REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

IUNIE 2020

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista.mateinfo@yahoo.com

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Alte inegalităţi cu numere Fibonacci şi Lucas... pag. 2**

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

2. **Puncte remarcabile în triunghi… pag. 15**

Marin Chirciu

3. **Alte două soluții pentru problema IX.521 ... pag. 54**

Daniel Văcaru

4. **Probleme propuse pentru liceu…pag. 56**

Dorin Mărghidanu

1. Alte inegalităţi cu numere Fibonacci şi Lucas

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

1. Inegalitatea următoare:

$$\frac{(L_1^2+1)(L_2^2+1)}{L_1L_2+1}+\frac{(L_2^2+1)(L_3^2+1)}{L_2L_3+1}+\ldots+\frac{(L_{n-1}^2+1)(L_n^2+1)}{L_{n-1}L_n+1}+\frac{(L_n^2+1)(L_1^2+1)}{L_nL_1+1}\geq 2L_{n+2}-6,$$

este adevărată, oricare ar fi numărul natural n.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Obţinem inegalităţile:

$$\frac{(L_1^2+1)(L_2^2+1)}{L_1L_2+1}\geq L_1+L_2;$$

$$\frac{(L_2^2+1)(L_3^2+1)}{L_2L_3+1}\geq L_2+L_3;$$

....

$$\frac{(L_{n-1}^2+1)(L_n^2+1)}{L_{n-1}L_n+1}\geq L_{n-1}+L_n;$$

$$\frac{(L_n^2+1)(L_1^2+1)}{L_nL_1+1}\geq L_n+L_1,$$

care adunate mebru cu membru conduc la inegalitatea:

$$\frac{(L_1^2+1)(L_2^2+1)}{L_1L_2+1}+\frac{(L_2^2+1)(L_3^2+1)}{L_2L_3+1}+\ldots+\frac{(L_{n-1}^2+1)(L_n^2+1)}{L_{n-1}L_n+1}+\frac{(L_n^2+1)(L_1^2+1)}{L_nL_1+1}\geq$$

$$\geq 2(L_1+L_2+\ldots+L_n).$$

Deoarece,

$$\sum_{k=1}^{n}L_k=L_{n+2}-3,$$

din cele de mai sus obţinem inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Inegalitatea de mai sus a apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaţionale, The Fibonacci Quarterly.

2. Dacă , $x_k\in\mathbf{R}$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, atunci:

$$2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}L_k\cdot\sin x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}L_k\cdot\cos x_k\right)\leq n\cdot(L_n\cdot L_{n+1}-2),\ \forall n\in\mathbf{N}^*;$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Din C-B-S şi binecunoscuta identitate

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

avem:

$$(1)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} L_k \sin x_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} L_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k\right) = (L_n L_{n+1} - 2)\cdot \sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k\ ,$$

$$(2)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} L_k \cos x_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} L_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\right) = (L_n L_{n+1} - 2)\cdot \sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\ .$$

Aşadar:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} L_k \sin x_k\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} L_k \cos x_k\right| \le (L_n L_{n+1} - 2)\cdot \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\right)} \overset{GM\le AM}{\le}$$

$$\overset{GM\le AM}{\le} \frac{L_n L_{n+1} - 2}{2}\cdot \sum_{k=1}^{n} (\sin^2 x_k + \cos^2 x_k) = \frac{n\cdot (L_n \cdot L_{n+1} - 2)}{2},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

şi:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} L_k \sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} L_k \cos x_k\right) \le \left|\sum_{k=1}^{n} L_k \sin x_k\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} L_k \cos x_k\right| \le \frac{n\cdot (L_n \cdot L_{n+1} - 2)}{2},\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

3. Dacă $m \in [1,\infty)$, atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 + L_{2k-1})^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} \cdot (L_{2n+2} - 2),\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem:

Considerăm funcţia

$$f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = m^m (x+1)^{m+1} - (m+1)^{m+1} x,$$

atunci:

$$f'(x) = m^m (m+1)(x+1)^m - (m+1)^{m+1},\ f''(x) = m^{m+1}(m+1)(x+1)^{m-1}.$$

Avem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{m}.$$

Deci:

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \text{ şi } f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

aşa că f este convexă pe $\mathbf{R}_+^*$, şi $x_0 = \dfrac{1}{m}$ este punct de minim absolut pentru funcţia f pe $\mathbf{R}_+^*$. Rezultă că:

$$f(x) \ge f(x_0) = f\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Leftrightarrow m^m (x+1)^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} x,\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

de unde deducem că:

$$m^m(1+L_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} L_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Aplicăm identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{2k-1} = L_{2n+2} - 2, \ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

şi obţinem că:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1}(1+L_{2k-1})^{m+1} \geq (m+1)^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} L_{2k-1} = (m+1)^{m+1} \cdot (L_{2n+2}-2), \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

4. $\dfrac{L_n F_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \dfrac{L_{n+1} F_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Folosim inegalitatea lui *G. Tsintsifas*, i.e.: Dacă $m, p, q \in \mathbf{R}_+^*$, şi a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S, atunci:

$$(1) \qquad \frac{ma^2}{p+q} + \frac{pb^2}{q+m} + \frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Folosim de asemenea că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$, avem un triunghi ABC cu:

$$a = x+y, b = y+z, c = z+x,$$

semiperimetrul

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z,$$

şi aria

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Deci din (1) avem că:

$$(2) \qquad \frac{m(x+y)^2}{p+q} + \frac{p(y+z)^2}{q+m} + \frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*, .$$

Dacă luăm în (2): $x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2}, m = L_n, p = L_{n+1}, q = L_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$\frac{L_n(F_n + F_{n+1})^2}{L_{n+1} + L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2})^2}{L_{n+2} + L_n} + \frac{L_{n+2}(F_{n+2} + F_n)^2}{L_n + L_{n+1}} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2}(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2F_n F_{n+1} F_{n+2}^2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L_n F_{n+2}^2}{L_{n+3}} + \frac{L_{n+1} F_{n+3}^2}{L_n + L_{n+2}} + (F_n + F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

5.

$$\frac{F_m}{F_{m+1}\left(F_{m+1}^{2n-2}+\binom{2n}{1}F_{m+1}^{2n-3}F_m+\ldots+\binom{2n}{n-1}F_{m+1}^{n-1}F_m^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}F_{m+1}^{n-2}F_m^{n}\right)}+$$

$$+\frac{F_{m+1}}{F_m\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}F_{m+1}^{n}F_m^{n-2}+\binom{2n}{n+1}F_{m+1}^{n+1}F_m^{n-1}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}F_{m+1}F_m^{2n-3}+F_m^{2n-2}\right)}\geq\frac{4F_mF_{m+1}}{F_{m+2}^{2n}},$$

pentru orice numere naturale pozitive n şi m.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi G. Tica**, 2013)

Dem: Notăm membrul stâng cu U_n, şi avem:

$$U_n=F_mF_{m+1}\left(\frac{1}{\left(F_{m+1}^{2n}+\binom{2n}{1}F_{m+1}^{2n-1}F_m+\ldots+\binom{2n}{n-1}F_{m+1}^{n+1}F_m^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}F_{m+1}^{n}F_m^{n}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}F_{m+1}^{n}F_m^{n}+\binom{2n}{n+1}F_{m+1}^{n+1}F_m^{n+1}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}F_{m+1}F_m^{2n-1}+F_m^{2n}\right)}\right),$$

de unde prin aplicarea inegalităţii lui *Bergström* rezultă că:

$$U_n\geq\frac{4F_mF_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}F_{m+1}^{k}F_m^{2n-k}}=\frac{4F_mF_{m+1}}{(F_m+F_{m+1})^{2n}}=\frac{4F_mF_{m+1}}{F_{m+2}^{2n}},$$

adică ceea ce era de demonstrat.

6.

$$\frac{L_m}{L_{m+1}\left(L_{m+1}^{2n-2}+\binom{2n}{1}L_{m+1}^{2n-3}L_m+\ldots+\binom{2n}{n-1}L_{m+1}^{n-1}L_m^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}L_{m+1}^{n-2}L_m^{n}\right)}+$$

$$+\frac{L_{m+1}}{L_m\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}L_{m+1}^{n}L_m^{n-2}+\binom{2n}{n+1}L_{m+1}^{n+1}L_m^{n-1}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}L_{m+1}L_m^{2n-3}+L_m^{2n-2}\right)}\geq\frac{4L_mL_{m+1}}{L_{m+2}^{2n}},$$

pentru orice numere naturale pozitive n şi m.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi G. Tica**, 2013)

Dem: Notăm membrul stâng cu V_n, şi avem:

$$V_n = L_m L_{m+1}\left(\frac{1}{\left(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \ldots + \binom{2n}{n-1} L_{m+1}^{n+1} L_m^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n} L_{m+1}^{n} L_m^{n}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} L_{m+1}^{n} L_m^{n} + \binom{2n}{n+1} L_{m+1}^{n+1} L_m^{n+1} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n}\right)}\right),$$

de unde prin aplicarea inegalităţii lui *Bergström* rezultă că:

$$V_n \geq \frac{4L_m L_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L_{m+1}^{k} L_m^{2n-k}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{(L_m + L_{m+1})^{2n}} = \frac{4L_m L_{m+1}}{L_{m+2}^{2n}},$$

şi demonstraţia este completă.

