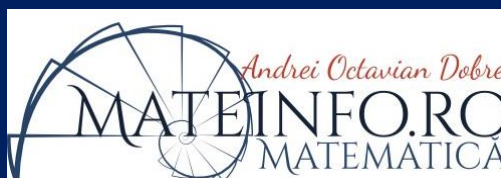


IULIE 2017

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



www.mateinfo.ro

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII IULIE 2017 ... pag.2

Biro Istvan

2. METODE DE REZOLVARE – PROBLEMA LUNII IUNIE 2017 ... pag. 3

Daniel Sitaru

Alte rezolvări date de :

Buzea Gabriela, Mihai Miculița, Constantin Telteu , Marin Chirciu, Ana Szöcs,
Gabriela Neguțescu, Cosmin Pacurar, Biro Istvan, Petru Cojocaru

3. DOUĂ PROBLEME ASOCIATE CU O PROBLEMĂ DIN AMM ... pag. 13

Neculai Stanciu

4. INEGALITĂȚI OBTINUTE PRIN RESTRIȚIONAREA UNOR FUNCȚII CONVEXE LA UN
INTERVAL ... pag. 16

Sebastian Ilinca

5. INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE GENERATE DE INEGALITĂȚI ALGEBRICE... pag. 19

Marin Chirciu

6. LOCURI GEOMETRICE... pag. 36

Erika Balogh

7. O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A PROBLEMEI E : 15112 DIN G.M. 12/2016 ... pag. 50

Gabriela Buzea

8. NEW SOLUTIONS FOR SOME PROBLEMS FROM LA GACETA DE LA RSME ... pag.51

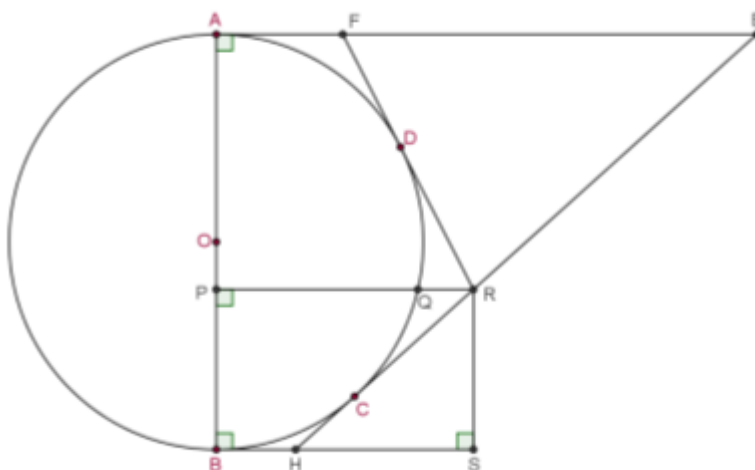
Nela Ciceu și Roxana Mihaela Stanciu

1. PROBLEMA LUNII IULIE 2017



“Fie P un punct oarecare pe diametrul (AB) al cercului $C(O, r)$ și R un punct exterior cercului astfel ca $PR \perp AB$ și $PR = BQ$. Tangentele la cerc din punctele A, B, R determină punctele E, F, H, D, C conform figurii alăturate și notăm cu S proiecția lui R pe BH . Arătați că:

- AC, BD, FH și PR sunt concurente în punctul G ;
- patrulaterul $DGCS$ este inscriptibil;
- $EF = 2r$.



Prof. Biro Istvan

Așteptăm rezolvarea problemei pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro până pe data de 1 august 2017.

2. METODE DE REZOLVARE

PROBLEMA LUNII IULIE 2017

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin

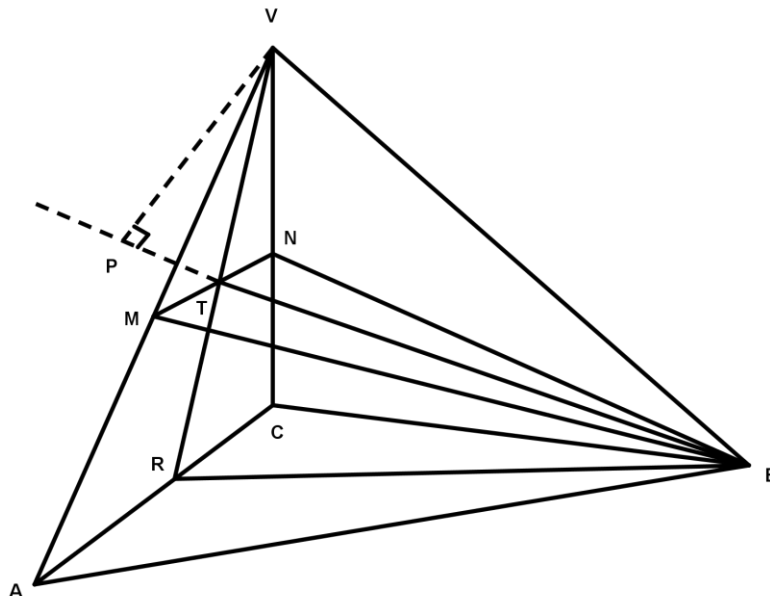


Fie $VABC$ un tetraedru regulat. Dacă $AB=a > 0$, $M \in [VA]$; $N \in [VC]$; $MN \parallel AC$; $MN = x \in [0, a]$, găsiți volumul piramidei $VBMN$ în funcție de a și x .



Let $VABC$ be a regular tetrahedron. If $AB = a > 0$, $M \in [VA]$; $N \in [VC]$; $MN \parallel AC$; $MN = x \in [0, a]$ then find the volume of $VBMN$ depending on a, x .

Solution:



$$\text{In } \triangle ABM: MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos 60^\circ$$

$$MB^2 = a^2 + (a - x)^2 - 2a(a - x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$MB = \sqrt{x^2 - ax + a^2}$$

$$\text{In } \triangle BTN: BT^2 = BM^2 - MT^2 = x^2 - ax + a^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$BT = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}; A[BMN] = \frac{MN \cdot BT}{2}$$

$$A[BMN] = \frac{x\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}}{4}$$

VR median in $\triangle VRB \Rightarrow$

$$A[VTB] = \frac{1}{2}A[VRB] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

$$A[VTB] = \frac{1}{2}VP \cdot BT; VP \perp BT$$

$$A[VTB] = \frac{1}{2} \cdot VP \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x^2 - 4ax + a^2} \quad (2)$$

By (1); (2) :

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}VP \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}$$

$$VP = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}}$$

$$V[VMNB] = \frac{A[BMN] \cdot VP}{3} =$$

$$= \frac{x\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2 - 4ax + a^2}} = \frac{a^2x\sqrt{2}}{12}$$

ALTE METODE DE REZOLVARE:**1. Prof. Buzea Gabriela, Școala Gimnazială Nr. 56, București****Metoda 1.**

$$V_{VBMN} = \frac{A_{\Delta VMN} \cdot d(B, (VMN))}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AC \\ M \in [VA] \\ N \in [VC] \\ \Delta VAC \text{ echilateral} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta VMN \text{ echilateral}$$

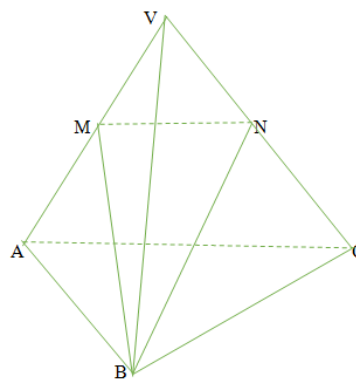
$$\text{Deci, } A_{\Delta VMN} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$d(B, (VMN)) = d(B, (VAC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

(înălțimea tetraedrului regulat).

