

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO MAI 2017

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII MAI 2017 (EN/RO)... pag.2
Buzea Gabriela
2. SOLUȚII - PROBLEMA LUNII MARTIE 2017 ... pag. 3
Neculai Stanciu și Titu Zvonaru
Alte soluții date de : Marin Chirciu, Marian Cucoaneș
3. O GENERALIZARE A PROBLEMEI LUNII MARTIE 2017 ... pag.7
Marius Drăgan
4. ÎN LEGĂTURĂ CU O INEGALITATE ÎN TRIUNGHII DIN RECREAȚII MATEMATICE NR.1/2017 ... pag.8
Marin Chirciu
5. ALTE METODE DE REZOLVARE PENTRU PROBLEMELE DE LA ONM 2017 ... pag.20
George-Florin Șerban
6. PRINCIPII ȘI METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ... pag. 24
Ioan Viorel Codreanu
7. CÂTEVA PROBLEME DE TEORIA NUMERELOR... pag. 30
Dimitriu Alina
8. ASUPRA DESCOMPUNERII POLINOAMELOR ÎN PRODUS DE FACTORI IREDUCTIBILI ... pag. 33
Remus Felea
9. MATHMOISELLE – CONCURS DE MATEMATICĂ ÎN LIMBI MODERNE... pag. 35
Nicoleta Agenna Mazilu
10. MATEMATICA - PUNTEA DE LEGĂTURĂ ÎNTRE DISCIPLINE... pag.44
Udma Arleziana Emilia
11. MODELAREA ȘI SIMULAREA ANTENEI NESIMETRICE ÎN FORMĂ DE L RĂSTURNAT (Γ)... pag. 49
Mihai Păunescu, Daniel Brînzei, Iulian Bouleanu

1. PROBLEMA LUNII MAI 2017



Prof. Buzea Gabriela , Școala Gimnazială Nr. 56, București



Given the right triangular prism $ABCA'B'C'$ with the equilateral triangle ABC as its base, its height $AA'=6$ cm and P a point inside the triangle $A'B'C'$ so that $PA=4\sqrt{3}$, $PB=6\sqrt{2}$ and $PC=2\sqrt{21}$. Calculate $\tan(\angle(A'B'C'),(PBC))$.

If you solve the problem, you can post your solution sending it by email to revista@mateinfo.ro.

Deadline 01.06.2017.



Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AA'=6$ cm. Fie un punct P în interiorul triunghiului $A'B'C'$ astfel încât $PA=4\sqrt{3}$, $PB=6\sqrt{2}$ și $PC=2\sqrt{21}$.
Să se calculeze $\tan(\angle(A'B'C'),(PBC))$.

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 1.06.2017 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

2. SOLUȚII PROBLEMA LUNII APRILIE 2017

WWW.MATEINFO.RO

Proposed by Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Romania and Titu Zvonaru, Comănești, Romania.

Prove that in any triangle ABC with the lengths sides a, b, c the area S the semiperimeter p and circumradius R holds

$$\frac{9R}{8S} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a+b} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)}.$$

Solution. Since $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$, we have:

$$\begin{aligned} \frac{9R}{8S} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a+b} &= \frac{9abc}{32S^2} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a+b} = \sum_{\text{cyclic}} \left(\frac{3abc}{32S^2} - \frac{1}{a+b} \right) = \\ &= \frac{1}{32S^2} \sum_{\text{cyclic}} \frac{3a^2bc + 3ab^2c - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2 + 2a^4 + 2b^4 + 2c^4}{a+b} = \\ &= \frac{1}{32S^2} \sum_{\text{cyclic}} \frac{2(a^2 - b^2)^2 + (c-a)(c^3 + ac^2 - 3b^2c) + (c-b)(c^3 + bc^2 - 3a^2c)}{a+b} = \\ &= \frac{1}{32S^2} \left(\sum_{\text{cyclic}} \frac{2(a^2 - b^2)^2}{a+b} + \sum_{\text{cyclic}} \frac{(c-a)(c^3 + ac^2 - 3b^2c)}{a+b} + \sum_{\text{cyclic}} \frac{(c-b)(c^3 + bc^2 - 3a^2c)}{a+b} \right) = \\ &= \frac{1}{32S^2} \left(\sum_{\text{cyclic}} \frac{2(a^2 - b^2)^2}{a+b} + \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a-b)(a^3 + a^2b - 3ac^2)}{b+c} + \sum_{\text{cyclic}} \frac{(b-a)(b^3 + ab^2 - 3bc^2)}{a+c} \right) = \\ &= \frac{1}{32S^2} \sum_{\text{cyclic}} (a-b) \left(\frac{2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3}{a+b} + \frac{a^3 + a^2b - 3ac^2}{b+c} + \frac{3bc^2 - b^3 - ab^2}{a+c} \right). \end{aligned}$$

We denote $t = ab + bc + ca$, and we obtain

$$\begin{aligned} &(2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3)(c+a)(c+b) + (a^3 + a^2b - 3ac^2)(a+b)(a+c) - \\ &-(b^3 + ab^2 - 3bc^2)(b+a)(b+c) = (2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3)(c^2 + t) + (a^3 + a^2b - 3ac^2)(a^2 + t) - \\ &-(b^3 + ab^2 - 3bc^2)(b^2 + t) = 2a^3c^2 + 2a^2bc^2 - 2ab^2c^2 - 2b^3c^2 + a^5 + a^4b - 3a^3c^2 - b^5 - ab^4 + \\ &+ 3b^3c^2 + t(2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3 + a^3 + a^2b - 3ac^2 - b^3 - ab^2 + 3bc^2) = \text{after some} \\ &\text{algebra} = (a-b)[(a^2 + b^2)(a+b+c)(a+b-c) + abc^2] + 3t(a-b)(a+b+c)(a+b-c). \end{aligned}$$

Hence

$$\frac{9R}{8S} - \sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{a+b} = \frac{1}{32S^2} \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a-b)^2[(a^2 + b^2)(a+b+c)(a+b-c) + abc^2] + 3t(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$\begin{aligned} &\text{Since } (a^2 + b^2)(a+b+c)(a+b-c) + abc^2 + 3(ab+bc+ca)(a+b+c)a+b-c > \\ &> (a^2 + b^2)(a+b+c)(a+b-c) + 2(ab+bc+ca)(a+b+c)a+b-c = \end{aligned}$$

$$= 4p(p-c)(a^2 + ab + bc + ac + b^2 + ab + bc + ac) = 4p(p-c)[(a+b)(a+c) + (b+a)(b+c)] = \\ = 4p(p-c)(a+b)(a+b+2c) \text{ and}$$

$$(a+b+2c)^2 = [(a+c) + (b+c)]^2 \geq 4(a+c)(b+c) \Leftrightarrow \frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{4}{a+b+2c}.$$

So we have that:

$$\frac{(a-b)^2[(a^2 + b^2)(a+b+c)(a+b-c) + abc^2 + 3(ab+bc+ac)(a+b+c)(a+b-c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq$$

$$\geq \frac{(a-b)^2 4p(p-c)(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16(a-b)^2 p(p-c)}{a+b+2c}, \text{ i.e.}$$

$$\frac{9R}{8S} - \sum_{cyclic} \frac{1}{a+b} \geq \sum_{cyclic} \frac{16(a-b)^2 p(p-c)}{32S^2(a+b+2c)} = \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2 p(p-c)}{2p(p-a)(p-b)(p-c)(a+b+2c)} = \\ = \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)}, \text{ and the proof is}$$

complete.

We have equality if and only if $a=b=c$.

Alte soluții:

1. Prof. Marin Chirciu

Folosind identitatea cunoscută în triunghi $\sum \frac{1}{a+b} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}$, membrul stâng se

$$\text{scrie } M_s = \frac{9R}{8pr} - \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)} = \frac{p^2(9R - 20r) + r(18R^2 - 7Rr - 4r^2)}{8pr(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

Să calculăm membrul drept:

$$M_d = \sum \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} = \sum \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} = \\ = \sum \frac{(a+b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} - 2 \sum \frac{ab}{(p-a)(p-b)(a+b+2c)} = E_1 - 2E_2.$$

$$\text{Avem } E_1 = \sum \frac{(a+b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} = \sum \frac{(2p-c)^2}{2(p-a)(p-b)(2p+c)} = \\ = \frac{9p^4 - 2p^2(39Rr + 3r^2) + r^2(4R+r)(6R+r)}{pr^2(9p^2 + r^2 + 6Rr)}.$$

$$\text{Analog } E_2 = \sum \frac{ab}{(p-a)(p-b)(a+b+2c)} = \sum \frac{ab}{(p-a)(p-b)(2p+c)} =$$

$$= \frac{9p^4 + 2p^2(5r^2 - 42Rr) + r^3(4R + r)}{2pr^2(9p^2 + r^2 + 6Rr)}.$$

Obținem

$$\begin{aligned} M_d = E_1 - 2E_2 &= \frac{9p^4 - 2p^2(39Rr + 3r^2) + r^2(4R + r)(6R + r)}{pr^2(9p^2 + r^2 + 6Rr)} - 2 \cdot \frac{9p^4 + 2p^2(5r^2 - 42Rr) + r^3(4R + r)}{2pr^2(9p^2 + r^2 + 6Rr)} \\ &= \frac{p^2(6R - 16r) + 6Rr(4R + r)}{pr(9p^2 + r^2 + 6Rr)}. \end{aligned}$$

Să arătăm acum că $M_s \geq M_d$. Acest lucru revine la demonstrarea inegalității:

$$\begin{aligned} \frac{p^2(9R - 20r) + r(18R^2 - 7Rr - 4r^2)}{8pr(p^2 + r^2 + 2Rr)} &\geq \frac{p^2(6R - 16r) + 6Rr(4R + r)}{pr(9p^2 + r^2 + 6Rr)} \Leftrightarrow \\ \frac{p^2(9R - 20r) + r(18R^2 - 7Rr - 4r^2)}{8(p^2 + r^2 + 2Rr)} &\geq \frac{p^2(6R - 16r) + 6Rr(4R + r)}{9p^2 + r^2 + 6Rr}, \quad (*) \text{ care rezultă ușor} \end{aligned}$$

arătând inegalități între numitori și numărători, după cum urmează:

$$1) \quad 9p^2 + r^2 + 6Rr \geq 8(p^2 + r^2 + 2Rr) \Leftrightarrow p^2 \geq 10Rr + 7r^2, \text{ adevărată din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

$$2) \quad p^2(9R - 20r) + r(18R^2 - 7Rr - 4r^2) \geq p^2(6R - 16r) + 6Rr(4R + r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(3R - 4r) \geq r(6R^2 + 13Rr + 4r^2), \text{ adevărată tot din inegalitatea lui Gerretsen}$$

$p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Într-adevăr este suficient să arătăm că:

$$(16Rr - 5r^2)(3R - 4r) \geq r(6R^2 + 13Rr + 4r^2) \Leftrightarrow 21R^2 - 46Rr + 8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(21R - 4r) \geq 0.$$

Din 1) și 2) deducem inegalitatea (*) și cu aceasta problema este rezolvată.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea propusă întărește inegalitatea cunoscută în triunghi:

$$\sum \frac{1}{a+b} \leq \frac{9R}{8S}.$$

$$\text{De fapt sunt adevărate inegalitățile } \sum \frac{1}{a+b} \leq \frac{p}{6Rr} \leq \frac{3(R+r)}{4S} \leq \frac{9R}{8S}.$$

2. Marian Cucoaneș

Se demonstrează ușor (prin calcul direct) următoarele egalități:

$$(x+y)(x+z)(y+z) - 8xyz = (x+y+z)(xy+xz+yz) - 9xyz = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{9}{x+y+z} = \frac{x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(x-y)^2}{xyz(x+y+z)} \quad (2)$$

În (1) luăm: $x = p-a, y = p-b, z = p-c \Rightarrow$

$$abc - 8(p-a)(p-b)(p-c) = (p-a)(b-c)^2 + (p-b)(a-c)^2 + (p-c)(a-b)^2 \quad (3)$$

În (2) luăm:

$x = b+c; y = a+c; z = a+b$ și cum $a+b+c = 2p$ obținem:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} - \frac{9}{4p} = \frac{(b+c)(b-c)^2 + (a+c)(a-c)^2 + (a+b)(a-b)^2}{(a+b)(b+c)(a+c) \cdot 4p}$$

Atunci:

$$\frac{9 \cdot [abc - 8(p-a)(p-b)(p-c)]}{32p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{(p-a)(b-c)^2 + (p-b)(a-c)^2 + (p-c)(a-b)^2}{32p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$$\frac{9R}{8S} - \frac{9}{4p} = \sum_{cyc} \frac{9(a-b)^2}{32p(p-a)(p-b)} \quad (5)$$

$$Din (4) \Rightarrow \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \right) - \frac{9}{4p} = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+b)(b+c)4p} \quad (6)$$

Scriem inegalitatea din enunț sub următoarea formă:

$$\frac{9R}{8S} - \frac{9}{4p} \geq \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \right) - \frac{9}{4p} - \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+c+2c)}$$

Ținând seama de (5) și (6) ultima inegalitate este echivalentă cu :

$$\sum_{cyc} \frac{9(a-b)^2}{32p(p-a)(p-b)} \geq \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)4p} + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} \quad (7)$$

Pentru a demonstra inegalitatea (7) este suficient să demonstrăm inegalitatea:

$$\frac{9}{32p(p-a)(p-b)} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)4p} + \frac{1}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} \quad (8)$$

$$\text{Cum } a+b+2c > a+b+c = 2p \Rightarrow \frac{1}{4p(p-a)(p-b)} > \frac{1}{2(p-a)(p-b)(a+b+2c)} \quad (9)$$

$$\frac{9}{32p(p-a)(p-b)} > \frac{1}{4p(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(a+c)(b+c) \cdot 4p} \quad (10) \Leftrightarrow \frac{1}{32p(p-a)(p-b)} > \frac{1}{(a+c)(b+c) \cdot 4p} \Leftrightarrow$$

$$(a+b)(a+c) > 8(p-a)(p-b) \Leftrightarrow ab+ac+bc+c^2 > 2(b+c-a)(a-b+c) \Leftrightarrow$$

$$\text{Avem (10) } ab+ac+bc+c^2 > 2c^2 - 2(a-b)^2 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 + ab+ac+bc-c^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$2(a-b)^2 + ab+c(a+b-c) > 0.$$

Această ultimă inegalitate este evidentă . Prin adunarea inegalităților (9) și (10) se obține inegalitatea (8).

3. O GENERALIZARE A PROBLEMEI LUNII MARTIE

www.mateinfo.ro

Marius Drăgan, București

Dacă $t \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ atunci în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum \frac{1}{(\sin A + \sin B)^t} \geq 3^{\frac{t-2}{2}}.$$

Demonstrație. Considerăm funcția

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(2s - x)^t}.$$

Deoarece

$$f''(x) = \frac{t(t+1)}{(2s - x)^{t+2}} > 0,$$

rezultă că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

Din inegalitatea lui *Jensen* avem

$$\sum \frac{1}{(b+c)^t} = \sum \frac{1}{(2s-a)^t} \geq 3 \sum \frac{1}{\left(2s - \frac{2s}{3}\right)^t} = \frac{3^{t+1}}{4^t s^t}, (1).$$

Din teorema sinusurilor, (1) și inegalitatea lui *Mitrinovic* $R \geq \frac{2s}{3\sqrt{3}}$ obținem

$$\sum \frac{1}{(\sin A + \sin B)^t} = \sum \frac{2^t R^t}{(b+c)^t} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3^{t+1} R^t}{2^t s^t} \stackrel{(M)}{\geq} \frac{3^{t+1}}{2^t} \cdot \frac{2^t}{3^{\frac{3t}{2}}} = 3^{\frac{t-2}{2}}, \text{ q.e.d.}$$

Observație. Pentru $t = 2$ se obține problema lunii martie 2017.

4. ÎN LEGĂTURĂ CU O INEGALITATE ÎN TRIUNGHI DIN RECREAȚII MATEMATICE NR. 1 / 2017

Marin Chirciu¹

În revista de matematică **Recreații Matematice Nr. 1 / 2017** este propusă următoarea inegalitate în triunghi:

IX.179. Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sum a^2 r_a \geq 108r^3.$$

D.M. Băținețu-Giurgiu, București, Neculai Stanciu, Buzău

Soluție.

Folosim identitatea cunoscută în triunghi $\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r)$.

