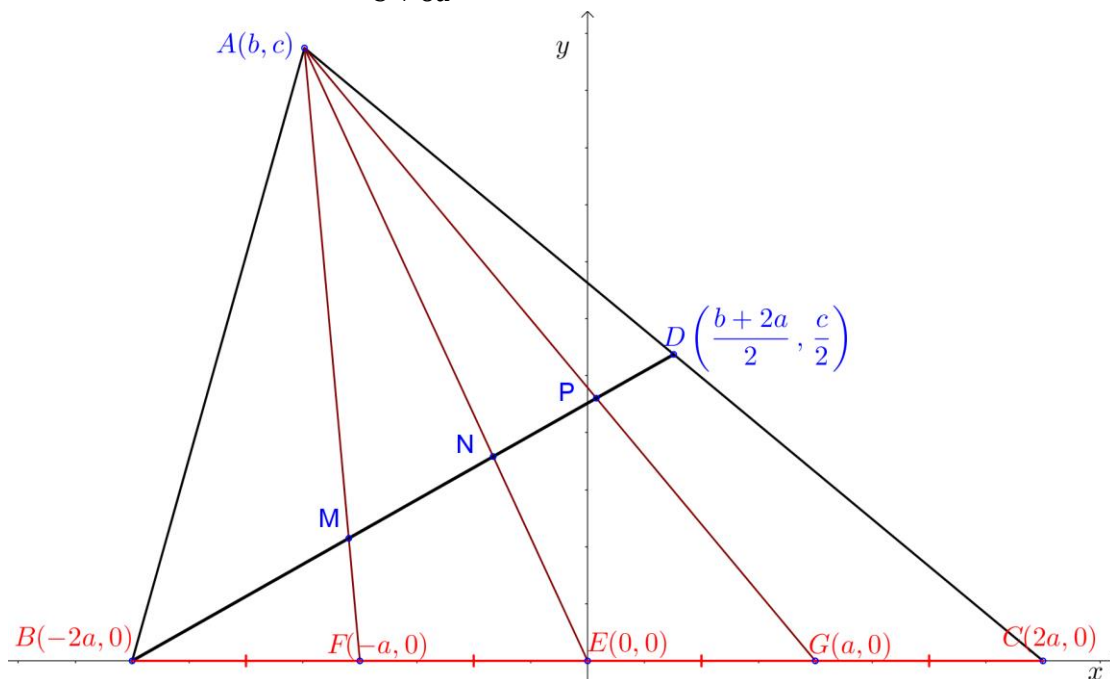
Avem:

- Ecuația dreptei AG este: $y = \frac{c}{b-a}(x-a)$ pentru $b \neq a$ și $x = a$ pentru $b = a$.

- Ecuația dreptei AE este: $y = \frac{c}{b}x$ pentru $b \neq 0$ și $x = 0$ pentru $b = 0$.

- Ecuația dreptei AF este: $y = \frac{c}{b+a}(x+a)$ pentru $b \neq -a$ și $x = -a$ pentru $b = -a$.

- Ecuația dreptei BD este: $y = \frac{c}{b+6a}(x+2a)$ pentru $b \neq -6a$ și $x = -2a$ pentru $b = -6a$.



Pentru $b \notin \{a, -a, 0, -6a\}$:

Deoarece $\{M\} = AF \cap BD$, coordonatele punctului M se află rezolvând sistemul format de ecuațiile acestor drepte. Se obține $M\left(\frac{b-4a}{5}, \frac{c}{5}\right)$.

Deoarece $\{N\} = AE \cap BD$, coordonatele punctului N se află rezolvând sistemul format de ecuațiile acestor drepte. Se obține $N\left(\frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

Deoarece $\{P\} = AG \cap BD$, coordonatele punctului P se află rezolvând sistemul format de ecuațiile acestor drepte. Se obține $P\left(\frac{3b+4a}{7}, \frac{3c}{7}\right)$.

$$MN = \sqrt{\left(\frac{b-4a}{5} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{5} - \frac{c}{3}\right)^2} = \dots = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{(b+6a)^2 + c^2}.$$

$$NP = \sqrt{\left(\frac{3b+4a}{7} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{3c}{7} - \frac{c}{3}\right)^2} = \dots = \frac{2}{21} \cdot \sqrt{(b+6a)^2 + c^2}.$$

Din ultimele două egalități se obține $\frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$.