7.

$$\frac{F_m}{F_{m+1}\left(F_{m+1}^{2n-1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-2} F_m + \ldots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n-1} F_m^{n}\right)} +$$

$$+ \frac{F_{m+1}}{F_m\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^{n} F_m^{n-1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-2} + F_m^{2n+1}\right)} \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n+1}},$$

pentru orice numere naturale pozitive n şi m.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi G. Tica**, 2013)

Dem: Notăm membrul stâng cu U_n, şi avem:

$$U_n = F_m F_{m+1}\left(\frac{1}{\left(F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \ldots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^{n}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^{n} F_m^{n+1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1}\right)}\right),$$

de unde prin aplicarea inegalităţii lui *Bergström* rezultă că:

$$U_n \geq \frac{4F_m F_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^{k} F_m^{2n+1-k}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{(F_m + F_{m+1})^{2n+1}} = \frac{4F_m F_{m+1}}{F_{m+2}^{2n+1}},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

8.

$$\frac{F_nL_{n+2}^2}{F_{n+3}}+\frac{F_{n+1}L_{n+3}^2}{F_n+F_{n+2}}+(L_n+L_{n+2})^2\geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem. Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ''Dacă m,p,q sunt numere reale pozitive şi a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S, atunci:

$$(1)\qquad \frac{ma^2}{p+q}+\frac{pb^2}{q+m}+\frac{qc^2}{m+p}\geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ţinem cont că $\forall x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a=x+y,b=y+z,c=z+x,$$

de semiperimetru

$$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z,$$

şi arie

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din (1) urmează că:

$$(2)\qquad \frac{m(x+y)^2}{p+q}+\frac{p(y+z)^2}{q+m}+\frac{q(z+x)^2}{m+p}\geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)},\forall x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x=L_n,y=L_{n+1},z=L_{n+2},m=F_n,p=F_{n+1},q=F_{n+2},n\in\mathbf{N}^*,$$

atunci obţinem că:

$$\frac{F_n(L_n+L_{n+1})^2}{F_{n+1}+F_{n+2}}+\frac{F_{n+1}(L_{n+1}+L_{n+2})^2}{F_{n+2}+F_n}+\frac{F_{n+2}(L_{n+2}+L_n)^2}{F_n+F_{n+1}}\geq$$

$$\geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}L_{n+2}(L_n+L_{n+1}+L_{n+2})}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2L_nL_{n+1}L_{n+2}^2}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_nL_{n+2}^2}{F_{n+3}}+\frac{F_{n+1}L_{n+3}^2}{F_n+F_{n+2}}+(L_n+L_{n+2})^2\geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

9.

$$\frac{F_nF_{n+2}^2}{F_{n+3}}+\frac{F_{n+1}F_{n+3}^2}{F_n+F_{n+2}}+(F_n+F_{n+2})^2\geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ''Dacă m, p, q sunt numere reale pozitive şi a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S, atunci:

$$\text{(1)} \qquad \frac{ma^2}{p+q}+\frac{pb^2}{q+m}+\frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ţinem cont că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a = x+y, b = y+z, c = z+x,$$

de semiperimetru

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z,$$

şi arie

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din (1) urmează că:

$$\text{(2)} \qquad \frac{m(x+y)^2}{p+q}+\frac{p(y+z)^2}{q+m}+\frac{q(z+x)^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2}, m = F_n, p = F_{n+1}, q = F_{n+2}, n \in \mathbf{N}^*,$$

atunci obţinem că :

$$\frac{F_n(F_n+F_{n+1})^2}{F_{n+1}+F_{n+2}}+\frac{F_{n+1}(F_{n+1}+F_{n+2})^2}{F_{n+2}+F_n}+\frac{F_{n+2}(F_{n+2}+F_n)^2}{F_n+F_{n+1}} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}F_{n+2}(F_n+F_{n+1}+F_{n+2})} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2F_nF_{n+1}F_{n+2}^2} = 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_nF_{n+2}^2}{F_{n+3}}+\frac{F_{n+1}F_{n+3}^2}{F_n+F_{n+2}}+(F_n+F_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

10.

$$\frac{L_nL_{n+2}^2}{L_{n+3}}+\frac{L_{n+1}L_{n+3}^2}{L_n+L_{n+2}}+(L_n+L_{n+2})^2 \geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Cu inegalitatea lui *G. Tsintsifas* avem: ''Dacă m, p, q sunt numere reale pozitive şi a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC cu aria S, atunci:

$$\text{(1)} \qquad \frac{ma^2}{p+q}+\frac{pb^2}{q+m}+\frac{qc^2}{m+p} \geq 2\sqrt{3}S$$

Mai departe ţinem cont că $\forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ avem triunghiul ABC cu:

$$a = x+y, b = y+z, c = z+x,$$

de semiperimetru

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z,$$

şi arie

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}\,.$$

Din (1) urmează că:

$$(2)\qquad \frac{m(x+y)^2}{p+q}+\frac{p(y+z)^2}{q+m}+\frac{q(z+x)^2}{m+p}\geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)}\,,\forall x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$$

Dacă în (2) luăm:

$$x=L_n,y=L_{n+1},z=L_{n+2},m=L_n,p=L_{n+1},q=L_{n+2},n\in N^*,$$

atunci obţinem că:

$$\frac{L_n(L_n+L_{n+1})^2}{L_{n+1}+L_{n+2}}+\frac{L_{n+1}(L_{n+1}+L_{n+2})^2}{L_{n+2}+L_n}+\frac{L_{n+2}(L_{n+2}+L_n)^2}{L_n+L_{n+1}}\geq$$

$$\geq 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}L_{n+2}(L_n+L_{n+1}+L_{n+2})}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2L_nL_{n+1}L_{n+2}^2}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L_nL_{n+2}^2}{L_{n+3}}+\frac{L_{n+1}L_{n+3}^2}{L_n+L_{n+2}}+(L_n+L_{n+2})^2\geq 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2}\,,\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

11.

$$\frac{F_{n+1}^2}{F_n^3(F_nF_{n+1}+F_{n+2}^2)}+\frac{F_{n+2}^2}{F_{n+1}^3(F_{n+1}F_{n+2}+F_n^2)}+\frac{F_n^2}{F_{n+2}^3(F_nF_{n+2}+F_{n+1}^2)}>\frac{3}{2F_nF_{n+1}F_{n+2}}\,,\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**N. Stanciu şi G. Tica,** 2013)

Dem:

(IMO) '' Dacă $a,b,c\in R_+^*$, cu $abc=1$, atunci: $\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}\geq\frac{3}{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$ '', i.e. problema propusă la IMO, **Canada**, 1995.

Într-adevăr,

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{ab+ac}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(abc)^2(ab+bc+ca)}=$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}.$$

Dacă luăm:

$$a=\frac{F_n}{F_{n+1}},b=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}},c=\frac{F_{n+2}}{F_n},$$

atunci

$$abc=1,$$

şi din (IMO) rezultă că:

$$\frac{F_{n+1}^3}{F_n^3\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}+\frac{F_{n+2}}{F_n}\right)}+\frac{F_{n+2}^3}{F_{n+1}^3\left(\frac{F_{n+2}}{F_n}+\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}+\frac{F_n^3}{F_{n+2}^3\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right)}\geq\frac{3}{2},$$

ceea ce era de demonstrat.
Inegalitatea este strictă deoarece:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} \neq \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \neq \frac{F_{n+2}}{F_n}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

şi demonstraţia este completă.

12.

$$\frac{L_{n+1}^2}{L_n^3(L_nL_{n+1}+L_{n+2}^2)}+\frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}^3(L_{n+1}L_{n+2}+L_n^2)}+\frac{L_n^2}{L_{n+2}^3(L_nL_{n+2}+L_{n+1}^2)}>\frac{3}{2L_nL_{n+1}L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**N. Stanciu şi G. Tica,** 2013)

Dem:

(IMO) ''Dacă $a,b,c \in R_+^*$, cu $abc=1$, atunci: $\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$'', i.e. problema propusă la IMO, **Canada**, 1995.
Într-adevăr,

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{ab+ac} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(abc)^2(ab+bc+ca)}=$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{2}.$$

Dacă luăm:

$$a=\frac{L_n}{L_{n+1}}, b=\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, c=\frac{L_{n+2}}{L_n},$$

atunci

$$abc=1,$$

şi din (IMO) rezultă că:

$$\frac{L_{n+1}^3}{L_n^3\left(\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}+\frac{L_{n+2}}{L_n}\right)}+\frac{L_{n+2}^3}{L_{n+1}^3\left(\frac{L_{n+2}}{L_n}+\frac{L_n}{L_{n+1}}\right)}+\frac{L_n^3}{L_{n+2}^3\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}+\frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}\right)} \geq \frac{3}{2},$$

adică inegalitatea de demonstrat.
Inegalitatea este strictă deoarece:

$$\frac{L_n}{L_{n+1}} \neq \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}} \neq \frac{L_{n+2}}{L_n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstraţia este completă.

13.

$$F_n^2+F_{n+1}^2+5F_{n+2}^2>4\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ există un triunghi ABC cu lungimile laturilor

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

semiperimetrul

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z,$$

şi aria

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck* avem că:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3} \cdot S$$

Therefore:

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \ge 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall\ x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow (2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 \ge 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{xyz(x+y+z)}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm în (2):

$$x = F_n, y = F_{n+1}, z = F_{n+2},$$

atunci obţinem că:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^2 \ge 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2}(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$\Leftrightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + 4F_{n+2}^2 \ge 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1} F_{n+2} \cdot 2F_{n+2}}$$

$\Leftrightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 + 5F_{n+2}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{F_n F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \forall n \in N^*$, şi inegalitatea este demonstrată.

Observaţie. Egalitatea nu are loc deoarece $F_n \ne F_{n+1} \ne F_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

14.

$$L_n^2 + L_{n+1}^2 + 5L_{n+2}^2 > 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{L_n L_{n+1}} \cdot L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem:

Dacă în relaţia (2) din **2.48.** luăm:

$$x = L_n, y = L_{n+1}, z = L_{n+2},$$

procedând exact ca în **2.48.** obţinem relaţia de demonstrat.

Observaţie. Egalitatea nu are loc deoarece $L_n \ne L_{n+1} \ne L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

15.

$$F_{n+2}^2+(F_n+F_{n+2})^2+F_{n+3}^2>4\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem: Pentru orice $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ există un triunghi ABC cu lungimile laturilor

$$a=x+y,b=y+z,c=z+x$$

semiperimetrul

$$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z,$$

şi aria

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din inegalitatea *Ionescu-Weitzenböck* avem că:

$$(1)\quad a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\cdot S$$

Therefore:

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)},\forall\ x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow (2)\quad x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2\geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)},\forall x,y,z\in\ \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă luăm în (2):

$$x=F_n,y=F_{n+1},z=F_{n+2},$$

atunci obţinem că:

$$(F_n+F_{n+1})^2+(F_n+F_{n+2})^2+(F_{n+1}+F_{n+2})^2\geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}F_{n+2}(F_n+F_{n+1}+F_{n+2})},$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2}^2+(F_n+F_{n+2})^2+F_{n+3}^2\geq 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}F_{n+2}\cdot 2F_{n+2}}$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2}^2+(F_n+F_{n+2})^2+F_{n+3}^2>4\sqrt{6}\cdot\sqrt{F_nF_{n+1}}\cdot F_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*,$$

şi relaţia este demonstrată.

Observaţie. Egalitatea nu are loc deoarece $F_n\neq F_{n+1}\neq F_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*$.

16.

$$L_{n+2}^2+(L_n+L_{n+2})^2+L_{n+3}^2>4\sqrt{6}\cdot\sqrt{L_nL_{n+1}}\cdot L_{n+2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Dem:

Dacă în relaţia (2) din **2.50.** punem:

$$x=L_n,y=L_{n+1},z=L_{n+2},$$

şi procedăm ca în **2.50.** deducem inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Egalitatea nu are loc deoarece $L_n \neq L_{n+1} \neq L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

17.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{2m+2}}{k^{3m}} \geq \frac{4^m F_n^{m+1} F_{n+1}^{m+1}}{n^{2m}(n+1)^{2m}} \ , \quad \forall m \in \mathbf{R}_+ .$$

(**G. Tica,** 2013)

Dem: Aplicăm bine-cunoscutele formule:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Folosim inegalitatea lui *J. Radon* şi obţinem:

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^{2m+2}}{k^{3m}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(F_k^2\right)^{m+1}}{\left(k^3\right)^m} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)^m} = \frac{4^m F_n^{m+1} F_{n+1}^{m+1}}{n^{2m}(n+1)^{2m}},$$

şi demonstraţia este încheiată .