În concluzie,

$$V_{VBMN} = \frac{A_{\Delta VMN} \cdot d(B, (VMN))}{3} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12}.$$

**Metoda 2.**

Folosind formula volumului cu distanța și unghiul dintre două muchii opuse, obținem

$$V_{VBMN} = \frac{1}{6} \cdot MN \cdot VB \cdot d(MN, VB) \cdot \sin(\angle(MN, VB)).$$

VABC este tetraedru regulat, deci stim că $AC \perp VB$, și cum $MN \parallel AC$, obținem $MN \perp VB$. Atunci $\sin(\angle(MN, VB)) = 1$.

$$\text{Distanța dintre } MN \text{ și } VB \text{ este } d(MN, VB) = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Obținem în final că } V_{VBMN} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12}.$$

Metoda 3.

Folosind formula cu sinusul triedrului, obținem

$$V_{VBMN} = \frac{1}{6} \cdot VM \cdot VB \cdot VN \cdot \sin(\sphericalangle MVN) \cdot \sin(\sphericalangle BVN) \cdot \sin(\sphericalangle((MVN), (BVN))) .$$

$\sin(\sphericalangle((MVN), (BVN))) = \sin(\sphericalangle((VAC), (VBC))) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (sinusul unghiului dintre două fețe ale tetraedruului regulat).

$$\text{Atunci, } V_{VBMN} = \frac{1}{6} \cdot x \cdot a \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12} .$$

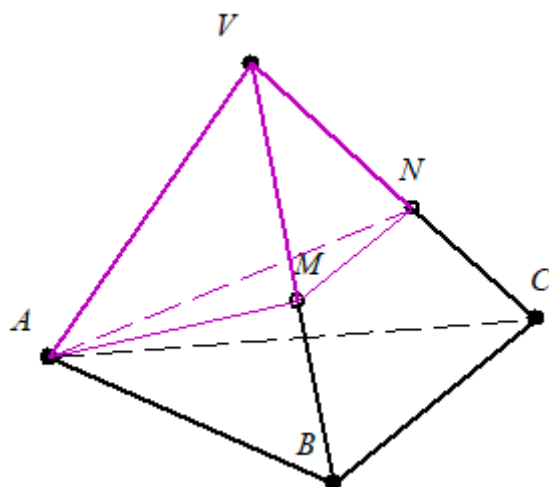
Metoda 4.

Folosind formula lui Monge pentru calcularea volumului unui tetraedru obținem

$$36V_{VBMN}^2 = VM^2 \cdot VB^2 \cdot VN^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos \sphericalangle MVB & \cos \sphericalangle MVN \\ \cos \sphericalangle MVB & 1 & \cos \sphericalangle BVN \\ \cos \sphericalangle MVN & \cos \sphericalangle BVN & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$36V_{VBMN}^2 = x^4 a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 36V_{VBMN}^2 = x^4 a^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V_{VBMN}^2 = \frac{x^4 a^2}{72} \Rightarrow$$

$$\text{Obținem } V_{VBMN} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12} .$$

2. Prof. Mihai Miculița-ORADEA:**Fig.1.**

În orice triunghi VBC , în care $|BC| = a$ și $M \in [VB]$, $N \in [VC]$, $MN \parallel BC$ și $|MN| = x$, avem (v.Fig.1):

$$\Delta VMN \sim \Delta VBC \Rightarrow \frac{S_{VMN}}{S_{VBC}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}.$$

Așa că, în orice tetraedru $VABC$, avem: $\frac{V_{VAMN}}{V_{VABC}} = \frac{S_{VMN}}{S_{VBC}} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{V_{VAMN} = \frac{x^2}{a^2} \cdot V_{VABC}}.$

În cazul nostru, tetraedrul $VABC$ – este regulat, avem:

$$V_{VABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \Rightarrow \boxed{V_{VAMN} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{ax^2 \sqrt{2}}{12}}. \blacksquare$$

În continuare, vă propun spre rezolvare următoarea **problemă mai generală**:

Fie $ABCD$ – un tetraedru echifacial, în care: $|DA| = |BC| = a$, $|DB| = |AC| = b$ și $|DC| = |AB| = c$; **iar** $M \in [DB]$ și $N \in [DC]$ – **sunt două puncte, astfel încât:** $|DM| = m$ și $|DN| = n$. **Arătați că:** $V_{ADMN} = \frac{mn}{12bc} \cdot \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$

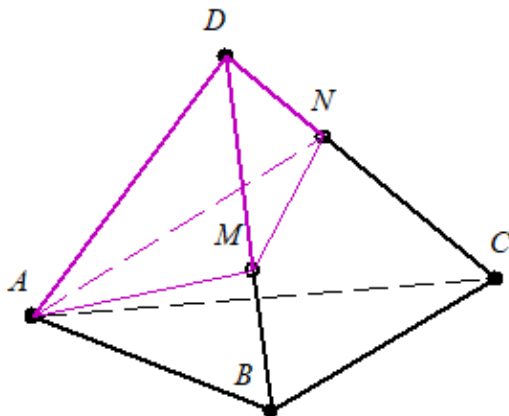


Fig.2.

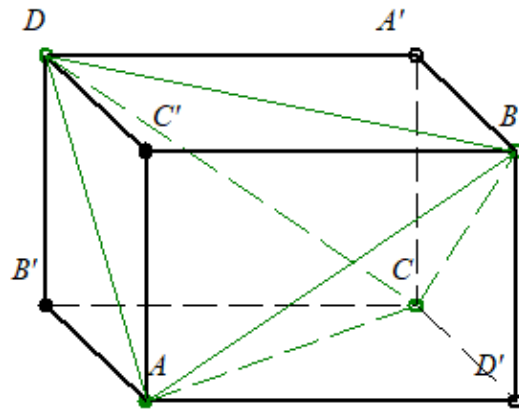


Fig.3.

SOLUȚIE: Din considerații analoage cu cele expuse în soluția dată mai sus a problemei lunii Iunie-2017 (v.fig.2), avem:

$$\frac{V_{ADMN}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{DMN}}{S_{DBC}} = \frac{|DM| \cdot |DN|}{|DB| \cdot |DC|} = \frac{mn}{bc} \Rightarrow \boxed{V_{ADMN} = \frac{mn}{bc} \cdot V_{ABCD}}. \quad (1)$$

Înainte de a trece la calculul volumului tetraedrului $ABCD$, în funcție de a, b și c , voi face următoarele 2 precizări:

-Dacă prin fiecare muchie a unui tetraedru ducem câte un plan paralel cu muchia opusă a acestui tetraedru, obținem un paralelipiped. Acest paralelipiped, poartă numele de "*paralelipiped circumscris tetraedrului*"; în acest caz spunem că *tetraedrul este înscris în paralelipiped*.

-Paralelipipedul circumscris unui tetraedru echifacial, este un paralelipiped dreptunghic!

(În fig.3, am notat cu X' – vârful paralelipipedului circumscris tetraedrului $ABCD$, care opus vârfului $X \in \{A, B, C, D\}$).