Inegalitatea se scrie $4p^2(R-r) \geq 108r^3$, adevărată din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$ și din inegalitatea lui Mitrinović: $p^2 \geq 27r^2$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Articolul prezintă o modalitate unitară pentru calculul unor sume în care apar laturi ale triunghiului și razele cercurilor exînscrie acestuia, precum și obținerea de inegalități generate de identitățile în triunghi rezultate.

Aplicația 1.

a) $\sum ar_a = 2p(2R-r)$; **b)** $\sum ar_a \geq 18\sqrt{3}r$.

Soluție.

a) $\sum ar_a = \sum a \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{a}{p-a} = pr \cdot \frac{2(2R-r)}{r} = 2p(2R-r)$

b) Folosind identitatea a) obținem:

$\sum ar_a = 2p(2R-r) \stackrel{M+E}{\geq} 2 \cdot 3r\sqrt{3} \cdot 3r = 18\sqrt{3}r$, unde M este inegalitatea lui Mitrinović $p \geq 3r\sqrt{3}$ și E este inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Aplicația 2.

a) $\sum r_a = 4R+r$; **b)** $\sum r_a \geq 9r$.

Soluție.

a) Avem $\sum r_a = \sum \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{1}{p-a} = pr \cdot \frac{4R+r}{pr} = 4R+r$.

b) Folosim a) și inegalitatea lui Euler: $\sum r_a = 4R+r \stackrel{E}{\geq} 9r$.

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Aplicația 3.

a) $\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r)$; **b)** $\sum a^2 r_a \geq 108r^3$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, Neculai Stanciu, Buzău

Soluție.

a) Avem $\sum a^2 r_a = S \sum \frac{a^2}{p-a} = pr \cdot \frac{4p(R-r)}{r} = 4p^2(R-r)$

b) Folosind a) obținem $\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r) \geq 4 \cdot 27r^2 \cdot r = 108r^3$, în baza inegalităților Mitrinović și Euler.

Aplicația 4.

a) $\sum a^3 r_a = 2p[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)]$; **b)** $\sum a^3 r_a \geq 108\sqrt{3}r^4$.

Soluție.

a) $\sum a^3 r_a = \sum a^3 \cdot \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{a^3}{p-a} = rp \cdot \frac{2[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)]}{r} =$
 $= 2p[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)].$

b) Folosind a) obținem

$$\sum a^3 r_a = 2p[p^2(2R-3r)+r^2(4R+r)] \stackrel{M+G+E}{\geq} 2 \cdot 3r\sqrt{3}[(16Rr-5r^2)(r)+r^2(9r)] =$$

$$= 6r\sqrt{3}[27r^2 \cdot r + 9r^3] = 108\sqrt{3}r^4, \text{ unde } G \text{ este inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Aplicația 5.

a) $\sum a^4 r_a = 4p^2[p^2(R-2r)+r^2(5R+2r)]$; **b)** $\sum a^4 r_a \geq 1296r^5$.

Soluție.

a) Avem $\sum a^4 r_a = \sum a^4 \cdot \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{a^4}{p-a} = rp \cdot \frac{4p[p^2(R-2r)+r^2(5R+2r)]}{r} =$
 $= 4p^2[p^2(R-2r)+r^2(5R+2r)].$

b) Folosind a) obținem

$$\sum a^4 r_a = 4p^2[p^2(R-2r)+r^2(5R+2r)] \stackrel{G}{\geq} 4(16Rr-5r^2)[(16Rr-5r^2)(R-2r)+r^2(5R+2r)] =$$

$$= 4r^2[(16R-5r)[(16R-5r)(R-2r)+r(5R+2r)]] \stackrel{E}{\geq} 4r^2(27r)[27r \cdot 0 + r \cdot 12r] = 1296r^5.$$

Aplicația 6.

$$\sum a^n r_a \geq \left(\frac{2p}{3}\right)^n \cdot (4R+r), \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Tripletele (a^n, b^n, c^n) și (r_a, r_b, r_c) sunt la fel ordonate. Cu inegalitatea lui Cebășev

$$\text{avem } \sum a^n r_a \geq \frac{1}{3} \sum a^n \cdot \sum r_a. \text{ Din } \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}, n \geq 2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum a^n \geq \frac{(a+b+c)^n}{3^{n-1}} = \frac{(2p)^n}{3^{n-1}} \Rightarrow \sum a^n r_a \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{(2p)^n}{3^{n-1}} \cdot (4R+r) = \left(\frac{2p}{3}\right)^n \cdot (4R+r).$$

Aplicația 7.

a) $\sum r_a^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$; **b)** $\sum r_a^2 \geq 8R^2 - 5r^2$; **c)** $\sum r_a^2 \geq 8R^2 - 5r^2 \geq 27r^2$.

Soluție.

a) Avem $\sum r_a^2 = \left(\sum r_a\right)^2 - 2\sum r_b r_c = (4R+r)^2 - 2p^2$.

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

c) Se folosește b) și inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$.

Aplicația 8.

a) $\sum ar_a^2 = 4R(4R+r) - 2p^2$; **b)** $\sum ar_a^2 \geq 18r^2$.

Soluție.

a) $\sum ar_a^2 = \sum a \left(\frac{S}{p-a}\right)^2 = S^2 \sum \frac{a}{(p-a)^2} = r^2 p^2 \cdot \frac{4R(4R+r) - 2p^2}{r^2 p^2} = 4R(4R+r) - 2p^2$.

b) Se folosește a) inegalitatea lui Gerretsen și inegalitatea lui Euler:

$$\sum ar_a^2 = 4R(4R+r) - 2p^2 \stackrel{G}{\geq} 16R^2 + 4Rr - 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) = 8R^2 - 4Rr - 6r^2 =$$

$$= 4R(2R-r) - 6r^2 \stackrel{E}{\geq} 4 \cdot 2r(4r-r) - 6r^2 = 18r^2.$$

Aplicația 9.

a) $\sum r_a^3 = (4R+r)^3 - 12p^2 R$; **b)** $\sum r_a^3 \geq 81r^3$.

Soluție.

a) $\sum r_a^3 = \left(\sum r_a\right)^3 - 3\prod(r_a + r_b)(r_a + r_c) = (4R+r)^3 - 12p^2 R$.

b) Folosind a) obținem:

$$\sum r_a^3 = (4R+r)^3 - 12p^2 R \stackrel{G}{\geq} (4R+r)^3 - 12R(4R^2 + 4Rr + 3r^2) = 16R^3 - 24Rr^2 + r^3 =$$

$$= 8R[2R^2 - 3r^2] + r^3 \stackrel{E}{\geq} 8 \cdot 2r[2 \cdot 4r^2 - 3r^2] + r^3 = 81r^3.$$

Aplicația 10.

a) $\sum \frac{1}{a} \cdot r_a = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4Rp}$; **b)** $\sum \frac{1}{a} \cdot r_a \geq 3\sqrt{3} \cdot \frac{r}{R}$.

Soluție.

$$a) \sum \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{1}{a(p-a)} = pr \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4p^2 Rr} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4Rp}.$$

$$b) \text{ Folosind a) inegalitatea se scrie } \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4Rp} \geq 3\sqrt{3} \cdot \frac{r}{R} \Leftrightarrow p^2 + (4R+r)^2 \stackrel{D}{\geq} \stackrel{D}{\geq} 12r(4R+r),$$

unde (D) este inegalitatea lui Doucet: $p\sqrt{3} \leq 4R+r$. Folosind inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, rămâne să arătăm că $2R^2 - 3Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+r) \geq 0$, evident, din inegalitatea lui Euler.

Aplicația 11.

$$a) \sum \frac{1}{a^2} \cdot r_a = \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 2Rr) + r(4R+r)^3}{16p^2 R^2 r}; \quad b) \sum \frac{1}{a^2} \cdot r_a \geq \frac{3}{2R}.$$

$$\text{Soluție. a) } \sum \frac{1}{a^2} \cdot r_a = \sum \frac{1}{a^2} \cdot \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{1}{a^2(p-a)} = rp \cdot \frac{p^4 - 2p^2(2Rr - r^2) + r(4R+r)^3}{16p^3 R^2 r^2} =$$

$$\frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 2Rr) + r(4R+r)^3}{16p^2 R^2 r}.$$

b) Folosind a) obținem:

$$\sum \frac{1}{a^2} \cdot r_a = \frac{p^4 - 2p^2(2Rr - r^2) + r(4R+r)^3}{16p^2 R^2 r} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2R}, \text{ unde}$$

$$(1) \Leftrightarrow p^4 - 2p^2(2Rr - r^2) + r(4R+r)^3 \geq 24p^2 Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^4 + p^2(-4Rr + 2r^2 - 24Rr) + r(4R+r)^3 \geq 0 \Leftrightarrow p^4 + p^2(-28Rr + 2r^2) + r(4R+r)^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \underbrace{(p^2 - 28Rr + 2r^2)}_E + r(4R+r)^3 \geq 0.$$

i) Dacă $E \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

ii) Dacă $E < 0$, inegalitatea se rescrie $p^2(28Rr - 2r^2 - p^2) \leq r(4R+r)^3$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen. Rămâne să demonstrăm că

$$(4R^2 + 4Rr + 3r^3)(28Rr - 2r^2 - 16Rr + 5r^2) \leq r(4R+r)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(12R + 3r) \leq (4R+r)^3 \Leftrightarrow 16R^3 - 12R^2r - 36Rr^2 - 8r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4R^3 - 3R^2r - 9Rr^2 - 2r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R^2 + 5Rr + r^2) \geq 0, \text{ evident, din Euler.}$$

Aplicația 12.

$$a) \sum \frac{1}{a} \cdot r_a^2 = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4pR}; \quad b) \sum \frac{1}{a} \cdot r_a \geq \frac{81r^3}{pR}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{1}{a} \cdot r_a^2 = \sum \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{S}{p-a} \right)^2 = S^2 \sum \frac{1}{a(p-a)^2} = r^2 p^2 \cdot \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4p^3 Rr^2} =$$

$$= \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4pR}.$$

b) Folosind a) obținem:

$$\begin{aligned}
\sum \frac{1}{a} \cdot r_a &= \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4pR} \stackrel{G}{\geq} \frac{(4R+r)^3 + (4R^2+4Rr+3r^2)(r-8R)}{4pR} = \\
&= \frac{32R^3 + 20R^2r - 8Rr^2 + 4r^3}{4pR} = \frac{4(8R^3 + 5R^2r - 2Rr^2 + r^3)}{4pR} = \frac{8R^3 + 5R^2r - 2Rr^2 + r^3}{pR} = \\
&= \frac{1}{p} \left[8R^2 + 5Rr - 2r^2 + \frac{r^3}{R} \right] \stackrel{E}{\geq} \frac{1}{p} \left[8 \cdot 4r^2 + 5 \cdot 2r^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{R} \right] = \frac{1}{p} \left(40r^2 + \frac{r^3}{R} \right) = \frac{40Rr^2 + r^3}{pR} \stackrel{E}{\geq} \\
&\stackrel{E}{\geq} \frac{40 \cdot 2r^3 + r^3}{pR} = \frac{81r^3}{pR}.
\end{aligned}$$

Aplicația 13.

a) $\sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r}$; b) $\sum \frac{1}{r_a} \geq \frac{2}{R}$.

Soluție.

a) $\sum \frac{1}{r_a} = \sum \frac{1}{\frac{S}{p-a}} = \sum \frac{p-a}{S} = \frac{1}{S} \sum (p-a) = \frac{p}{rp} = \frac{1}{r}$.

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$.**Aplicația 14.**

a) $\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2(4R+r)}{p}$; b) $\sum \frac{a}{r_a} \geq 2\sqrt{3}$.

Soluție.

a) $\sum \frac{a}{r_a} = \sum \frac{a}{\frac{S}{p-a}} = \frac{1}{S} \sum a(p-a) = \frac{1}{pr} \cdot 2r(4R+r) = \frac{2(4R+r)}{p}$.

b) $\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2(4R+r)}{p} \stackrel{\text{Doucet}}{\geq} \frac{2 \cdot p\sqrt{3}}{p} = 2\sqrt{3}$.

Aplicația 15.

a) $\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r)$; b) $\sum \frac{a^2}{r_a} \geq 12r$.

Soluție.

a) $\sum \frac{a^2}{r_a} = \sum \frac{a^2}{\frac{S}{p-a}} = \frac{1}{S} \sum a^2(p-a) = \frac{1}{pr} \cdot 4pr(R+r) = 4(R+r)$.

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 16.

$$\text{a) } \sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p}; \text{ b) } \sum \frac{a^3}{r_a} \geq \frac{216r^3}{p}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{a^3}{r_a} = \frac{1}{S} \sum a^3(p-a) = \frac{1}{pr} \cdot 2r \left[p^2(2R+3r) - r(4R+r)^2 \right] = \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum \frac{a^3}{r_a} &= \frac{2p^2(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} \stackrel{G}{\geq} \frac{2(16Rr - 5r^2)(2R+3r) - 2r(4R+r)^2}{p} = \\ &= \frac{2r}{p} \left[(16R - 5r)(2R+3r) - (4R+r)^2 \right] = \frac{2r}{p} (16R^2 + 30Rr - 16r^2) = \frac{4r}{p} (8R^2 + 15Rr - 8r^2) \stackrel{E}{\geq} \\ &\stackrel{E}{\geq} \frac{4r}{p} (8 \cdot 4r^2 + 15 \cdot 2r^2 - 8r^2) = \frac{4r}{p} \cdot 54r^2 = \frac{216r^3}{p}. \end{aligned}$$

Aplicația 17.

$$\text{a) } \sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r(4R+r)}{p^2 r^2}; \text{ b) } \sum \frac{1}{r_a^2} \geq \frac{1}{3r^2}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{1}{r_a^2} = \sum \frac{1}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2} \sum (p-a)^2 = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot (p^2 - 2r^2 - 8Rr) = \frac{p^2 - 2r(4R+r)}{p^2 r^2}.$$

b) Folosind a) inegalitatea $\Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2$, apoi Gerretsen și Euler.

Aplicația 18.

$$\text{a) } \sum \frac{a}{r_a^2} = \frac{2(2R-r)}{pr}; \text{ b) } \sum \frac{a}{r_a^2} \geq \frac{6}{p}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{a}{r_a^2} = \sum \frac{a}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2} \sum a(p-a)^2 = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot 2pr(2R-r) = \frac{2(2R-r)}{pr}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 19.

$$\text{a) } \sum \frac{a^2}{r_a^2} = \frac{2}{p^2} \left[(4R+r)^2 - p^2 \right]; \text{ b) } \sum \frac{a^2}{r_a^2} \geq 4.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{a^2}{r_a^2} = \sum \frac{a^2}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2} \sum a^2(p-a)^2 = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot 2r^2 \left[(4R+r)^2 - p^2 \right] = \frac{2}{p^2} \left[(4R+r)^2 - p^2 \right].$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Doucet: $(4R+r)^2 \geq 3p^2$.

