

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

Iunie 2017

ISSN 2065-6432

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

www.mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII Iunie 2017 (EN/RO)... pag.2
Daniel Sitaru
2. METODE DE REZOLVARE – PROBLEMA LUNII MAI 2017 ... pag. 3
Buzea Gabriela
Alte rezolvări date de : Constantin Telteu, Biro Istvan, Marin Chirciu, Mihai Miculiță
3. DETERMINAREA LATURII UNUI TRIUNGHI ECHILATERAL CÂND SE CUNOSC
DISTANȚELE DE LA UN PUNCT INTERIOR AL SĂU LA VÂRFURI ... pag. 15
Constantin Telteu
4. DIN NOU DESPRE PROBLEMA 11945 DIN
THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY (AMM) ... pag. 17
Marius Drăgan și Neculai Stanciu
5. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 27313 DIN GAZETA MATEMATICĂ NR.12/2016 ... pag. 19
Marin Chirciu
6. ASUPRA UNEI PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICA ... pag. 25
Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban
7. INEGALITATEA STEVIN – BOTTEMA... pag. 28
Ioan Viorel Codreanu

1. PROBLEMA LUNII IUNIE 2017



Prof. Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin



Fie $VABC$ un tetraedru regulat. Dacă $AB=a > 0$, $M \in [VA]$; $N \in [VC]$;
 $MN \parallel AC$; $MN = x \in [0, a]$, găsiți volumul piramidei $VBMN$ în funcție de a și x .



Let $VABC$ be a regular tetrahedron. If $AB = a > 0$, $M \in [VA]$; $N \in [VC]$;
 $MN \parallel AC$; $MN = x \in [0, a]$ then find the volume of $VBMN$ depending on a, x .

If you solve the problem, you can post your solution sending it by email to revista@mateinfo.ro.

Deadline 01.07.2017.

2. METODE DE REZOLVARE - PROBLEMA LUNII MAI 2017



Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AA' = 6$ cm. Fie un punct P în interiorul triunghiului $A'B'C'$ astfel încât $PA = 4\sqrt{3}$, $PB = 6\sqrt{2}$ și $PC = 2\sqrt{21}$. Să se calculeze $\tan(\angle(A'B'C'), (PBC))$.



Given the right triangular prism $ABCA'B'C'$ with the equilateral triangle ABC as its base, its height $AA' = 6$ cm and P a point inside the triangle $A'B'C'$ so that $PA = 4\sqrt{3}$, $PB = 6\sqrt{2}$ and $PC = 2\sqrt{21}$. Calculate $\tan(\angle(A'B'C'), (PBC))$.

Autor: Prof. Buzea Gabriela, Școala Gimnazială Nr. 56, București

Soluție autor:



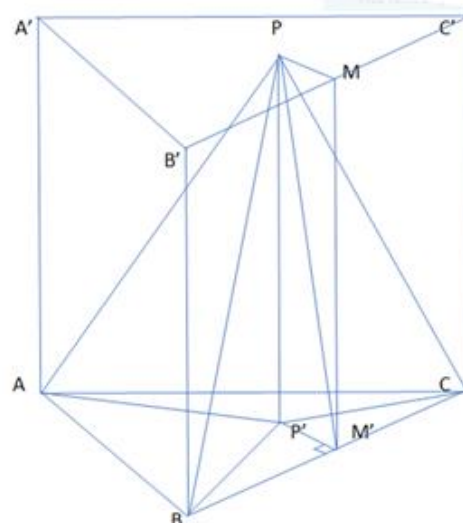
Fie $PP' \perp (ABC)$, $P' \in (ABC)$, rezultă că triunghiurile $PP'A$, $PP'B$ și $PP'C$ sunt triunghiuri dreptunghice în P' .

Folosind teorema lui Pitagora, aflăm $AP' = 2\sqrt{3}$, $BP' = 6$ și $CP' = 4\sqrt{3}$.

Pentru a afla latura bazei prisme, după cum bine se știe, facem o rotație de 60° a triunghiului ABC în jurul punctului B , astfel încât punctul A vine peste C , $C \rightarrow C_1$ și $P' \rightarrow P'_1$.

Rezultă că $BP' = BP'_1 = 6$ cm, $AP' = CP'_1 = 2\sqrt{3}$ cm.

Cum $m(\angle P'BP'_1) = 60^\circ$ și $BP' = BP'_1 = 6$ cm rezultă că triunghiul $BP'P'_1$ este echilateral, deci $P'P'_1 = 6$ cm.



În triunghiul $P'CP'_1$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, $m(\angle P'P'_1C)=90^0$, iar conform reciprocei teoremei $\angle$ de 30^0 , $m(\angle P'_1P'C)=30^0$ deci $m(\angle BP'C)=90^0$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $BP'C$, aflăm lungimea laturii bazei, $BC=2\sqrt{21}$ cm.

Unghiul diedru dintre planele $(A'B'C')$ și (PBC) este egal cu unghiul dintre planele (ABC) și (PBC) .

Dacă $PP' \perp (ABC)$, se construiește $P'M' \perp BC$, $M' \in BC$, $P'M' \subset (ABC)$ și rezultă

conform teoremei celor trei perpendiculare că $PM' \perp BC$.

Cum $(PBC) \cap (ABC) = BC$

$$PM' \perp BC, PM' \subset (PBC)$$

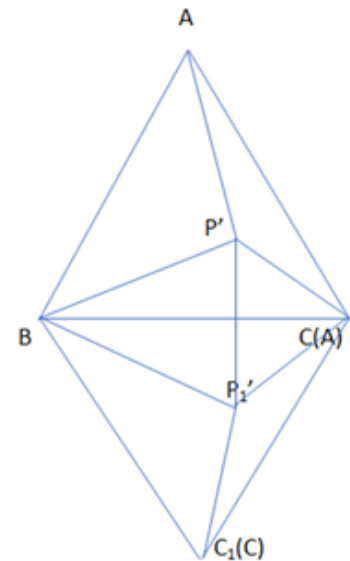
$$P'M' \perp BC, P'M' \subset (ABC)$$

$$PM' \cap P'M' \cap BC = \{M'\}$$

rezultă că $\text{tg}(\angle(ABC), (PBC)) = \text{tg}(\angle(PM', P'M')) = \text{tg}(\angle(PM'P'))$.

În triunghiul $P'BC$, dreptunghic în P' , $P'M'$ este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei și obținem $P'M' = \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

$$\text{Deci, } \text{tg}(\angle(PM'P')) = \frac{PP'}{P'M'} = \frac{6}{\frac{12\sqrt{7}}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$



Author's solution:



If $PP' \perp (ABC)$, $P' \in (ABC)$, it results triangle $PP'A$, $PP'B$ and $PP'C$ its right triangle in P' .

Using Pythagorean theorem, find $AP' = 2\sqrt{3}$, $BP' = 6$ and $CP' = 4\sqrt{3}$.

For finding base side, the triangle ABC rotates 60^0 around the point B , so that point A goes over C , $C \rightarrow C_1$ and $P' \rightarrow P'_1$.

It results that $BP' = BP'_1 = 6$ cm, $AP' = CP'_1 = 2\sqrt{3}$ cm.

Because $m(\angle P'BP'_1)=60^\circ$ and $BP'=BP'_1=6$ cm it results triangle $BP'P'_1$ is an equilateral triangle, so $P'P'_1=6$ cm.

According to the Pythagorean theorem reciprocal,

$m(\angle P'P'_1C)=90^\circ$, and under reciprocal theorem angle 30° , $m(\angle P'_1P'C)=30^\circ$.

So, $m(\angle BP'C)=90^\circ$.

Applying Pythagoras' theorem in the triangle $BP'C$, we find base side length, $BC=2\sqrt{21}$ cm.

The dihedral angle between planes $(A'B'C')$ and (PBC) is equal to the angle between planes (ABC) and (PBC) .

If $PP' \perp (ABC)$, we build

$P'M' \perp BC$, $M' \in BC$, $P'M' \subset (ABC)$ and it results

$PM' \perp BC$, according to the three perpendicular theorem.

So $(PBC) \cap (ABC) = BC$

$PM' \perp BC$, $PM' \subset (PBC)$

$P'M' \perp BC$, $P'M' \subset (ABC)$

$PM' \cap P'M' \cap BC = \{M'\}$

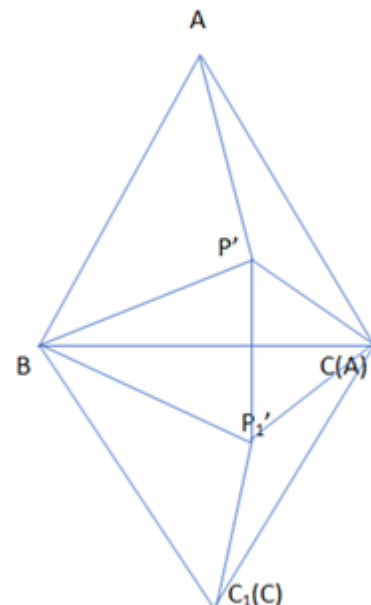
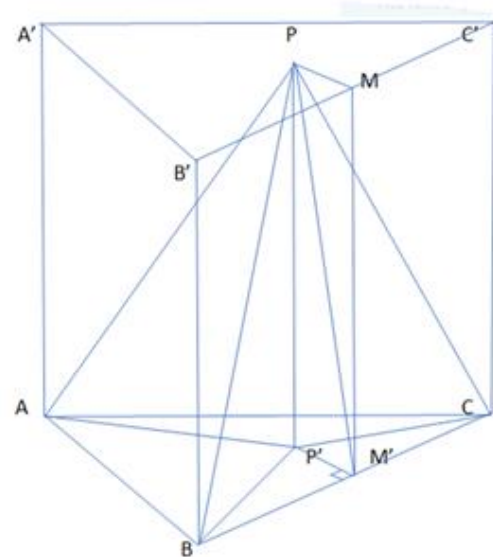
It results that

$\text{tg}(\angle(ABC), (PBC)) = \text{tg}(\angle(PM', P'M')) = \text{tg}(\angle(PM'P'))$.