-Dacă V – este volumul paralelipipedului dreptunghic $AB'CD'A'BC'D$ – circumscris tetraedrului echifacial $ABCD$ și cu $x = |AD'|$, $y = |BD'|$ și cu: $z = |CD'|$ (dimensiunile sale), avem:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot V \text{ (Demonstrați!)} \Rightarrow \boxed{V_{ABCD} = \frac{xyz}{3}}. \quad (2)$$

Din triunghiul dreptunghic BCD' , obținem că: $|D'B|^2 + |D'C|^2 = |BC|^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = a^2. \quad (3)$

În mod analog, din triunghiurile dreptunghice ACD' și ABD' , obținem că:

$$x^2 + z^2 = b^2; \quad (4) \text{ și } x^2 + y^2 = c^2. \quad (5)$$

Din relațiile (3), (4) și (5), rezultă că: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}}. \quad (6)$$

În mod analog, găsim: $\boxed{y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}}; \quad (7) \text{ și } \boxed{z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}}. \quad (8)$

În fine, din relațiile (1), (2), (6), (7) și (8), rezultă că:

$$\boxed{V_{ADMN}} = \frac{mn}{bc} \cdot V_{ABCD} = \frac{mn}{bc} \cdot \frac{xyz}{3} = \boxed{\frac{mn}{12bc} \cdot \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}}. \blacksquare$$

Observație: În cazul: $b = c = \boxed{a}$ și $m = n = \boxed{x}$, obținem: $V_{ADMN} = \frac{ax^2\sqrt{2}}{12}$ (adică rezultatul problemei LUNII IUNIE)!

3. Prof. Constantin Telteu

Observație: ΔVNM este echilateral.

$$V_{VBMN} = \frac{1}{3} \cdot A_{VMN} \cdot d(B, (VMN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h_{\text{tetraedrului}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{ax^2 \sqrt{2}}{12}.$$

$$\left(h_{\text{tetraedrului}} = \sqrt{A_{\text{tetraedrului}}^2 - a_{\text{bazei}}^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \right)$$

4. Prof. Marin Chirciu

Piramida cu vârful în B și baza VMN are înălțimea egală cu distanța de la B la planul (VAC) , adică este înălțimea tetraedrului regulat $VABC$, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Baza VMN este un triunghi echilateral cu latura de lungime x și aria sa este egală cu

$$S = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Volumul piramidei } BVMN \text{ este } \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{ax^2 \sqrt{2}}{12}.$$

5. Prof. Szöcs Ana, Colegiul Tehnic „Grigore Cobălcescu” Moinești

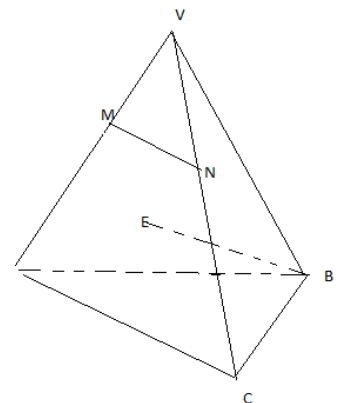
$VABCD$ tetraedru regulat $\Rightarrow \Delta VAC$ este echilateral și cum $MN \parallel AC$ se obține că triunghiul VMN este echilateral cu latura x .

Aria triunghiului VMN este $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$

Fie BE înălțimea tetraedrului dusă din vârful B pe fața VAC .

Știm că înălțimea tetraedrului regulat cu latura a este $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

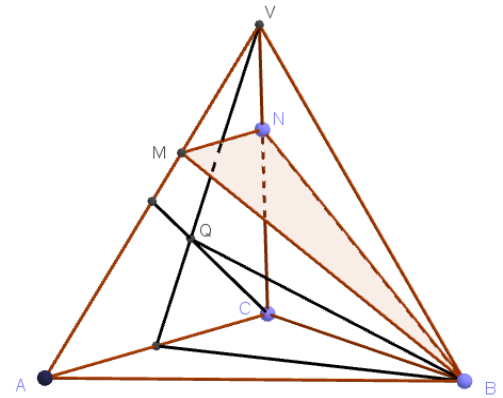
$$\text{Deci volumul piramidei } VBMC \text{ este } V = \frac{A_{VMN} \cdot BE}{3} = \frac{\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{ax^2 \sqrt{2}}{12}$$



**6. Prof. Gabriela Neșțescu, Școala Gimnazială,
Comuna Talea, Prahova**

Notez :

Q = centrul triunghiului echilateral ACV



BQ înălțime în tetraedrul regulat VABC $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} BQ \perp (VAC) \Rightarrow BQ \text{ înălțime în piramida VBMN} \\ BQ = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$\triangle ACV$ echilateral și $MN \parallel AC \Rightarrow \triangle MNV$ echilateral $\Rightarrow A(MNV) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$$V(VBMN) = \frac{A(MNV) \cdot BQ}{3} = \frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{ax^2\sqrt{2}}{12}$$

7. Prof. Pacurar Cosmin

Metoda 1

Fie $VF \perp AC, F \in AC, VF \cap MN = \{E\}$.

Evident că $VF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Din $MN \parallel AC \Rightarrow \triangle VEM \sim \triangle VFA \Rightarrow \frac{VE}{VF} = \frac{VM}{VA} \Rightarrow \frac{VE}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{a} \Rightarrow VE = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Fie $FT \perp VB, T \in BV \Rightarrow FT^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow FT = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Fie $BQ \perp VF, Q \in VF$.

$$\text{Avem } BQ \cdot VF = FT \cdot VB \Rightarrow BQ = \frac{FT \cdot VB}{VF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$VQ^2 = VB^2 - BQ^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{3a^2}{9} \Rightarrow VQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Cazul 1, $E \in [FQ]$

$$\text{Avem } QE = EV - VQ = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}(3x-2a)}{6}.$$

$$\text{Avem } EB^2 = EQ^2 + QB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}(3x-2a)}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{4a^2-4xy+3x^2}{4} \Rightarrow EB = \frac{\sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}{2}.$$

Fie $ES \perp VB$, $ScVB$. Cum și $FT \perp VB$ și $ES, FT \subset (VFB) \Rightarrow ES \parallel FT \Rightarrow \Delta VES \sim \Delta VFT \Rightarrow \frac{ES}{FT} = \frac{VE}{VF} \Rightarrow$

$$\frac{ES}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$ES = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Fie $VU \perp BE$, $U \in BE$.

$$\text{Avem } VU \cdot EB = ES \cdot VB \Rightarrow VU = \frac{ES \cdot VB}{EB} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{\sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}{2}} = \frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}.$$

Din $MN \perp VF$, $BE \Rightarrow MN \perp VU$

Din $VU \perp BE$, $MN \Rightarrow VU \perp (BMN)$.

$$\mathcal{A}_{\Delta BMN} = \frac{BE \cdot MN}{2} = \frac{\frac{\sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}{2} \cdot x}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}{4}$$

$$\mathcal{V}_{VBMN} = \frac{VU \cdot \mathcal{A}_{\Delta BMN}}{3} = \frac{\frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2-4xy+3x^2}} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{4a^2-4xy+3x^2}}{4}}{3} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12}.$$

Cazul 2, $E \in [VQ]$

$$\text{Avem } QE = VQ - EV = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(2a-3x)}{6}.$$

Analog cazului 1 se obține $\mathcal{V}_{VBMN} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{12}$.