Aplicația 20.

$$\text{a) } \sum \frac{r_b r_c}{bc} = 2 + \frac{r}{2R}; \text{ b) } \sum \frac{r_b r_c}{bc} \leq \frac{9}{4}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{r_b r_c}{bc} = \sum \frac{\frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}}{bc} = S^2 \sum \frac{1}{bc(p-b)(p-c)} = p^2 r^2 \cdot \frac{4R+r}{2p^2 R r^2} = \frac{4R+r}{2R} = 2 + \frac{r}{2R}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 21.

$$\text{a) } \sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2; \text{ b) } \sum \frac{bc}{r_b r_c} \geq 4.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{bc}{r_b r_c} = \frac{1}{S^2} \sum bc(p-b)(p-c) = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot r^2 [p^2 + (4R+r)^2] = 1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Doucet: $4R+r \geq p\sqrt{3}$.**Aplicația 22.**

$$\text{a) } \sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R-r}{2Rr}; \text{ b) } \sum \frac{r_a}{bc} \geq \frac{3}{4r}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{r_a}{bc} = \sum \frac{\frac{S}{p-a}}{bc} = S \sum \frac{1}{bc(p-a)} = pr \cdot \frac{2R-r}{2pRr^2} = \frac{2R-r}{2Rr}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 23.

$$\text{a) } \sum \frac{bc}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r}; \text{ b) } \sum \frac{bc}{r_a} \geq 4(2R-r) \geq 12r.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{bc}{r_a} = \sum \frac{bc}{\frac{S}{p-a}} = \frac{1}{S} \sum bc(p-a) = \frac{1}{pr} \cdot p(p^2 + r^2 - 8Rr) = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.**Aplicația 24.**

$$\text{a) } \sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}; \text{ b) } \sum \frac{r_b r_c}{a} \geq \frac{p(2R-r)}{R} \geq \frac{3S}{R}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{r_b r_c}{a} = \sum \frac{\frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}}{a} = S^2 \sum \frac{1}{a(p-b)(p-c)} = p^2 r^2 \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4pRr^3} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 25.

$$a) \sum \frac{a}{r_b r_c} = \frac{2(2R-r)}{pr}; \quad b) \sum \frac{a}{r_b r_c} \geq \frac{6}{p}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{a}{r_b r_c} = \sum \frac{a}{\frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} = \frac{1}{S^2} \sum a(p-b)(p-c) = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot 2pr(2R-r) = \frac{2(2R-r)}{pr}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Aplicația 26.

$$a) \sum bc \cdot r_a = r[p^2 + (4R+r)^2]; \quad b) \sum bc \cdot r_a \geq 4p^2 r \geq 108r^3.$$

Soluție.

$$a) \sum bc \cdot r_a = \sum bc \cdot \frac{S}{p-a} = S \sum \frac{bc}{p-a} = pr \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{p} = r[p^2 + (4R+r)^2].$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 27.

$$a) \sum \frac{r_a}{r_b + r_c} = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4p^2 R}; \quad b) \sum \frac{r_a}{r_b + r_c} \geq \frac{8R^3 + 5R^2 r - 2Rr^2 + r^3}{p^2 R};$$

$$c) \sum \frac{r_a}{r_b + r_c} \geq \frac{8R^3 + 5R^2 r - 2Rr^2 + r^3}{p^2 R} \geq \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{r}{R}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{r_a}{r_b + r_c} = \sum \frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}} = \sum \frac{(p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{p^2(r-8R) + (4R+r)^3}{4p^2 R}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

c) Se folosește b), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 28.

$$a) \sum \frac{r_b + r_c}{r_a} = \frac{2(2R-r)}{r}; \quad b) \sum \frac{r_b + r_c}{r_a} \geq \frac{3R}{r} \geq 6.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{r_b + r_c}{r_a} = \sum \frac{\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}}{\frac{S}{p-a}} = \sum \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)} = \frac{2(2R-r)}{r}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 29.

$$\text{a) } \sum \frac{1}{r_b + r_c} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4p^2R}; \text{ b) } \sum \frac{1}{r_b + r_c} \geq \frac{9}{2(4R+r)} \geq \frac{1}{R}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{1}{r_b + r_c} = \frac{1}{S} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a} = \frac{1}{pr} \cdot \frac{r}{4pR} [p^2 + (4R+r)^2] = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{4p^2R}$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler sau inegalitatea mediilor AM-HM.

Aplicația 30.

$$\text{a) } \sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}; \text{ b) } \sum \frac{ar_a}{r_b + r_c} \geq p.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{a \cdot r_a}{r_b + r_c} = \sum \frac{a \cdot \frac{S}{p-a}}{\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}} = \sum \frac{(p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$.

Aplicația 31.

$$\text{a) } \sum \frac{r_b + r_c}{a \cdot r_a} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{pr^2}; \text{ b) } \sum \frac{r_b + r_c}{a \cdot r_a} \geq \frac{8R-7r}{pr} \geq \frac{9R}{2pr} \geq \frac{9}{p}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}}{a \cdot \frac{S}{p-a}} = \sum \frac{p-a}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{pr^2}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 32.

$$\text{a) } \sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r}; \text{ b) } \sum \frac{r_b + r_c}{a} \geq 3\sqrt{3}.$$

Soluție.

Se folosește formula $r_a = \frac{S}{p-a}$ și inegalitatea lui Mitrinović $p \geq 3r\sqrt{3}$.

Aplicația 33.

a) $\sum \frac{a}{r_b + r_c} = \frac{4R+r}{p}$; b) $\sum \frac{a}{r_b + r_c} \geq \sqrt{3}$.

Soluție.

Se folosește formula $r_a = \frac{S}{p-a}$ și inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$.

Aplicația 34.

a) $\sum a \cdot r_b r_c = 2pr(4R+r)$; b) $\sum a \cdot r_b r_c \geq 18pr^2$.

Soluție.

a) $\sum a \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c} = S^2 \sum \frac{a}{(p-b)(p-c)} = p^2 r^2 \cdot \frac{2(4R+r)}{pr} = 2pr(4R+r)$.

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 35.

a) $\sum bc \cdot r_b r_c = p^2(p^2 + r^2 - 8Rr)$; b) $\sum bc \cdot r_b r_c \geq 324r^4$.

Soluție.

a) $\sum bc \cdot r_b r_c = S^2 \sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = p^2 r^2 \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} = p^2(p^2 + r^2 - 8Rr)$.

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 36.

a) $\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = 4\left(\frac{R}{r} - 1\right)$; b) $\sum \frac{a^2}{r_b r_c} \geq \frac{2R}{r} \geq 4$.

Soluție.

a) $\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{1}{S^2} \sum a^2(p-b)(p-c) = \frac{1}{p^2 r^2} \cdot 4p^2 r(R-r) = 4\left(\frac{R}{r} - 1\right)$.

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 37.

a) $\sum \frac{r_b r_c}{a^2} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2 r^2}$; b) $\sum \frac{r_b r_c}{a^2} \geq \left(2 - \frac{r}{R}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$.

Soluție.

a) $\sum \frac{r_b r_c}{a^2} = S^2 \sum \frac{1}{a^2(p-b)(p-c)} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 12Rr) + r^3(4R+r)}{16R^2 r^2}$.

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 38.

$$\text{a) } \sum \frac{a(b+c)}{r_a} = 12R ; \text{ b) } \sum \frac{a(b+c)}{r_a} \geq 24r .$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{a(b+c)}{r_a} = \frac{1}{S} \sum a(b+c)(p-a) = \frac{1}{pr} \cdot 12pRr = 12R .$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 39.

$$\text{a) } \sum \frac{r_a}{a(b+c)} = \frac{p^4 + p^2(32R^2 + 4Rr + 2r^2) + r(4R+r)^3}{8p^2R(p^2 + r^2 + 2Rr)} ; \text{ b) } \sum \frac{r_a}{a(b+c)} \geq \frac{3}{4R} .$$

Soluție.

$$\text{a) } \sum \frac{r_a}{a(b+c)} = \sum \frac{\frac{S}{p-a}}{a(b+c)} = S \sum \frac{1}{a(b+c)(p-a)} = \frac{p^4 + p^2(32R^2 + 4Rr + 2r^2) + r(4R+r)^3}{8p^2R(p^2 + r^2 + 2Rr)} .$$

$$\text{b) Folosind a) avem } \frac{p^4 + p^2(32R^2 + 4Rr + 2r^2) + r(4R+r)^3}{8p^2R(p^2 + r^2 + 2Rr)} \geq \frac{3}{4R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^4 + p^2(32R^2 + 4Rr + 2r^2) + r(4R+r)^3 \geq 6p^2(p^2 + r^2 + 2Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(5p^2 + 4r^2 + 8Rr - 32R^2) \leq r(4R+r)^3 .$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $5p^2 + 4r^2 + 8Rr - 32R^2 \leq 0$, inegalitatea este evidentă.Cazul 2). Dacă $5p^2 + 4r^2 + 8Rr - 32R^2 > 0$, folosim inegalitatea luiGerretsen: $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$(4R^2 + 4Rr + 3r^2) [5(4R^2 + 4Rr + 3r^2) + 4r^2 + 8Rr - 32R^2] \leq r(4R+r)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12R^4 - 26R^2r^2 - 37Rr^3 - 14r^4 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(12R^3 + 24R^2r + 22Rr^2 + 7r^3) \geq 0, \text{evident din}$$

inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$.Soluția a doua. Se folosește inegalitatea mediilor

$$\text{și } r_a r_b r_c = p^2 r, abc = 4pRr, \prod (b+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr) . \text{ Rămâne să arătăm}$$

$$\text{că } 2R^2 - 3Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R+r) \geq 0 , \text{evident din inegalitatea lui Euler: } R \geq 2r .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația 40.

$$\text{a) } \sum \frac{bc}{r_b + r_c} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 4Rr) + r(4R+r)^3}{4p^2R} ; \text{ b) } \sum \frac{bc}{r_b + r_c} \geq 6r .$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{bc}{r_b + r_c} = \frac{1}{S} \sum \frac{bc(p-b)(p-c)}{a} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 4Rr) + r(4R+r)^3}{4p^2R}.$$

$$b) \text{Folosind a) inegalitatea se scrie } p^2(p^2 + 2r^2 - 28Rr) + r(4R+r)^3 \geq 0.$$

Distingem cazurile: 1) Dacă $p^2 + 2r^2 - 28Rr \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

2) Dacă $p^2 + 2r^2 - 28Rr < 0$ inegalitatea se rescrie $p^2(28Rr - 2r^2 - p^2) \leq r(4R+r)^3$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să arătăm că $(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(28Rr - 2r^2 - 16Rr + 5r^2) \leq r(4R+r)^3 \Leftrightarrow$

$$4R^3 - 3R^2r - 9Rr^2 - 2r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(4R^2 + 5Rr + r^2) \geq 0, \text{ evident din Euler } R \geq 2r.$$

Aplicația 41.

$$a) \sum \frac{r_b + r_c}{bc} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}; \quad b) \sum \frac{r_b + r_c}{bc} \geq \frac{3}{R}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{r_b + r_c}{bc} = S \sum \frac{a}{bc(p-b)(p-c)} = pr \cdot \frac{R+r}{pRr^2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

b) Se folosește a) și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 42.

$$a) \sum \frac{r_b r_c}{a \cdot r_a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2}; \quad b) \sum \frac{r_b + r_c}{a \cdot r_a} \geq p \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \geq \frac{p}{2r} \geq \frac{p}{R}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{r_b r_c}{a \cdot r_a} = S \sum \frac{p-a}{a(p-b)(p-c)} = pr \cdot \frac{p^2 + r^2 - 12Rr}{4Rr^3} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Aplicația 43.

$$a) \sum \frac{a \cdot r_a}{r_b r_c} = \frac{4R(4R+r) - 2p^2}{pr}; \quad b) \sum \frac{a \cdot r_a}{r_b r_c} \geq \frac{9R^2}{2S} \geq \frac{9R}{p}.$$

Soluție.

$$a) \sum \frac{a \cdot r_a}{r_b r_c} = \frac{1}{S} \sum \frac{a(p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{1}{pr} \cdot [4R(4R+r) - 2p^2] = \frac{4R(4R+r) - 2p^2}{pr}.$$

b) Se folosește a), inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler.

Bibliografie:

1. D.M.Băținețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, Recreații Matematice, Nr. 1/2017.
2. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.

5. ALTE METODE DE REZOLVARE PENTRU PROBLEMELE DE LA ONM 2017

Profesor George-Florin Șerban, Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius", Brăila

Voi prezenta în continuare câteva soluții ale unor probleme date la Olimpiada Națională Matematică, 2017 diferite de cele din barem.

Problema 2, clasa a 7-a Se considera triunghiul ABC , în care $m(A)=90^\circ$, $m(B)=30^\circ$, iar D este piciorul înălțimii din A . Fie punctul $E \in (AD)$ astfel încât $DE=3AE$ și F piciorul perpendicularei din D pe dreapta BE .

a) Arătați ca $AF \perp FC$.

b) Determinați măsura unghiului AFB .

Soluție: a) Fie $BC=2a$. Din $T.30^\circ \Rightarrow AC=a$, din $T.$ Pitagora $AB=a\sqrt{3}$. În $\triangle ABC$, aplic T

catetei $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$, $CD = \frac{a}{2}$. În

$\triangle ABC$, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = AE + DE$,

$AE = \frac{AD}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, $DE = \frac{3AD}{4} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$. În $\triangle BED$ dr. aplic $T.$ Pitagora, $BE^2 = DE^2 + BD^2$,

$BE^2 = \frac{27a^2}{64} + \frac{9a^2}{4} = \frac{171a^2}{64}$, $BE = \frac{3a\sqrt{19}}{8}$. În $\triangle BED$ dr. aplic $T.$ catetei,

$EF = \frac{DE^2}{BE} = \frac{27a^2}{64} \cdot \frac{8}{3a\sqrt{19}} = \frac{9a}{8\sqrt{19}}$, $DF = \frac{DE \cdot BD}{BE} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{8}{3a\sqrt{19}} = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$,

$BF = \frac{DB^2}{BE} = \frac{9a^2}{4} \cdot \frac{8}{3a\sqrt{19}} = \frac{6a}{\sqrt{19}}$. În $\triangle AEF$, aplic $T.$ cosinusului,

$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2AE \cdot EF \cos(\angle AEF) = \frac{3a^2}{64} + \frac{81a^2}{64 \cdot 19} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{9a}{8\sqrt{19}} \cos(180^\circ - \angle DEF)$,

$AF^2 = \frac{138a^2}{64 \cdot 19} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{32\sqrt{19}} \cos(\angle DEF) = \frac{138a^2}{64 \cdot 19} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{32\sqrt{19}} \cdot \frac{9a}{8\sqrt{19}} \cdot \frac{8}{3a\sqrt{3}} = \frac{138a^2}{64 \cdot 19} + \frac{27a^2}{19 \cdot 32} = \frac{3a^2}{19}$.

În $\triangle DCF$, aplic $T.$ cosinusului, $FC^2 = DC^2 + DF^2 - 2DC \cdot DF \cos(\angle CDF)$,

$FC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{27a^2}{4 \cdot 19} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} \cos(180^\circ - \angle BDF) = \frac{46a^2}{4 \cdot 19} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{46a^2}{4 \cdot 19} + \frac{9a^2}{2 \cdot 19}$,

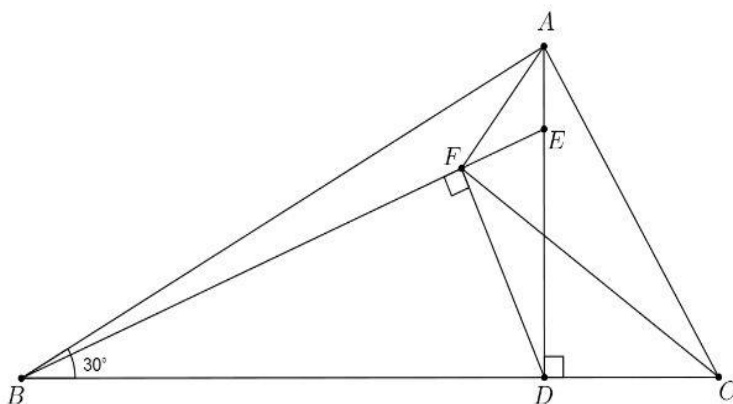
$FC^2 = \frac{16a^2}{19}$. In $\triangle AFC$, aplic R.T.Pitagora, $AF^2 + FC^2 = AC^2$, $\frac{3a^2}{19} + \frac{16a^2}{19} = a^2$, (A), deci

$m(\angle AFC) = 90^\circ$, $AF \perp FC$. b) In $\triangle AFB$, aplic T.cosinusului,

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \cdot BF \cos(\angle AFB), 3a^2 = \frac{3a^2}{19} + \frac{36a^2}{19} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{6a}{\sqrt{19}} \cos(\angle AFB),$$

$$57a^2 = 39a^2 - 12a^2\sqrt{3} \cos(\angle AFB), 12a^2\sqrt{3} \cos(\angle AFB) = -18a^2, \cos(\angle AFB) = \frac{-18}{12\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci}$$

$$m(\angle AFB) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$



Problema 1, clasa a 7-a. Fie multimea $M = \left\{ \frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \right\}$

a) Aratati ca multimea M nu contine nici un numar natural.

b) Determinati cel mai mic si cel mai mare element din multimea M.

Solutie: Notez $\overline{ba} = x, \overline{ab} = y, \Rightarrow 10b + a = x, 10a + b = y, -100b - 10a = -10x, 10a + b = y, \Rightarrow$

$$-99b = y - 10x, b = \frac{10x - y}{99}, \Rightarrow 10b + a = x, -100a - 10b = -10y, \Rightarrow -99a = x - 10y, a = \frac{10y - x}{99}.$$

$$m = \frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} = \frac{10y - x}{99x} + \frac{10x - y}{99y} = \frac{10}{99} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \frac{2}{99}. \text{ Dar } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2, \text{ (inegalitatea}$$

mediilor). Deci $m \geq \frac{10}{99} \cdot 2 - \frac{2}{99} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$, cel mai mic element din M este $\frac{2}{11}$.

$$\text{Deci } m = \frac{10}{99} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \frac{2}{99} \leq \frac{10}{99} \left(\frac{91}{19} + \frac{19}{91} \right) - \frac{2}{99} = \frac{10}{99} \cdot \frac{8642}{1729} - \frac{2}{99} = \frac{82962}{171171} = \frac{9218}{19019} = \frac{838}{1729}. \text{ Cel}$$

mai mare element din M va fi $\frac{838}{1729}$. Dar cel mai mic element din M si cel mai mare element din

M sunt numere subunitare rezulta ca toate elementele din M sunt numere subunitare, deci M nu contine numere naturale.