*   *

*

*

*   *

Bibliografie

[1]. **Dumitru M. Bătineţu – Giurgiu**, **Neculai Stanciu**, **Gabriel Tica**, *Din tainele numerelor Fibonacci şi Lucas*, Editura Sitech, Craiova, 2013.
[2]. **Dumitru M. Bătineţu – Giurgiu**, *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
[3]. **Dumitru M. Bătineţu – Giurgiu**, *Asupra unor perechi de şiruri liniar recurente*, revista Recreaţii Matematice din Iaşi, nr. 1/2003, pag. 25-28.
[4]. **Dumitru M. Bătineţu – Giurgiu** şi **Mihály Bencze**, *Concerning a couple of liniar recurrences*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 10, No.1, 2002, pag. 336-340.
[5]. **Nicolaie Ciorănescu**, *Triunghiuri aritmetice în scară şi şiruri recurente*, Gazeta Matematică LI, pag. 78-81.
[6]. **Thomas Koshy**, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, New York, Wiley-Interscience, 2001.
[7]. **Alexandru Lupaş**, *A guide of Fibonacci and Lucas Polinomials*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 7, No. 1, 1999, pag. 3-12.
[8]. **A. I. Marcuşevici**, *Şiruri recurente*, Editura Tehnică, 1953.
[9]. **Miron Nicolescu**, *Despre şirul lui Fibonacci*, Gazeta Matematică, XXXIX, pag. 259-302.
[10]. **Neculai Stanciu**, *Despre şirul lui Fibonacci*, Gazeta Matematică – seria A, Nr. 3, 2008, pag. 265-278.
[11]. **Neculai Stanciu**, *Din nou despre şirul lui Fibonacci*, MateInfo.Ro, Mai, 2010.
[12]. **N. N. Vorobiev**, *Numerele lui Fibonacci*, Editura Tehnică, 1953.
*** Colecţia **Gazeta Matematică**, 1895 - 2013.
*** Colecţia **Octogon Mathematical Magazine**, 1993 - 2018.
*** Colecţia **The Fibonacci Quarterly**, 1963 - 2018.

*   *

*

Art.450

Puncte remarcabile în triunghi

Marin Chirciu [1]

Identitatea şi inegalitatea Euler

Articolul își propune ca, pornind de la identitatea lui Euler să determine relații între linii importante în triunghi și distanța dintre centrul cercului circumscris O și centrul cercului înscris I, see demonstrează inegalități in triunghi.

1) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a^2} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2}{2p^2r^2}.$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a^2} \le \frac{2OI^2}{r^2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a) Folosind $h_a = \frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a^2} = \sum \frac{(b-c)^2}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2} = \frac{1}{4S^2}\sum a^2(b-c)^2 = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2}{2p^2r^2},$$

care rezultă din $\sum a^2(b-c)^2 = 2\left[p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2}{2p^2r^2} \le \frac{2R(R-2r)}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$p^2(4R^2 + 8Rr - 2r^2 - p^2) \ge r^2(4R+r)^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $\frac{r(4R+r)^2}{R+r} \le 16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

.

Rămâne să arătăm că:

$\frac{r(4R+r)^2}{R+r}(4R^2 + 8Rr - 2r^2 - 4R^2 - 4Rr - 3r^2) \ge r^2(4R+r)^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$ (inegalitatea Euler).

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești*

2) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{r_a^2} = \frac{2\left[(4R+r)^2-3p^2\right]}{p^2}.$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{r_a^2} \le \frac{32OI^2}{p^2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

b) Folosind $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a^2} = \sum \frac{(b-c)^2}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2}\sum (p-a)^2(b-c)^2 = \frac{2\left[(4R+r)^2-3p^2\right]}{p^2},$$

care rezultă din $\sum (p-a)^2(b-c)^2 = 2r^2\left[(4R+r)^2-3p^2\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[(4R+r)^2-3p^2\right]}{p^2} \le \frac{32R(R-2r)}{p^2} \Leftrightarrow 3p^2 \ge 40Rr + r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$3(16Rr-5r^2) \ge 40Rr + r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

3) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a r_a} = \frac{p^2(2R-r) - r(4R+r)^2}{p^2 r}.$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{h_a r_a} \le \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

c) Folosind $h_a = \frac{2S}{a}$ și $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_ar_a}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{2S}{a}\cdot\frac{S}{p-a}}=\frac{1}{2S^2}\sum a(p-a)(b-c)^2=\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{p^2r},$$

care rezultă din $\sum a(p-a)(b-c)^2=2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{p^2r}\le\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)OI^2 \Leftrightarrow p^2R(R-5r)+2r^2(4R+r)^2\ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(R-5r)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(R-5r)<0$, inegalitatea se rescrie:

$$2r^2(4R+r)^2\ge p^2R(5r-R)$$

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$2r^2(4R+r)^2\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}R(5r-R) \Leftrightarrow R^3-5R^2r+8Rr^2-4r^3\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(R-2r)^2(R-r)\ge 0,$$

evident, cu egalitate dacă $R=2r$.

4) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_b+h_c}=\frac{p^4(4Rr-r^2)-p^2r^2(36R^2+8Rr+2r^2)-r^3(4R+r)^3}{rp^2(p^2+r^2+2Rr)}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_b+h_c}\le\frac{2OI^2}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $h_a=\frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_b+h_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}=\frac{1}{2S}\sum\frac{bc(b-c)^2}{b+c}=\frac{p^4(4Rr-r^2)-p^2r^2(36R^2+8Rr+2r^2)-r^3(4R+r)^3}{rp^2(p^2+r^2+2Rr)}$$

care rezultă din

$$\sum\frac{bc(b-c)^2}{b+c}=\frac{2\left[p^4(4Rr-r^2)-p^2r^2(36R^2+8Rr+2r^2)-r^3(4R+r)^3\right]}{p(p^2+r^2+2Rr)},$$

adevărată din
$\sum bc(a+b)(a+c)(b-c)^2 = 4\left[p^4(4Rr-r^2)-p^2r^2(36R^2+8Rr+2r^2)-r^3(4R+r)^3\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:
$\frac{p^4(4Rr-r^2)-p^2r^2(36R^2+8Rr+2r^2)-r^3(4R+r)^3}{rp^2(p^2+r^2+2Rr)} \le \frac{2R(R-2r)}{r} \Leftrightarrow$
$p^2\left[p^2(2R^2-8Rr+r^2)+r(4R^3+30R^2r+4Rr^2+2r^3)\right]+r^2(4R+r)^2 \ge 0$.
Distingem cazurile:
Cazul 1). Dacă $\left[p^2(2R^2-8Rr+r^2)+r(4R^3+30R^2r+4Rr^2+2r^3)\right] \ge 0$, inegalitatea este evidentă.
Cazul 2). Dacă $\left[p^2(2R^2-8Rr+r^2)+r(4R^3+30R^2r+4Rr^2+2r^3)\right] < 0$, inegalitatea se rescrie:
$r^2(4R+r)^2 \ge p^2\left[p^2(-2R^2+8Rr-r^2)-r(4R^3+30R^2r+4Rr^2+2r^3)\right]$.
i).Dacă $(-2R^2+8Rr-r^2) \le 0$, inegalitatea este evidentă.
ii). Dacă $(-2R^2+8Rr-r^2) > 0$,folosim inegalitatea Blundon- Gerretsen
$p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \le 4R^2+4Rr+3r^2$.
Rămâne să arătăm că:
$r^2(4R+r)^2 \ge \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[(4R^2+4Rr+3r^2)(-2R^2+8Rr-r^2)-r(4R^3+30R^2r+4Rr^2+2r^3)\right]$
$\Leftrightarrow 8R^5-20R^4r+8R^3r^2+Rr^4-2r^5 \ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)(8R^4-4R^3r+r^4) \ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

5) In ΔABC

a)
$$\sum \frac{(b-c)^2}{r_b+r_c} = \frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2R}.$$

b)
$$\sum \frac{(b-c)^2}{r_b+r_c} \le \frac{2OI^2}{r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a)Folosind $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}=\frac{1}{S}\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3}{p^2R}$$

care rezultă din $\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{r\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right]}{pR}$,

adevărată din

$\sum bc(p-a)(p-a)(b-c)^2=4r^2\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3}{p^2R}\le\frac{2R(R-2r)}{r}\Leftrightarrow$

$p^2\left(2R^3-8R^2r-6Rr^2+r^3\right)+r^2(4R+r)^3\ge 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(2R^3-8R^2r-6Rr^2+r^3\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(2R^3-8R^2r-6Rr^2+r^3\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2(4R+r)^3\ge p^2\left(-2R^3+8R^2r+6Rr^2-r^3\right)$, care rezultă din

inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$r^2(4R+r)^3\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(-2R^3+8R^2r+6Rr^2-r^3\right)\Leftrightarrow$

$2R^4-8R^3r+10R^2r^2-3Rr^3-2r^4\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(2R^3-4R^2r+2Rr^2+r^3\right)\ge 0$, evident,

din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

6) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_bh_c}=\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{rp^2}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_bh_c}\le\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $h_a=\frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_bh_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{2S}{b}\cdot\frac{2S}{c}}=\frac{1}{4S^2}\sum bc(b-c)^2=\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{rp^2}$$

care rezultă din $\sum bc(b-c)^2=4r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{p^2r}\le\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)OI^2 \Leftrightarrow p^2R(R-5r)+2r^2(4R+r)^2\ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(R-5r)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(R-5r)<0$, inegalitatea se rescrie:

$$2r^2(4R+r)^2\ge p^2R(5r-R)$$

care rezultă din inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$2r^2(4R+r)^2\ge\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}R(5r-R) \Leftrightarrow R^3-5R^2r+8Rr^2-4r^3\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(R-2r)^2(R-r)\ge 0,$$

evident, cu egalitate dacă $R=2r$.

7) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_br_c}=\frac{4\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2r}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_br_c}\le\frac{OI^2}{r^2}.$$

c)

$$\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2\le\frac{(4R+r)^2(R-r)}{2R(2R-r)}\cdot OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_br_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}}=\frac{1}{S^2}\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2=\frac{4\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2r}$$

care rezultă din $\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]$,

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{4\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]}{p^2r} \le \frac{2R(R-2r)}{r^2} \Leftrightarrow p^2\left(R^2-6Rr-4r^2\right)+4r^2(4R+r)^3 \ge 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(R^2-6Rr-4r^2\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(R^2-6Rr-4r^2\right)< 0$, inegalitatea se rescrie:

$4r^2(4R+r)^3 \ge p^2\left(R^2-6Rr-4r^2\right)$, care rezultă din

inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Rămâne să arătăm că:

$$4r^2(4R+r)^3 \ge \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left(R^2-6Rr-4r^2\right) \Leftrightarrow R^3-6R^2r+12Rr^3-8r^3\ge 0 \Leftrightarrow$$

$(R-2r)^3 \ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

c).Folosim $\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]$, $OI^2 = R(R-2r)$ și

inegalitatea Blundon- Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

8) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ar_a} = \frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ar_a} \le \frac{8OI^2}{Rp}.$$

c)

$$\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{a} \le \frac{8r}{R}\cdot OI^2.$$

d)

$$\sum bc(p-a)(b-c)^2 \le 32Sr\cdot OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ar_a}=\sum\frac{(b-c)^2}{a\cdot\frac{S}{p-a}}=\frac{1}{S}\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{a}=\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp},$$

care rezultă din $\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{a}=\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}$, adevărată din $\sum bc(p-a)(b-c)^2=4pr^2(8R^2-2Rr-r^2-p^2)$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}\le\frac{8OI^2}{Rp}\Leftrightarrow p^2\ge 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2\ge 14Rr-r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

c) Folosind $\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{a}=\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}$ și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}\le\frac{8r}{R}\cdot R(R-2r)\Leftrightarrow p^2\ge 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2\ge 14Rr-r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

d) Folosind $\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{a}=\frac{8R^2-2Rr-r^2-p^2}{Rp}$ și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$4pr^2(8R^2-2Rr-r^2-p^2)\le 32pr^2\cdot R(R-2r)\Leftrightarrow p^2\ge 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2\ge 14Rr-r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

9) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ah_a}=\frac{p^2-3r^2-2Rr}{rp}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ah_a}\le\frac{4OI^2}{S}.$$

c)

$$\sum(b-c)^2\le 8OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $h_a=\dfrac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ah_a}=\sum\frac{(b-c)^2}{a\cdot\dfrac{2S}{a}}=\frac{1}{2S}\sum(b-c)^2=\frac{p^2-3r^2-2Rr}{rp},$$

care rezultă din $\sum(b-c)^2=2\left(p^2-3r^2-2Rr\right)$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\dfrac{p^2-3r^2-2Rr}{rp}\le\dfrac{4OI^2}{S}\Leftrightarrow p^2\ge 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$16Rr-5r^2\ge 14Rr-r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

c) Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$2\left(p^2-3r^2-2Rr\right)\le 8R(R-2r)\Leftrightarrow p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$, (inegalitatea lui Gerretsen).

10) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{b+c}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{b+c}\le\frac{8OI^2}{p}.$$

c)

$$\sum(a+b)(a+c)(b-c)^2\le 32R^2\cdot OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a)Obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{b+c}=\frac{\sum(a+b)(a+c)(b-c)^2}{\prod(b+c)}=\frac{2\left[p^4-12p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$$

care rezultă din $\sum(a+b)(a+c)(b-c)^2=4\left[p^4-12p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]$ și

$\prod(b+c)=2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)$.

b)Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2\left[p^4-12p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]}{p\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\le\frac{8R(R-2r)}{p}\Leftrightarrow$$

$p^2\left(4R^2+4Rr-p^2\right)+r\left(8R^3+4R^2r+r^3\right)\ge 0$ Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $\left(4R^2+4Rr-p^2\right)\ge 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $\left(4R^2+4Rr-p^2\right)<0$, inegalitatea se rescrie:

$r\left(8R^3+4R^2r+r^3\right)\ge p^2\left(p^2-4Rr-4R^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r\left(8R^3+4R^2r+r^3\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(4R^2+4Rr+3r^2-4Rr-4R^2\right)\Leftrightarrow$

$2R^3-2R^2r-3Rr^3-2r^3\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(2R^2+2Rr+r^2\right)\ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

c). Folosim b), $\sum(a+b)(a+c)(b-c)^2=4\left[p^4-12p^2Rr-r^2(4R+r)^2\right]$,

$\prod(b+c)=2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)$, inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_a}=\frac{p^2+r^2-14Rr}{r}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_a}\le\frac{2(2R-r)}{Rr}\cdot OI^2.$$

c)

$$\sum a(b-c)^2\le 4p\left(2-\frac{r}{R}\right)OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a).Folosind $h_a=\dfrac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{h_a}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{2S}{a}}=\frac{1}{2S}\sum a(b-c)^2=\frac{p^2+r^2-14Rr}{r},$$

care rezultă din $\sum a(b-c)^2=2p\left(p^2+r^2-14Rr\right)$.

Obținem:

$$\sum a(b-c)^2=\sum a\left(b^2+c^2-2bc\right)=\sum a\left(a^2+b^2+c^2-a^2-2bc\right)=$$

$$=\sum a\sum a^2-\sum a^3-6abc=2p\left(p^2+r^2-14Rr\right),$$

care rezultă din:

$\sum a = 2p$, $\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum a^3 = 2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

c)Folosind $\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right)$ și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$2p\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right) \le 4p\left(2 - \frac{r}{R}\right) \cdot R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$,(Gerretsen).

11) In ΔABC

a)

$$\sum (b-c)^2\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{p^2 - 7r^2 - 10Rr}{r}.$$

b)

$$\sum (b-c)^2\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \le \frac{2(2R+r)}{Rr} \cdot OI^2.$$

c)

$$\sum (b+c)(b-c)^2 \le 4p\left(2 + \frac{r}{R}\right)OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $h_a = \frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum (b-c)^2\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \sum (b-c)^2\left(\frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}\right) = \frac{1}{2S}\sum (b+c)(b-c)^2 = \frac{p^2 - 7r^2 - 10Rr}{r},$$

care rezultă din $\sum (b+c)(b-c)^2 = 2p\left(p^2 - 7r^2 - 10Rr\right)$.

Obținem:

$$\sum (b+c)(b-c)^2 = \sum (b+c)\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) = \sum (2p-a)\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) =$$

$$= 4p\sum a^2 - 4p\sum bc - \sum bc(b+c) + 6abc = 2p\left(p^2 - 7r^2 - 10Rr\right),$$

care rezultă din:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2 - 7r^2 - 10Rr}{r} \le \frac{2(2R+r)}{Rr} \cdot R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$,(inegalitatea lui Gerretsen).

c)Folosind $\sum (b+c)(b-c)^2 = 2p\left(p^2 - 7r^2 - 10Rr\right)$ și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$$2p\left(p^2-7r^2-10Rr\right)\le 4p\left(2+\frac{r}{R}\right)\cdot R\left(R-2r\right)\Leftrightarrow p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$$,(Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_a}=4\left(R-2r\right).$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_a}=\frac{4}{R}\cdot OI^2.$$

c)

$$\sum\left(p-a\right)\left(b-c\right)^2=\frac{4S}{R}\cdot OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $r_a=\dfrac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_a}=\sum\frac{(b-c)^2}{\dfrac{S}{p-a}}=\frac{1}{S}\sum\left(p-a\right)\left(b-c\right)^2=4\left(R-2r\right),$$

care rezultă din $\sum\left(p-a\right)\left(b-c\right)^2=4rp\left(R-2r\right)$.

Obținem:

$$\sum\left(p-a\right)\left(b-c\right)^2=\sum\left(p-a\right)\left(b^2+c^2-2bc\right)=$$
$$=2p\sum a^2-2p\sum bc-\sum bc\left(b+c\right)+6abc=4rp\left(R-2r\right),$$

care rezultă din:

$\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc\left(b+c\right)=2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$ și $abc=4Rrp$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

b)Folosim a) și $OI^2=R\left(R-2r\right)$.

c)Folosim $\sum\left(p-a\right)\left(b-c\right)^2=4rp\left(R-2r\right)$ și $OI^2=R\left(R-2r\right)$.

13) In ΔABC

a)

$$\sum(b-c)^2\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{2\left(p^2+r^2-14Rr\right)}{r}.$$

b)

$$\sum(b-c)^2\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\le\frac{4\left(2R-r\right)}{Rr}\cdot OI^2.$$

c)

$$\sum a(b-c)^2 \le 4p\left(2-\frac{r}{R}\right)OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum(b-c)^2\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\sum(b-c)^2\left(\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}\right)=\frac{1}{S}\sum a(b-c)^2=\frac{2(p^2+r^2-14Rr)}{r},$$

care rezultă din $\sum a(b-c)^2 = 2p(p^2+r^2-14Rr)$.

Obținem:

$$\sum a(b-c)^2 = \sum a(b^2+c^2-2bc)=\sum a(a^2+b^2+c^2-a^2-2bc)=$$
$$=\sum a\sum a^2-\sum a^3-6abc=2p(p^2+r^2-14Rr),$$

care rezultă din:

$\sum a = 2p$, $\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum a^3 = 2p(p^2-3r^2-6Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

b)Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2+r^2-14Rr}{r} \le \frac{2(2R-r)}{Rr}\cdot R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$,(inegalitatea lui Gerretsen).

c)Folosind $\sum a(b-c)^2 = 2p(p^2+r^2-14Rr)$ și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$2p(p^2+r^2-14Rr) \le 4p\left(2-\frac{r}{R}\right)\cdot R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$,(Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

In ΔABC

a)

$$\sum(b-c)^2 r_b r_c = 4p^2 r(R-2r).$$

b)

$$\sum(b-c)^2 r_b r_c = \frac{4Sr}{R}\cdot OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a).Folosind $r_a = \frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum(b-c)^2 r_b r_c = \sum(b-c)^2\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}=S^2\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=4p^2r(R-2r),$$

care rezultă din $\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{4(R-2r)}{r}$.

Obținem $\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{\sum(p-a)(b-c)^2}{\prod(p-a)}=\frac{4(R-2r)}{r}$, adevărată din:

$\sum(p-a)(b-c)^2=4rp(R-2r)$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

Avem $\sum(p-a)(b-c)^2=\sum(p-a)(b^2+c^2-2bc)=$

$=2p\sum a^2-2p\sum bc-\sum bc(b+c)+6abc=4rp(R-2r)$,

care rezultă din:

$\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c)=2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc=4Rrp$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

b)Folosim a) și $OI^2=R(R-2r)$.