Cazul 3, $E = Q$

$$\text{Avem } VE = VQ \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3} \Rightarrow \mathcal{V}_{VBMN} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27}.$$

Metoda 2

$$\text{Avem } EF = VF - VE = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}.$$

$$\mathcal{A}_{\Delta CNM} = \frac{EF \cdot (AC + MN)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2} \cdot (a+x)}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot (a^2 - x^2)}{4}.$$

Fie $BX \perp (VAC)$, $X \in (VAC) \Rightarrow BX = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$\mathcal{V}_{BMNCA} = \frac{BX \cdot \mathcal{A}_{\Delta CNM}}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (a^2 - x^2)}{4}}{3} = \frac{a\sqrt{2} \cdot (a^2 - x^2)}{12}.$$

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

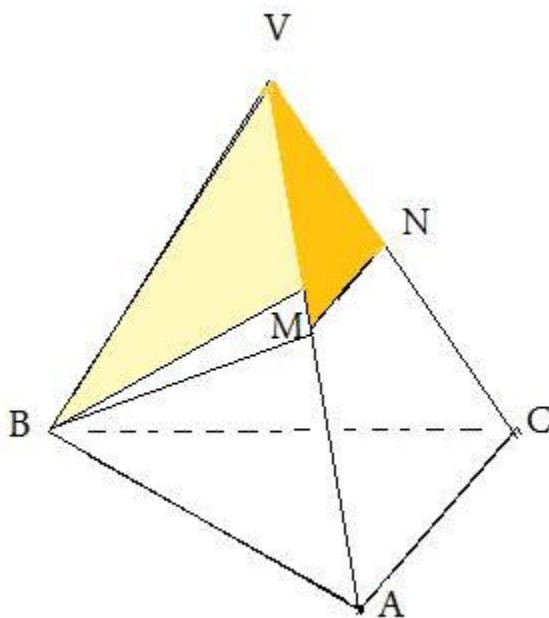
$$\mathcal{V}_{VBMN} = \mathcal{V}_{VABC} - \mathcal{V}_{BMNCA} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a\sqrt{2}(a^2-x^2)}{12} = \frac{x^2 a\sqrt{2}}{12}.$$

8. Prof. Biro Istvan

Înălțimea piramidei triunghiulare VBMN cu vârful B și bază triunghiul echilateral VMN de latură x este egală cu înălțimea tetraedrului regulat VABC, de unde avem:

$$h = \sqrt{a^2 - \left[\frac{2}{3} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2} \right]^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ și } V_{VBMN} = \frac{A_{VMN} \cdot h}{3} = \frac{x \cdot x \cdot \sin 60^\circ \cdot h}{2 \cdot 3} = \frac{ax^2\sqrt{2}}{12}.$$

9. Prof. Cojocar Petru, Români – Neamț



Soluție;

Tetraedru regulat VABC de muchie „ a ” are; apotema $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, apotema bazei $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ și $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Din $MN \parallel AC$, $MN = x$, avem ; ΔVMN echilateral și $\mathcal{A}_{\Delta VMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$$\mathcal{V}_{VBMN} = \mathcal{V}_{VBMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}ax^2.$$

3. DOUĂ PROBLEME ASOCIATE CU O PROBLEMĂ DIN AMM

de Neculai Stanciu, Buzău

În [1] Omran Kouba cere să se arate că cea mai bună constantă k pentru care inegalitatea

$$\frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} + \frac{b^2}{h_c^2 + h_a^2} + \frac{c^2}{h_a^2 + h_b^2} < k,$$

este adevărată în orice triunghi ascuțitunghic ABC este $k = \frac{5}{2}$.

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor, h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor, G centrul de greutate al triunghiului ABC iar X, Y, Z puncte arbitrare pe dreptele BC, CA, AB , atunci este adevărată inegalitatea

$$\frac{h_a^2 + GX^2}{a^2} + \frac{h_b^2 + GY^2}{b^2} + \frac{h_c^2 + GZ^2}{c^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Soluție. Fie d_a, d_b, d_c distanțele de la punctul G la dreptele BC, CA, AB .

Atunci,

$$d_a = \frac{h_a}{3}, d_b = \frac{h_b}{3}, d_c = \frac{h_c}{3} \text{ și } d_a \leq GX, d_b \leq GY, d_c \leq GZ.$$

Deci,

$$\sum_{cyc} \frac{h_a^2 + GX^2}{a^2} \geq \sum_{cyc} \frac{h_a^2 + d_a^2}{a^2} = \sum_{cyc} \frac{h_a^2 + \frac{h_a^2}{9}}{a^2} = \frac{10}{9} \sum_{cyc} \left(\frac{h_a}{a} \right)^2, (1).$$

Avem,

$$a = h_a(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \Rightarrow \frac{h_a}{a} = \frac{1}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C} \text{ și analoagele.}$$

Rezultă

$$\sum_{cyc} \left(\frac{h_a}{a} \right)^2 = \sum_{cyc} \frac{1}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2}, (2).$$

Ținând cont de inegalitatea

$$(xy + yz + zx) \sum_{cyc} \frac{1}{(x + y)^2} \geq \frac{9}{4}, \forall x, y, z > 0 \text{ (Olimpiada Iraniană de Matematică, 1996)}$$

unde punem $x = \operatorname{ctg} A, y = \operatorname{ctg} B, z = \operatorname{ctg} C$ și folosim faptul că $\sum_{cyc} \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1$

deducem

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2} \geq \frac{9}{4}, (3).$$

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$\sum_{cyc} \frac{h_a^2 + GX^2}{a^2} \geq \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral iar X, Y, Z sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB .

Problema 2. Dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic cu a, b, c lungimile laturilor, G centrul de greutate iar X, Y, Z puncte arbitrare pe dreptele BC, CA, AB , atunci este adevărată inegalitatea

$$\frac{AX^2 + GX^2}{a^2} + \frac{BY^2 + GY^2}{b^2} + \frac{CY^2 + GZ^2}{c^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Soluție. Fie h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului ABC . Fie d_a, d_b, d_c distanțele de la punctul G la dreptele BC, CA, AB . Atunci,

$$d_a = \frac{h_a}{3}, d_b = \frac{h_b}{3}, d_c = \frac{h_c}{3} \text{ și}$$

$$d_a \leq GX, d_b \leq GY, d_c \leq GZ.$$

Avem $AX \geq h_a, GX \geq \frac{h_a}{3}$ și analoagele. Deci,

$$\sum_{cyc} \frac{AX^2 + GX^2}{a^2} \geq \sum_{cyc} \frac{h_a^2 + \frac{h_a^2}{9}}{a^2} = \frac{10}{9} \sum_{cyc} \left(\frac{h_a}{a} \right)^2, (1).$$

Avem,

$$a = h_a(ctgB + ctgC) \Rightarrow \frac{h_a}{a} = \frac{1}{ctgB + ctgC} \text{ și analoagele.}$$

Rezultă

$$\sum_{cyc} \left(\frac{h_a}{a} \right)^2 = \sum_{cyc} \frac{1}{(ctgA + ctgB)^2}, (2).$$

Ținând cont de inegalitatea

$$(xy + yz + zx) \sum_{cyc} \frac{1}{(x + y)^2} \geq \frac{9}{4}, \forall x, y, z > 0 \text{ (Olimpiada Iraniană de Matematică, 1996)}$$

unde punem $x = ctgA, y = ctgB, z = ctgC$ și folosim faptul că $\sum_{cyc} ctgA ctgB = 1$

deducem

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(ctgA + ctgB)^2} \geq \frac{9}{4}, (3).$$

Din (1), (2) și (3) obținem:

$$\sum_{cyc} \frac{AX^2 + GX^2}{a^2} \geq \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \text{ q.e.d.}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral iar X, Y, Z sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB .

Bibliografie

1. **O. Kouba**, *Problema 11951*, The American Mathematical Monthly, Vol. 124, No. 1 (January 2017), p. 83.

4. INEGALITĂȚI OBTINUTE PRIN RESTRICȚIONAREA UNOR FUNCȚII CONVEXE LA UN INTERVAL

Sebastian Ilinca ,

Școala Gimnazială Pîrșcoveni , jud.OLT

Lema : Fie $F : [a, b] \times [a, b] \times \dots \times [a, b] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ o funcție. Dacă fixăm $n-1$ variabile x_j , $j \neq k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, a.î. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_k)$ este o funcție convexă în variabilă x_k .

F își atinge minimul în punctul $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dacă și numai dacă

$$\alpha_i \in \{a, b\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Demonstrație : Avem de arătat că dacă f este o funcție convexă definită pe intervalul $[a, b]$

atunci: $f(x) \leq \max \{f(a), f(b)\}$, $\forall x \in [a, b]$. Intervalul $[a, b]$ poate fi scris ca:

$$[a, b] = \{(1-t)b + ta \mid t \in [0, 1]\}. \text{ Pentru orice } x \in [a, b] \text{ există } t \in [0, 1], \text{ a.î. } x = ta + (1-t)b.$$

Deoarece funcția f este convexă deducem că $f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq \max \{f(a), f(b)\}$

. ■

Aplicații:

1) Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ numere reale pozitive. Găsiți maximul expresiei:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2.$$

Soluție: Fie $f(x_1) = (n-1)^2 x_1 - 2 \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) x_1 + c$, $f''(x) = 2(n-1) \geq 0 \Rightarrow f$ este convexă.

Conform lemei $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)$ își atinge maximul dacă și numai dacă

$x_i \in \{a, b\}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Presupunem că, k numere x_i sunt egale cu a și $n-k$ numere x_i sunt egale cu b .

$$\text{Atunci } F = n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = nka^2 + n(n-k)b^2 - (ka + (n-k)b)^2 = k(n-k)(a-b)^2.$$

$$\max (F) = \begin{cases} m^2(a-b)^2, & n = 2m, n \in N \\ n(m+1)(a-b)^2, & n = 2m+1, m \in N \end{cases}$$

2) Arătați că pentru orice numere reale nenegative $a, b, c \leq 1$ avem

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Soluție : Fie funcția $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$.

$f''(a) = \frac{2b}{(c+a+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} \geq 0$, deci f este convexă, prin urmare își atinge maximum în unul din punctele $a, b, c \in \{0, 1\}$. $f(a, b, c) = 1, \forall a, b, c \in \{0, 1\}$.

Lema 2: Fie $f : [a, b] \rightarrow R$ o funcție convexă și $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ astfel încât

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s = \text{const}$, $na \leq s \leq nb$. Expresia $F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ își atinge valoarea maximă dacă și numai dacă cel puțin $n-1$ termeni ai șirului $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sunt egali cu a sau b .

Demonstrație: Demonstrăm cazul $n = 2$.

Avem de arătat că dacă $x, y \in [a, b]$ și $2a \leq x + y \leq 2b$, $x + y = s$ atunci

$$f(x) + f(y) \leq \begin{cases} f(a) + f(s-a), & \text{dacă } s \leq a+b \\ f(b) + f(s-a), & \text{dacă } s \geq a+b \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă $s \leq a+b$ rezultă $s-a \leq b$.

Pentru $x \in [a, s-a]$ scriem $x = ta + (1-t)(s-a)$, $t \in (0, 1)$, $y = s-x = (1-t)a + t(s-a)$

Din definiția funcției convexe avem:

$$f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(s-a) \text{ și } f(y) \leq (1-t)f(a) + tf(s-a).$$

Prin adunarea acestor ultime două relații se obține $f(x) + f(y) \leq f(a) + f(s-a)$. Analog cazul $s \geq a+b$.

Exemple: 1) Fie $a, b, c \in [0, 2]$ a.î. $a+b+c=5$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9$

Soluție: Presupunem că $a \leq b \leq c$. Conform lemei 2 $a^2 + b^2 + c^2$ își atinge maximum dacă și numai dacă $a = 0$ sau $b+c=5 \geq 4$, contradicție. Dacă $a=1$ atunci maximum expresiei $a^2 + b^2 + c^2$ este egal cu $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$

2) Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ numere reale din intervalul $[-1, 1]$ a.î. $a_1 + a_2 + \dots + a_{2007} = 0$.

Demonstrați că $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2007}^2 \leq 2006$.

Soluție : Conform lemei 2 expresia $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2007}^2$ își atinge maximul dacă și numai dacă k numere sunt egale cu 1 și $n - k - 1$ numere sunt egale cu -1. Nu putem avea decât $k=1003$ și ultimele numere egale cu 0. Astfel $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2007}^2 \leq 2006$.

BIBLIOGRAFIE

1. Can, Vo Quoc Ba, Pohoată C. : *Old & New Inequalities (vol 2)*, Editura GIL, 2008
2. Drimbe M. O. : *Inegalități idei și metode*, Editura GIL, 2003
3. Ganga M. : *Manual de analiză matematică clasa a XII a*, Editura Mathpress, 2007

4. INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE GENERATE DE INEGALITĂȚI ALGEBRICE

Marin Chirciu¹

Articolul își propune ca pornind de la inegalități algebrice în trei variabile pozitive a, b, c , condiționate de $abc = 1$, să obținem inegalități cu tangente și cotangente în triunghi.

1) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Macedonia 2015

Soluție.

Ridicând la pătrat și înlocuind $abc = 1$, inegalitatea este echivalentă cu:

$$\sum a^4b^2 + \sum ab^2 \geq \sum a^2b + 3, \text{ care rezultă din adunarea inegalităților:}$$

$$\sum a^4b^2 \geq \sum a^2b \text{ (adevărată din } \sum x^2 \geq \sum x, \text{ unde } x, y, z > 0, xyz = 1) \text{ și}$$

$$\sum ab^2 \geq 3 \text{ (adevărată din AM-GM și } abc = 1).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 1).

1a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \frac{1}{p} \sqrt{r(4R+r)}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 1) și

$$\text{identitățile cunoscute în triunghi } \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}, \quad \sum \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1.$$

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

1b)

În $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \frac{p}{r} \sqrt{1 + \frac{4R}{r}}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm **1)** și

identitățile cunoscute în triunghi $\sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$, $\sum \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum a^3 + \sum \frac{bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Moldova TST 2015

Soluție.

Din $a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ obținem $2\sum a^3 \geq \sum ab(a+b) = \sum a(b^2 + c^2)$, (1).

Apoi $\sum \frac{bc}{b^2 + c^2} = \sum \frac{1}{a(b^2 + c^2)} \geq \frac{9}{\sum a(b^2 + c^2)} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{9}{2\sum a^3}$, (2).