Problema 4, clasa a 8-a

Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$. Demonstrati inegalitatea:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$$

Solutie: $a \leq 1, b \leq 1 \Rightarrow a-1 \leq 0, b-1 \leq 0, \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0, ab - a - b + 1 \geq 0, \Rightarrow ab \geq a + b - 1.$

Arat ca $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} \leq 2.$

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} = a - \frac{ab}{1+b} + b - \frac{bc}{1+c} + c - \frac{cd}{1+d} + d - \frac{ad}{1+a},$$

$$a - \frac{ab}{1+b} + b - \frac{bc}{1+c} + c - \frac{cd}{1+d} + d - \frac{ad}{1+a} \leq a - \frac{ab}{2} + b - \frac{bc}{2} + c - \frac{cd}{2} + d - \frac{ad}{2},$$

$$a - \frac{ab}{2} + b - \frac{bc}{2} + c - \frac{cd}{2} + d - \frac{ad}{2} \leq a - \frac{a+b-1}{2} + b - \frac{b+c-1}{2} + c - \frac{c+d-1}{2} + d - \frac{a+d-1}{2} = 2.$$

Deci $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} \leq 2.$ Dar $a, b, c, d \in [0, 1]$, **rezulta** $abcd \leq 1.$ Adunam cele doua

inegalitati si obtinem inegalitatea ceruta $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$

Problema 3, clasa a 6-a

Daca pentru numerele naturale nenule a, b, c sunt adevarate inegalitatile $a > b > c$ si

$12b > 13c > 11a$, aratati ca $a + b + c \geq 56$.

Solutie: Din $a > b > c$ si $12b > 13c > 11a$, rezulta $a \geq b + 1 \geq c + 2$ si $12b \geq 13c + 1 \geq 11a + 2, \Rightarrow$

$13c \geq 11a + 1.$ Din $13c \geq 11a + 1$ rezulta $13c \geq 11(c + 2) + 1, c \geq 12.$ Din

$12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 12 + 1, 12b \geq 13 \cdot 12 + 1, \Rightarrow b \geq 14.$ Din $13c \geq 11a + 1$ rezulta

$13c \geq 11a + 1 \geq 11 \cdot (14 + 1) + 1, 13c \geq 166, \Rightarrow c \geq 13.$

Din $12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 13 + 1, 12b \geq 170, \Rightarrow b \geq 15.$

Din $13c \geq 11a + 1 \geq 11 \cdot (15 + 1) + 1, 13c \geq 177, \Rightarrow c \geq 14.$

Din $12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 14 + 1, 12b \geq 183, \Rightarrow b \geq 16.$

Din $13c \geq 11a + 1 \geq 11 \cdot (16 + 1) + 1, 13c \geq 188, \Rightarrow c \geq 15.$

Din $12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 15 + 1, 12b \geq 196, \Rightarrow b \geq 17.$

Din $13c \geq 11a + 1 \geq 11 \cdot (17 + 1) + 1, 13c \geq 199, \Rightarrow c \geq 16.$

Din $12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 16 + 1, 12b \geq 209, \Rightarrow b \geq 18.$

Din $13c \geq 11a + 1 \geq 11 \cdot (18 + 1) + 1, 13c \geq 210, \Rightarrow c \geq 17.$

Din $12b \geq 13c + 1 \geq 13 \cdot 17 + 1, 12b \geq 222, \Rightarrow b \geq 19.$

Deci $a \geq 20, b \geq 19, c \geq 17 \Rightarrow a + b + c \geq 20 + 19 + 17 = 56.$

Problema 1, clasa a 5-a

Fie numarul natural $n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2017}.$

a) Aratati ca 7^{2018} da prin impartire la 6 si prin impartire la 48 acelasi rest.

b) Aflati ultimele doua cifre ale numarului $6n.$

Solutie: a) $7^{2018} = (6+1)^{2018} = (M_6+1)^{2018} = M_6+1 = 6c_1+1$,

$7^{2018} = (7^2)^{1009} = (48+1)^{1009} = (M_{48}+1)^{1009} = M_{48}+1 = 48c_2+1$, rezulta ca 7^{2018} impartit la 6 si 48 da restul 1.

b) $7^4 = 2401$, $\Rightarrow (7^4 - 1) = 2400 : 100$. Calculez

$$6n = 6 \cdot 7 + 6 \cdot (7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2017}) = 42 + \frac{6 \cdot 7^2 \cdot (7^{2016} - 1)}{7 - 1} = 42 + 7^2 \cdot (7^{2016} - 1),$$

$$7^{2016} - 1 = (7^4)^{504} - 1 = (M_{100} + 1)^{504} - 1 = M_{100} + 1 - 1 = M_{100} = 100k.$$

$$6n = 42 + 7^2 \cdot (7^{2016} - 1) = 42 + M_{100}, \text{ deci ultimile doua cifre ale numarului } 6n \text{ sunt } 42.$$

6. PRINCIPII ȘI METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

Profesor Ioan Viorel Codreanu, Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

În rândurile care urmează vom face o scurtă prezentare a unor principii și metode de rezolvare a problemelor de matematică. Aceste principii și metode vor fi exemplificate prin probleme de tip olimpiadă, unele dintre ele folosite în concursuri naționale și internaționale sau apărute în reviste prestigioase de matematică.

1. Principiul parității. Divizibilitatea prin 2, cea mai simplă, furnizează primul criteriu de triere a numerelor naturale. Există numere care sunt divizibile prin 2, *numere pare*, și cele care nu sunt divizibile prin 2, *numere impare*. Mulțimea numerelor naturale poate fi partiționată în două submulțimi, mulțimea numerelor naturale pare și mulțimea numerelor naturale impare. Noțiunea de paritate, chiar dacă este de o simplitate dezarmantă, apare în soluțiile multor probleme, inclusiv ale unora care sunt destul de dificile. Rezolvarea problemelor din această temă este considerată un exercițiu în care spiritul de observație trebuie să vină în ajutorul rezolvitorului.

Problema 1. *Trei oameni au scris fiecare câte o sută de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au șters cuvintele care s-au găsit cel puțin de două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 45 de cuvinte, altul cu 68 iar al treilea cu 54. Să se demonstreze că cel puțin un cuvânt a fost scris de toți trei.*

Olimpiadă Moscova, 1996

Soluție. Să admitem că fiecare cuvânt șters a fost scris exact de doi oameni. Fiindcă ambii îl șterg, numărul cuvintelor șterse este par. Dar inițial numărul cuvintelor scrise a fost 300, par. Deci și numărul cuvintelor rămase ar trebui să fie par. Însă din problemă rezultă că a rămas un număr impar de cuvinte: $45 + 68 + 54 = 167$. Contradicție.

2. Metoda reducerii la absurd. Metoda reducerii la absurd se folosește în demonstrarea implicației $p \rightarrow q$. Presupunem concluzia q falsă și demonstrăm că această presupunere conduce la o contradicție. De exemplu, teorema care afirmă că există un număr infinit de numere prime se poate demonstra astfel: să presupunem, prin absurd, că există un număr finit de numere prime, fie acestea $p_1, p_2, \dots, p_n$. Să considerăm atunci numărul $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Numărul N nu se divide cu nici unul dintre numerele $p_1, p_2, \dots, p_n$ și atunci fie este număr prim, fie se divide cu un număr prim diferit de $p_1, p_2, \dots, p_n$. Oricum, rezultă existența unui număr prim diferit de $p_1, p_2, \dots, p_n$, absurd.

Problema 2. *Se știe că la un concurs dintre oricare patru participanți există cel puțin unul care este cunoscut cu ceilalți trei. Să se demonstreze că există cel puțin un participant, cunoscut cu toți ceilalți.*

Olimpiadă Moldova, 1997

Soluție. Presupunem că nu există nici un participant, cunoscut cu toți ceilalți. Fie un participant A . Există un participant B , cu care A nu este cunoscut. Luăm încă doi participanți arbitrari C și D dintre cei rămași. Dintre participanții A, B, C, D există unul, care îi cunoaște pe ceilalți trei.

Acesta nu poate fi nici A , nici B . Deci acesta este sau C , sau D . Rezultă că orice doi participanți C, D , diferiți de A și B , se cunosc. Printre orice participanți A, B, C, D este unul, de exemplu, C , care îi cunoaște pe A și B . Dar atunci C îi cunoaște pe toți participanții, contradicție cu presupunerea făcută.

3. Principiul cutiei. În forma sa cea mai utilizată, *Principiul cutiei* (sau *Principiul lui Dirichlet*) se enunță astfel: *Dacă $n+1$ obiecte sunt repartizate în n cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține mai mult de un obiect.* Dificultatea utilizării acestui principiu simplu și eficient constă în identificarea corectă a cutiilor și a obiectelor. O generalizare a *Principiului cutiei* este: *Dacă repartizăm $nk+1$ obiecte în n cutii, atunci există cel puțin o cutie cu cel puțin $k+1$ obiecte.*

Problema 3. *Într-o încăpere se află n persoane. Demonstrați că printre acestea se află două cu același număr de cunoștințe în acea cameră.*

Soluție. O persoană (obiect) merge în cutia i dacă are i cunoștințe. Avem n persoane și n cutii numerotate $0, 1, 2, \dots, n-1$. Dar cutiile 0 și $n-1$ nu pot fi ambele ocupate. De aici, există cel puțin o cutie cu mai mult de un obiect.

4. Numărarea în două moduri. O strategie importantă de rezolvare a problemelor este demonstrația prin exprimarea în două moduri a unor mărimi. De exemplu, prin exprimarea în două moduri a ariei triunghiului se poate afla înălțimea din vârful unghiului drept într-un triunghi dreptunghic.

Problema 4. *În fiecare din pătrățelele unui tabel dreptunghiular cu 4 linii și 5 coloane scriem câte un număr natural, astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie să fie aceeași și suma numerelor de pe fiecare coloană să fie aceeași (nu neapărat egală cu cea de linie). Fie S suma numerelor din tabel. Putem avea $S = 30$?*

Soluție. Fie S_l suma numerelor de pe linie. Calculând S în două moduri avem $S = 4S_l$, deci egalitatea $30 = 4S_l$ nu are loc.

5. Principiul includerii și excluderii. Este o generalizare a regulii sumei: el dă o relație prin care se poate calcula cardinalul reuniunii unor mulțimi finite, nu neapărat disjuncte. În cazul a două mulțimi, avem: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Problema 5. *Dintre cei 101 de dalmățieni, 56 au o pată neagră pe urechea stângă, 25 au pata pe urechea dreaptă, iar 29 au ambele urechi albe. Câți dalmățieni au pete negre pe ambele urechi?*

Soluție. Notăm cu S - mulțimea dalmățienilor cu pată neagră pe urechea stângă, D - mulțimea dalmățienilor cu pată neagră pe urechea dreaptă. Conform principiului includerii și excluderii avem $|S \cup D| = |S| + |D| - |S \cap D|$ și după înlocuire obținem $101 - 29 = 56 + 25 - |S \cap D|$, adică $|S \cap D| = 9$.

6. Principiul extremal. A rezolva o problemă cu ajutorul principiului extremal înseamnă a considera în raționament minimul sau maximul unei mulțimi finite ce apare în problema

respectivă, atunci când acesta există. Acest principiu are o largă aplicabilitate și conduce deseori la demonstrații foarte scurte. Următoarele două tipuri de mulțimi se pretează aplicării principiului extremal:

- mulțimile finite nevide de numere, care au atât un cel mai mare, cât și un cel mai mic element.
- submulțimile lui N , nevide, care au întotdeauna un cel mai mic element.

Problema 6. *Într-un turneu de șah, fiecare dintre jucători dispută câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Știind că nu se înregistrează nicio remiză și că fiecare participant obține cel puțin câte o victorie, demonștrăți că există un grup de trei șahiști A, B, C astfel încât A îl învinge pe B , B îl învinge pe C și C îl învinge pe A .*

Olimpiadă Irlanda, 2004

Soluție. (Titu Zvonaru) Fie $P_1, P_2, \dots, P_n$ șahiștii care participă la turneu și notăm cu a_i numărul învinsilor jucătorului P_i . Din ipoteza problemei, avem că $a_i \geq 1$, oricare ar fi $i = \overline{1, n}$.

Mulțimea finită $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ are un cel mai mic element; putem presupune că acesta este a_1 și fie $P_2, P_3, \dots, P_{a_1+1}$ șahiștii pe care îi învinge P_1 . Cum $a_1 \leq a_2$, există un participant P_k învins de către P_2 , unde $k \geq a_1 + 2$. Considerând $A = P_1, B = P_2$ și $C = P_k$, avem îndeplinită cerința problemei.

7. Principiul invarianților. Există o categorie de probleme propuse în care se dă un anumit obiect (sau mai multe obiecte) asupra căruia se efectuează anumite transformări. Se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări obiectul nu poate fi adus la o anumită formă. Acest lucru se poate face alegând o caracteristică a obiectului care nu se schimbă în urma acestor transformări. O astfel de caracteristică se numește *invariant*. Dacă obiectul final al problemei nu posedă această caracteristică, atunci el nu poate fi obținut în urma transformărilor descrise.

Problema 7. *În alfabetul limbii AO – AO sunt numai două litere: A și O. Limba satisface condițiile următoare: dacă se șterg literele vecine AO sau se introduc combinațiile OA sau AAO oriunde în cuvânt, obținem un cuvânt cu același sens. Sunt oare AOO și OAA sinonime?*

Soluție. Fie n_A, n_O numărul de A, respectiv O dintr-un cuvânt. După orice ștergere permisă diferența dintre numărul de A și numărul de O este $n_A - 1 - (n_O - 1) = n_A - n_O$, iar după orice introducere permisă diferența este $n_A + 1 - (n_O + 1) = n_A - n_O$ sau $n_A + 2 - (n_O + 2) = n_A - n_O$. Deci, diferența dintre numărul de A și numărul de O este un invariant. Pentru AOO ea este -1 , dar pentru OAA este 1 și aceste cuvinte nu sunt sinonime.

8. Probleme de colorare. „Ce sunt problemele de colorare?” vă întrebați, probabil. Acestea nu sunt probleme a căror rezolvare este să desenați și colorați un dinozaur, de exemplu. În problemele de colorare împărțim mulțimea de elemente considerate în submulțimi cărora le asociem diferite culori. O categorie de probleme se referă la table. Ele se rezolvă folosind un anumit mod de ”a colora” acele table. Nu se poate explica cum se colorează tablele, fiecare le colorează în modul pe care îl crede de cuviință, particular problemei, de aici frumusețea rezolvării. (Laura Georgescu-elevă)

Problema 8. *Poate fi acoperită tabla de șah cu dominouri 1×2 astfel încât pătrățelele a1 și h8 să rămână libere?*

Soluție. Nu se poate. Fiecare domino acoperă un pătrățel alb și unul negru, deci dominourile acoperă același număr de pătrățele albe și negre. Dar dacă pătrățelele a1 și h8 rămân libere, dominourile ar acoperi cu două pătrățele albe mai multe decât negre; contradicție.

9. Evaluare și exemplu. *Evaluare și exemplu* este o sintagmă folosită pentru a demonstra că un număr maxim (respectiv minimul) unei mulțimi. Trebuie arătat că acesta este mai mare sau egal (respectiv mai mic sau egal) cu toate elementele mulțimii – *evaluarea* - și apoi că aparțin mulțimii – *exemplu*.

Problema 9. *Avem un număr nemărginit de jetoane de opt culori. Stabiliți care este cel mai mic număr de jetoane care trebuie așezate în rând astfel încât, pentru oricare două culori diferite, să se găsească în rând două jetoane vecine având aceste culori.*

Ioan Viorel Codreanu, Recreații Matematice 2/2015

Soluție. Pentru o culoare fixată A , un jeton de culoare A trebuie să fie vecin cu jetoane de alte șapte culori. Cum un jeton nu are mai mult de doi vecini, în rând trebuie să existe măcar patru jetoane de culoare A ; analog pentru celelalte culori. În total, trebuie să avem măcar $4 \cdot 8 = 32$ jetoane. Un exemplu de așezare a 32 jetoane este următorul:

123456782468573152748361853472.