14) In ΔABC

a)

$$\sum(b-c)^2 r_br_c=4p^2r(R-2r).$$

b)

$$\sum(b-c)^2 h_bh_c=\frac{2rp^2}{R}(p^2+r^2-14Rr).$$

c)

$$\sum(b-c)^2 h_bh_c\le 2\sum(b-c)^2 r_br_c$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a).Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ obținem:

$\sum(b-c)^2 r_br_c=\sum(b-c)^2\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}=S^2\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=4p^2r(R-2r)$,

care rezultă din $\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{4(R-2r)}{r}$.

Obținem $\sum\frac{(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{\sum(p-a)(b-c)^2}{\prod(p-a)}=\frac{4(R-2r)}{r}$, adevărată din:

$\sum(p-a)(b-c)^2=4rp(R-2r)$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

Avem $\sum(p-a)(b-c)^2=\sum(p-a)(b^2+c^2-2bc)=$

$=2p\sum a^2-2p\sum bc-\sum bc(b+c)+6abc=4rp(R-2r)$,

care rezultă din:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right), \sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr, \sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

b) Folosind $h_a = \frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c = \sum (b-c)^2 \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = 4S^2 \sum \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{2rp^2}{R}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right),$$

care rezultă din din $\sum \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 - 14Rr}{2Rr}$ și $\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 14R\right)r$.

c).Folosim a) și b) inegalitatea se scrie:

$\frac{2rp^2}{R}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right) \le 2 \cdot 4p^2 r(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 6Rr - r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$

15) In ΔABC

a)

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c = \frac{2rp^2}{R}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right).$$

b)

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c \le \frac{4rp^2}{R^2}(2R - r) OI^2 .$$

c)

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c \le \frac{2r}{R}(4R + r)^2 OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $h_a = \frac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c = \sum (b-c)^2 \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c} = 4S^2 \sum \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{2rp^2}{R}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right),$$

care rezultă din din $\sum \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 - 14Rr}{2Rr}$ și $\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 14R\right)r$.

b). Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$\frac{2rp^2}{R}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right) \le \frac{4rp^2}{R^2}(2R - r) \cdot R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$,(Gerretsen)

c).Folosim b) și inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ obținem:

$$\sum (b-c)^2 h_b h_c \le \frac{4r}{R^2} \cdot \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r) OI^2 = \frac{2r}{R}(4R+r)^2 OI^2 .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

16) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = 4\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right).$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \le 8\left(4 - \frac{r}{R}\right) \cdot OI^2.$$

c)

$$\sum \frac{bc(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} \le 8\left(4 - \frac{r}{R}\right) OI^2.$$

d)

$$\sum bc(p-a)(b-c)^2 \le 8Sr\left(4 - \frac{r}{R}\right) OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{(b-c)^2}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sum \frac{bc(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} = 4\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right),$$

care rezultă din : $\sum \frac{bc(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} = 4\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right)$

și $\sum bc(p-a)(b-c)^2 = 4pr^2\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right)$.

b). Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$4\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right) \le 8\left(4 - \frac{r}{R}\right) R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \ge 16Rr - 5r^2$,(inegalitatea lui Gerretsen).

c).Reformulare b).

d).Folosind $\sum bc(p-a)(b-c)^2 = 4pr^2\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right)$ și $OI^2 = R(R-2r)$ inegalitatea se scrie:

$4pr^2\left(8R^2 - 2Rr - r^2 - p^2\right) \le 8pr^2\left(4 - \frac{r}{R}\right) R(R-2r) \Leftrightarrow p^2 \ge 16Rr - 5r^2$,(Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

17) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{8R}{r^2}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \le \left(\frac{8R}{r}\right)^2 \cdot OI^2.$$

c)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{p-a} = \frac{2}{r}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

d)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{p-a} \le \frac{16R}{r} OI^2.$$

e)

$$\sum a(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 2rp\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

f)

$$\sum a(p-b)(p-c)(b-c)^2 \le 16SR\cdot OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{1}{\prod \sin^2\frac{A}{2}} \sum (b-c)^2 \sin^2\frac{A}{2} = \frac{8R}{r^2}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right],$$

care rezultă din :

$$\sum (b-c)^2 \sin^2\frac{A}{2} = \frac{p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)}{2R} \text{ și } \prod \sin\frac{A}{2} = \frac{r}{4R}.$$

b). Folosim:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{1}{\prod \sin^2\frac{A}{2}} \sum (b-c)^2 \sin^2\frac{A}{2} \text{ și } \sum (b-c)^2 \sin^2\frac{A}{2} \le 4OI^2.$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2 + r^2 - 2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

d).Vezi c) și $OI^2 = R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2 + r^2 - 2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

f).Vezi e) și $OI^2=R(R-2r)$.

18) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{4}{p^2}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right].$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}\le\frac{11R}{2r}\cdot OI^2.$$

c)

$$\sum\frac{bc(b-c)^2}{p-a}\le\frac{11Rp}{2r}OI^2.$$

d)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2\le OI^2\cdot S^2\cdot\frac{11R}{2r}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{p(p-a)}{bc}}=\frac{1}{p}\sum\frac{bc(b-c)^2}{p-a}=\frac{4}{p^2}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right],$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{bc(b-c)^2}{p-a}=\frac{4}{p}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right] \text{ și}$$

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{4}{p^2}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right]=4\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\right]\le$$

$$\le 4\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right]=\frac{4}{R^2}\left(4R^2-2Rr-r^2\right)OI^2,\ (1).$$

Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

Cu inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$ rezultă $\frac{4R^2-2Rr-r^2}{R^2} \leq \frac{11R}{8r} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$11R^3 - 32R^2r + 16Rr^2 + 8r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(11R^2-10Rr-4r^2) \geq 0$, (2).

Din (1) și (2) obținem $\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{A}{2}} \leq \frac{11R}{2r} \cdot OI^2$.

c).Reformulare b).
d). Folosim a), b) și:

$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^2\right]$ și $OI^2 = R(R-2r)$.

19) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{8R}{r^2}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \leq \left(\frac{8R}{r}\right)^2 \cdot OI^2.$$

c)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{p-a} = \frac{2}{r}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

d)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{p-a} \leq \frac{16R}{r} OI^2.$$

e)

$$\sum a(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 2rp\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right].$$

f)

$$\sum a(p-b)(p-c)(b-c)^2 \leq 16SR \cdot OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{1}{\prod \sin^2\frac{A}{2}} \sum (b-c)^2 \sin^2\frac{A}{2} = \frac{8R}{r^2}\left[p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)\right],$$

care rezultă din :

$\sum(b-c)^2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{p^2(2R+r)+r(4R+r)(r-8R)}{2R}$ și $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$.

b). Folosim:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{1}{\prod\sin^2\frac{A}{2}}\sum(b-c)^2\sin^2\frac{A}{2} \text{ și } \sum(b-c)^2\sin^2\frac{A}{2}\le 4OI^2 .$$

c). Folosim:

$\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right), \sum bc=p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c)=2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$ și $abc=4Rrp$.

d).Vezi c) și $OI^2=R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right), \sum bc=p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c)=2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$ și $abc=4Rrp$.

f).Vezi e) și $OI^2=R(R-2r)$.

20) In ΔABC

a)

$$\sum(r_b+r_c)(b-c)^2=2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b)

$$\sum(r_b+r_c)(b-c)^2\le\frac{(4R+r)^2}{R}OI^2 .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum(r_b+r_c)(b-c)^2=\sum\left(\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)(b-c)^2=S\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{2}{rp}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right] \text{ și}$$

$$\sum a(p-a)(b-c)^2=2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r)-r(4R+r)^2=(4R+r)^2\left(\frac{R}{2}-r\right)=$$

$=\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2$, (1).

Folosind $\sum(r_b+r_c)(b-c)^2=2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$ și (1) rezultă:

$\sum(r_b+r_c)(b-c)^2\le 2\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2=\frac{(4R+r)^2}{R}OI^2$.

21) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2R}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}\le\frac{11}{8r}OI^2.$$

c)

$$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{r}{Rp}\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right]$$

d)

$$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}\le\frac{11p}{8}OI^2$$

e)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right]$$

f)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2\le\frac{11Rr}{2}\cdot p^2OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}}=\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2R}$$

care rezultă din :

$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{r}{Rp}\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right]$ și

$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right]$.

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$

obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{r_b+r_c} = \frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2R} = \frac{1}{R}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{R}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right] = \frac{4R^3-10R^2r+3Rr^2+2r^3}{R^2} = \frac{(R-2r)(4R^2-2Rr-r^2)}{R^2} =$$

$$= \frac{4R^2-2Rr-r^2}{R^3}OI^2 \le \frac{11}{8r}OI^2.$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr), \sum bc = p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

d).Vezi b), c) și $OI^2 = R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr), \sum bc = p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

f).Vezi b), e) și $OI^2 = R(R-2r)$.

22) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{8R}{p^2}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \le 4\left(1+\frac{R}{r}\right)\cdot OI^2.$$

c)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{2}{rp}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

d)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} \le \frac{(4R+r)^2}{Rrp}OI^2.$$

e)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 = 2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

f)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 \le \frac{r}{R}(4R+r)^2 OI^2 .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \sum \frac{(b-c)^2}{\frac{p(p-b)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{abc}{\prod(p-a)}\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} =$$

$$=\frac{8R}{p^2}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$$, care rezultă din :

$$\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{2}{rp}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right],\ \prod(p-a)=r^2p \text{ și}$$

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 = 2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$ obținem:

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r)-r(4R+r)^2=(4R+r)^2\left(\frac{R}{2}-r\right)=$$

$$=\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2 \ , (1).$$

Folosind $\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{8R}{p^2}\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$ și (1) rezultă:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \le \frac{8R}{p^2}\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2, (2).$$

Folosind (2) și inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr-5r^2 \ge \frac{r(4R+r)^2}{R+r}$ rezultă:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} \le \frac{8R}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}}\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2=\frac{4(R+r)}{r}OI^2=4\left(1+\frac{R}{r}\right)OI^2 .$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c)=2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc=4Rrp$.

d).Vezi b), c) și $OI^2=R(R-2r)$.

e). Folosim:
$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și
$abc = 4Rrp$.

f).Vezi b), e) și $OI^2 = R(R-2r)$.