Rezultă $\sum a^3 + \sum \frac{bc}{b^2 + c^2} \stackrel{(2)}{\geq} \sum a^3 + \frac{9}{2\sum a^3} \stackrel{(3)}{\geq} \frac{9}{2}$, unde (3)

$$\sum_{a^3=t} \frac{9}{2t} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)(2t-3) \geq 0,$$

evident deoarece $t = \sum a^3 \geq 3abc = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 2).

2a)

In $\triangle ABC$

$$\frac{p}{r} \sum \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} + \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{9}{2}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 2).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2b)

In $\triangle ABC$

$$\frac{r}{p} \sum \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} + \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{9}{2}.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 2).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum \frac{1}{a^3 + b^3 + a^3 b^3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Din $a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ obținem:

$$\sum \frac{1}{a^3 + b^3 + a^3 b^3} \leq \sum \frac{1}{ab(a+b) + a^3 b^3} = \sum \frac{c^2}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

unde ultima inegalitate este adevărată din inegalitatea mediilor și condiția $abc = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 3).

3a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right).$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 3)

identitatea cunoscută în triunghi $\sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{1}{\operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} \operatorname{ctg}^3 \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{r}{p} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{p^2 - 8Rr}{r^2} - 2 \right).$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 3) și

identitatea cunoscută în triunghi $\sum \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - 8Rr}{r^2} - 2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum \frac{a^3 + 8}{a^3(b+c)} \geq \frac{27}{2}.$$

Hong Kong TST 2016

Soluție.Din $a^3 + 1 + 1 \geq 3a$ (AM-GM) obținem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3 + 8}{a^3(b+c)} &\geq \sum \frac{3a+6}{a^3(b+c)} = 3 \sum \frac{a}{a^3(b+c)} + 6 \sum \frac{1}{a^3(b+c)} = 3 \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{b+c} + 6 \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)} \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} 3 \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{2 \sum a} + 6 \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{2 \sum bc} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\sum bc)^2}{\sum a} + 3 \cdot \frac{(\sum bc)^2}{\sum bc} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2} \cdot 3abc + 3 \sum bc = \frac{9}{2} + 3 \sum bc \stackrel{(2)}{\geq} \\ &\stackrel{(2)}{\geq} \frac{9}{2} + 3 \cdot 3 = \frac{27}{2}, \end{aligned}$$

unde (1) rezultă din $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, cu $x=bc, y=ca, z=ab$ și $abc=1$,iar (2) rezultă din inegalitatea mediilor și $abc=1$.Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 4).

4a)In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\frac{p}{r} \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} + 8}{\operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)} \geq \frac{27}{2} \cdot \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Demonstrație.Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 4).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4b)In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\frac{r}{p} \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} + 8}{\operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)} \geq \frac{27}{2} \cdot \left(\frac{r}{p} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

.

.

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 4)

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum \frac{a^3 + n}{a^3(b+c)} \geq \frac{3(n+1)}{2}, \text{ unde } n \geq 2.$$

Dezvoltare Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Din $a^3 + 1 + 1 \geq 3a$ (AM-GM) obținem $a^3 + n = a^3 + 1 + 1 + n - 2 \geq 3a + n - 2$. Rezultă:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3 + n}{a^3(b+c)} &\geq \sum \frac{3a + n - 2}{a^3(b+c)} = 3 \sum \frac{a}{a^3(b+c)} + (n-2) \sum \frac{1}{a^3(b+c)} = 3 \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{b+c} + (n-2) \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)} \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} 3 \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{2 \sum a} + (n-2) \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{2 \sum bc} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\sum bc)^2}{\sum a} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{(\sum bc)^2}{\sum bc} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2} \cdot 3abc + \frac{n-2}{2} \cdot \sum bc = \frac{9}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot \sum bc \stackrel{(2)}{\geq} \\ &\stackrel{(2)}{\geq} \frac{9}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot 3 = \frac{3(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

unde (1) rezultă din $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, cu $x=bc, y=ca, z=ab$ și $abc=1$,

iar (2) rezultă din inegalitatea mediilor și $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 5).

5a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\frac{p}{r} \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} +}{\operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)} \geq \frac{3(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{4}{3}}, \text{ unde } n \geq 2.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 5).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\frac{r}{p} \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} + n}{\operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)} \geq \frac{3(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{r}{p} \right)^{\frac{4}{3}}, \text{ unde } n \geq 2.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 5).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c).$$

Mathematics and Youth Magazine 2017, Tran Xuan Dang, Vietnam

Soluție.

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \sum a \sum bc - 1 \text{ și } 2(1+a+b+c) = 2 + 2 \sum a.$$

Inegalitatea se scrie $\sum a \sum bc - 1 \geq 2 + 2 \sum a \Leftrightarrow \sum a (\sum bc - 2) \geq 3$, care rezultă din inegalitatea mediilor și $abc = 1$.

Într-adevăr $\sum a \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ și $\sum bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$, de unde $\sum a (\sum bc - 2) \geq 3(3 - 2) = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 6).

6a)

In $\triangle ABC$

$$\frac{p}{r} \prod \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \geq 2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \cdot \frac{4R+r}{p} \right).$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 6) și

$$\text{identitatea } \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6b)

In $\triangle ABC$

$$\frac{r}{p} \prod \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) \geq 2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}} \right).$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 5) și

$$\text{identitatea } \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1) .$$

Mathematical Olympiad Summer Program 2001. MOSP 2001

Soluție.

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \sum a \sum bc - 1 \text{ și } 4(a+b+c-1) = 4 \sum a - 4 .$$

Inegalitatea se scrie $\sum a \sum bc - 1 \geq 4 \sum a - 4 \Leftrightarrow \sum bc + \frac{3}{\sum a} \geq 4$, care rezultă din:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), x=bc, y=ca, z=ab \text{ și } abc=1, \text{ de unde } (\sum bc)^2 \geq 3 \sum a ; (1)$$

$$\sum bc + \frac{3}{\sum a} = \frac{\sum bc}{3} + \frac{\sum bc}{3} + \frac{\sum bc}{3} + \frac{3}{\sum a} \stackrel{AM-GM}{\geq} 4 \sqrt[4]{\frac{\sum bc}{3} \frac{\sum bc}{3} \frac{\sum bc}{3} \frac{3}{\sum a}} \stackrel{(1)}{\geq}$$

$$\stackrel{(1)}{\geq} 4 \sqrt[4]{\frac{\sum bc}{9} \cdot 3} \stackrel{(2)}{\geq} 4, \text{ unde } (2) \Leftrightarrow \sum bc \geq 3, \text{ care rezultă din inegalitatea mediilor și } abc=1.$$

$$\text{Într-adevăr } \sum a \geq 3 \sqrt[3]{abc} = 3 \text{ și } \sum bc \geq 3 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = 3, \text{ de unde } \sum a (\sum bc - 2) \geq 3(3-2) = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 7).

7a)

In $\triangle ABC$

$$\frac{p}{r} \prod \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \geq 4 \left(\sqrt[3]{\frac{p}{r}} \cdot \frac{4R+r}{p} - 1 \right) .$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 7) și

$$\text{identitatea } \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7b)

In $\triangle ABC$

$$\frac{r}{p} \prod \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) \geq 4 \left(\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}} - 1 \right).$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 7) și

identitatea $\sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum a^3 + \sum (bc)^3 \geq 2 \sum a^2 b.$$

Crux Mathematicorum 31/2005, Babis Stergiu, Grecia

Soluție.