Pentru $b \in \{a, -a, 0, -6a\}$ se verifică ușor, în fiecare caz, că valoarea raportului cerut este aceeași.

8. Prof. Ștefan Gațachiu, Liceul Teoretic „Nicolae Bălcescu”, Medgidia

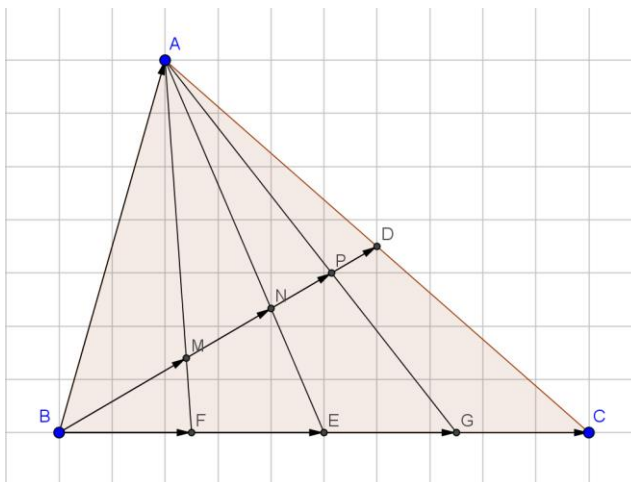
Voi da o soluție vectorială. Pentru aceasta voi exprima vectorii coliniari $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{NP}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BC}$.

Fie $\frac{AM}{MF} = k$. Atunci

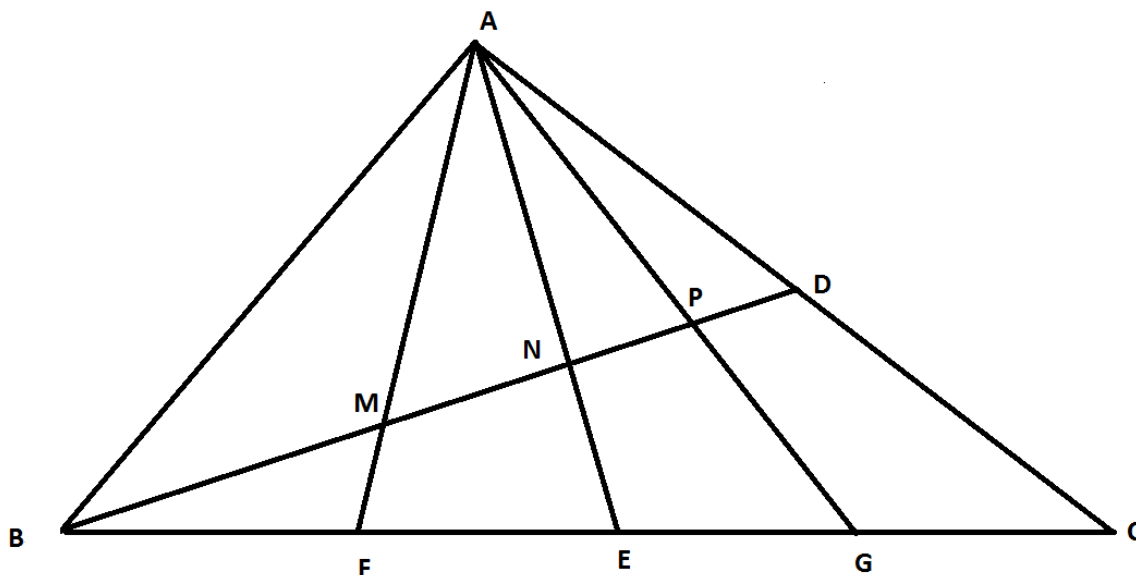
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{1+k} \overrightarrow{BA} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{BF} = \\ &= \frac{1}{1+k} \overrightarrow{BA} + \frac{k}{4(1+k)} \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

$$\text{Dar } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

Cum și vectorii $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BD}$ sunt



Rezultă $\overrightarrow{MN} = \frac{7}{5} \overrightarrow{NP}$. Trecând la modulele vectorilor, rezultă $\frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$.