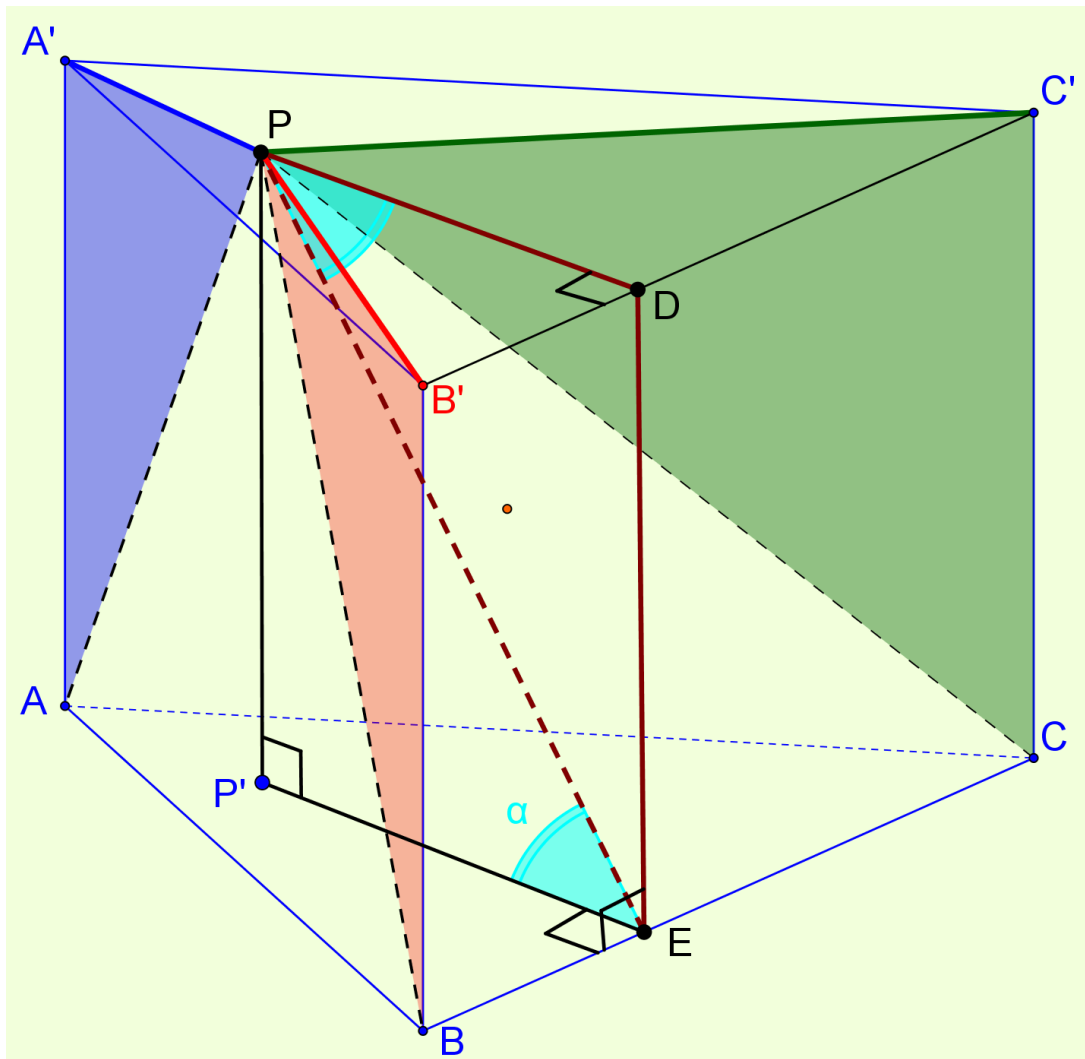
In right triangle $P'BC$, $m(\angle BP'C)=90^\circ$, $P'M' = \frac{BP' \cdot P'_1C}{BC}$,

$P'M' = \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

So, $\text{tg}(\angle(PM'P')) = \frac{PP'}{P'M'} = \frac{6}{\frac{12\sqrt{7}}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.



1. Prof. Constantin Telteu, C.N.A. „Regina Maria”, Constanța



Fie $P' = pr_{(ABC)}P$ și $[DE] = pr_{(BCC)}[PP']$. Unghiul cerut este cel notat cu α în figura de mai sus. Deci $m((PBC), (A'B'C')) = m(DPE) = m(PEP')$.

$$PA' = 2\sqrt{3}; PB' = 6; PC' = 4\sqrt{3}.$$

6

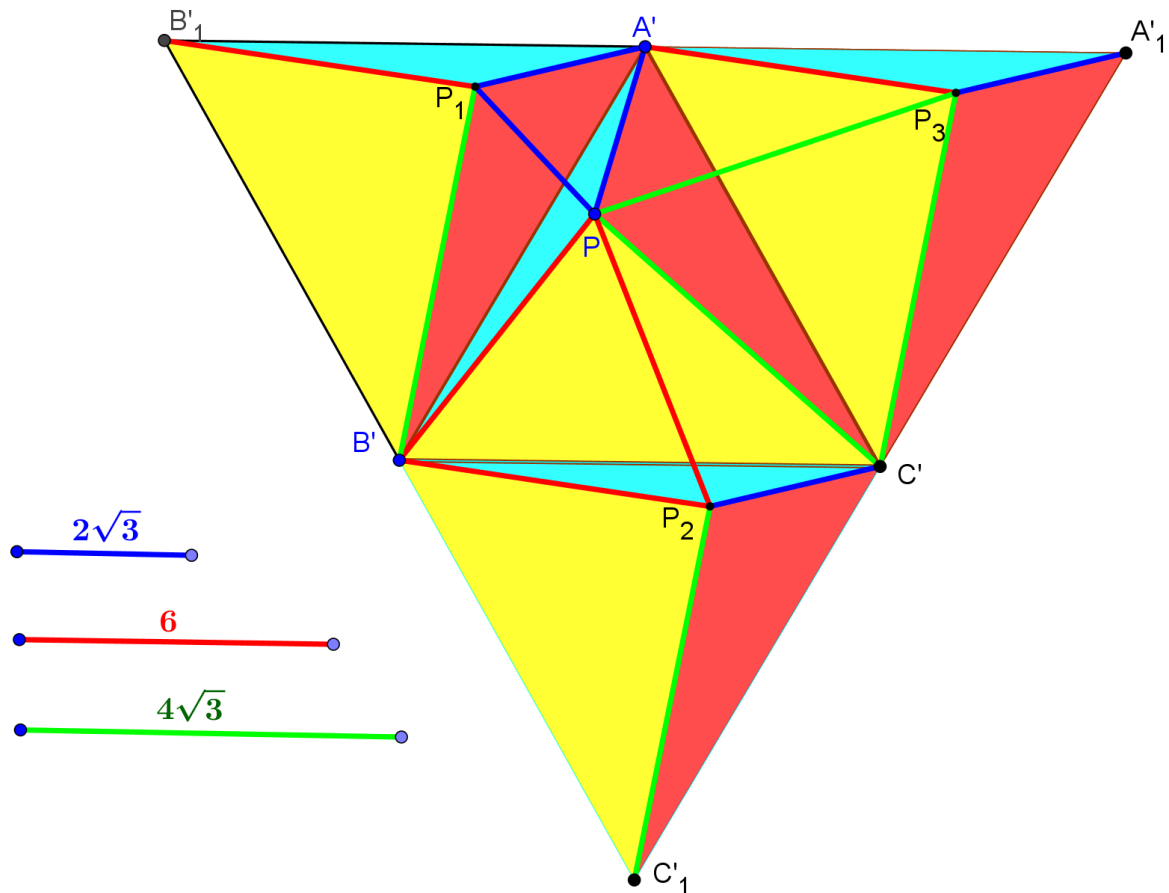


Fig.2

În această figură, triunghiurile $A'PP_1$, $B'PP_2$, $C'PP_3$ sunt echilaterale, iar $\Delta A'PP_3 \equiv \Delta B'PP_1 \equiv \Delta C'PP_2$.