23) In ΔABC

a)

$$\sum(r_b + r_c)(b-c)^2 = 2\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right].$$

b)

$$\sum(r_b + r_c)(b-c)^2 \le \frac{(4R+r)^2}{R} OI^2 .$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $r_a = \dfrac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum(r_b + r_c)(b-c)^2 = \sum\left(\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}\right)(b-c)^2 = S\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} = 2\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right]$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{a(b-c)^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{2}{rp}\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right] \text{ și}$$

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 = 2r\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \dfrac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$

obținem:

$$p^2(2R-r) - r(4R+r)^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r) - r(4R+r)^2 = (4R+r)^2\left(\frac{R}{2} - r\right) =$$

$$= \frac{(4R+r)^2}{2R} OI^2 \text{ , (1).}$$

Folosind $\sum(r_b + r_c)(b-c)^2 = 2\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right]$ și (1) rezultă:

$$\sum(r_b + r_c)(b-c)^2 \le 2\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R} OI^2 = \frac{(4R+r)^2}{R} OI^2 .$$

24) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b + r_c} = \frac{p^2\left(4R^2 + 6Rr - r^2\right) - r(4R+r)^3}{p^2 R} .$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}\le\frac{11}{8r}OI^2 .$$

c)

$$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{r}{Rp}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right]$$

d)

$$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}\le\frac{11p}{8}OI^2$$

e)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right]$$

f)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2\le\frac{11Rr}{2}\cdot p^2OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $r_a=\frac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}=\sum\frac{(b-c)^2}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}}=\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3}{p^2R}$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{(p-b)(p-c)(b-c)^2}{a}=\frac{r}{Rp}\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right] \text{ și}$$

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{r_b+r_c}=\frac{p^2\left(4R^2+6Rr-r^2\right)-r(4R+r)^3}{p^2R}=\frac{1}{R}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\right]\le$$

$$\le\frac{1}{R}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right]=\frac{4R^3-10R^2r+3Rr^2+2r^3}{R^2}=\frac{(R-2r)\left(4R^2-2Rr-r^2\right)}{R^2}=$$

$$=\frac{4R^2-2Rr-r^2}{R^3}OI^2\le\frac{11}{8r}OI^2 .$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right), \sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr, \sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

d).Vezi b), c) și $OI^2 = R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right), \sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr, \sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

f).Vezi b), e) și $OI^2 = R(R-2r)$.

25) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{bch_a} = \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2}{4Rr^2p^2}.$$

b)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{bch_a} \le \frac{5}{16r^3} OI^2 .$$

c)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{bc} = \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2}{2Rrp}$$

d)

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{bc} \le \frac{5p}{8r^2} \cdot OI^2$$

e)

$$\sum a^2(b-c)^2 = 2\left[p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2\right]$$

f)

$$\sum a^2(b-c)^2 \le \frac{5R}{2r} \cdot p^2 OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $h_a = \dfrac{2S}{a}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{bch_a} = \sum \frac{(b-c)^2}{bc \cdot \frac{2S}{a}} = \frac{1}{2S} \sum \frac{a(b-c)^2}{bc} = \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2}{4Rr^2p^2},$$

care rezultă din :

$$\sum \frac{a(b-c)^2}{bc} = \frac{p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2}{2Rrp} \quad \text{și}$$

$$\sum a^2(b-c)^2 = 2\left[p^4 + p^2\left(2r^2 - 16Rr\right) + r^2(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen

$\frac{r(4R+r)^2}{R+r} \le 16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{bch_a} = \frac{p^4+p^2(2r^2-16Rr)+r^2(4R+r)^2}{4Rr^2p^2} = \frac{1}{4Rr^2}\left[p^2+2r^2-16Rr+\frac{r^2(4R+r)^2}{p^2}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{4Rr^2}\left[4R^2+4Rr+3r^2+2r^2-16Rr+\frac{r^2(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}}\right] = \frac{4R^2-11Rr+6r^2}{4Rr^2} =$$

$$= \frac{(R-2r)(4R-3r)}{4Rr^2} = \frac{4R-3r}{4R^2r^2}OI^2 \le \frac{5}{16r^3}OI^2.$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

d).Vezi b), c) și $OI^2 = R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

f).Vezi b), e) și $OI^2 = R(R-2r)$.

26) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{bcr_a} = \frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{2p^2Rr}.$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{bcr_a} \le \frac{3}{8Rr^2}OI^2.$$

c)

$$\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{bc} = \frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{2Rp}$$

d)

$$\sum\frac{(p-a)(b-c)^2}{bc} \le \frac{3p^2}{8Rr^2}OI^2$$

e)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 = 2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$$

f)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 \le \frac{3p^2}{2}OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $r_a = \dfrac{S}{p-a}$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{bcr_a} = \sum \frac{(b-c)^2}{bc\dfrac{S}{p-a}} = \frac{1}{S}\sum \frac{(p-a)(b-c)^2}{bc} = \frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{2p^2Rr}$$, care rezultă

din :

$$\sum \frac{(p-a)(b-c)^2}{bc} = \frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{2Rp}$$ și

$$\sum a(p-a)(b-c)^2 = 2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \dfrac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$

obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{bcr_a} = \frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{2p^2Rr} = \frac{1}{2Rr}\left[2R-r-\frac{r(4R+r)^2}{p^2}\right] \le \frac{1}{2Rr}\left[2R-r-\frac{r(4R+r)^2}{\dfrac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right] \le$$

$$\le \frac{2R-r}{2Rr}\left(1-\frac{2r}{R}\right) = \frac{2R-r}{2R^3r}OI^2 \le \frac{3}{8Rr^2}OI^2 .$$

c). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

d).Vezi b), c) și $OI^2 = R(R-2r)$.

e). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

f).Vezi b), e) și $OI^2 = R(R-2r)$.

27) In ΔABC

a)

$$\sum (b-c)^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = 4r(R-2r).$$

b)

$$\sum (b-c)^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{4r}{R}OI^2 .$$

c)

$$\sum(b-c)^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\leq 2OI^2$$

d)

$$\sum(p-a)(b-c)^2=4rp(R-2r)$$

e)

$$\sum(p-a)(b-c)^2=\frac{4S}{R}OI^2$$

f)

$$\sum(p-a)(b-c)^2\leq 2pOI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$.

Rezultă:

$$\sum(b-c)^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\sum(b-c)^2\frac{p-a}{p}=\frac{1}{p}\sum(p-a)(b-c)^2=4r(R-2r),$$

care rezultă din : $\sum(p-a)(b-c)^2=4rp(R-2r)$.

b). Folosind a) și $OI^2=R(R-2r)$ obținem:

$$\sum(b-c)^2 tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=4r(R-2r)=\frac{4r}{R}OI^2.$$

c). Folosim b) și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

d). Folosim:

$\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c)=2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc=4Rrp$.

e). Vezi d) și $OI^2=R(R-2r)$.

f). Folosim e) și inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

28) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}=\frac{4}{r}\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right].$$

b)

$$p^2(R+r)-r(4R+r)^2\leq 4R\cdot OI^2$$

c)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\leq\frac{16R}{r}OI^2$$

d)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$$

e)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} \le \frac{16R}{S} OI^2$$

f)

$$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right].$$

g)

$$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 \le 16Rr \cdot OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{p-a}{p}$.

Rezultă:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = p\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{r}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right],$$

care rezultă din :

$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$ și

$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right].$

b).

Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

$$p^2(R+r) - r(4R+r)^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(R+r) - r(4R+r)^2 = \frac{(4R+r)^2(R-r)}{2R(2R-r)}OI^2 \le 4R\cdot OI^2$$

.

c)Rezultă $\sum \frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = \frac{4}{r}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right] \le \frac{4}{r}\cdot 4R\cdot OI^2 = \frac{16R}{r}OI^2$.

d). $\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2}{\prod (p-a)} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$, care rezultă din

$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$ și $\prod (p-a) = r^2 p$.

e). Vezi d) și b).

f). Folosim:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

g).Folosim f) și b).

29) In ΔABC

a)

$$\sum (b-c)^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = \frac{4}{r}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right].$$

b)

$$p^2(R+r) - r(4R+r)^2 \le 4R\cdot OI^2$$

c)

$$\sum (b-c)^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} \le \frac{16R}{r}OI^2$$

d)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$$

e)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} \le \frac{16R}{S}OI^2$$

f)

$$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right].$$

g)

$$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 \le 16Rr\cdot OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $ctg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = \frac{p}{p-a}$.

Rezultă:

$$\sum (b-c)^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = \sum (b-c)^2\frac{p}{p-a} = p\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{r}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right],$$

care rezultă din :

$\sum \frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$ și

$\sum (p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r) - r(4R+r)^2\right]$.

b).

Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

$$p^2(R+r)-r(4R+r)^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(R+r)-r(4R+r)^2 = \frac{(4R+r)^2(R-r)}{2R(2R-r)}OI^2 \le 4R\cdot OI^2$$
.

c)Rezultă $\sum(b-c)^2 ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = \frac{4}{r}\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right] \le \frac{4}{r}\cdot 4R\cdot OI^2 = \frac{16R}{r}OI^2$.

d). $\sum\frac{(b-c)^2}{p-a} = \frac{\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2}{\prod(p-a)} = \frac{4}{rp}\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]$, care rezultă din $\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right]$ și $\prod(p-a)=r^2p$.

e). Vezi d) și b).

f). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc = p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc=4Rrp$.

g).Folosim f) și b).

30) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} = 4r(R-2r).$$

b)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} = \frac{4r}{R}OI^2.$$

c)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} \le 2OI^2$$

d)

$$\sum(p-a)(b-c)^2 = 4rp(R-2r)$$

e)

$$\sum(p-a)(b-c)^2 = \frac{4S}{R}OI^2$$

f)

$$\sum(p-a)(b-c)^2 \le 2pOI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $ctg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = \frac{p}{p-a}$.

Rezultă:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} = \sum (p-a)(b-c)^2 = \frac{1}{p}\sum (p-a)(b-c)^2 = 4r(R-2r),$$

care rezultă din : $\sum (p-a)(b-c)^2 = 4rp(R-2r)$.

b). Folosind a) și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

$$\sum \frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}} = 4r(R-2r) = \frac{4r}{R}OI^2.$$

c). Folosim b) și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

d). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr), \sum bc = p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

e). Vezi d) și $OI^2 = R(R-2r)$.

f). Folosim e) și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

f). Folosim:

$\sum a^2 = 2(p^2-r^2-4Rr), \sum bc = p^2+r^2+4Rr, \sum bc(b+c) = 2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc = 4Rrp$.

g).Folosim f) și b).

31) In ΔABC

a)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}} = \frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{pR}.$$

b)

$$p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3 \leq \frac{81R^2}{4}OI^2$$

c)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}} \leq \frac{81R}{p}OI^2$$

d)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{a(p-a)} = \frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2Rr}$$

e)

$$\sum \frac{(b-c)^2}{a(p-a)} \leq \frac{11}{8r^2}OI^2$$

f)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2 = 4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right].$$

g)

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2 \leq 81R^2r^2OI^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=\frac{a(p-a)}{rp}$.

Rezultă:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}=rp\sum\frac{(b-c)^2}{a(p-a)}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{pR},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{(b-c)^2}{a(p-a)}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2Rr} \text{ și}$$

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right].$$

b).

Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\leq(4R^2+4Rr+3r^2)(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3=$$

$$=2(8R^4-12R^3r-8R^2r^2+Rr^3-2r^4)=2(R-2r)(8R^3+4R^2r+r^3)=\frac{2(8R^3+4R^2r+r^3)}{R}OI^2\leq$$

$$\leq\frac{81R^2}{4}OI^2.$$

c)Vezi a) și b).

d). $\sum\frac{(b-c)^2}{a(p-a)}=\frac{\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2}{abc\prod(p-a)}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{pR}$,

care rezultă din

$$\sum bc(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r^2\left[p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3\right] \text{și } \prod(p-a)=r^2p.$$

e). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\leq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{a(p-a)}=\frac{p^2(4R^2+6Rr-r^2)-r(4R+r)^3}{p^2Rr}=\frac{1}{Rr}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\right]\leq$$

$$\le \frac{1}{Rr}\left[4R^2+6Rr-r^2-\frac{r(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right]=\frac{4R^3-10R^2r+3Rr^2+2r^3}{R^2r}=\frac{(R-2r)(4R^2-2Rr-r^2)}{R^2r}=$$

$$=\frac{4R^2-2Rr-r^2}{R^3r}OI^2\le\frac{11}{8r^2}OI^2.$$

f). Folosim:

$\sum a^2=2(p^2-r^2-4Rr)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c)=2p(p^2+r^2-2Rr)$ și $abc=4Rrp$.

g).Folosim f) și b).

32) In ΔABC

a)

$$\sum\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2=\frac{2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p}.$$

b)

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\le\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2$$

c)

$$\sum\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2\le\frac{81R}{p}OI^2$$

d)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2=2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]$$

e)

$$\sum a(p-a)(b-c)^2\le\frac{81Rr}{4}OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

<u>Soluție.</u>

a). Folosind $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ obținem $tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=\frac{a(p-a)}{rp}$.

Rezultă:

$$\sum\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2=\frac{1}{rp}\sum a(p-a)(b-c)^2=\frac{2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p},$$

care rezultă din :

$$\sum a(p-a)(b-c)^2=2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

b). Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$

obținem:

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r)-r(4R+r)^2=(4R+r)^2\left(\frac{R}{2}-r\right)=$$

$$=\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2 \text{ , (1).}$$

c)Vezi a) , b) și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.
Obținem:

$$\sum\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2=\frac{2\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{p}\le\frac{2}{p}\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2\le\frac{81R}{p}OI^2 .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
d). Folosim:
$\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$, $\sum bc=p^2+r^2+4Rr$, $\sum bc(b+c)=2p\left(p^2+r^2-2Rr\right)$ și
$abc=4Rrp$.
e). Folosim d) , b) și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.
Obținem:

$$\sum a(p-a)(b-c)^2=2r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]\le 2r\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2=\frac{r}{R}\cdot(4R+r)^2OI^2\le\frac{81Rr}{4}OI^2$$

33) In ΔABC

a)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}=\frac{r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{pR}.$$

b)

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\le\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2$$

c)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}\le\frac{81R}{p}OI^2$$

d)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{a}=\frac{p^2(R+r)-r(4R+r)^2}{pR}$$

e)

$$\sum\frac{(b-c)^2}{a}\le\frac{81}{8p}OI^2$$

f)

$$\sum bc(b-c)^2=4r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right].$$

g)

$$\sum bc(b-c)^2 \le \frac{81Rr}{2}OI^2 .$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}=\frac{a}{r}$.

Rezultă:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}=r\sum\frac{(b-c)^2}{a}=\frac{r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{pR},$$

care rezultă din :

$$\sum\frac{(b-c)^2}{p-a}=\frac{4}{rp}\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right] \text{ și}$$

$$\sum(p-b)(p-c)(b-c)^2=4r\left[p^2(R+r)-r(4R+r)^2\right].$$

b).

Folosind inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și $OI^2=R(R-2r)$ obținem:

$$p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r)-r(4R+r)^2=(4R+r)^2\left(\frac{R}{2}-r\right)=$$

$$=\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2 \text{ , (1).}$$

c)Vezi a) , b) și inegalitatea lui Euler $R\ge2r$.

Obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}=\frac{r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right]}{pR}\le\frac{r}{pR}\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2\le\frac{r}{pR}\cdot\frac{81R}{8}OI^2=\frac{81r}{8p}OI^2$$

d). Avem $\sum\frac{(b-c)^2}{a}=\frac{\sum bc(b-c)^2}{abc}=\frac{p^2(2R-r)-r(4R+r)^2}{pR}$,

care rezultă din

$$\sum bc(b-c)^2=4r\left[p^2(2R-r)-r(4R+r)^2\right] \text{ și } abc=4Rrp .$$

e). Folosind d) ,b) și inegalitatea Euler $R\ge2r$ obținem:

$$\sum\frac{(b-c)^2}{a}=\frac{p^2(R+r)-r(4R+r)^2}{pR}\le\frac{1}{pR}\cdot\frac{(4R+r)^2}{2R}OI^2\le\frac{1}{pR}\cdot\frac{81R}{8}OI^2=\frac{81}{8p}OI^2.$$

f). Folosim:

$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și $abc = 4Rrp$.

g).Folosim f), b) și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Obținem:

$$\sum bc(b-c)^2 = 4r\left[p^2(2R-r) - r(4R+r)^2\right] \le 4r \cdot \frac{(4R+r)^2}{2R} OI^2 \le 4r \cdot \frac{81R}{8} OI^2 = \frac{81Rr}{2} OI^2$$

.

34) In ΔABC

a)
$$\sum\left(ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2 = \frac{2p\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right)}{r}.$$

b)
$$p^2 + r^2 - 14Rr \le \frac{2(2R-r)}{R} OI^2$$

c)
$$\sum\left(ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2 \le \frac{4p}{r}\left(2 - \frac{r}{R}\right) OI^2$$

d)
$$\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$$

e)
$$\sum a(b-c)^2 \le 4p\left(2 - \frac{r}{R}\right) OI^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

a). Folosind $ctg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$ obținem $ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2} = \frac{a}{r}$.

Rezultă:

$$\sum\left(ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2 = \frac{1}{r}\sum a(b-c)^2 = \frac{2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)}{r},$$

care rezultă din : $\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$.

b).

Folosind inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și $OI^2 = R(R-2r)$ obținem:

$$p^2 + r^2 - 14Rr \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 - 14Rr = 4R^2 - 10Rr + 4r^2 = 2(2R-r)(R-2r) = \frac{2(2R-r)}{R} OI^2$$

c)Vezi a) , b) și inegalitatea lui Euler $R \ge 2r$.

Obținem:

$$\sum\left(ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2}\right)(b-c)^2 = \frac{2p\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right)}{r} \le \frac{2p}{r} \cdot \frac{2(2R-r)}{R} OI^2 = \frac{4p}{r}\left(2 - \frac{r}{R}\right) OI^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
d).Folosim:
$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$, $\sum bc(b+c) = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right)$ și
$abc = 4Rrp$.
e). Folosind d) ,b) și inegalitatea Euler $R \geq 2r$ obținem:

$$\sum a(b-c)^2 = 2p\left(p^2 + r^2 - 2Rr\right) \leq 2p \cdot \frac{2(2R-r)}{R} OI^2 = 4p\left(2 - \frac{r}{R}\right) OI^2 .$$

Remarcă.
La toate inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

21 Martie 2019

2. Alte două soluții pentru problema IX.521

de **Daniel Văcaru, profesor, Pitești** [2]

Să prezentăm mai întâi enunțul problemei:

IX.521. Fie $a, b, c > 0$astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstrați că:

$$a^2(b^2+1)(c^2+1)+b^2(c^2+1)(a^2+1)+c^2(a^2+1)(b^2+1)\geq 12.$$

Cătălin Cristea, Craiova

Soluțiile propuse arată astfel:

Soluția 1 (fără artificii speciale)

Avem, după dezvoltare:

$$3\mathrm{a}^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2\geq 12(*).$$

Dar $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-6(1)$ și $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2\mathrm{abc}(a+b+c)=9-2\mathrm{abc}(a+b+c)(2)$. Folosind (1) și (2) în (*), obținem $3\mathrm{a}^2b^2c^2+2[9-2abc(a+b+c)]+(a+b+c)^2-6\geq 12 \Leftrightarrow 3a^2b^2c^2-4abc(a+b+c)+(a+b+c)^2\geq 0(3)$. Dar (3) se poate scrie $(a+b+c-abc)(a+b+c-3abc)\geq 0(**)$. Avem $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Rightarrow a+b+c\geq 3(4)$ și $1=\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\leq 1\Rightarrow -3\mathrm{abc}\geq -3(5)$. Inegalitățile (4) și (5) oferă, adunate membru cu membru, $a+b+c-3abc\geq 3-3=0(6)$. Cu atât mai mult, $a+b+c-abc=a+b+c-3\mathrm{abc}+2\mathrm{abc}\geq 0(7)$. Inegalitățile (6) și (7) dau, împreună, (**) ceea ce încheie soluția (1).

Soluția 2 (cu puțină trigonometrie, și un pic de algebră, de clasa a IX – a).

Se știe că, dacă $ab+bc+ca=3, a,b,c>0$, există un triunghi ascuțitunghic ABC astfel încât

$$a=\sqrt{3}tg\frac{A}{2}, b=\sqrt{3}tg\frac{B}{2}, c=\sqrt{3}tg\frac{C}{2}.$$

Inegalitatea din enunț devine $\sum[3tg^2\frac{A}{2}(3tg^2B+1)(3tg^2C+1)]\geq 12$. După prelucrare, putem aduce la forma

$$81\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+18\sum tg^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+3\sum\tan^2\frac{A}{2}\geq 12(8).$$

Dar $\prod tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p}$, $\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}=\frac{p^2-2\mathrm{r}^2-8\mathrm{Rr}}{s^2}$, și $\sum tg^2\frac{A}{2}=\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2(9)$. Ținând cont de formulele (9), (8) devine $\frac{81r^2}{p^2}+18\left(\frac{p^2-2\mathrm{r}^2-8\mathrm{Rr}}{p^2}\right)+3\left(\frac{(4\mathrm{R}+r)^2}{p^2}\right)-6\geq 12$, ceea ce se scrie echivalent, după operații imediate,

$$19r^2-40Rr+16R^2\geq 0(***),$$

adică, după împărțire prin r^2, $16\left(\frac{R}{r}\right)^2-40\left(\frac{R}{r}\right)+19\geq 0$. Considerând polinomul $16X^2-40X+19$și funcția asociată, notată *f*, găsim $f(1)=16-40+19=-5<0$,

[2] *Colegiul Economic « Maria Teiuleanu", Pitești*

deci avem rădăcini, și $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$și $x_1 \cdot x_2 = \frac{19}{16}$, de unde $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) = \frac{5}{2} - 4 = \frac{-3}{4} < 0$și $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{19}{16} - 5 + 4 = \frac{19}{16} - 1 = \frac{3}{16} > 0$, așadar ambele rădăcini sunt mai mici decât 2. Cum $\frac{R}{r} \geq 2$, deducem că (***) este adevărată, ceea ce încheie această soluție „trigonometrică¨.