- 1) N centru de greutate al $\triangle ABC$.
 2) $\triangle AEF$ și transversala BN, $\frac{BE}{BF} \cdot \frac{MF}{MA} \cdot \frac{NA}{NE} = 1$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{MF}{MA} \cdot \frac{2}{1} = 1$; și $\frac{MF}{MA} = \frac{1}{4}$
 3) $\triangle AEG$ și transversala BP, $\frac{BE}{BG} \cdot \frac{NA}{NE} \cdot \frac{PA}{PG} = 1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{PA}{PG} = 1$; și $\frac{PA}{PG} = \frac{3}{4}$
 4) $\triangle BPG$ și transversala AE, $\frac{AP}{AG} \cdot \frac{NB}{NE} \cdot \frac{EG}{EP} = 1$, $\frac{4}{7} \cdot \frac{NB}{NP} \cdot \frac{1}{2} = 1$; și $\frac{NB}{NP} = \frac{7}{2}$
 5) $\triangle BNE$ și transversala AF, $\frac{AG}{AN} \cdot \frac{NP}{MB} \cdot \frac{EB}{FE} = 1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{MB}{MN} \cdot \frac{1}{1} = 1$; și $\frac{MB}{MN} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{NB}{MN} = \frac{5}{2}$
 Din 4) și 5) rezultă $\frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$.

10. Prof. Buzea Gabriela, Scoala Gimnazială Nr. 56, București**Soluție 1:**

Dacă E este mijlocul lui [BC],
rezultă că $BE = EC = \frac{BC}{2}$.

Dacă F este mijlocul lui [BE],
rezultă că $BF = FE = \frac{BE}{2} = \frac{BC}{4}$.

Dacă G este mijlocul lui [EC],
rezultă că $EG = GC = \frac{EC}{2} = \frac{BC}{4}$.

Deci $BF = FE = EG = GC = \frac{BC}{4}$.

Dacă $AE \cap BD = \{N\}$, AE și BD mediane, rezultă că punctul N este centrul de greutate al triunghiului ABC. Prin urmare, $BN = 2k$, $ND = 1k$, iar $BD = 3k$.

În $\triangle BDC$, aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta A-P-G,

$$\frac{CA}{AD} \cdot \frac{DP}{PB} \cdot \frac{BG}{GC} = 1, \text{ deci } 2 \cdot \frac{DP}{PB} \cdot 3 = 1 \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{DP}{DP+PB} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{DP}{3k} = \frac{1}{7} \Rightarrow DP = \frac{3k}{7} \Rightarrow$$

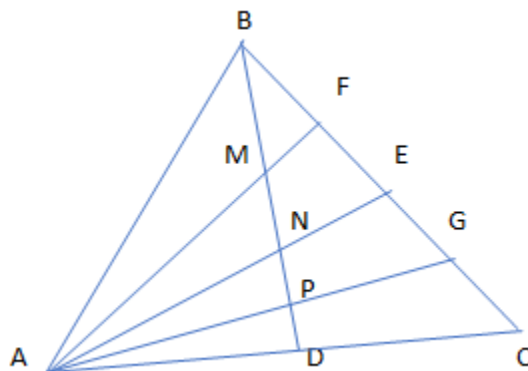
$$NP = ND - DP \Rightarrow NP = 1k - \frac{3k}{7} \Rightarrow NP = \frac{4k}{7}. (1)$$

Tot în $\triangle BDC$, aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta A-M-F,

$$\frac{CA}{AD} \cdot \frac{DM}{MB} \cdot \frac{BF}{FC} = 1, \text{ deci } 2 \cdot \frac{DM}{MB} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{DM}{3k} = \frac{3}{5} \Rightarrow DM = \frac{9k}{5} \Rightarrow$$

$$MN = DM - DN \Rightarrow MN = \frac{9k}{5} - 1k \Rightarrow MN = \frac{4k}{5}. (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că raportul $\frac{MN}{NP} = \frac{4k}{5} : \frac{4k}{7} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$.

**Soluție 2:**

Folosind datele din ipoteză,
rezultă că $BF = FE = EG = GC = \frac{BC}{4}$.