Din inegalitatea mediilor $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b$, de unde $\sum a^3 \geq \sum a^2b$; (1).

Apoi $\sum (bc)^3 = \sum \frac{1}{a^3} = \sum x^3 \geq \sum xy^2 = \sum \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2} = \sum a^2b$; (2).

Din (1) și (2) obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 8).

8a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} + \frac{p}{r} \sum \operatorname{tg}^3 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{C}{2} \geq 2 \sum \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 8).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} + \frac{r}{p} \sum \operatorname{ctg}^3 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^3 \frac{C}{2} \geq 2 \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 8).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum ab^2 \geq \sum ab.$$

Crux Mathematicorum 29/2003, Panos E. Tsaoussoglou, Grecia

Soluție.

Din inegalitatea mediilor $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3\sqrt[3]{ab^2c^2} \geq 3bc$, de unde $\sum a^2b \geq \sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 9).

9a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{p}}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm **9)** și identitatea $\sum \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \left(1 + \frac{4R}{r} \right).$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm **9)** și identitatea $\sum \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1 + \frac{4R}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Croația TST 2004

Soluție.

Din inegalitatea mediilor $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} \geq 3a$, obținem

$$\sum \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) \geq 3 \sum a \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b} \geq \sum a.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea **9)**.

10a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \cdot \frac{4R+r}{p}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm **10)** și identitatea $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1 + \frac{4R}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}} \geq \left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm **10)** și identitatea $\sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

11) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca.$$

Georgia TST 2005

Soluție.

Tripletele (a, b, c) și (a^2, b^2, c^2) sunt la fel ordonate. Cu inegalitatea lui Cebâșev obținem:

$\sum a^3 = \sum a^2 \cdot a \geq \frac{1}{3} \sum a^2 \sum a \stackrel{(1)}{\geq} \sum a^2 \geq \sum bc$, unde $(1) \Leftrightarrow \sum a \geq 3$ (adevărată din inegalitatea mediilor și $abc = 1$).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 11).

11a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{tg}^3 \frac{A}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{p}}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 11) și identitatea $\sum \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

11b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \operatorname{ctg}^3 \frac{A}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \left(1 + \frac{4R}{r} \right).$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$, aplicăm 11) și identitatea $\sum \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1 + \frac{4r}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum \frac{a}{b^2 + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Crux Mathematicorum 2/2009, Cao Minh Quang, Vietnam

Soluție.

Substituind $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ inegalitatea se scrie: $\sum \frac{y^2}{x(y+1)} \geq \frac{3}{2}$, unde $x, y, z > 0, xyz = 1$,

care rezultă din inegalitatea lui Bergström: $\sum \frac{y^2}{x(y+1)} \geq \frac{(\sum x)^2}{\sum xy + \sum x} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{2}$, unde

(1) $\Leftrightarrow 2(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) + 3(x+y+z)$, adevărată din sumarea inegalităților:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \text{ și } (x+y+z)^2 \geq 3(x+y+z).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 12).

12a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{3}{2}.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 12).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12b)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{3}{2}.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 12).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

13) Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$ arătați că

$$\sum \frac{a}{b^2 + nb} \geq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Substituind $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ inegalitatea se scrie: $\sum \frac{y^2}{x(y+n)} \geq \frac{3}{n+1}$, unde $x, y, z > 0, xyz = 1$,

care rezultă din inegalitatea lui Bergström: $\sum \frac{y^2}{x(y+n)} \geq \frac{(\sum x)^2}{\sum xy + n \sum x} \stackrel{(1)}{\geq} \frac{3}{n+1}$, unde

(1) $\Leftrightarrow (n+1)(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) + 3n(x+y+z)$, adevărată din sumarea inegalităților:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \text{ și } n(x+y+z)^2 \geq 3n(x+y+z).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Două inegalități în triunghi obținute din inegalitatea 13).

13a)

In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \left(n + \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 0.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 13).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

13b)

In $\triangle ABC$

.

$$\sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \left(n + \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right)} \geq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 0.$$

Demonstrație

Folosim identitatea $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$. Punând $x = \sqrt[3]{\frac{r}{p}} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ avem $xyz = 1$ și aplicăm 13).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie

1. Macedonian Mathematical Olympiad , 2015.
2. Moldavia Team Selection Test, 2015.
3. Hong Kong Team Selection Test 2016.
4. Tran Xuan Dang, Mathematics and Youth Magazine 2017, Vietnam.
5. Babis Stergiu, Grecia, Crux Mathematicorum 31/2005.
6. Georgia Team Selection Test 2005.
7. Panos E.Tsaoussoglou, Grecia ,Crux Mathematicorum 29/2003.
8. Croația Team Selection Test 2004.
9. Cao Minh Quang, Vietnam, Crux Mathematicorum 2/2009.
10. Mathematical Olympiad Summer Program 2001.
11. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
12. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
13. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
14. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
15. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

5. LOCURI GEOMETRICE

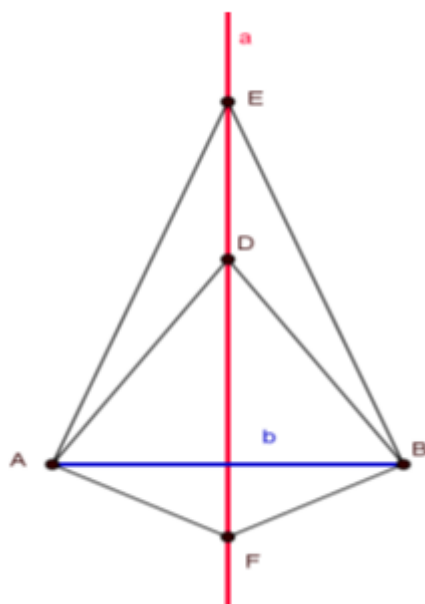
Balogh Erika,

Col.Tehnic “C.D.Nenițescu” Baia Mare

1.INTRODUCERE

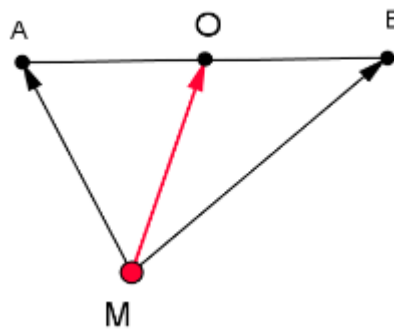
Definiția. **Locul geometric** reprezintă, în geometrie, mulțimea punctelor care satisfac o anumită proprietate.

Exp. Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de extremitățile unui segment este mediatoarea segmentului dat.