Observăm acum că:

$$A_{[A'P_1B'P_2C'P_3]} = A_{[A'PP_1]} + A_{[C'PP_3]} + A_{[B'PP_2]} + 3 \cdot A_{[B'PP_1]}; \quad (1)$$

Pentru $A_{[B'PP_1]}$, folosim formula lui Heron.

$$p = \frac{2\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3}}{2} = 3 + 3\sqrt{3}.$$

$$A_{[B'PP_1]} = \sqrt{(3 + 3\sqrt{3})(3 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} - 3)(3 - \sqrt{3})} = 6\sqrt{3}.$$

$$A_{[A'PP_1]} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}; \quad A_{[C'PP_3]} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}; \quad A_{[B'PP_2]} = 9\sqrt{3}.$$

Înlocuim în (1) și

$$\text{obținem: } A_{[A'P_1B'P_2C'P_3]} = 3\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 3 \cdot 6\sqrt{3} = 42\sqrt{3}.$$

Tot din fig.2, urmărind culorile suprafețelor triunghiulare, observăm că

$$A_{[A'B'B_1P_2C'B_3]} = 2 \cdot A_{[A'B'C]}, \text{ deci } 42\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{A'B'^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'B' = 2\sqrt{21}.$$

Pentru determinarea lui PD, îl exprimăm de două ori cu teorema lui Pitagora (vezi fig.3):

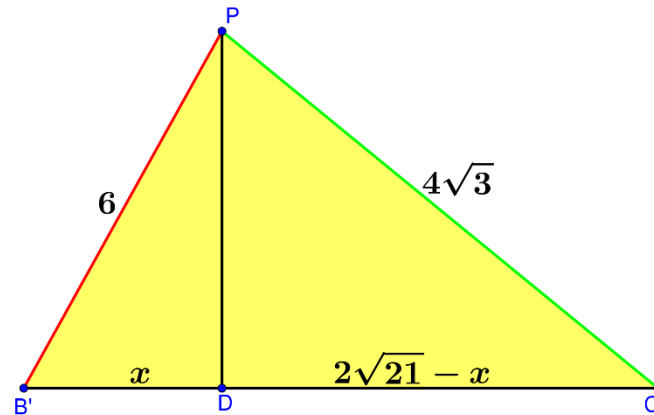


Fig.3

$$PD^2 = 36 - x^2 = 48 - (2\sqrt{21} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{18}{\sqrt{21}} \Rightarrow PD^2 = 36 - \left(\frac{18}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{144}{7} \Rightarrow PD = \frac{12}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}((PBC), (A'B'C')) = \frac{DE}{PD} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

2. Prof. Biro Istvan

Dacă Q este proiecția lui P pe (ABC) și $QM \perp BC$ atunci

$$\text{tg}(\sphericalangle(A'B'C'), (PBC)) = \text{tg}(\sphericalangle PMQ) = \frac{PQ}{QM}. \text{ Pentru}$$

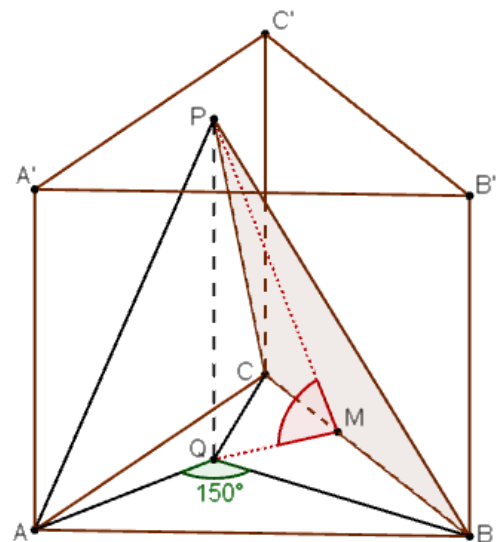
a calcula QM putem observa că

$$QC^2 = PC^2 - PQ^2 = 84 - 36 = 48$$

$$QA^2 = PA^2 - PQ^2 = 48 - 36 = 12$$

$$QB^2 = PB^2 - PQ^2 = 72 - 36 = 36$$

și conform **lemei** rezultă că $m(\sphericalangle AQB) = 150^\circ$ iar din teorema cosinusurilor aflăm lungimile laturilor triunghiului ABC $AB = BC = CA = a = 2\sqrt{21}$.

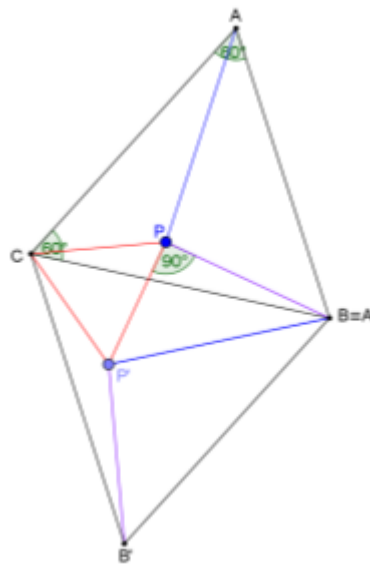


În consecință $QM = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-QB)(p-QC)} = \frac{12}{\sqrt{7}}$ și

$tg(\sphericalangle(A'B'C'), (PBC)) = tg(\sphericalangle PMQ) = \frac{PQ}{QM} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, unde p este semiperimetrul triunghiului BQC .

Lemă: Dacă în interiorul triunghiului echilateral ABC considerăm un punct P astfel ca $PA^2 = PB^2 + PC^2$ atunci $m(\sphericalangle BPC) = 150^\circ$.

Demonstrația lemei: Rotația triunghiului ABC cu 60° în jurul punctului C în sensul acelor de ceas transformă punctele A, B, P în A', B', P' astfel ca $\triangle CPP'$ devine echilateral iar având în vedere relația din enunț $\triangle BPP'$ devine dreptunghic în P , de unde rezultă concluzia cerută.



3. Prof. Marin Chirciu

Fie P' proiecția ortogonală a punctului P pe planul (ABC) .

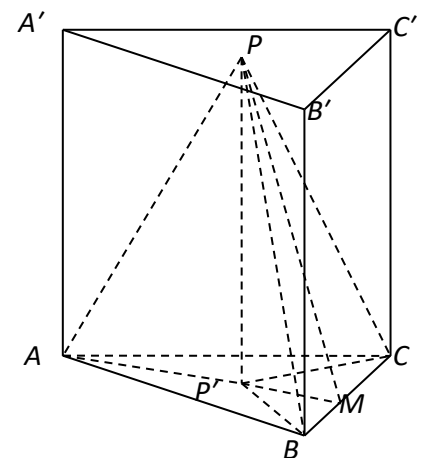
Avem $PP' = 6$, $PA = 4\sqrt{3}$, $PB = 6\sqrt{2}$, $PC = 2\sqrt{21}$.

Cu teorema lui Pitagora obținem $P'A = 2\sqrt{3}$, $P'B = 6$, $P'C = 4\sqrt{3}$.

Fie l lungimea laturii triunghiului echilateral ABC .

Notăm $m(\sphericalangle BP'C) = \alpha$, $m(\sphericalangle CP'A) = \beta$, $m(\sphericalangle AP'B) = \gamma$, unde $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

Cu teorema cosinusului în triunghiurile $P'BC$, $P'CA$, $P'AB$ obținem:



$$l^2 = 36 + 48 - 48\sqrt{3}\cos\alpha, \quad l^2 = 12 + 48 - 48\cos\beta, \quad l^2 = 36 + 12 - 24\sqrt{3}\cos\gamma.$$

$$\text{Rezultă: } \begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\beta = 1 \\ 4\sqrt{3}\cos\alpha - 2\sqrt{3}\cos\gamma = 3 \end{cases}, \text{ de unde } \begin{cases} \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}\cos\alpha - 1}{2} \\ \cos\gamma = \frac{4\sqrt{3}\cos\alpha - 3}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Cum } \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ \text{ avem } \cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) \quad (2).$$

$$\text{Din (1) și (2) obținem: } \frac{4\sqrt{3}\cos\alpha - 3}{2\sqrt{3}} = \cos\alpha \cdot \frac{2\sqrt{3}\cos\alpha - 1}{2} - \sin\alpha \sin\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \cdot \frac{2\sqrt{3}\cos\alpha - 1}{2} - \frac{4\sqrt{3}\cos\alpha - 3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha \sin^2\beta = \left(\frac{6\cos^2\alpha - 5\sqrt{3}\cos\alpha + 3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) = \left(\frac{6\cos^2\alpha - 5\sqrt{3}\cos\alpha + 3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2\alpha) \left(1 - \left(\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha - 1}{2} \right)^2 \right) = \left(\frac{6\cos^2\alpha - 5\sqrt{3}\cos\alpha + 3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2\alpha) \left(\frac{3 - 12\cos^2\alpha + 4\sqrt{3}\cos\alpha}{4} \right) = \frac{(6\cos^2\alpha - 5\sqrt{3}\cos\alpha + 3)^2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - \cos^2\alpha)(3 - 12\cos^2\alpha + 4\sqrt{3}\cos\alpha) = (6\cos^2\alpha - 5\sqrt{3}\cos\alpha + 3)^2 \Leftrightarrow$$

Notând $\cos\alpha = t$ ecuația de mai sus se scrie:

$$\Leftrightarrow 3(1 - t^2)(3 - 12t^2 + 4\sqrt{3}t) = (6t^2 - 5\sqrt{3}t + 3)^2 \Leftrightarrow 48\sqrt{3}t^3 - 156t^2 + 42\sqrt{3}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(8\sqrt{3}t^2 - 26t + 7\sqrt{3}) = 0, \text{ cu soluțiile } t_1 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{13 \pm 1}{8\sqrt{3}}.$$

Deoarece P' se află în interiorul $\triangle ABC$ echilateral rezultă că α, β, γ sunt mai mari decât 60° și deci $t = \cos\alpha < \frac{1}{2}$. Cum $t_{1,2} = \frac{13 \pm 1}{8\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$, acestea nu convin.

Deducem că soluția ecuației de mai sus este $t = 0$ și deci $\cos\alpha = 0$, de unde $\alpha = 90^\circ$.

Folosind (1) obținem $\cos\beta = \frac{-1}{2}$ și $\cos\gamma = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, de unde $\beta = 120^\circ$ și $\gamma = 150^\circ$.