Dacă $AE \cap BD = \{N\}$, AE și BD mediane,
rezultă că punctul N este centrul de greutate
al triunghiului ABC, deci $AN = \frac{2}{3}AE$, $ND = \frac{1}{3}BD$,

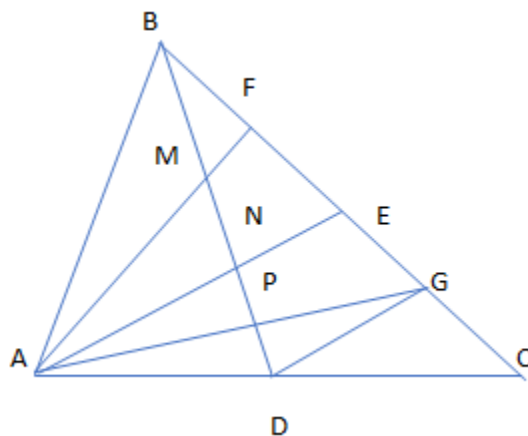
$$BN = \frac{2}{3}BD.$$

În triunghiul AEC, GD linie mijlocie,
deci $DG = \frac{AE}{2}$ și $GD \parallel AE$,

deci și $GD \parallel AN \Rightarrow \triangle ANP \sim \triangle GDP \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AN}{DG} = \frac{NP}{PD} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}AE}{\frac{AE}{2}} = \frac{NP}{PD} \Rightarrow \frac{NP}{PD} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{NP}{NP+PD} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{NP}{\frac{1}{3}BD} = \frac{4}{7} \Rightarrow NP = \frac{4}{21}BD (1).$$

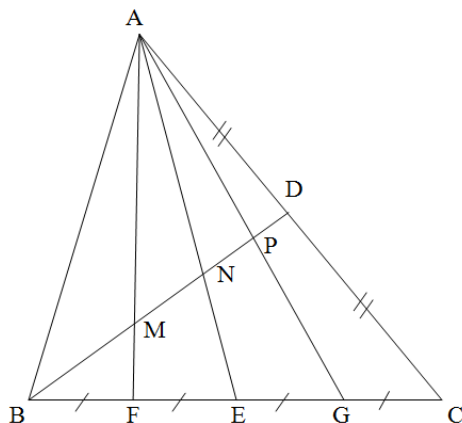
În triunghiul BNE aplicăm teorema lui Menelaus, cu secanta A-M-F, și obținem



$$\frac{AE}{AN} \cdot \frac{NM}{MB} \cdot \frac{BF}{FE} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{NM}{MB} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{NM}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{NM}{NM+MB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{NM}{\frac{2}{3}BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow NM = \frac{4}{15}BD(2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{MN}{NP} = \frac{4BD}{15} : \frac{4BD}{21} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}$.

11. Prof. Radu Laura, Liceul Teoretic „Emil Racoviță”, Galați



AE, BD – mediane în $\triangle ABC \Rightarrow N$ – centrul de greutate al triunghiului ABC $\Rightarrow AN = \frac{2}{3}AE$,
 $DN = \frac{1}{2}BN$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Notăm } \frac{BM}{MN} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{2k}{3(k+1)}\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AM} \text{ și } \overrightarrow{AF} \text{ coliniari} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} = \frac{2k}{3(k+1)} \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BM}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BM+MN}{MN} = \frac{3+2}{2} \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = \frac{2}{5}BN \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Notăm } \frac{DP}{PN} = l \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{l+1}\overrightarrow{AD} + \frac{l}{l+1}\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2(l+1)}\overrightarrow{AC} + \frac{2l}{3(l+1)}\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AP} \text{ și } \overrightarrow{AG} \text{ coliniari} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(l+1)} = \frac{2l}{3(l+1)} \Rightarrow 4l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DP}{PN} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DP+PN}{PN} = \frac{3+4}{4} \Rightarrow \frac{DN}{PN} = \frac{7}{4} \Rightarrow PN = \frac{4}{7}DN \Rightarrow$$

$$PN = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}BN \Rightarrow PN = \frac{2}{7}BN \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \frac{MN}{PN} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{7}{5}.$$

11. Problema lunii FEBRUARIE 2017

Să se arate că dacă punctele A, B, C, D, O, M din spațiu îndeplinesc condițiile:

$AB \perp CD$, $AD \perp BC$, $OA \perp BD$ și $M = pr_{BD}C$, atunci punctele A, C, O, M sunt coplanare.

Prof. C. Telteu, Constanța



*Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 4.03.2017 pe adresa de e-mail
revista@mateinfo.ro*