10. Jocuri. Considerăm jocuri pentru doi jucători A și B , care fac, pe rând, câte o mutare. Primul mută A , iar regulile sunt aceleași pentru A și B . Un jucător pierde atunci când nu mai poate face nici o mutare legală. A rezolvă jocul înseamnă a găsi o strategie de câștig pentru unul din jucători, sau a găsi o strategie ca jocul să se termine remiză. Un pas important în rezolvarea unui joc este să demonstrăm că el are sfârșit. Sunt jocuri (șahul, de exemplu) care pot continua la nesfârșit. De aceea, chiar dacă găsim o strategie prin care un jucător poate întotdeauna să mute sau să evite pierderea, trebuie să stabilim dacă jocul se va termina sau nu.

Problema 10. *Asterix și Obelix scriu, alternativ, numerele naturale 1,2,4,5,10,20,25,50,100 în căsuțele unui tablou 3×3 , fiecare număr câte o singură dată. Asterix începe și dorește ca, la final, să existe o linie și o coloană având produsele numerelor egale cu 1000; în caz contrar, câștigă Obelix. Care dintre jucători are strategie de câștig?*

Ioan Viorel Codreanu, Recreații Matematice 1/2016

Soluție. Asterix are strategie de câștig; el începe prin a scrie undeva numărul 10. Colorăm cu roșu cele două căsuțe rămase pe linia lui 10, cu galben cele două căsuțe rămase pe coloana lui 10 și lăsăm albe celelalte patru căsuțe. Grupăm numerele care mai trebuie scrise în perechi cu produsul 100: (1,100), (2,50), (4,25), (5,20). Indiferent ce joacă Obelix, Asterix va răspunde completând, pe aceeași culoare, cu celălalt număr din pereche. În acest fel, produsele numerelor de pe linia roșie și de pe coloana galbenă vor fi

11. Metoda inducției matematice. Inducția matematică este o metodă utilă și elegantă în demonstrarea unor afirmații care depind de mulțimea numerelor naturale. Fie $(P(n))_{n \geq 0}$ un șir de

propoziții. Metoda inducției matematice ne ajută să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, unde n_0 este un număr natural fixat.

Inducția matematică (forma slabă): *Presupunem că*

- $P(n_0)$ este adevărată;
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Problema 11. *Pe un traseu circular sunt n mașini. Împreună au exact atâta benzină cât i-ar trebui uneia să parcurgă un tur complet. Demonstrați că există o mașină care poate face un tur complet, luând de pe drum benzina celorlalte mașini.*

Soluția 1. (folosind metoda inducției matematice) Cazul $n=1$ este evident. Presupunem acum problema rezolvată pentru $k, k \geq 1$ și o demonstrăm și pentru $k+1$ mașini. În acest caz există o mașină A care poate ajunge la mașina următoare B (altfel nu am mai avea benzină pentru un tur complet). Să punem benzina lui B în rezervorul lui A și să eliminăm B . Avem astfel n mașini și benzină suficientă pentru un tur complet. Din ipoteza de inducție rezultă că există o mașină care poate face un tur complet. Atunci acea mașină poate face un tur complet și când pe drum există $n+1$ mașini. Într-adevăr, de la A la B îi ajunge benzina lui A , iar pe restul porțiunilor de drum are la dispoziție aceeași cantitate de benzină ca și în cazul a n mașini.

Soluția 2. (folosind principiul extremal) Să considerăm o mașină suplimentară care are în rezervor exact cantitatea necesară unui tur complet. Să presupunem că această mașină pornește dintr-un punct oarecare, ori de câte ori întâlnește una din celelalte mașini îi ia toată benzina, și se oprește după ce a efectuat un tur complet. Fie A punctul în care mașina suplimentară a avut cantitatea minimă de benzină. Atunci în A trebuie să fie o mașină. În acest caz, mașina din A poate face un tur complet.

Inducția matematică (cu pasul s): Fie s un număr natural fixat. Presupunem că

- $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+s-1)$ sunt adevărate;
- Pentru orice $k \geq n_0$, din faptul că propoziția $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+s)$ este adevărată.

Atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Problema 12. (Teorema Erdos-Suranyi) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ există $n \in \mathbb{N}$ și o alegere convenabilă a semnelor $+$ și $-$ astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2$.

Soluție. Se observă că este suficientă demonstrația pentru numere pozitive. Deoarece

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2, 1 = 1^2, 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, 3 = -1^2 + 2^2$$

și $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$ rezultă că $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4)$ sunt adevărate. Vom demonstra implicația $P(k) \rightarrow P(k+4)$. Avem identitatea: $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.

Presupunând $P(k)$ adevărată, adică $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2$ rezultă

$$k+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2$$

și deci $P(k+4)$ este adevărată deci $P(k)$ este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Probleme propuse:

1. Într-o școală, fiecare elev cunoaște un număr impar de colegi (dacă A îl cunoaște pe B , atunci și B îl cunoaște pe A). Demonstrați că numărul elevilor școlii este par.

Alessandro Ventulo, Milano, Gazeta Matematică 11/2015

2. La un concurs de matematică participă 100 de elevi, proba constând în găsirea răspunsului la trei întrebări. La sfârșitul concursului se constată că s-au primit, în total, 200 de răspunsuri corecte. Arătați că există 34 elevi care au răspuns corect la aceleași două întrebări.

Olimpiada Națională de Matematică, 2010

3. Pe pătrate diferite ale unei table de șah 8×8 se află 49 de ture. Demonstrați că putem alege șapte dintre ele care să nu se atace.

Ioan Viorel Codreanu

4. La o adunare a zeilor din Olimp, fiecare zeu a primit în cupa sa aceeași cantitate de ambrozie și are voie să toarne dincupa sa în cupa altui zeu, însă doar o cantitate de ambrozie egală cu cea pe care o are celălalt zeu. La sfârșitul adunării, toată ambrozia a ajuns în cupa lui Zeus. Demonstrați că numărul participanților a fost o putere a lui 2.

5. Într-o clasă a V -a sunt 28 de elevi. Dintre aceștia 16 joacă fotbal, 21 joacă tenis, iar 3 nu joacă nici fotbal, nici tenis. Câți elevi din clasă joacă atât fotbal cât și tenis?

6. În sistemul solar Câinele Verde sunt 2001 planete. Pe fiecare dintre aceste planete este câte un astronom care se uită prin telescop la planeta cea mai apropiată. Să se demonstreze că dacă distanțele reciproce dintre planete sunt diferite, atunci există o planetă la care nu se uită nimeni.

7. În Insula Culoilor există 13 cameleoni albaștri, 15 cameleoni galbeni și 17 cameleoni roșii. Când se întâlnesc doi cameleoni cu culori diferite, ei își schimbă culorile lor în cea de-a treia culoare. Este posibil ca la un moment dat toți cameleonii să aibă aceeași culoare?

8. Să se arate că o tablă 8×8 , din care eliminăm două colțuri opuse, nu poate fi acoperită cu dominouri 2×1 .

9. Pe un raft sunt 666 cărți de magie neagră și magie albă și oricare două cărți de magie albă nu sunt situate după 13 cărți (adică între ele nu pot fi 13 cărți). Care este cel mai mare număr de cărți de magie albă care pot fi pe raft?

Olimpiadă Moscova, 1998

10. Pe o masă se află 1000 de jetoane. Două persoane iau de pe masă, alternativ, de la 1 la 4 jetoane; câștigă persoana care ia de pe masă ultimul jeton. Care dintre jucători are strategie de a câștiga?

Ioan Viorel Codreanu, Recreații Matematice 1/2016

11. (Teorema lui Zeckendorf) Orice întreg pozitiv N se reprezintă în mod unic ca o sumă de termeni distincți și neconsecutivi ai șirului Fibonacci.
12. Să se demonstreze că orice pătrat poate fi descompus în orice număr de pătrate, mai mare decât cinci.

Bibliografie:

- [1] N. Agahanov, O. Podlipski, *Olimpiade matematice rusești Moscova 1993-2002*, Traducere Horea Banea, Editura Gil, 2004.
- [2] T. Andreescu, D. Andrica, *O introducere în studiul ecuațiilor diofantice*, Editura Gil, 2002.
- [3] I. Boreico, M. Teleucă, *Invarianți și jocuri*, Editura Gil, 2007.
- [4] I. Codreanu, M. Lascu, *Principii și metode de rezolvare a problemelor de matematică (broșură)*, Editura Gil, 2015.
- [5] I. Codreanu, M. Lascu, *Probleme de combinatorică. Evaluare și exemplu*, Editura Gil, 2016.
- [6] A. Engel, *Probleme de matematică. Strategii de rezolvare* (traducere de Mihai Bălună), Editura Gil, 2006.
- [7] L. Panaitopol, M. E. Panaitopol, M. Lascu, *Inducția matematică*, Editura Gil, 2001.
- [8] Colecția revistei *Gazeta Matematică*.
- [9] Colecția revistei *Recreații Matematice*.

7. CÂTEVA PROBLEME DE TEORIA NUMERELOR

Dimitriu Alina

Școala Gimnazială nr. 193, București

În școală, noțiunea de număr, noțiune fundamentală în matematică, se dezvoltă treptat în diferiți ani de studiu, urmărindu-se atingerea jaloanelor fixate pentru însușirea conținutului acestei noțiuni în ultimii ani ai liceului.

Problemele legate de teoria numerelor oferă un model de organizare a cunoștințelor, noțiunilor într-un sistem concentric cantitativ. În continuare, exemplific prin câteva probleme relevante.

1. Să se determine cel mai mic număr n care are 18 divizori naturali.

$$\text{Fie } n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1) = 18$$

$$\text{Pentru } k = 1 \text{ rezultă } n = p^{17}$$

$$\text{Pentru } k = 2 \text{ rezultă } (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow n = p^8 \cdot q \text{ sau } n = p^5 \cdot q^2$$

$$\text{Pentru } k = 3 \text{ rezultă } n = p^2 \cdot q^2 \cdot r, n \text{ minim este } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Nu putem $k \geq 4$ pentru că 18 nu se scrie ca produs de cel puțin 4 divizori supranaturali.

2. Determinați un număr par, știind că numărul divizorilor săi este 15 și suma lor este 5467.

Numărul n căutat, fiind număr par, are un factor prim egal cu 2. Deoarece $d(n) = 15 = 3 \cdot 5$, rezultă că n are cel mult doi factori primi: 2 și p , și aceștia sunt la puterile 2 și 4.

$$\text{Deci } n = 2^4 \cdot p^2 \text{ sau } n = 2^2 \cdot p^4$$

$$S(n) = 5467$$

$$\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^3 - 1}{p - 1} = 5467 \text{ sau } \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^5 - 1}{p - 1} = 5467$$

$$\text{Numai a doua ecuație are soluția } p = 5 \in \mathbb{N}. \text{ Deci } n = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$$

3. Să se arate că produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^{\frac{d(n)}{2}}$.

Divizorii sunt $d_1, d_2, \dots, d_k$ sau $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_k}$, ($k = d(n)$).

Atunci avem $P^2 = \prod_{i=1}^k d_i \cdot \prod_{i=1}^k \frac{n}{d_i} = n^{d(n)}$, unde $P = \prod_{d|n} d$.

Așadar $P = \prod_{d|n} d = n^{\frac{d(n)}{2}}$

4. În câte moduri se poate descompune un număr $n > 1$ în doi factori primi între ei?

Pentru $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ fie $A = \{1, 2, \dots, k\}$.

Dacă $M \subset A$, $M = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ se consideră factorii $d = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot p_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdot \dots \cdot p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$ și $\frac{n}{d}$.

Avem C_k^r posibilități și în total $\sum_{r=0}^k C_k^r = 2^k$ descompuneri.

5. Să se arate că pentru un număr natural $n \geq 2$, $\frac{\pi(n-1)}{n-1} < \frac{\pi(n)}{n}$ dacă și numai dacă n este prim ($\pi(n)$ = numărul numerelor prime mai mici decât n).

Dacă n este prim, atunci $\pi(n) = \pi(n-1) + 1$, deci $\frac{\pi(n)}{n} - \frac{\pi(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\pi(n-1)}{n-1} \right)$. Cum $\pi(k) < k$, pentru $k \geq 1$, deducem că $\frac{\pi(n)}{n} > \frac{\pi(n-1)}{n-1}$.

Să presupunem că $\frac{\pi(n-1)}{n-1} < \frac{\pi(n)}{n}$. Dacă n nu este prim, atunci el este compus și $\pi(n) = \pi(n+1)$ astfel am obține $\frac{1}{n-1} < \frac{1}{n}$, absurd.

Bibliografie

1. Panaitopol, L., Gica, A., *Aritmetica și teoria numerelor – probleme*, Editura Universității din București, 2006
2. Alexandru, V., Goșoniu, N., M., *Elemente de teoria numerelor*, Editura Universității din București, București, 1998

8. ASUPRA DESCOMPUNERII POLINOAMELOR IN PRODUS DE FACTORI IREDUCTIBILI.

Remus Felea,, Deva

Materialul acesta isi propune sa utilizeze o metoda pentru descompunerea in factori ireductibili a unor polinoame din $Z_n[X]$, $n=\text{numar prim}$, $n>1$. (Notam cu $0, 1, 2, \dots, n-1$, clasele de resturi modulo n). De exemplu, pentru rezolvarea unui tip de probleme de forma:

1. Sa se descompuna in produs de factori ireductibili, polinoamele:
 - a) $f=4X^4+2X^3+3$ din $Z_7[X]$,
 - b) $f=X^6+4X^5+2X^4+X^2+X+2$ din $Z_5[X]$.
2. Sa se arate ca polinomul f din $Z_3[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$ este ireductibil peste Z_3 .

Propozitie: Exista m din Z_n^* , astfel incat polinomul $X^p - X - m = 0$ nu are radacini in Z_n^* , unde p este numar natural, $p>1$, iar $n=\text{numar prim}$, $n>1$.

In caz contrar: Oricare ar fi m din Z_n^* , ecuatia $x^p - x - m = 0$ are cel putin o radacina in Z_n^* . De exemplu, $a^p = a+1$, $b^p = b+2, \dots, s^p = s+n-1$, $a, b, \dots, s$ din Z . Elementele $a, b, \dots, s$ sunt diferite doua cate doua, altfel, daca de exemplu $a=b$ atunci $1=2$ (imposibil). Atunci unul din elementele $a, b, \dots, s$ este 1, deci $1^p = 1+r$, rezultand $r=0$ (imposibil).

Teorema lui Kronecker: Oricare ar fi polinomul f din $Z_n[X]$, de grad mai mare ca zero, exista o extensie comutativa a lui Z_n in care f are o radacina.

Constructia acestei extensii-dupa E. Artin-este urmatoarea:

Notam cu K multimea expresiilor formale $f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_{p-1}u^{p-1}$, $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$, fiind elemente din Z_n , cu proprietatea ca u este radacina a ecuatiei $x^p - x - m = 0$.

Se inzeestreaza aceasta multime cu o structura de corp comutativ, astfel:

Daca $g(u) = b_0 + b_1u + b_2u^2 + \dots + b_{p-1}u^{p-1}$, cu toti b_i din Z_n , atunci :

1. $f(u) = g(u)$, daca si numai daca $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \dots, a_{p-1} = b_{p-1}$
2. $f(u) + g(u) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)u + \dots + (a_{p-1} + b_{p-1})u^{p-1}$,
3. $f(u)g(u) = \text{restul impartirii polinomului } f(u)g(u) \text{ la polinomul } P = u^p - u - m$

Rezolvarea exercitiilor propuse initial:

1a. Polinomul f nu are radacini in Z_7 . Consideram u o radacina a ecuatiei $x^2 = x + 1$, adica $u^2 = u + 1$. Se obtin, folosind schema lui Horner, radacinile $x_1 = 2u$, $x_2 = 2 + 5u$.

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	4	2	0	0	3
$X_1 = 2u$	4	$2+u$	$2+6u$	$5+2u$	0
$X_2 = 2+5u$	4	3	1	0	

Se observa ca polinomul f se divide cu polinomul $4X^2 + 3X + 1$.
Efectuand impartirea, se obtine: $f = (4X^2 + 3X + 1)(X^2 + 5X + 3)$.