În triunghiul $P'BC$ dreptunghic în P' cu teorema lui Pitagora obținem $BC = 2\sqrt{21}$.

Fie $P'M \perp BC$, $M \in BC$. Cum $PP' \perp (ABC)$, $P' \in (ABC)$ din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $PM \perp BC$ și deci unghiul plan corespunzător unghiului diedru al planelor (ABC) și (PBC) este $\sphericalangle PMP'$.

În $\triangle P'PM$ dreptunghic în P' avem $PP' = 6$ și $P'M = \frac{P'B \cdot P'C}{BC} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{7}}$,

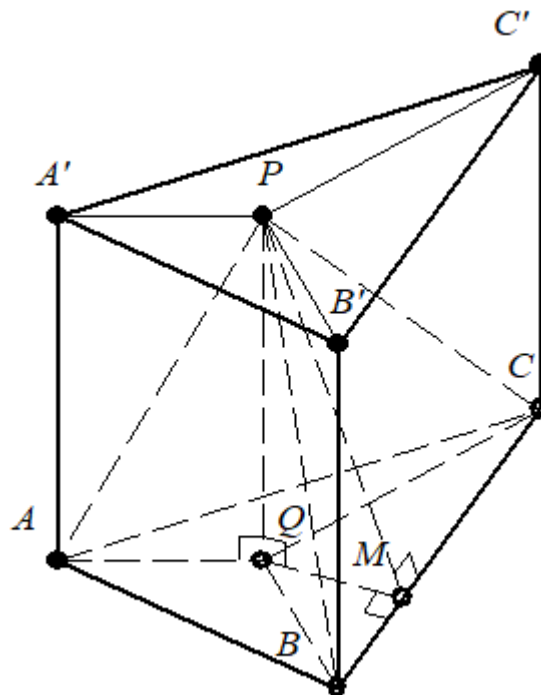
$$\text{de unde } \operatorname{tg}(\sphericalangle PMP') = \frac{PP'}{P'M} = \frac{6}{\frac{12}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Rezultă că } \operatorname{tg}(\sphericalangle(ABC), (PBC)) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Deoarece planele (ABC) și $(A'B'C')$ sunt paralele deducem că:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle(A'B'C'), (PBC)) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

4. Prof. Mihai Miculiță, Oradea



Să observăm de la început că, întrucât $(A'B'C') \parallel (ABC)$, avem:

$$\operatorname{tg}((A'B'C'); (PBC)) = \operatorname{tg}((ABC); (PBC)). \text{ Așa că, notând acum cu } Q = pr_{(ABC)}(P) \text{ și cu}$$

$$M = pr_{BC}(Q), \text{ avem:}$$

$$\left. \begin{array}{l} PQ \perp (ABC) \\ M = pr_{BC}(Q) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_{3\perp}} PM \perp BC \Rightarrow \boxed{tg\left(\left(A'B'C'\right);(PBC)\right)} = tg PMQ = \frac{|PQ|}{|QM|}. \quad (1)$$

Din triunghiurile PAQ, PBQ și PCQ – dreptunghice în Q , în care: $\boxed{|PQ|=|AA'|=6}$; (2)

obținem că:

$$|AQ|^2 = |PA|^2 - |PQ|^2 = (4\sqrt{3})^2 - 6^2 = 48 - 36 = 12 \Rightarrow \boxed{|AQ|^2 = 12}; \quad (3)$$

$$|BQ|^2 = |PB|^2 - |PQ|^2 = (6\sqrt{2})^2 - 6^2 = 72 - 36 = 36 \Rightarrow \boxed{|BQ|^2 = 36}; \quad (4)$$

$$|CQ|^2 = |PC|^2 - |PQ|^2 = (2\sqrt{21})^2 - 6^2 = 84 - 36 = 48 \Rightarrow \boxed{|CQ|^2 = 48}. \quad (5)$$

Punctele A, B, C și Q – fiind coplanare, are loc relația⁽¹⁾:

$$\begin{vmatrix} 0 & |AB|^2 & |AC|^2 & |AQ|^2 & 1 \\ |AB|^2 & 0 & |BC|^2 & |BQ|^2 & 1 \\ |AC|^2 & |BC|^2 & 0 & |CQ|^2 & 1 \\ |AQ|^2 & |BQ|^2 & |CQ|^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Notând acum cu: $a = |AB| = |AC| = |BC|$ și ținând seama și de relațiile (3), (4) și (5), relația (6) devine:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^2 & 12 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 & 36 & 1 \\ a^2 & a^2 & 0 & 48 & 1 \\ 12 & 36 & 48 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Trecând acum la calculul valorii determinantului din membrul stâng al ecuației (7), obținem:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^2 & 12 & 1 \\ a^2 & 0 & a^2 & 36 & 1 \\ a^2 & a^2 & 0 & 48 & 1 \\ 12 & 36 & 48 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2-c_3} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^2 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 36 & 1 \\ 2a^2 & a^2 & 0 & 48 & 1 \\ 0 & 36 & 48 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1 \\ c_4-c_1}} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^2 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 36 & 1 \\ 2a^2 & -a^2 & -2a^2 & 48-2a^2 & 1 \\ 0 & 36 & 48 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

¹ Vezi în [1] sau [2], consecința a formulei pentru volumul tetraedrului $ABCQ$. În cazul de față punctele A, B, C și Q – fiind coplanare, volumul tetraedrului este 0.

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 12 & 1 \\ 0 & a^2 & 36 & 1 \\ -a^2 & -2a^2 & 48-2a^2 & 1 \\ 36 & 48 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1-l_2 \\ l_3-l_2 \\ l_4-l_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & a^2 & 36 & 1 \\ -a^2 & -3a^2 & 12-2a^2 & 0 \\ 36 & 48-a^2 & -36 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & -24 \\ -a^2 & -3a^2 & 12-2a^2 \\ 36 & 48-a^2 & -36 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_2+l_1 \end{matrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a^2 & 0 & -24 \\ 0 & -3a^2 & -12-2a^2 \\ 36 & 48-a^2 & -36 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_3+c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & a^2-24 \\ 0 & -3a^2 & -12-2a^2 \\ 36 & 48-a^2 & 0 \end{vmatrix} = 108a^2(a^2-24) + a^2(2a^2+12)(48-a^2) = \\
&= 108a^4 - 2592a^2 + a^2(-2a^4 + 84a^2 + 576) = 108a^4 - 2592a^2 - 2a^6 + 84a^4 + 576a^2 = \\
&= -2a^6 + 192a^4 - 2016a^2 = -2a^2(a^4 - 96a^2 + 1008).
\end{aligned}$$

așa că, ținând seama de faptul că: $a \neq 0$, ecuația (6) devine:

$$\begin{aligned}
a^4 - 96a^2 + 1008 = 0 &\Leftrightarrow (a^4 - 96a^2 + 2304) - 1296 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 48)^2 = 36^2 \Leftrightarrow a^2 - 48 = \pm 36 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 = 48 \pm 36 \Leftrightarrow a^2 \in \{12; 84\} \Leftrightarrow a \in \{2\sqrt{3}; 2\sqrt{21}\}.
\end{aligned}$$

Dacă $|AB| = |AC| = |BC| = a = 2\sqrt{3}$, atunci am avea:

$$|AQ| + |AC| = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |QC| \Rightarrow A \in (QC) \Rightarrow Q \notin \text{Int}(\triangle ABC), \text{ așa că:}$$

$$\boxed{|AB| = |AC| = |BC| = a = 2\sqrt{21}}. \quad (7)$$

$$\text{Prin urmare: } \boxed{|QB|^2 + |QC|^2} = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 = 36 + 48 = 84 = \boxed{|BC|^2} \Rightarrow \boxed{QB \perp QC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |QM| = \frac{|QB| \cdot |QC|}{|BC|} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{7}}. \quad (8)$$

În fine, din relațiile (1), (2) și (8), rezultă că:

$$\boxed{\text{tg}((A'B'C'); (PBC))} = \text{tg} PMQ = \frac{|PQ|}{|MQ|} = \frac{6}{\frac{12}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}. \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIE:

Formula de calcul a volumului tetraedrului în funcție de lungimile muchiilor sale (datorată lui EULER), la care am făcut referire în soluția dată, o găsiți (în locul indicat), în următoarele cărți:

[1]. Dan Brânzei, Sebastian Anița, Constantin Cocea: "PLANUL și SPAȚIUL EUCLIDIAN",

Ed. Academiei-1986; pag.202 (este doar menționată).

[2]. *Mihai Miculița, Dan Brânzei*: "ANALOGII TRIUNGHI-TETRAEDRU", Ed.Paralela 45, Pitești-2000; (la pag.20-21, este demonstrată!).

[3]. *Mihai Miculița*: "INTRODUCERE în GEOMETRIA TETRAEDRULUI", Ed. Minied-Iași, 1994 (la pag.14-18, este demonstrată!).

[4]. *Nicolae Mihăileanu*: "ISTORIA MATEMATICII", Vol.2, Ed. Științifică și Enciclopedică-1981;

pag.695 și 697.