Bibliografie.

Revista de Matematică din Timișoara, 1/2020

Marin Chirciu – ***Inegalități trigonometrice*** – *de la inițiere la performanță, Ed. Paralela 45,* Pitești, 2016.

4. Probleme propuse pentru liceu

Dorin Mărghidanu
Corabia , Romania
d.marghidanu@gmail.com

Problema 1:

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sa se demonstreze ca ,

$$\log_2 3 \cdot \log_4 5 \cdot \log_6 7 \cdot \ldots \cdot \log_{2n}(2n+1) > \sqrt{1+\log_2(n+1)} \quad .$$

Solutie

Demonstram mai intai – in doua moduri - urmatoarea :

Lemma

Pentru $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, are loc inegalitatea ,

$$\log_m(m+1) > \log_{m+1}(m+2) \quad .$$

Demonstratia 1 (algebrica)

$$\log_m(m+1) = \log_m \frac{m+1}{m}+1 \overset{\frac{m+1}{m} > \frac{m+2}{m+1}}{>} \log_m \frac{m+2}{m+1}+1$$

$$\overset{\log_m a > \log_{m+1} a}{>} \log_{m+1} \frac{m+2}{m+1}+1 = \log_{m+1}(m+2) \quad .$$

Demonstratia 2 (analitica)

Fie functia $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_x(x+1)$.

Avem ,

$$f'(x) = \left(\frac{ln(x+1)}{ln\,x}\right)' = \frac{x\,ln\,x-(x+1)ln(x+1)}{x(x+1)ln^2 x} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f \quad (\searrow) \ \text{pe}\ (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad f(m) > f(m+1) \ .$$

Fie produsele :

$$P_n := log_2 3 \cdot log_4 5 \cdot log_6 7 \cdot \ldots \cdot log_{2n}(2n+1) \quad ,$$

$$Q_n := log_3 4 \cdot log_5 6 \cdot log_7 8 \cdot \ldots \cdot log_{2n+1}(2n+2) \ .$$

Din *Lema* avem :

$$log_2 3 > log_3 4 \quad , \quad log_4 5 > log_5 6 \quad , \cdots , \quad log_{2n}(2n+1) > log_{2n+1}(2n+2) \ ,$$

ceea ce conduce la inegalitatea $P_n > Q_n$.

Deci vom avea :

$$P_n^2 > P_n \cdot Q_n = log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot \ldots \cdot log_{2n}(2n+1) \cdot log_{2n+1}(2n+2) =$$

$$= \frac{ln3}{ln2} \cdot \frac{ln4}{ln3} \cdot \frac{ln5}{ln4} \cdot \ldots \cdot \frac{ln(2n+1)}{ln(2n)} \cdot \frac{ln(2n+2)}{ln(2n+1)} = \frac{ln(2n+2)}{ln2} = log_2(2n+2) =$$

$$= log_2 2(n+1) = 1 + log_2(n+1) \quad \Rightarrow \quad P_n > \sqrt{1+log_2(n+1)} \ .$$

Problema 2:

If $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, prove that :

$$\left(a_1^2+1\right)\cdot\left(a_2^2+1\right)\cdot \ldots \cdot\left(a_n^2+1\right) \geq \left(|a_1|+|a_2|\right)\cdot\left(|a_2|+|a_3|\right)\cdot \ldots \cdot\left(|a_n|+|a_1|\right) \ .$$

.

Solution

We have :

$$\left(a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right) = a^2b^2+1+a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}+a^2+b^2 =$$

$$= 2\cdot|a|\cdot|b|+a^2+b^2 = \left(|a|+|b|\right)^2 \ ,$$

with equality iff : $a^2 b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |a \cdot b| = 1$.

Hence : $\left(a_1+1\right)\left(a_2+1\right) \geq \left(\left|a_1\right|+\left|a_2\right|\right)^2$, (1)

$$\left(a_2+1\right)\left(a_3+1\right) \geq \left(\left|a_2\right|+\left|a_3\right|\right)^2 \quad , \qquad (2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(a_n+1\right)\left(a_1+1\right) \geq \left(\left|a_n\right|+\left|a_1\right|\right)^2 \quad . \qquad (n)$$

which by multiplying and extracting the square root lead to inequality from enonce .

Equalities in relations (1) - (n) are obtained if and only if occur simultaneously the relations :

$|a_1 a_2| = 1 \;,\; |a_2 a_3| = 1 \;,\; \dots \;,\; |a_n a_1| = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad |a_1| = 1 \;,\; |a_2| = 1 \;,\; \dots \;,\; |a_n| = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a_1 = \pm 1 \;,\; a_2 = \pm 1 \;,\; \dots \;,\; a_n = \pm 1$.

(with all 2^n sign combinations) .

Problema 3:

If either $a_1, a_2, \dots, a_n$, are simultaneously in $(0\,,\,1)$, either $a_1, a_2, \dots, a_n$ are simultaneously in $(1\,,\,\infty)$, prove that :

$$\log_{a_1} a_2^{\frac{1}{a_3}} + \log_{a_2} a_3^{\frac{1}{a_4}} + \dots + \log_{a_n} a_1^{\frac{1}{a_2}} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\dots+a_n} \quad .$$

Solution

After a short preparation , by *Cauchy-Buniakowski-Schwarz inequality*, we have :

$$\log_{a_1} a_2^{\frac{1}{a_3}} + \log_{a_2} a_3^{\frac{1}{a_4}} + \ldots + \log_{a_n} a_1^{\frac{1}{a_2}} =$$

$$= \frac{\log_{a_1} a_2}{a_3} + \frac{\log_{a_2} a_3}{a_4} + \ldots + \frac{\log_{a_n} a_1}{a_2} \overset{(CBS)}{\geq}$$

$$\overset{(CBS)}{\geq} \frac{\left(\sqrt{\log_{a_1} a_2} + \sqrt{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \sqrt{\log_{a_n} a_1}\right)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}. \qquad (1)$$

with equality , if and only if :

$$\frac{\sqrt{\log_{a_1} a_2}}{a_3} = \frac{\sqrt{\log_{a_2} a_3}}{a_4} = \ldots = \frac{\sqrt{\log_{a_{n-1}} a_2}}{a_1} = \frac{\sqrt{\log_{a_n} a_1}}{a_2}. \qquad (2)$$

On the other hand, as in the conditions of the problem ,

$$\log_{a_1} a_2 ,\ \log_{a_2} a_3 ,\ \ldots ,\ \log_{a_n} a_1 > 0 ,$$

by *AM-GM inequality* , we have :

$$\sqrt{\log_{a_1} a_2} + \sqrt{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \sqrt{\log_{a_n} a_1} \geq$$

$$\geq n \cdot \sqrt[2n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1} = n. \qquad (3)$$

with equality if and only if :

$$\log_{a_1} a_2 = \log_{a_2} a_3 = \ldots = \log_{a_n} a_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln a_2}{\ln a_1} = \frac{\ln a_3}{\ln a_2} = \ldots = \frac{\ln a_1}{\ln a_n} =$$

$$= \frac{\ln a_2 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n + \ln a_1}{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_{n-1} + \ln a_n} = 1 ,$$

where from $\ln a_1 = \ln a_2 = \ldots = \ln a_n$, meaning $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (which also checks the equality from (2)) .

Returning with (3) in (1) , we get the relationship from enonce , with equality if and only if $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

D. M.

Problema 4:

Dacă $m, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, să se demonstreze că ,

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i^j} = 1 \quad .$$

Soluție

Schimbând ordinea de sumare , avem

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i^j} = \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{i^j} \quad ,$$

şi folosind formula pentru însumarea a unei progresii geometrice , avem :

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{i^j} = \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots + \frac{1}{i^n} = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{i^{n-1}}}{1 - \frac{1}{i}} = \frac{1 - \frac{1}{i^{n-1}}}{i(i-1)} \quad .$$

Revenind la calculul limitelor , avem succesiv :

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i^j} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{m} \frac{1 - \frac{1}{i^{n-1}}}{i(i-1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{i(i-1)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = 1 \quad .$$

Problema 5:

Pentru $p, n \in \mathbb{N}^*$, $p < n$, sa se demonstreze ca ,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{2p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)p+1}+\frac{1}{(n-1)p+2}+\ldots+\frac{1}{np-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{np}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{np-1}+\frac{1}{np}\quad .$$

Solutie

Intr-adevar , avem :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{2p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)p+1}+\frac{1}{(n-1)p+2}+\ldots+\frac{1}{np-1}-(p-1)\cdot\frac{1}{np}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{np-1}+\frac{1}{np}\right)-p\cdot\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}+\ldots+\frac{1}{np}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{np-1}+\frac{1}{np}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{np-1}+\frac{1}{np}\quad .$$

Problema 6:

If a , b , c are non-negative real numbers , such that $a + b + c = 3$, then

$$(a^a + b^a + c^a)(a^b + b^b + c^b)(a^c + b^c + c^c) \geq 27 .$$

dr. ***Dorin Mărghidanu***

Solution

By ***Hölder inequality*** , we have :

$$(a^a + b^a + c^a)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^b + b^b + c^b)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^c + b^c + c^c)^{\frac{1}{3}} \geq$$

$$\geq a^{\frac{a+b+c}{3}} + b^{\frac{a+b+c}{3}} + c^{\frac{a+b+c}{3}} = a + b + c = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a^a + b^a + c^a) \cdot (a^b + b^b + c^b) \cdot (a^c + b^c + c^c) \geq 3^3$$

hence the inequality from enonce , with equality if $a = b = c\ (= 1)$.

Proposed problem

If a , b , c are non-negative real numbers , such that $a + b + c = 3$, then

$$(a^a + b^a + c^a)(a^b + b^b + c^b)(a^c + b^c + c^c) \geq 27 .$$

Solution

By ***Hölder inequality*** , we have :

$$(a^a + b^a + c^a)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^b + b^b + c^b)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^c + b^c + c^c)^{\frac{1}{3}} \geq$$

$$\geq a^{\frac{a+b+c}{3}} + b^{\frac{a+b+c}{3}} + c^{\frac{a+b+c}{3}} = a + b + c = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a^a + b^a + c^a) \cdot (a^b + b^b + c^b) \cdot (a^c + b^c + c^c) \geq 3^3$$

hence the inequality from enonce , with equality if $a = b = c\ (= 1)$.