1b. Pentru $u^3 = u + 2$, cu schema lui Horner, gasim:

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	4	2	0	1	1	
$X_1 = 3 + 3u^2$	1	$2 + 3u^2$	$3 + 3u + 4u^2$	$2 + 2u + 3u^2$	$4 + 4u^2$	$3 + 4u + u^2$	
$X_2 = 3 + 2u + 3u^2$	1	$2u + u^2$	$4 + 3u + 4u^2$	3	$3 + u + 3u^2$	0	
$X_3 = 4 + 3u + 4u^2$	1	4	0	3	0		

Obtinem, in final: $f = (X^3 + 4X^2 + 3)(X^3 + 2X + 4)$.

2. Considerand $u^2 = u + 1$, nici una din valorile $f(u) = a + bu$, $a, b \in \mathbb{Z}_3$, nu este radacina a lui f .

Bibliografie: 1. Constantin Meghea-Bazele analizei matematice-Editura stiintifica si enciclopedica, Bucuresti, 1977.
2. Ion D. Ion, Nicolae Radu-Algebra-Editura didactica si pedagogica, Bucuresti, 1975.

9. MATHMOISELLE – CONCURS DE MATEMATICĂ ÎN LIMBI MODERNE - INTERVIU IMAGINAR

Nicoleta Agenna MAZILU

Colegiul Național de Arte „Dinu Lipatti”, București

- Ce este *Mathmoiselle*?

Mathmoiselle este denumirea unui proiect național care are ca activitate centrală organizarea unui concurs de matematică în limbi moderne: engleză, franceză și germană.

În 2017 concursul împlinește 8 ani și a devenit deja popular printre elevii iubitori de matematică și limbi moderne.

- Cine este în spatele acestui concept?

Proiectul este bazat pe voluntariat. De la profesorii inițiatori și organizatori și până la profesorii evaluatori și coordonatori la nivelul școlii, toată activitatea este benevolă și animată de pasiune și bucuria de a face ceva pentru elevi. Concursul, organizat de **Liceul Teoretic Bilingv „Ita Wegman”** în parteneriat cu **Societatea de Științe Matematice din România**, cu aprobarea **Inspectoratului Școlar al Municipiului București**, se află în CAERI 20171321.

De coordonarea proiectului se ocupă, cu multă dedicație, două profesoare de matematică, prof. Roxana GOGA și prof. Agenna MAZILU. Societatea de Științe Matematice din România susține acest proiect, începând cu anul școlar 2010-2011. Pe site-ul oficial al Societății de Științe Matematice din România este promovat concursul, în fiecare an, la adresa www.ssmr.ro/mathmoiselle. Președintele comisiei de subiecte din cadrul acestui concurs este domnul profesor doctor Radu GOLOGAN. Comisia de subiecte este formată din profesori membri ai SSMR, cu o activitate didactică de excepție: Andrei ALEXANDRESCU, Crina BERCOVICI, Mihaela BERINDEANU, Elena CHIREA, Alina CIOVNICU, Andrei DOBRE, Leonard GIUGIUC, Roxana GOGA, Elena GRECU, Cristina HLEVCA, Ioana MAȘCA, Agenna MAZILU, Ancuța MITITEAN, Gabriela NAN, Adina OANCEA, Felician PREDA, Cristian RUSU, Diana TRAILESCU-GOGAN, Iuliana TRĂȘCĂ.

- Care este impactul concursului în rândul elevilor?

Statistic vorbind, la ediția din 2016 la Concursul Mathmoiselle s-au înscris un număr de **1652** de elevi din **57 de școli**, provenind din **20 de județe** ale țării și din Municipiul București.

Elevii ne-au trimis feedback-uri emoționante:

„De curând am avut prilejul de a participa la concursul „Mathmoiselle”, un concurs care se desprinde oarecum de tiparul competițiilor specifice de matematică. Sinceră să fiu, poate chiar acesta a fost motivul ce m-a determinat să mă înscriu.

Am găsit interesantă ideea îmbinării a două materii diferite; îți poți testa atât competențele matematice, cât și cele la nivel lingvistic, fiind nevoit să traduci dintr-o limbă străină enunțurile problemelor pentru a le rezolva mai apoi.

Consider că participarea la acest concurs mi-a adus doar beneficii și încurajări și îi îndemn și pe ceilalți elevi ai școlii, și nu numai, să încerce această experiență.”

Agachi Miruna, cl.a

VIIa A

„Concursul „Mathmoiselle” ne-a strâns anul acesta în bănci, cumiți și așteptând cu nerăbdare subiectele. Concursul valorifică interesul pentru matematică, munca și spiritul de inițiativă și motivația noastră. Participarea ne-a făcut să înțelegem mult mai bine că matematica este un limbaj universal.

De la Euclid și Arhimede și până în zilele noastre, ea a fost tărâmul unde barierile limbii devin fluide și unde toți folosim aceleași simboluri și ajungem la aceeași soluție. „Mathmoiselle” are tocmai rolul de a deschide și mai mult frontierele lingvistice și culturale, de a dezvolta pasiunea pentru știință, în special pentru matematică.

Pentru mine, experiența dobândită la acest concurs este una deosebită, tocmai în virtutea faptului că participarea la el m-a făcut să mă simt ca făcând parte din marea familie a elevilor din școlile participante, porniți împreună pe drumul fascinant al matematicii.”

Tudor Rebenciuc , cl

a VII a A

„Mathmoiselle”... mărturisesc că m-a intrigat acest nume, mai ales că era dat unui concurs în care matematica este „încifrată” într-o limbă străină. Dar, odată ce am participat la el, pot spune că a fost o încercare captivantă. M-a atras în mod deosebit faptul că, atât cunoștințele noastre matematice, cât și cele de înțelegere a unei limbi străine au fost puse la încercare ca într-un joc. Tot astfel, mi s-a părut interesant să descifrez logica matematică a unei probleme prezentată într-o altă limbă decât cea maternă.

Pe scurt, jos pălăria, „Mathmoiselle”! Te aștept cu nerăbdare și anul viitor!”

Mara Rebenciuc, cl.

a VI-a A

În ceea ce privește rezultatele din 2016, din 1652 de elevi înscriși au fost premiați 234 de elevi: 72 de premii I, 44 premii II și 118 premii III. S-au acordat și 118 mențiuni. Toți elevii care au luat premiul I au primit, pe lângă diploma de premiu, și un tricou inscripționat cu sigla concursului. Toate costurile legate de editarea și printarea diplomelor au fost suportate de Societatea de Științe Matematice din România.

Situație statistică premii

	NR. ELEV CLS. 5	NR. ELEV CLS. 6	NR. ELEV CLS. 7	NR. ELEV CLS 9 M1	NR. ELEV CLS 9 M2	NR. ELEV CLS. 10 M1	NR. ELEV CLS. 10 M2	NR. ELEV CLS. 11 M1	NR. ELEV CLS. 11 M2	TOTAL
	439	381	297	99	67	70	115	106	78	1652
TOTAL PREMII	46	43	55	13	12	8	28	13	16	234
PR. I	19	14	12	3	1	3	11	3	6	72
PR. II	7	4	4	5	6	2	8	3	5	44
PR. III	20	25	39	5	5	3	9	7	5	118

- "Personalitatea" unui concurs transpare din subiectele pe care acesta le propune elevilor.
Cum sunt structurate subiectele și ce nivel au ele?

Probabil că punctul forte a acestui concurs constă tocmai în modul atractiv în care sunt formulate subiectele. Am introdus ghicitori, probleme amuzante de logică, cu capcane, de decriptare a unui mesaj etc. Sunt 9 itemi, tip grilă, structurați pe trei categorii: **Probleme numerice** – exerciții prin care se testează "factorul numeric" al inteligenței, **Probleme de logică** – cerințe care verifică capacitatea de analiză a cazurilor care pot apărea, implică gândirea divergentă și creativitatea. A treia categorie de probleme este formată din **problemele de aplicare în practică** a noțiunilor studiate. Aici testăm competențele elevilor de a aplica matematica în viața cotidiană și de a soluționa diverse probleme cu caracter practic-aplicativ. În structurarea subiectului am avut în vedere ierarhia tradițională a proceselor gândirii din perspectiva lui Benjamin Bloom.

Cel mai mult le-au plăcut elevilor noștri problemele de logică, formulate clar și concis:

Exemplu clasa a V-a

• Michael has 3 parrots: Coco, Kiki and Riko, each of a different color, yellow, blue and orange, and of a different age, one, two and three years old. What is the name of the orange parrot and how old is it, if Riko is blue and it is not 2 years old where as Kiki is 3 years old and it is not yellow?

a). Riko, 2	b). Coco, 1	c). Kiki, 3	d). Riko, 1
-------------	-------------	-------------	-------------

Exemplu clasa a X-a

• Ioan, Vasile, Costin and George are four friends whose last names are Ionescu, Vasilescu, Georgescu and Costescu, but the initials of their first names are different from the initials of their last names. Ionescu and Vasilescu are black-eyed, George is blue-eyed, and Vasile is green-eyed. What are the complete names of the four friends?

a). IG, VI, GC, CV	b). IC, VI, GV, CG	c). IV, VI, GC, CG	d). IV, VC, GI, CG
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Pe elevii din clasele a IX-a și a XI-a i-au amuzat problemele de criptografie, chiar dacă acestea nu le-au adus cele mai bune punctaje.

• Exemplu clasa a IX-a

1. La cryptologie est la science des écritures secrètes, ayant comme objet la protection du secret des données ou des informations confidentielles à l'aide des systèmes cryptographiques. L'un des plus simples systèmes s'appuie sur l'algorithme de codification de César (le bien connu empereur romain) : le texte est construit avec les lettres de l'alphabet latin $A, B, \dots, Z$, et la clef de codification est représentée par un nombre entier $k \in \{1, 2, 3, \dots, 26\}$. On associe à chaque lettre du texte source l'ordre lexicographique x et ensuite, afin de réaliser la codification, cette lettre est remplacée par le caractère code $(x+k) \bmod 26$ (par mod 26 on prend le reste de la multiplication de $x+k$ a 26). Par exemple, on encode le mot *MATEMATICA* en utilisant cet algorithme avec la clef $k=9$ ainsi: a la lettre *M* correspond $x=13$, donc on encode en

$(13+9) \bmod 26 = 22$ et on continue dans la même manière, jusqu'au résultat VJCNVJCRLJ. En utilisant cet algorithme et avec la clef $k = 10$, encodez le message MATHMOISELLE.

a) VLOAVYCRUJJU b) WKDRWYSCOVVO c) ZWTSZJIASDDS d) WKDRYWSCOVVO

• Exemplu clasa a XI-a

Mircea und Vlad haben eine Leidenschaft: die Geheimcodes, das Codieren und Decodieren der Nachrichten. Dafür benötigen sie nur die Umkehrmatrix $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Je größer n ist, umso komplexer ist die Codierung der Nachrichten. Um die Rechnungen zu vereinfachen werden sie diesmal einen Matrix

$A \in M_3(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, aussuchen, welche Codierungsmatrix genannt wird.

Danach assoziieren sie jedem Buchstaben des Alphabets eine Zahl, wie auch den Zwischenräumen oder den Frage- und Ausrufezeichen, so wie folgt:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V		
W	X	Y																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	Z					?	!																
26	27	28	29																				

Sie wählen die Nachricht aus, die codiert werden muss, benutzen das oben Gegebene und ordnen jedem Buchstaben der Nachricht eine Zahl zu. Um jedoch die Rechnungen zu vereinfachen, werden sie die Zwischenräume zwischen den Wörtern entfernen.

I	M	A	G	I	N	A	T	I	O	N	I	S	M	O
RE	IM	PA	NT	TH	AN	KN	OW	LE	D	E				
9	13	1	7	9	14	1	20	9	15	14	9	19	13	15
.....														

Danach setzen sie die Zahlen senkrecht in eine Matrix mit drei Linien ein. Nun codieren sie nur die ersten 15 Buchstaben der Nachricht. Die erhaltene Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(Z).$$

Sie multiplizieren die Codierungsmatrix A mit der erhaltenen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 15 & 34 & 17 & 8 & 20 & 9 \\ 11 & 2 & 10 & 8 & 33 & 16 & 3 & 19 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 8}(Z)$$

und teilen die 15 erhaltenen Zahlen durch 29. So erhalten sie nur mit Hilfe der daraus

hervorgegangenen Ergebnisse eine neue Matrix:
$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Indem sie jeder Ziffer den entsprechenden Buchstaben assoziieren, erhalten sie:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \text{die} \quad \text{codierte} \quad \text{Nachricht} \quad \text{ist}$$

EYP?UQEDODRIFPU.

Um eine Nachricht zu decodieren werden die Zahlen senkrecht in eine Matrix gesetzt. Dann wird die Umkehrung der Codierungsmatrix bestimmt und links mit der Matrix der Decodierungsnachricht multipliziert. Die Werte der Produktmatrix werden durch 29 geteilt, indem man die Regeln der Division mit Rest (Dividend = Divisor x Quotient + Rest, wobei der Rest immer eine positive Zahl ist, unbedingt kleiner als der Divisor) befolgt.

Nun bitten euch Mircea und Vlad, dass ihr die letzten neun Buchstaben der Nachricht codiert, indem ihr die gleiche Codierungsmatrix verwendet und dass ihr das Wort ANSK UKJJ, welches 9 Zeichen enthält, decodiert. Die zwei Nachrichten sind:

a) UJGEKOKG , GEOMETRIE b) KVBJ!AFXE, PRIMAVARA c) UJGEKOKG , PRIMAVARA

d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.

1. Mircea și Vlad au o pasiune: codurile secrete, încifrarea și descifrarea mesajelor. Pentru aceasta, au nevoie doar de o matrice inversabilă $A \in M_n(Z)$. Cu cât n este mai mare, cu atât codarea mesajelor este mai complexă. De data aceasta, pentru simplitatea calculelor,

vor alege o matrice $A \in M_3(Z)$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, numită matrice de codare. Apoi,

asociază fiecărei litere din alfabet câte un număr, la fel și spațiilor sau semnelor de întrebare și exclamare, după cum urmează:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W		
X	Y																							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Z																								
26	27	28	29																					

Aleg mesajul care urmează a fi codat și folosind corespondența de mai sus, dau câte un număr fiecărei litere din mesajul ales. Totuși, pentru a-și ușura calculele, vor elimina spațiile dintre cuvinte.

I	M	A	G	I	N	A	T	I	O	N	I	S	M	O
9	13	1	7	9	14	1	20	9	15	14	9	19	13	15
.....														

Apoi, așază vertical numerele într-o matrice cu trei linii. Acum, aleg să codeze doar

primele 15 litere ale mesajului. Matricea obținută este $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(Z)$.

Înmulțesc matricea de codare A cu matricea obținută:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 15 & 34 & 17 & 8 & 20 & 9 \\ 11 & 21 & 08 & 33 & 16 & 3 & 19 & 0 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 8}(Z)$$

și împart cele 15 numere obținute la 29 și formează o nouă matrice doar cu resturile

rezultate: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}$. Asociind fiecărei cifre litera corespunzătoare, găesc:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}, \text{ iar mesajul codat este EYP?UQEDODRIFPU.}$$

Pentru a decripta un mesaj, se așază, la fel, vertical, numerele într-o matrice. Apoi se determină inversa matricei de codare și se înmulțește la stânga cu matricea mesajului de decriptat. Valorile din matricea produs sunt împărțite apoi la 29, respectând întocmai teorema împărțirii cu rest (deîmpărțitul = împărțitorul $\times$ câtul + restul, unde restul este întotdeauna un număr pozitiv, strict mai mic decât împărțitorul!).

Acum, Mircea și Vlad vă roagă ca, folosind aceași matrice de criptare, să criptați ultimele nouă litere ale mesajului și să decriptați următorul cuvânt de 9 caractere:

ANSK UKJJ. Cele 2 mesaje vor fi:

- a) UJGEKOKG , GEOMETRIE b) KVBJ!AFXE, PRIMAVARA c) UJGEKOKG , PRIMAVARA
d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.