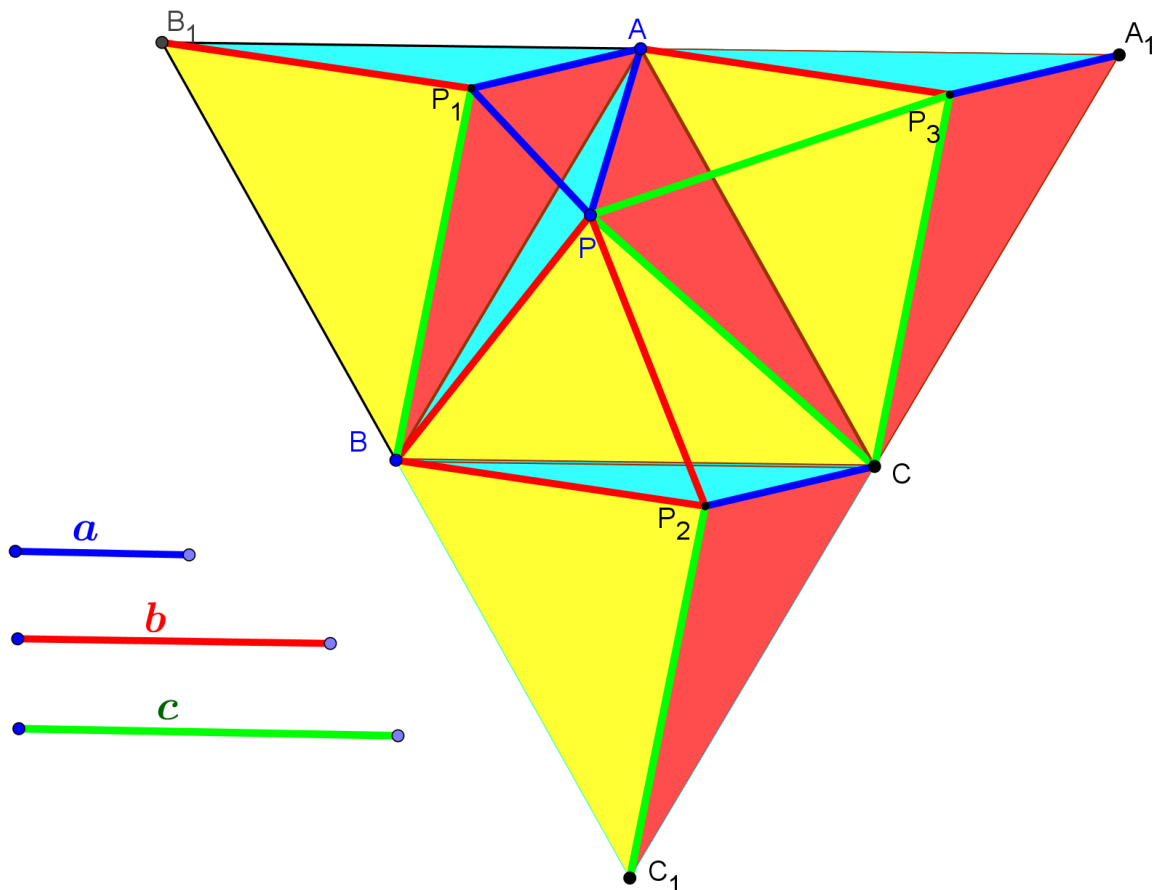
[5]. *Nicolae Mihăileanu*: "LECȚII COMPLEMENTARE de GEOMETRIE", Ed. Didactică și Pedagogică, 1976; pag.147.

3. DETERMINAREA LATURII UNUI TRIUNGHI ECHILATERAL CÂND SE CUNOSC DISTANȚELE DE LA UN PUNCT INTERIOR AL SĂU LA VÂRFURI.

Prof. Constantin Telteu

Fie P punctul interior triunghiului ABC și $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$.

Rotim $\triangle ABC$ cu un unghi de 60° în sens invers trigonometric în jurul punctului A , apoi în jurul punctului B și în final în jurul punctului C . Se obține figura următoare.



Așa cum se observă pe figură, suprafața poligonală $AP_1BP_2CP_3$ este de două ori mai mare decât suprafața triunghiului dat (triunghiul ABC este format din câte un triunghi roșu, galben și albastru, iar suprafața poligonală $AP_1BP_2CP_3$ are în compunerea ei câte două astfel de triunghiuri).

Pe de altă parte suprafața poligonală $AP_1BP_2CP_3$ este compusă din trei triunghiuri echilaterale, unul de latură a , altul de latură b și ultimul de latură c și, în plus, de trei ori triunghiul de laturi a, b, c .

Putem scrie acum:

$$2 \cdot A_{\triangle ABC} = A_{[AP_1BP_2CP_3]} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$$2l^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} + b^2\sqrt{3} + c^2\sqrt{3} + 12\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$l^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \right), \text{ unde am notat cu } l \text{ latura } \triangle ABC \text{ iar}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

4. DIN NOU DESPRE PROBLEMA 11945 DIN THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY (AMM)

Profesori: Marius Drăgan, București și Neculai Stanciu, Buzău

În AMM, Vol. 123, No. 10 (Decembrie 2016) la pagina 1050 a fost publicată următoarea problemă:

11945. *Proposed by Martin Lukarevski, University "Goce Delcev", Stip, Macedonia.*

Let a, b and c be the lengths of the sides of triangle ABC opposite A, B and C , respectively, and let w_a, w_b, w_c be the lengths of the corresponding angle bisectors. Prove

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

O soluție și rafinări ale problemei de mai sus au fost date de autorii acestui articol în Gazeta Matematică, nr. 4, 2017, pp. 178 – 180.

Alte două soluții:

I. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Fie D punctul de intersecție al dreptei AI cu latura BC . Avem:

$$S = [ABC] = [ADB] + [ADC] = \frac{cw_a \sin \frac{A}{2}}{2} + \frac{bw_a \sin \frac{A}{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S = (b+c)w_a \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow w_a = \frac{2S}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}.$$

Similar rezultă și analoagele

$$w_b = \frac{2S}{(c+a) \sin \frac{B}{2}}, \quad w_c = \frac{2S}{(a+b) \sin \frac{C}{2}}.$$

Atunci,

$$\frac{a}{w_a} = \frac{a(b+c)}{2S} \sin \frac{A}{2} = \frac{ab+ac}{2S} \sin \frac{A}{2} = \frac{\frac{2S}{\sin C} + \frac{2S}{\sin B}}{2S} \sin \frac{A}{2} = \left(\sin \frac{A}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \left(\sin \frac{A}{2} \right) \cdot \frac{(1+1)^2}{\sin B + \sin C} = 4 \cdot \left(\sin \frac{A}{2} \right) \left(\frac{1}{\sin B + \sin C} \right) = 4 \cdot \left(\sin \frac{A}{2} \right) \left(\frac{1}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos \frac{B-C}{2}} \geq 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Similar rezultă și analoagele, i.e. $\frac{b}{w_b} \geq 2 \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\frac{c}{w_c} \geq 2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

Deci,

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq 2 \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right), (1).$$

Este bine cunoscut faptul că

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}, (2).$$

Din (1) și (2) obținem inegalitatea dorită.

II. Fie $p = \frac{a+b+c}{2}$. Deoarece $w_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ și alte două analog rezultă că

$$\sum \frac{a}{w_a} \geq \sum \frac{a}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum \frac{a}{\sqrt{p-a}}, (3)$$

Considerăm $f : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{p-x}}$, $f'(x) = \frac{2p-x}{2\sqrt{(p-x)^3}}$,

$$f''(x) = \frac{4p-x}{4\sqrt{(p-x)^5}} \geq 0.$$

Deoarece f este convexă pe $(0, p)$ din (3) aplicând inegalitatea Jensen obținem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{w_a} &\geq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum \frac{a}{\sqrt{p-a}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot 3 \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{p - \frac{a+b+c}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot 2p \cdot \frac{1}{\sqrt{p - \frac{2p}{3}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot 2p \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{p}} = 2\sqrt{3} \quad \square \end{aligned}$$

5. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 27313 DIN GAZETA MATEMATICĂ NR.12/2016

CLASA A X-A

Marin Chirciu²

În **Gazeta Matematică nr.12/2016** la clasa a X-a este propusă **Problema 27313** cu următorul conținut:

Să se arate că

$$\frac{a^3bc+3}{bc} + \frac{b^3ca+3}{ca} + \frac{c^3ab+3}{ab} \geq 3 + \frac{27}{a+b+c},$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Cătălin Cristea, Craiova

Soluție .

Inegalitatea se scrie $\sum \left(a^3 + \frac{3}{bc} \right) \geq 3 + \frac{27}{a+b+c} \Leftrightarrow \sum a^3 + 3 \sum \frac{1}{bc} \geq 3 + \frac{27}{a+b+c}$.

Notăm $a+b+c=t$.

Avem $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$, care rezultă din convexitatea funcției $f:(0,\infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^3 \text{ și aplicarea inegalității lui Jensen, de unde } a^3+b^3+c^3 \geq \frac{(a+b+c)^3}{9} = \frac{t^3}{9}.$$

$$\text{Apoi } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{27}{(a+b+c)^2} = \frac{27}{t^2}.$$

Este suficient să arătăm că

$$\frac{t^3}{9} + \frac{81}{t^2} \geq 3 + \frac{27}{t} \Leftrightarrow t^5 - 27t^2 - 243t + 729 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)^2(t^3 + 6t^2 + 27t + 81) \geq 0, \text{ evident, cu}$$

egalitate dacă și numai dacă $t=3$ și $a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

Articolul prezintă o serie de dezvoltări, extinderi și generalizări ale acestei inegalități, prin coborârea sau ridicarea exponentului natural k al variabilelor a, b, c și prin deplasarea parametrului aditiv n pe mulțimea numerelor reale nenegative.

Dezvoltarea1 .

Să se arate că

$$\frac{a^3bc+n}{bc} + \frac{b^3ca+n}{ca} + \frac{c^3ab+n}{ab} \geq 12 - 3n + \frac{18n-27}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

² Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{t^3}{9} + \frac{27n}{t^2} \geq 12 - 3n + \frac{18n - 27}{t} \Leftrightarrow t^5 + (27n - 108)t^2 + (243 - 162n)t + 243n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 3)^2 (t^3 + 6t^2 + 27t + 27n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă și numai dacă } t = 3 \text{ și}$$

$a = b = c$, adică pentru $a = b = c = 1$.

Observație.

Pentru $n = 3$ se obține **Problema 27313** din **Gazeta Matematică nr.12/2016**.

Considerații metodico-didactice.

Cum s-a obținut Dezvoltarea 1?

Am căutat o inegalitate de forma $\frac{a^3bc + x}{bc} + \frac{b^3ca + x}{ca} + \frac{c^3ab + x}{ab} \geq y + \frac{z}{a + b + c}$, astfel încât, după aplicarea raționamentului din soluția de mai sus, ecuația polinomială atașată inegalității $\frac{t^3}{9} + \frac{27n}{t^2} \geq x + \frac{y}{t}$ să admită rădăcina dublă $t = 3$. Notând $x = n$ obținem $y = 12 - 3n$ și $z = 18n - 27$.

Extinderi. (asupra exponentului variabilelor a, b, c)

Dacă problema propusă are exponentul variabilelor $k = 3$ vom coborî exponentul la $k = 2, 1, 0$.

Coborîrea la 2.

Să se arate că

$$\frac{a^2bc + 2}{bc} + \frac{b^2ca + 2}{ca} + \frac{c^2ab + 2}{ab} \geq 3 + \frac{18}{a + b + c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 2.

Să se arate că

$$\frac{a^2bc + n}{bc} + \frac{b^2ca + n}{ca} + \frac{c^2ab + n}{ab} \geq 9 - 3n + \frac{18n - 18}{a + b + c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{t^2}{9} + \frac{27n}{t^2} \geq 9 - 3n + \frac{18n - 18}{t} \Leftrightarrow t^4 + (9n - 27)t^2 + (54 - 54n)t + 18n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 3)^2 (t^2 + 6t + 9n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă și numai dacă } t = 3 \text{ și } a = b = c,$$

adică pentru $a = b = c = 1$.

Observație.

Pentru $n = 2$ se obține Coborîrea la 2.

Coborîrea la 1.

Să se arate că

$$\frac{abc+1}{bc} + \frac{abc+1}{ca} + \frac{abc+1}{ab} \geq 3 + \frac{9}{a+b+c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 3.

Să se arate că

$$\frac{abc+n}{bc} + \frac{abc+n}{ca} + \frac{abc+n}{ab} \geq 6 - 3n + \frac{18n-9}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$t + \frac{27n}{t^2} \geq 6 - 3n + \frac{18n-9}{t} \Leftrightarrow t^3 + (3n-6)t^2 + (9-18n)t + 27n \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)^2(t+3n) \geq 0,$$

evident ,cu egalitate dacă și numai dacă $t=3$ și $a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

Observație.

Pentru $n=1$ se obține Coborârea la 1.

Coborârea la 0,5.

Să se arate că

$$\frac{bc+0,5}{bc} + \frac{ca+0,5}{ca} + \frac{ab+0,5}{ab} \geq 1,5 + \frac{9}{a+b+c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 4.

Să se arate că

$$\frac{bc+n}{bc} + \frac{ca+n}{ca} + \frac{ab+n}{ab} \geq 3 - 3n + \frac{18n}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

Cu observațiile de mai sus este suficient să arătăm că

$$3 + n \cdot \frac{27}{t^2} \geq 3 - 3n + \frac{18n}{t} \Leftrightarrow n(t-3)^2 \geq 0, \text{ evident cu egalitate dacă și numai dacă } n=0 \text{ sau}$$

$a=b=c=1$.

Observație.

Pentru $n=0,5$ se obține Coborârea la 0,5.

În continuare vom ridica exponentul la $k=4,5,6$.

Ridicarea la 4.

$$\text{Să se arate că } \frac{a^4bc+4}{bc} + \frac{b^4ca+4}{ca} + \frac{c^4ab+4}{ab} \geq 3 + \frac{36}{a+b+c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 5.

Să se arate că

$$\frac{a^4bc+n}{bc} + \frac{b^4ca+n}{ca} + \frac{c^4ab+n}{ab} \geq 15-3n + \frac{18n-36}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{t^4}{27} + n \cdot \frac{27}{t^2} \geq 15-3n + \frac{18n-36}{t} \Leftrightarrow t^6 + (81n-405)t^2 + (972-486n)t + 729n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 (t^4 + 6t^3 + 27t^2 + 108t + 81n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă și numai dacă } t=3 \text{ și}$$

$a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

Observație.

Pentru $n=4$ se obține Ridicarea la 4.

Ridicarea la 5.

Să se arate că

$$\frac{a^5bc+5}{bc} + \frac{b^5ca+5}{ca} + \frac{c^5ab+5}{ab} \geq 3 + \frac{45}{a+b+c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 6.

Să se arate că

$$\frac{a^5bc+n}{bc} + \frac{b^5ca+n}{ca} + \frac{c^5ab+n}{ab} \geq 18-3n + \frac{18n-45}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{t^5}{81} + n \cdot \frac{27}{t^2} \geq 18-3n + \frac{18n-45}{t} \Leftrightarrow t^7 + (243n-1458)t^2 + (3645-1458n)t + 2187n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 (t^5 + 6t^4 + 27t^3 + 108t^2 + 405t + 243n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă și numai dacă}$$

$t=3$ și $a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

Observație.

Pentru $n=5$ se obține Ridicarea la 5.

Ridicarea la 6.

Să se arate că

$$\frac{a^6bc+6}{bc} + \frac{b^6ca+6}{ca} + \frac{c^6ab+6}{ab} \geq 3 + \frac{54}{a+b+c}.$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Dezvoltarea 7.

Să se arate că

$$\frac{a^6bc+n}{bc} + \frac{b^6ca+n}{ca} + \frac{c^6ab+n}{ab} \geq 21-3n + \frac{18n-54}{a+b+c}, \text{ unde } n \geq 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a, b și c .

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

În baza raționamentului de mai sus este suficient să arătăm că

$$\frac{t^6}{243} + n \cdot \frac{27}{t^2} \geq 21-3n + \frac{18n-54}{t} \Leftrightarrow t^8 + 3^6(n-7)t^2 + 3^7(6-2n)t + 3^8 \cdot n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2(t^6 + 6t^5 + 27t^4 + 108t^3 + 405t^2 + 1458t + 729n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă și}$$

numai dacă $t=3$ și $a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

În final vom prezenta extinderea pentru un exponent arbitrar $k \in \mathbf{N}$ al variabilelor a, b, c și dezvoltarea acesteia.

Observație.

Pentru $n=6$ se obține Ridicarea la 6.

Generalizarea 1.

Dacă $a, b, c > 0$, $k \in \mathbf{N}$, arătați că

$$\frac{a^kbc+k}{bc} + \frac{b^kca+k}{ca} + \frac{c^kab+k}{ab} \geq 3 + \frac{9k}{a+b+c}.$$

Generalizarea 2.

Dacă $a, b, c > 0$, $k \in \mathbf{N}$, $n \geq 0$ arătați că

$$\frac{a^kbc+n}{bc} + \frac{b^kca+n}{ca} + \frac{c^kab+n}{ab} \geq 3(k-n+1) + \frac{9(2n-k)}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție .

Inegalitatea se scrie $\sum \left(a^k + \frac{n}{bc} \right) \geq 3(k-n+1) + \frac{9(2n-k)}{a+b+c} \Leftrightarrow$

$$\sum a^k + n \sum \frac{1}{bc} \geq 3(k-n+1) + \frac{9(2n-k)}{a+b+c}.$$

Notăm $a+b+c=t$.

Avem $\frac{a^k+b^k+c^k}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^k$, care rezultă din convexitatea funcției $f:(0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^k \text{ și aplicarea inegalității lui Jensen, de unde } a^k + b^k + c^k \geq \frac{(a+b+c)^k}{3^{k-1}} = \frac{t^k}{3^{k-1}}.$$

$$\text{Apoi } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{27}{(a+b+c)^2} = \frac{27}{t^2}.$$

Este suficient să arătăm că

$$\frac{t^k}{3^{k-1}} + n \cdot \frac{27}{t^2} \geq 3(k-n+1) + \frac{9(2n-k)}{a+b+c} \Leftrightarrow t^{k+2} + n \cdot 3^{k+2} \geq 3^k \cdot (k-n+1) \cdot t^2 + 3^{k+1} \cdot (2n-k) \cdot t$$

$$\Leftrightarrow t^{k+2} + 3^k(n-k-1)t^2 + 3^{k+1}(k-2n)t + 3^{k+2} \cdot n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)^2(t^k + 6t^{k-1} + 27t^{k-2} + \dots + 3^{k-2}(k-1)t^2 + 3^{k-1}kt + 3^k \cdot n) \geq 0, \text{ evident, cu egalitate dacă}$$

și numai dacă $t=3$ și $a=b=c$, adică pentru $a=b=c=1$.

Observație.