- Un model de subiect, în limba engleză, la clasa a X-a, Mate-info

Calculus problems

- The modulus of the complex number $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2016}$ is equal to:
a) 2^{1008} b) 2^{-1008} c) $\sqrt{2}^{1008}$ d) $\sqrt{2}^{-1008}$
- The value of the product $P = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7+3\sqrt{5}}$ is:
a) $P = -3$ b) $P = -2$ c) $P = 1$ d) $P = 2$
- The value of the sum $S = \ln(\operatorname{tg}1^\circ) + \ln(\operatorname{tg}2^\circ) + \dots + \ln(\operatorname{tg}89^\circ)$ is:
a) $S = 1$ b) $S = -1$ c) $S = 0$ d) $S = 2$

Logical problems

- A student has to sit 4 exams in 10 days. In how many ways can these exams be scheduled, so that he sits one exam on the first day?
a) 2016 b) C_{10}^4 c) A_{10}^4 d) $4 \cdot C_9^4$

2. At a meeting of the students' council of a certain county, the participants, boys and girls, are seated round a big round table. It is known that: 9 of the girls have another girl seated to their right; 12 of the girls have a boy seated to their right; 3 out of 5 boys have a girl seated to their right. One of the students is randomly chosen to write the minute of the meeting. What is the probability of a girl being randomly selected?

a) $P = \frac{19}{35}$ b) $P = \frac{19}{41}$ c) $P = \frac{21}{35}$ d) $P = \frac{21}{41}$

3. Ioan, Vasile, Costin and George are four friends whose last names are Ionescu, Vasilescu, Georgescu and Costescu, but the initials of their first names are different from the initials of their last names. Ionescu and Vasilescu are black-eyed, George is blue-eyed, and Vasile is green-eyed. What are the complete names of the four friends?

- a) I.G., V.I., G.C., C.V. b) I.C., V.I., G.V., C.G. c) I.V., V.I., G.C., C.G.
d) I.V., V.C., G.I., C.G.

Practical applications

1. Out of 120 consumers of coffee, 70 drink it with sugar, 60 with cream, while 50 take both sugar and cream in their coffee. How many consumers of sugarless black coffee are there?

- a) 80 b) 40 c) 50 d) 100

2. The function $N(t) = 14e^{-0,0715t}$ estimates the amount of radioactive material (expressed in grams) decomposed after t days. Determine the number of days required for half the material to decompose. (It is known that $\ln 2 \approx 0,6931$)

- a) 8.9 days b) 9.1 days c) 9.6 days d) 8.5 days

3. Alex practices a competitive sport. At a very difficult tournament, his handball team has acquired the score p , where $p = p(n) = \left[(\sqrt{2})^{10-n} \cdot (\sqrt[3]{3}^n) \right]$, after each n -th match he has played (28 matches on the whole, played in tournament manner, which means that each team has played against all the other contesting teams). If $n = 1, 2, \dots, 10$ represents the number of matches played by the team of Alex and $[a]$ the set part of the real number a , then the number of teams participating to the tournament E and the number of points p acquired by the team of Alex after 7 matches are:

$$a) E = 8, p = 10 \quad b) E = 10, p = 10 \quad c) E = 8, p = 8 \quad d) E = 10, p = 8.$$

Arhiva cu subiectele din ediția 2016, precum și o broșură cu modele de subiecte, le puteți descărca de pe pagina www.ssmr.ro/mathmoiselle.

10. MATEMATICA - PUNTEA DE LEGĂTURĂ ÎNTRE DISCIPLINE

Udma Arleziana Emilia

Colegiul Tehnic „Anghel Saligny” ,Roșiorii de Vede, Teleorman

„Matematica se hrănește din întreaga cunoaștere umană și o afectează pe aceasta în întregime” – Solomon Marcus

Printre diversele discipline care definesc efortul de cunoaștere științifică a lumii înconjurătoare, matematica ocupă un loc central și special. Matematica este în general definită ca știința ce studiază relațiile cantitative, modele de structură, schimbare și spațiu.

În sens modern însă matematica reprezintă investigarea structurilor abstracte definite în mod axiomatic folosind logica formală.

Structurile anume investigate de matematică își au deseori rădăcinile în științele naturii, cel mai adesea în fizică. Matematica definește și investighează și structuri și teorii proprii, în special pentru a sintetiza și a unifica multiple câmpuri matematice sub o teorie unică, o metodă ce facilitează în general metode generice de calcul.

Nașterea disciplinelor "de graniță" și dezvoltarea cercetărilor interdisciplinare constituie unul din aspectele caracteristice ale dinamismului culturii contemporane, în care cele două tendințe opuse, aceea a specializării și aceea a sintezei, zguduie neîncetat clasificarea rigidă a științelor. Metodologia învățământului matematic aparține tocmai acestor discipline în devenire, a căror dezvoltare influențează neîncetat clasificarea rigidă a științelor. Dezvoltarea revoluționară a tehnicii pune și ea probleme speciale cercetării pedagogice asupra învățământului matematic. Pedagogia contemporană se găsește și astăzi într-o situație aproape paradoxală : tehnica oferă noi mijloace audio-vizuale: televiziune, calculatoare, iar, cercetarea pedagogică asupra utilității, posibilităților, aplicării, modului de folosire a acestor mijloace este întârziată. Ca urmare, aceste mijloace nu sunt suficient exploatate sau mai rău, se întâmplă ca și ele să fie folosite în mod nejust.

Potențialul interdisciplinar al matematicii constă nu numai în faptul că ea se află peste tot, că devine inevitabilă pentru orice disciplină, ci și pentru că legăturile dintre disciplinele nematematice sunt de multe ori realizate prin intermediul matematicii.

Matematica se comportă ca un catalizator în procesele de comunicare între disciplinele naturale și/sau sociale. Matematica le obligă astfel la o mai profundă cunoaștere reciprocă. Matematica a influențat toate celelalte domenii încă din cele mai vechi timpuri, stimulând de altfel și colaborarea lor.

În secolul trecut, matematica era încă predominant numerică, iar celelalte discipline cu excepția astronomiei și fizicii care erau de multă vreme beneficiare ale matematicii numerice, în special ale calculului diferențial și integral și ale teoriei ecuațiilor diferențiale, nu erau încă în măsură să folosească metodele și rezultatele analizei matematice.

Biologia, de exemplu a început să beneficieze de metodele teoriei ecuațiilor diferențiale, la sfârșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX, prin intermediul lui Vito Volterra, care a studiat lupta pentru existență dusă de diferite specii de animale.

Muzica a cunoscut una dintre primele analize numerice încă din antichitate, prin Pitagora. Numărul de aur care apare în problema împărțirii unui segment în două segmente inegale, astfel încât raportul dintre segmentul mare și cel mic este egal cu raportul dintre total și cel mare, a fost cunoscut încă din antichitate, fiind identificat în numeroase opere de arhitectură și sculptură. Mai târziu numărul de aur a fost corelat cu șirurile lui Fibonacci, stabilindu-se că șirul rapoartelor a doi termeni consecutivi din șirul lui Fibonacci converge către numărul de aur. O mare parte dintre fenomenele de creștere din lumea organică (botanică, anatomie) se desfășoară după șirul lui Fibonacci.

În secolul al XIX-lea, a atras o atenție deosebită legea lui Weber și Fechner, conform căruia omul percepe lumea înconjurătoare după o lege logaritmică, în sensul că senzația este logaritmul excitației, adică la un șir de excitații măsurabile aflate în progresie geometrică, senzațiile noastre de răspuns, presupuse și ele măsurabile variază în progresie aritmetică. În acest fel matematica a devenit relevantă chiar și în psihologie.

Legătura matematicii cu alte discipline e foarte profundă. Putem aminti legătura matematicii cu economia, de la aritmetica relativ simplă ce se găsește în registrele unei companii și până la previziunile de mare amploare ale unei economii naționale, matematica reprezentând fundația lumii bancare și a sistemelor de finanțe.

Studiul sistemelor de ecuații și inegalități permit demonstrarea, pe câteva exemple, a soluțiilor anumitor probleme economice care se raportează la programarea liniară. În același sens pot fi amintite și noțiunile de teoria probabilităților, de statistica, etc. Teoria probabilităților este

una din ramurile cele mai întinse ale matematicii cu reverberații interdisciplinare și studiul ei necesită aportul unui mare număr de noțiuni noi și neobișnuite. Elevul are nevoie de timp ca să se familiarizeze cu ele și iată de ce teoria probabilităților trebuie "topită" în mod organic în învățământ pentru a fi prezentă peste tot, de la prima la ultima clasă, pentru ca spiritul probabilist să fie pătruns profund de elevi. În această ordine de idei ar fi bine să se pună mai mult accent și pe grafice, folosirea metodelor aproximării, metodele interacție și procesele de trecere la limită.

Forța interdisciplinară a matematicii constă nu numai în generalitatea conceptelor și instrumentelor pe care ea le elaborează, ci și în tipul de gândire pe care matematica îl promovează, printre care gândirea analogică, gândirea combinatorică, gândirea algoritmică, gândirea probabilistică.

Întorcându-ne în societatea noastră, putem spune că *avem nevoie de oameni care să gândească interdisciplinar*, care să poată trece de la un domeniu la altul cu multă ușurință, iar școala este cea care ar trebui să-i pregătească. Un învățământ interdisciplinar poate să-i ajute pe elevi să privească lumea cu mai mult interes, să asimileze valorile fundamentale, să poată distinge mai ușor scopurile și mijloacele.

Învățarea integrată:

- este o formă de cooperare între discipline științifice diferite, care se realizează în principal respectând logica științelor respective;
- se referă și la transferul metodelor dintr-o disciplină într-alta, transfer cu grade diferite de implicare sau finalizare;
- reprezintă o modalitate de organizare a conținuturilor învățării, cu implicații asupra întregii strategii de proiectare a curriculumului, care oferă o imagine unitară asupra fenomenelor și proceselor studiate în cadrul diferitelor discipline de învățământ și care facilitează contextualizarea și aplicarea cunoștințelor dobândite;
- este o formă de cooperare între discipline diferite cu privire la o problemă, a cărei complexitate nu poate fi surprinsă decât printr-o convergență și o combinație prudentă a mai multor puncte de vedere.

Modelele structurale ale integrării curriculumului vizează aspecte complexe ca de exemplu:

- Predarea – învățarea prin corelarea obiectelor de studiu reprezintă elementul de noutate în lecții, care activează elevii, le stimulează creativitatea și contribuie la unitatea procesului instructiv – educativ, la formarea unui om cu o cultură vastă.

- Legătura dintre discipline se poate realiza la nivelul conținuturilor, obiectivelor, dar se creează și un mediu propice pentru ca fiecare elev să se exprime liber, să-și dea frâu liber sentimentelor, să lucreze în echipă sau individual.

- Intervenția profesorului determină corelații obligatorii prevăzute de programele școlare și impuse de logica noilor cunoștințe.

- Profesorii de discipline diferite ar trebui să realizeze planificări și proiecte de activitate didactică în comun, în raport cu unele criterii și principii pedagogice asumate de către toți.

- De asemenea profesorul ar trebui să aibă o bună cultură tehnică, să cunoască bine metodologia disciplinei sale, cât și a disciplinelor conexe, să lămurească elevul de existența reală a legăturii dintre discipline, astfel încât, elevul să fie conștient de existența interdisciplinarității/transdisciplinarității și respectiv, necesitatea învățării integrate.

Există două mari laturi ale matematicii: pură și aplicată. Matematica pură se ocupă numai de interesul său teoretic, pe când matematica aplicată dă metode și tehnică pentru a rezolva probleme științifice în afaceri și inginerie sau aplicații teoretice în știință.

Interdisciplinaritatea dintre matematică și științele naturii vizează aplicarea noțiunilor de procente, proporție, regula de trei simplă, inegalități ale mediilor, derivate, integrale, ecuații, sisteme de ecuații, matrici, funcții trigonometrice, combinatorică, teoria grupurilor, precum și multe alte noțiuni matematice fără de care elevul nu poate studia anumite legi și concepte în chimie, fizică sau în biologie. Elevii trebuie să fie învățați, prin studierea matematicii, să calculeze, să coreleze, să asocieze cunoștințele despre anumite procese, fenomene, într-un ansamblu unitar de cunoștințe.

Exemplu de temă care poate fi abordată integrat: *o întrebare simplă*: „Ce este un miliard ?” și variante de răspuns/abordări integrate (teme pentru proiecte interdisciplinare/transdisciplinare):

În secolul al XV – lea, limita extremă a calculelor posibile era milionul, care a rămas multă vreme o „expresie nebuloasă”. Trei sute de ani mai târziu, astronomii familiarizați cu imensitatea cerului aspirau la un număr și mai mare – miliardul, cu care să poată cataloga stelele

și aștrii. Un miliard (10^9) este un număr foarte mare dacă el exprimă, de exemplu un stoc de mere. În același timp reprezintă un număr destul de mic dacă este vorba de un număr de atomi.

Pentru a ne da mai bine seama ce înseamnă 1 000 000 000 iată câteva curiozități care-l au drept erou:

- Numărul fibrelor nervoase ale creierului uman este de ordinul a 3 miliarde;
- Un om care ar trăi o sută de ani nu ar ajunge să numere decât până la 1000000000, fără a mai avea altă ocupație;
- În 55 de ani, un om respiră de un număr de ori egal cu $\frac{1}{2}$ dintr-un miliard;
- În vârstă de 33 de ani, orice ființă a trăit doar un miliard de secunde.

Studiul judicios organizat al științelor naturii și al matematicii este apt să aibă asupra formării personalității tinerilor, o influență cu mult mai mare decât aceea care se observă în majoritatea cazurilor. Matematicienii pot ajuta prin mijloace care le sunt proprii, la înflorirea naturii umane. Și nu e vorba, mai ales sau numai de a dezvolta calități ale psihicului, ale caracterului, capacitatea de muncă și de apreciere critică a rezultatelor muncii proprii. Studiul matematicilor și al științelor naturii într-o măsură interdisciplinară poate dezvolta emoțiile umane dorința de a fi de folos semenilor. Matematica este creația geniului omului, creație la care au participat popoarele din toată lumea, și nu ne vom fi împlinit datoria noastră față de tânăra generație decât atunci când prin lecțiile noastre vom fi făcut pe copii să înțeleagă că știința este o cercetare fără sfârșit și fără granițe. Cercetarea cere o mare perseverență, o muncă și o energie deosebită. Această datorie va fi împlinită când îi vom fi făcut să resimtă ce curaj fără margini, ce dragoste de oameni, ce sacrificii se ascund sub rândurile laconice ale principiilor științifice ale formulelor și teoremelor.

În concluzie, se pot constitui cercuri/programe cu elevii, în cadrul cărora să se abordeze teme și/sau să se realizeze proiecte cu caracter integrat și se impune să găsim și să aplicăm o atitudine corectă și optimă față de aplicarea interdisciplinară și transdisciplinară a matematicii.

Note bibliografice

- [1.] Lucian Ciolan, *Învățarea integrată – fundamente pentru un curriculum transdisciplinar*, Editura Polirom, Iași, 2008
- [2.] Florin Cîrjan, *Didactica matematicii*, Editura Corint, București, 2007
- [3.] Ioan Cerghit, *Sisteme de instruire alternative și complementare – Structuri, stiluri și strategii*, Editura Polirom, Iași, 2008
- [4.] Geoff Petty, *Profesorul azi – Metode moderne de predare*, Editura Atelier Didactic, București, 2007

11.MODELAREA ȘI SIMULAREA ANTENEI NESIMETRICE ÎN FORMĂ DE L RĂSTURNAT (Γ)

Mihai Păunescu

Academia Forțelor Terestre "Nicolae Bălcescu" Sibiu
mihai_ovidiu_08@yahoo.com

Daniel Brînzei

Academia Forțelor Terestre "Nicolae Bălcescu" Sibiu
brinzeidaniel1993@yahoo.com

Coordonator științific: Lect.univ.dr. Iulian Bouleanu

Abstract: The article presents the construction of the antenna and its modeling and simulation. Simulation and modeling antenna Γ will be done with the program SuperNec. We analyze antenna in free space and influenced by the earth's surface, the radiation pattern for the frequency of 300 Mhz and the antenna gains for certain elevation angle and azimuth angle.

Keywords: antenna, modeling, simulation, radiation pattern, gain, angle.

1. Introducere

Antenele sunt componente ale tuturor sistemelor electronice care depind de spațiul liber ca mediu de propagare. Ele joacă un rol important în determinarea caracteristicilor sistemelor cărora le aparțin, comportându-se ca interfețe între spațiul liber, pe de o parte, și emițătoare sau receptoare, pe de altă parte.

Pentru realizarea unei linii de radiocomunicații de orice tip este necesar să existe un emițător, un receptor și instalațiile de antenă-fider, care realizează adaptarea acestora cu mediul prin care se propagă undele electromagnetice. Antenele se utilizează atât pentru radierea cât și pentru captarea undelor radio.