Pentru $n=k$ se obține **Generalizarea 1.**

Bibliografie:

1. Cătălin Cristea, Gazeta Matematică Nr. 12/2016, Problema 27313, Clasa a X-a.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.

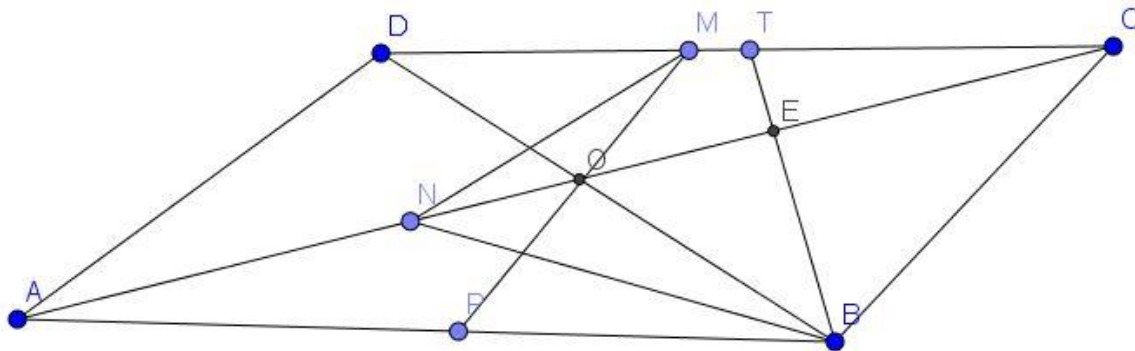
6. ASUPRA UNEI PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICA

**Profesori: Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban, Liceul Pedagogic
“D.P.Perpessicius”, Brăila**

În Gazeta Matematică nr 12\2016, la clasa a 7-a, apare următoarea problemă de geometrie:

Fie $ABCD$ un paralelogram, $BE \perp AC$, $E \in AC$, iar M și N mijloacele segmentelor DC , respectiv AE . Știind că $MN \perp NB$, demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi. (Traian Preda, București).

Vom prezenta două metode de demonstrație: una trigonometrică și cealaltă geometrică.



Metoda 1 (trigonometrică)

$$MC = MD = \frac{a}{2}, DC = a, BC = b, NA = NE = \frac{AE}{2}, m(\angle ACD) = \alpha, m(\angle ACB) = \beta, \alpha + \beta = m(\angle B),$$

$$\triangle ACB, \text{ aplic teorema sinusului } \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin B}, AC = \frac{b \sin B}{\sin \alpha} = \frac{a \sin B}{\sin \beta}, EB = b \sin \beta,$$

$$EC = b \cos \beta, BE \cap CD = \{T\}, \text{ în } \triangle TEC, TC = \frac{EC}{\cos \alpha} = \frac{b \cos \beta}{\cos \alpha},$$

$$TE = TC \sin \alpha = \frac{b \cos \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{b \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha}, \text{ în } \triangle AEB, EB = AB \sin \alpha = a \sin \alpha = b \sin \beta,$$

$$AE = AB \cos \alpha = a \cos \alpha, NE = NA = \frac{AE}{2} = \frac{a \cos \alpha}{2}, \text{ în } \triangle NEB, \text{ aplic teorema lui Pitagora}$$

,

$$NB^2 = NE^2 + BE^2 = \frac{a^2}{4} \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta, \quad NC = NE + EC = \frac{a}{2} \cos \alpha + b \cos \beta,$$

In $\triangle MNC$, aplic teorema cosinusului, $MN^2 = NC^2 + MC^2 - 2NC \cdot MC \cos \alpha$,

$$MN^2 = \left(\frac{a}{2} \cos \alpha + b \cos \beta\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2\left(\frac{a}{2} \cos \alpha + b \cos \beta\right) \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha = \frac{a^2}{4} (1 - \cos^2 \alpha) + b^2 \cos^2 \beta,$$

$$MN^2 = \frac{a^2}{4} \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta, \text{ in } \triangle MBC, \text{ aplic teorema cosinusului,}$$

$$MB^2 = MC^2 + BC^2 - 2MC \cdot BC \cos C = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cdot \cos C, \text{ in } \triangle MNB, \text{ aplic teorema lui Pitagora,}$$

$$MB^2 = MN^2 + NB^2, \quad \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cdot \cos C = \frac{a^2}{4} \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + \frac{a^2}{4} \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta,$$

$$\frac{a^2}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cdot \cos C, \quad \frac{a^2}{4} + b^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cdot \cos C,$$

$\cos C = 0, m(C) = 90^\circ$, rezulta $ABCD$ dreptunghi.

Metoda 2 (geometrica)

Fie P mijlocul lui $[AB]$, $AC \cap BD = \{O\}$,

$$MP = BC, AB = 2a, AN = NE = b, AE = 2b, DM = MC = AP = BP = a,$$

$$\text{In } \triangle AEB, \text{ aplic teorema lui Pitagora, } BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{4a^2 - 4b^2} = 2\sqrt{a^2 - b^2},$$

$$\text{In } \triangle AEB, [BN] \text{ mediana, aplic teorema medianei, } BN^2 = \frac{2(AB^2 + BE^2) - AE^2}{4},$$

$$BN^2 = \frac{2(4a^2 + 4a^2 - 4b^2) - 4b^2}{4} = 4a^2 - 3b^2, \quad BN = \sqrt{4a^2 - 3b^2}, \quad h = d(B, CD), \text{ inaltimea}$$

$$\text{paralelogramului } ABCD, A_{ABCD} = AB \cdot h = 2ah = 2 \cdot A_{ABC} = AC \cdot BE = AC \cdot 2\sqrt{a^2 - b^2},$$

$$AC = \frac{ah}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ in } \triangle CEB, \text{ aplic teorema lui Pitagora, } CE^2 = BC^2 - BE^2, CE = AC - AE,$$

$$\left(\frac{ah}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 2b\right)^2 = BC^2 - 4(a^2 - b^2), \quad BC^2 = \frac{a^2 h^2}{a^2 - b^2} - \frac{4abh}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 4b^2 + 4a^2 - 4b^2,$$

$$\frac{BC^2}{2} = \frac{a^2 h^2}{2(a^2 - b^2)} - \frac{2abh}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 2a^2, \quad NO = AO - AN = \frac{AC}{2} - AN = \frac{ah}{2\sqrt{a^2 - b^2}} - b,$$

În $\triangle ADC$, $[MO]$ linie mijlocie, $MO = \frac{AD}{2}$. În $\triangle ABC$, $[OP]$ linie mijlocie,

$OP = \frac{BC}{2}$, $AD = BC$, $MO = OP$. În $\triangle MNP$, $[NO]$ mediana, aplic teorema medianei,

$$NO^2 = \frac{2(NP^2 + MN^2) - MP^2}{4}, \text{ în } \triangle AEB, [NP] \text{ linie mijlocie, } NP = \frac{BE}{2} = \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$4NO^2 = 2(NP^2 + MN^2) - MP^2, \quad 4\left(\frac{ah}{2\sqrt{a^2 - b^2}} - b\right)^2 = \frac{BE^2}{2} + 2MN^2 - BC^2,$$

$$\frac{a^2h^2}{a^2 - b^2} - \frac{4abh}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 4b^2 - \frac{4(a^2 - b^2)}{2} + BC^2 = 2MN^2,$$

$$\frac{a^2h^2}{2(a^2 - b^2)} - \frac{2abh}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 3b^2 - a^2 + \frac{BC^2}{2} = MN^2,$$

$$\left(\frac{a^2h^2}{2(a^2 - b^2)} - \frac{2abh}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 2a^2\right) + (3b^2 - 3a^2 + \frac{BC^2}{2}) = MN^2,$$

$$\frac{BC^2}{2} + (3b^2 - 3a^2 + \frac{BC^2}{2}) = MN^2, \quad MN^2 = BC^2 + 3b^2 - 3a^2, \text{ în } \triangle MNB, \text{ aplic teorema lui}$$

Pitagora, $MN^2 + NB^2 = MB^2$, $BC^2 + 3b^2 - 3a^2 + 4a^2 - 3b^2 = BM^2$, $BC^2 + a^2 = BM^2$,

$BC^2 + MC^2 = BM^2$, în $\triangle MCB$, aplic reciproca teoremei lui Pitagora, rezulta

$$m(\angle MCB) = 90^\circ,$$

MCBP este paralelogram cu un unghi drept rezulta MCBP este dreptunghi, deci

$$m(\angle C) = 90^\circ, \text{ deci}$$

ABCD este dreptunghi.

7. INEGALITATEA STEVIN – BOTTEMA

Prof. Ioan Viorel Codreanu,
Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

În acest articol vom prezenta inegalitatea geometrică **Stevin – Bottema** și câteva consecințe importante pentru această inegalitate.

Teoremă (Inegalitatea Stevin – Bottema). În orice triunghi are loc următoarea inegalitate

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 R^2 \geq \lambda_2 \lambda_3 a^2 + \lambda_3 \lambda_1 b^2 + \lambda_1 \lambda_2 c^2,$$

unde $\lambda_k \geq 0, k = \overline{1,3}$, iar a, b, c, R sunt laturile triunghiului și respectiv raza cercului circumscris.

Lemă. Dacă ABC este un triunghi și $M \in \text{Int}(ABC)$, iar dacă z_1, z_2, z_3 sunt afixele

punctelor A, B , respectiv C , și z este afixul lui M , atunci există $\lambda_k, k = \overline{1,3}$, cu $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$

astfel încât $z = \sum_{k=1}^3 \lambda_k z_k$.

Demonstrație. Fie $MA_3 \cap (A_1 A_2) = \{N\}$ și z_N afixul lui N . Atunci există $\lambda \in (0,1)$ astfel

încât $z_N = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$. Cum $M \in (NA_3)$ rezultă că există $\beta \in (0,1)$ astfel încât

$z = \beta z_N + (1 - \beta) z_3$. Avem $z = \lambda \beta z_1 + \beta(1 - \lambda) z_2 + (1 - \beta) z_3$. Luând $\lambda_1 = \lambda \beta, \lambda_2 = \beta(1 - \lambda)$ și

$\lambda_3 = 1 - \beta$, observăm că suma coeficienților este 1, adică sunt verificate condițiile lemei.

Trecând acum la demonstrația teoremei, fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și originea axelor de coordonate, avem

$$OM^2 = z \cdot \bar{z} = \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k z_k \right) \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k \bar{z}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 z_k \bar{z}_k + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \lambda_i \lambda_j (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j)$$

și ținând seama că $z_k \cdot \bar{z}_k = R^2, k = \overline{1,3}$, obținem

$$OM^2 = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 R^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \lambda_i \lambda_j (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j).$$

Pe de altă parte avem

$$a^2 = (z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) = 2R^2 - (z_2 \bar{z}_3 - z_3 \bar{z}_2),$$

și alte două relații similare.

În final se obține

$$OM^2 = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 R^2 + \sum \lambda_1 \lambda_2 (2R^2 - c^2) = R^2 \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k \right)^2 - \sum \lambda_2 \lambda_3 a^2 \geq 0$$

de unde rezultă inegalitatea **Stevin – Bottema**.

În continuare prezentăm câteva consecințe ale inegalității **Stevin – Bottema**. Notățiile sunt cele obișnuite.

Exemplul 1 (Inegalitatea Ionescu-Weitzenböck). În orice triunghi are loc inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Demonstrație. Particularizăm inegalitatea **Stevin – Bottema** pentru $\lambda_1 = a^2, \lambda_2 = b^2, \lambda_3 = c^2$.

Atunci rezultă

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 R^2 \geq 3a^2 b^2 c^2$$

de unde

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{abc\sqrt{3}}{R} = 4S\sqrt{3}.$$

Exemplul 2. Dacă $x, y, z \in R_+$, atunci

$$a^2 x + b^2 y + c^2 z \geq \sqrt{xy + yz + zx} \cdot 4S.$$

Demonstrație. Fie în inegalitatea **Stevin – Bottema** $\lambda_1 = a^2 x, \lambda_2 = b^2 y, \lambda_3 = c^2 z$. Obținem

$$(a^2 x + b^2 y + c^2 z)^2 R^2 \geq a^2 b^2 c^2 (xy + yz + zx)$$

și folosind relația $abc = 4RS$ rezultă concluzia.

Exemplul 3. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c \geq 4pS.$$

Demonstrație. Folosind exemplul 2 pentru $x = r_a, y = r_b$ și $z = r_c$ obținem

$$\sum a^2 r_a \geq \sqrt{\sum r_a r_b} \cdot 4S = 4pS,$$

unde am folosit relația $\sum r_a r_b = p^2$.

Exemplul 4 (Inegalitatea Janic). În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4.$$

Demonstrație. Folosind exemplul 3 și relațiile $S = pr$ și $\prod r_a = p^2 r$ obținem

$$\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{1}{\prod r_a} \cdot \sum a^2 r_a \geq \frac{1}{p^2 r} \cdot 4pS = 4.$$

Exemplul 5. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c.$$

Demonstrație. Folosind exemplul 2 și formula lui **Heron** $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ avem

$$\sum \frac{a^2}{b+c-a} \geq \sqrt{\frac{1}{4} \sum \frac{1}{(p-a)(p-b)}} \cdot 4S = 2S \sqrt{\frac{1}{\prod (p-a)}} \cdot \sum (p-a) = 2p = a+b+c.$$

Exemplul 6. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Demonstrație. Folosind relația $abc = 4RS$ inegalitatea se scrie echivalent

$$\frac{\sum a^2 b^2}{(\prod a)^2} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \sum a^2 b^2 \geq 16S^2.$$

În continuare folosind exemplul 2 avem

$$\sum a^2 b^2 \geq \sqrt{\sum a^2 b^2} \cdot 4S$$

de unde obținem

$$\sum a^2 b^2 \geq 16S^2.$$

Exemplul 7 (Inegalitatea Tsintsifas). Dacă $m, n, p > 0$, atunci

$$a^2 \cdot \frac{m}{n+p} + b^2 \cdot \frac{n}{p+m} + c^2 \cdot \frac{p}{m+n} \geq 2\sqrt{3}S.$$

Demonstrație. Folosind exemplul 2 pentru $x = \frac{m}{n+p}, y = \frac{n}{p+m}$ și $z = \frac{p}{m+n}$ obținem

$$\sum a^2 \cdot \frac{m}{n+p} \geq \sqrt{\sum \frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{p+m}} \cdot 4S.$$

Este suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\sum \frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{p+m} \geq \frac{3}{4}$$

echivalentă cu

$$4\sum mn(m+n) \geq 3\prod (m+n).$$

Dacă notăm $s = m+n+p$, ultima inegalitate devine

$$4\sum (m^2 n + mn^2) \geq 3\prod (s-m) = 3[s^3 - s \cdot s^2 + (\sum mn)s - mnp]$$

echivalentă cu

$$\sum (m^2 n + n^2 m) \geq 6mnp$$

care rezultă imediat din inegalitatea mediilor, adică

$$m^2n + n^2p + p^2m \geq 3mnp$$

și

$$mn^2 + np^2 + pm^2 \geq 3mnp$$

de unde după adunarea inegalităților membru cu membru rezultă concluzia.

Exemplul 8. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{a^4}{b^2 + c^2} + \frac{b^4}{c^2 + a^2} + \frac{c^4}{a^2 + b^2} \geq 2S\sqrt{3}.$$

Demonstrație. Din inegalitatea Tsintsifas pentru $m = a^2, n = b^2, p = c^2$ rezultă imediat inegalitatea dată.

Exemplul 9 (Inegalitatea Szegő - Polya). În orice triunghi are loc inegalitatea

$$a^2b^2c^2 \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Demonstrație. Dacă în inegalitatea Stevin – Bottema folosim relația $R = \frac{abc}{4S}$ obținem

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{(4S)^2} \geq a^2\lambda_2\lambda_3 + b^2\lambda_3\lambda_1 + c^2\lambda_1\lambda_2.$$

Folosind exemplul 2 pentru $x = \lambda_2\lambda_3, y = \lambda_3\lambda_1$ și $z = \lambda_1\lambda_2$, rezultă că

$$\sum a^2\lambda_2\lambda_3 \geq \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \cdot 4S.$$

Din ultimele două inegalități deducem că

$$a^2b^2c^2 \geq \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \cdot (4S)^3}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}.$$

Dacă particularizăm această inegalitate pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ obținem inegalitatea

Szegő - Polya.

Exemplul 10 (Panagiotis Ligouras, Italia, Problema 251 din La Gaceta de la RSME).

Fie ABC un triunghi și P un punct interior triunghiului situat pe mediana AD . Dacă PB și PC intersectează laturile AC și AB în E respectiv F , demonstrați că

$$a^2[PAF][PBD] + b^2[PBD][PCE] + c^2[PCE][PAF] \leq \frac{R^2}{4}[ABC]^2.$$

Demonstrație (I.V. Codreanu). Folosind teorema lui Ceva obținem

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

și ținând seama de $BD = DC$ deducem că

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}.$$

Rezultă că dreptele EF și BC sunt paralele și atunci $[BFC] = [CEB]$. Avem

$$[PBF] = [BFC] - [BPC] = [CEB] - [BPC] = [PCE].$$

Deoarece AD este mediană, avem $[ABD] = [ACD]$ și $[PBD] = [PCD]$. Rezultă că

$$[PAF] = [PAE] \text{ și obținem}$$

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{[ABC]}{2}.$$

Folosind inegalitatea **Stevin – Bottema** pentru $\lambda_1 = [PCE]$, $\lambda_2 = [PAF]$ și $\lambda_3 = [PBD]$

obținem

$$\sum a^2 [PAF][PBD] \leq \left(\sum [PCE] \right)^2 \cdot R^2 = \frac{R^2}{4} \cdot [ABC]^2.$$

Bibliografie:

- [1] O. Bottema, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.
- [2] Pantelimon George Popescu, I.V. Maftei, Jose Luis Diaz – Barrero, Marian Dincă, *Inegalități matematice. Modele inovatoare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 2007.

PROMOVĂM LUCRĂRILE COLABORATORILOR**CARTEA LUNII IUNIE 2017**

Cartea apare în două variante: în limba română cu titlul “Fenomen Algebric” și în limba engleză cu titlul “Algebraic Phenomenon” la Editura Paralela 45.

Cartea este structurată pe trei capitole:

Capitolul 1 : Teoreme cèlebre ;

Capitolul 2 : Algebra-Enunțuri ;

Capitolul 3: Algebra-Soluții.

Cartea conține o mare varietate de probleme (353) de matematici elementare , complet rezolvate , originale (la primă apariție) sau publicate în reviste prestigioase de matematică sub semnătura autorului.

<http://www.edituraparelela45.ro/carte/algebraic-phenomenon>