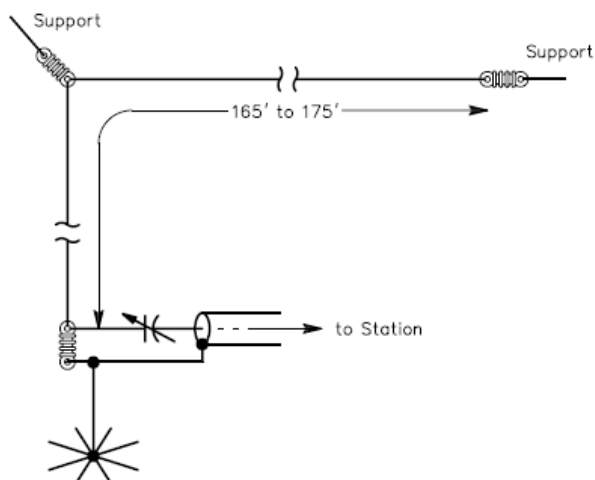
Denumirea de antenă vine de la cuvântul latin „antena” care înseamnă catarg, bară, tijă. În ultimii ani, antenele nesimetrice au devenit una dintre componentele vitale ale comunicațiilor mobile celulare și a rețelelor de internet din întreaga lume.

Având în vedere caracteristică de radiație a acestor antene, ele sunt ideale pentru aplicații mobile. Faptul că ele radiază de jur împrejur face ca să nu fie necesară poziționarea lor în timpul deplasării vehiculului.

Utilizarea antenelor nesimetrice în toate gamele de frecvență, construcția, instalarea și simplitatea, reprezintă un avantaj în alegerea și folosirea acestora.

2. Construcția Antenei în formă de L răsturnat (Γ)

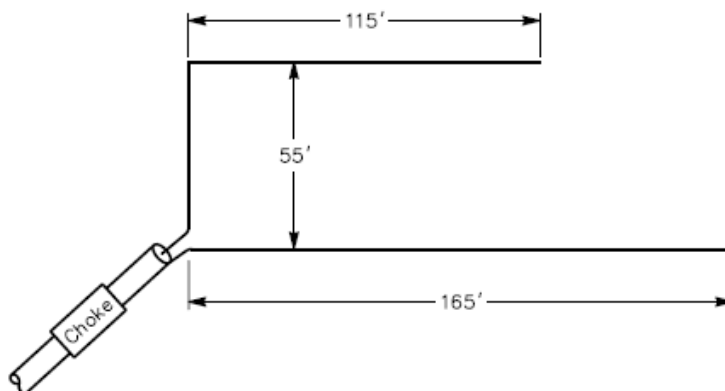
Antena Γ este prezentată în Fig.1 și este o antenă simplă și ușor de construit. Deoarece lungimea electrică în general este mai mare decât cea a unei antene $\lambda/4$, punctul de referință al rezistenței este de 50 Ω . Această reactanță este anulată de un condensator în serie.

Fig.1 Antena Γ

Pentru lungimea unei secțiuni verticale de 18 m și a unei secțiuni orizontale de 38 m, impedanța de intrare este de aproximativ $40 + j450\Omega$. O secțiune verticală sau orizontală mai mare ar crește impedanța de intrare. Digrama de radiație în plan orizontal este puțin asimetrică având o creștere de 1-2 db în direcția opusă linei orizontale.

Această antenă necesită un sistem bine îngropat cu elemente radiale suspendate. Este o formă a antenelor cu capacitate terminală spre vârf, aceasta fiind asimetrică. Rezultatul este atât o polarizare verticală cât și orizontală, deoarece curenții din partea de sus a cablului nu se anulează la fel ca în antena nesimetrică T. O bară din lemn sau metal atașată pe stâlp sau trei brațe pot fi utilizate pentru a susține secțiunea verticală. O rețea radială bine pusă la punct este necesară pentru rezultate bune, iar un mediu conducător bun de electricitate generează rezultate mai bune.

Dacă rețeaua radială ilustrată în Fig.1 nu este practică, este posibil să se utilizeze un element radial suspendat ca în Fig.2.

Fig.2 Utilizarea unui singur element radial suspendat pentru antena Γ

Impedanța de intrare pentru această figură este $Z_i = 50 + j465 \Omega$. Caracteristică de radiație în planul orizontal și vertical este prezentată în Fig.3 și Fig.4.

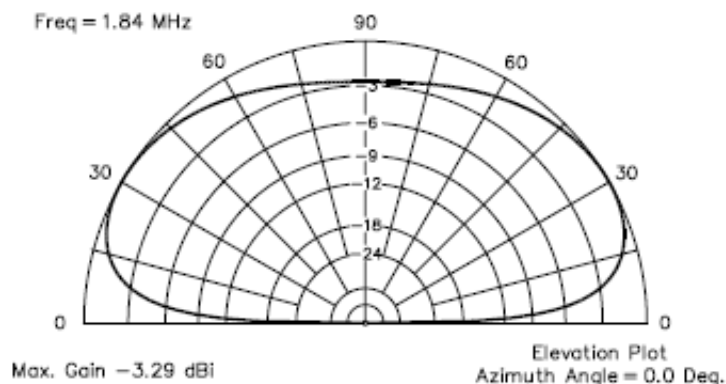


Fig.3 Caracteristica de radiație în planul vertical pentru antena L răsturnat cu un singur element radial

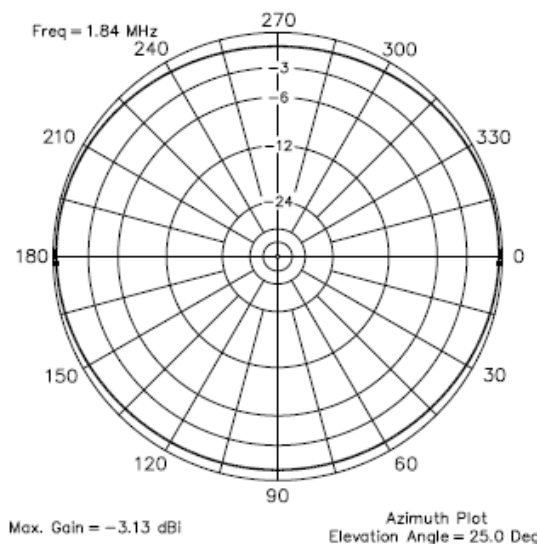


Fig.4 Caracteristica de radiație în planul orizontal pentru antena L răsturnat cu un singur element radial pentru un unghi de elevație de 25

3. Modelarea și simularea Antenei în formă de L răsturnat (Γ)

Simularea și modelarea antenei tip Γ se va realiza cu ajutorul programului SuperNEC. SuperNEC (Super Numeric Electromagnetic Code) este un program care utilizează metoda momentelor (MoM) și teoria geometrică uniformă a difracției (UTD) a antenelor. Totodată un program de simulare electromagnetică. Are la baza programul MATLAB cu ajutorul căruia este realizată o interfață grafică interactivă cu utilizatorul folosită pentru a simula geometria și a vizualiza rezultatele simulării.

- Modelarea antenei

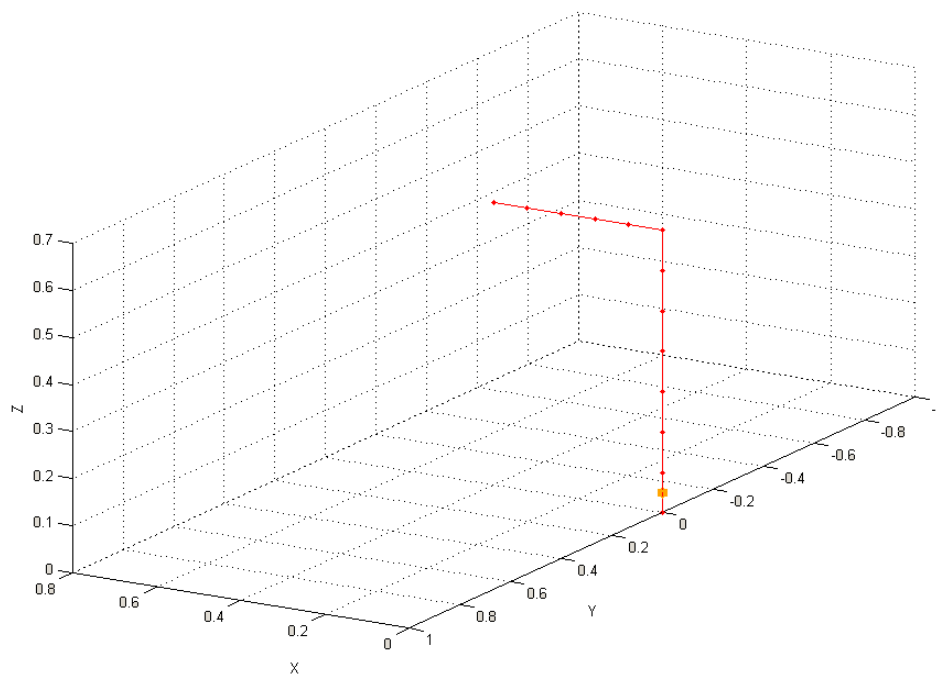


Fig.5 Antena Γ izolată în spațiul liber

- Caracteristica de directivitate 3D la frecvența de 300 Mhz:

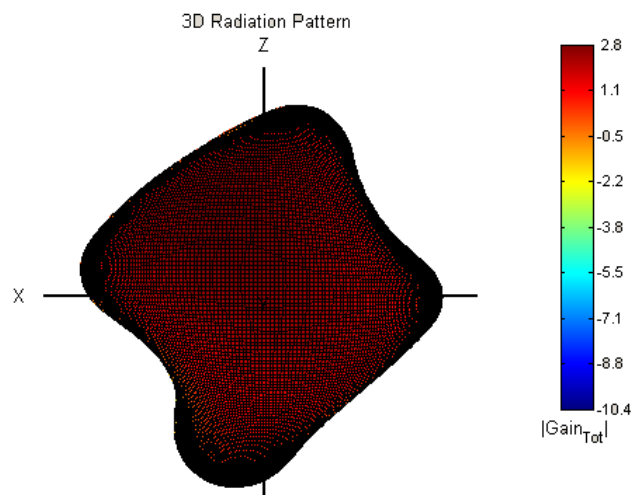


Fig.6 Caracteristica de radiație 3D a antenei Γ la 300 Mhz

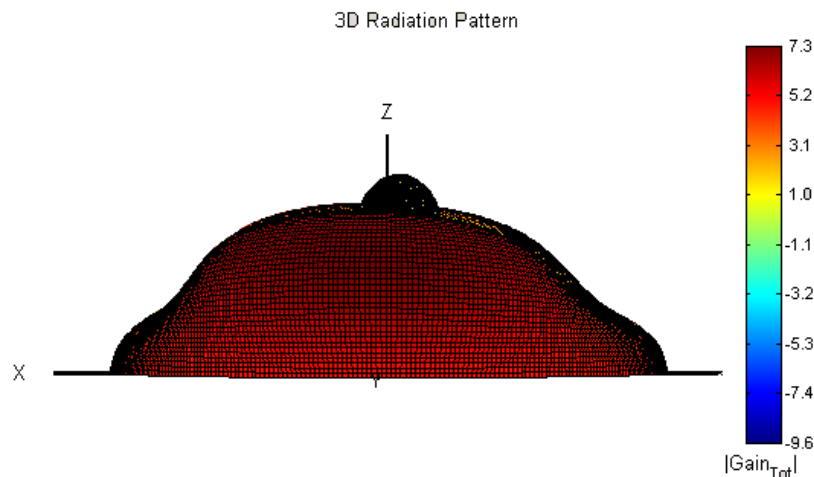


Fig.7 Caracteristica de radiație 3D a antenei Γ la 300 Mhz influențată de suprafața pământului

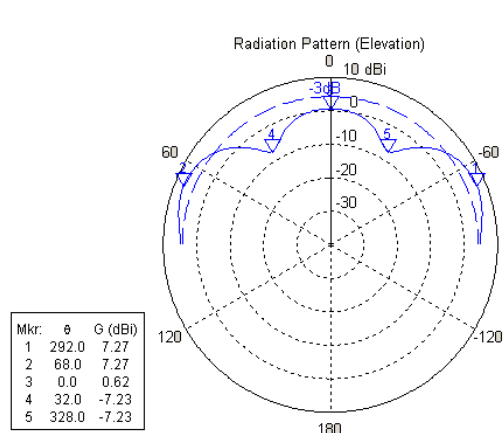


Fig. 8 Caracteristica de radiație 2D a antenei Γ la 300 Mhz pentru un unghi de elevație $\Phi=90^\circ$

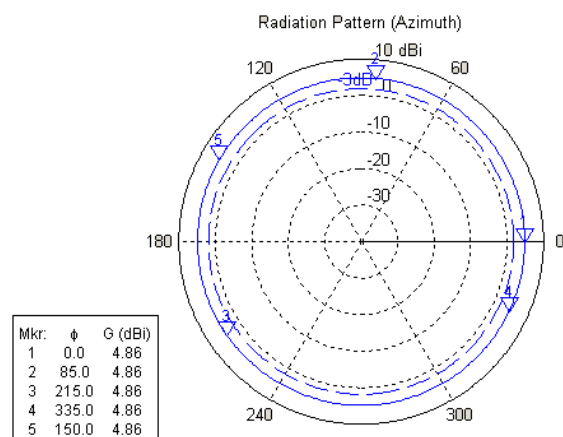


Fig.9 Caracteristica de radiație 2D a antenei Γ la 300 Mhz pentru azimut $\theta=90^\circ$

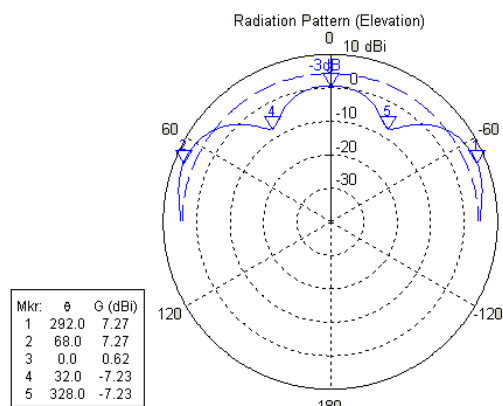


Fig.10 Caracteristica de radiație 2D a antenei Γ la 300 Mhz influențată de suprafața pământului pentru un unghi de elevație $\Phi=90^\circ$

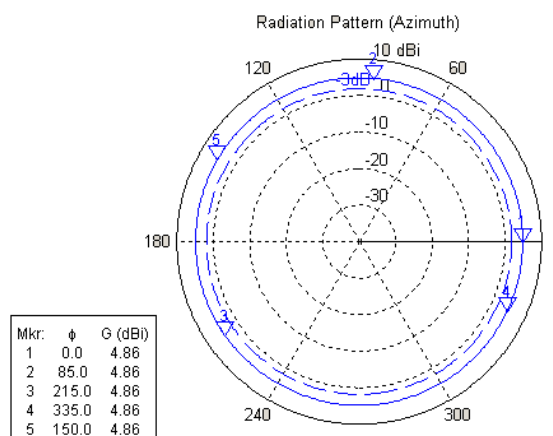


Fig.11 Caracteristica de radiație 2D a antenei Γ la 300 Mhz influențată de suprafața pământului pentru azimut $\theta=90^\circ$

Conform caracteristicilor de radiație 2D, pentru un unghi de elevație $\Phi=90^\circ$, câștigul maxim de 2.71 dBi se află la un azimut de 75° , iar valoarea minimă de -0.33dBi la un azimut de 0° . Pentru un azimut $\theta=90^\circ$, conform caracteristicii de radiație, câștigul de 2.5dBi se regăsește la un zenit de 90° , iar valoare minimă de -0.69dBi la un zenit de 180° .

Conform caracteristicilor de radiație influențate de suprafața pământului asupra antenei Γ , avem pentru un unghi de elevație $\Phi=90^\circ$ un câștig maxim de 7.27 dBi care se află la un azimut de 68° , iar valoarea minimă de -7.23dBi la un azimut de 32° . Pentru un azimut $\theta=90^\circ$, câștigul este de 4.86 dBi.

4.Concluzii

În urma studiului efectuat, influența pământului modifică caracteristica de radiație 3D a antenei și mărește considerabil câștigurile acestora.

În planul orizontal antenna nesimetrică nu prezintă proprietăți directive. Caracteristica de radiație 2D în planul orizontal este reprezentată de un cerc. La frecvența de 300 Mhz este observabilă apariția lobilor secundari.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

Autori străini:

1. Carr J.Joseph., *Practical Antenna Handbook, Fourth Edition*, Editura McGraw-Hill, 2001.
2. Colin Robert.E., *Antennas and Radiowave Propagation*, Editura McGraw-Hill, 1995.
3. Straw R.Dean., *The Arrl Antenna Book 18th Edition*, Editura Amer Radio Relay League, 1997.