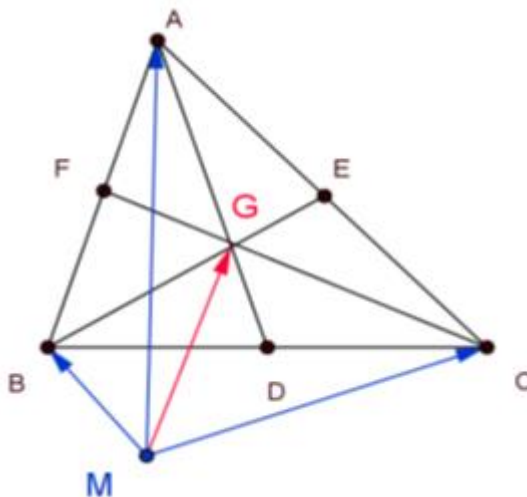
1.Dacă punctul O este mijlocul segmentului AB atunci și M un punct oarecare atunci are loc

relația vectorială:
$$\overrightarrow{MO} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}{2}$$



2. Fie ABC un triunghi oarecare cu centru de greutate G. Dacă M este un punct oarecare atunci are

loc următoarea relație vectorială: $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$



Demonstrația: vectorul $\overrightarrow{MG}$ se poate descompune în felul următor:

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$$

Suma acelor trei relații: $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$

știind că $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$ respectiv $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$ și

$$\text{D mijlocul lui BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \quad (1)$$

$$\text{E mijlocul lui AC} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \quad (2)$$

$$\text{F mijlocul lui AB} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{2} \quad (3)$$

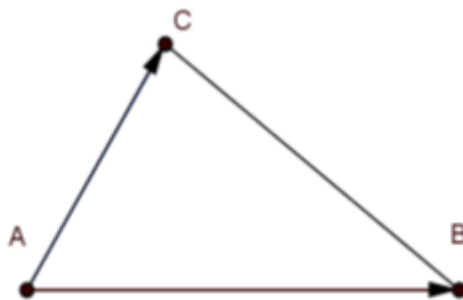
$$\text{Adunând relațiile (1), (2) și (3)} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

$$3. \text{Produsul scalar doi vectori: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

4. Teorema cosinusului:

Dacă ABC este un triunghi oarecare atunci au loc următoarele relații:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \quad \text{sau} \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \cdot BA \cdot \cos B \quad CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C \quad AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

5. Dacă λ este o constantă (și are loc relația: $\overrightarrow{MA} = \lambda \cdot \vec{a}$, unde A este un punct fix care aparține

dreptei d cu versorul $\vec{a}$ atunci locul geometric al punctului M este o dreaptă paralelă cu dreapta d.

6. Dacă λ ($\lambda > 0$) este o constantă și are loc relația: $MP^2 = \lambda$ unde P este un punct fix atunci locul geometric al punctului M va fi

a) un cerc cu centrul P și raza $\sqrt{\lambda}$ în plan

b) o sferă cu centrul P și raza $\sqrt{\lambda}$ în spațiu

Problemele cu locuri geometrice demonstrate elementar sunt destul de lungi, pentru că de fapt trebuie demonstrate două lucruri: existența și unicitatea.

În unele probleme cu locuri geometrice se poate aplica calculul vectorial care duce la o soluție cât mai simplă.

Mai departe doresc să prezint câteva probleme cu locuri geometrice în care metoda vectorială este mai bună decât cea elementară.

2.REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE LOCURI GEOMETRICE FOLOSIND CALCULUL VECTORIAL

2.1.) Se consideră în spațiu trei puncte necoliniare A, B, C.

Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care: $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este o constantă.

Soluția:

Se notează cu G centrul de greutate al triunghiului ABC și știind că:

$$3 \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

ridicând la pătrat obținem:

$$9 MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

folosind Teorema cosinusului rezultă

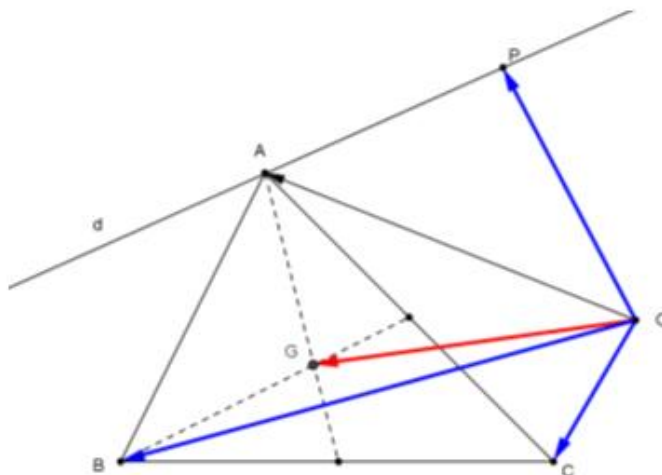
$$9 MG^2 = 2 (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

Din această relație rezultă că $MG^2 = \text{constant}$. Locul geometric este deci o sferă cu centrul G și rază MG.

2.2.) Vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sunt fixe iar vîrfurile A se deplasează pe dreapta

(d). Să se afle locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC.

Soluția:



Se consideră în planul triunghiului un punct fix O. Rezultă relația vectorială:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

Dacă P este un punct fix pe dreapta d și $\vec{u}$ este versorul acestei drepte atunci putem scrie:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \lambda \vec{u}}{3} = \vec{a} + \frac{\lambda \vec{u}}{3}$$

$$\text{unde } \vec{a} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

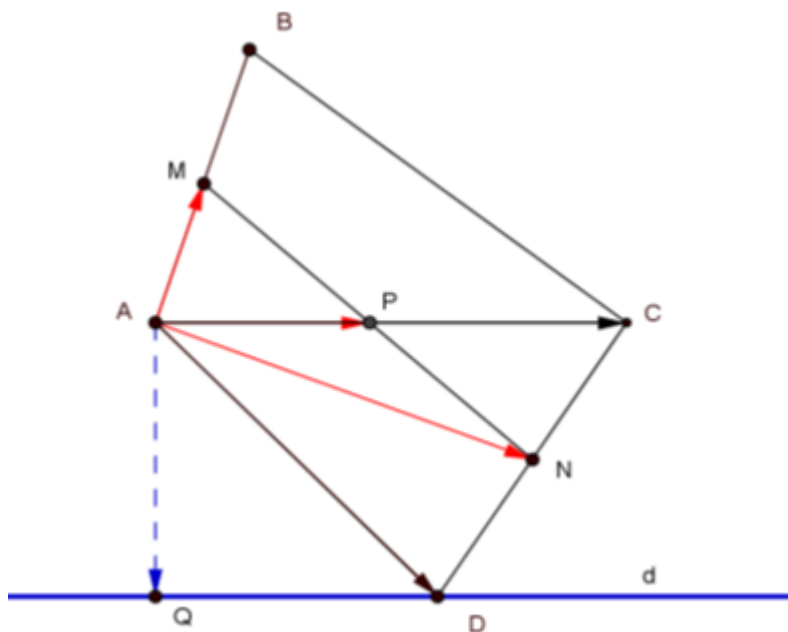
Deci locul geometric al punctului G este o dreaptă paralelă cu dreapta d.

2.3.) În patrulaterul ABCD vîrfurile A, B, C sunt fixe iar virful D descrie o dreapta d.

Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN care uneste mijlocul lui AB

cu mijlocul lui CD.

Soluția:



Fie P mijlocul segmentului MN. Din A ducem perpendiculara pe dreapta d și notăm cu

Q piciorul perpendicularei.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AQ} + \lambda \vec{u} \quad \text{unde } \vec{u} \text{ este versorul dreptei } d \text{ iar } \lambda \in \mathbf{R}$$

În triunghiul ACD, AN este mediana prin urmare:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AQ} + \lambda \vec{u} + \overrightarrow{AC}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\lambda \vec{u}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Vectorii } \overrightarrow{AM} \text{ și } \overrightarrow{AB} \text{ sunt coliniari} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \quad (2)$$

$$\text{în triunghiul AMN, AP fiind mediană avem relația:} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}}{2} \quad (3)$$

Aplicând relațiile (1) și (2) în relația (3) se obține: $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\lambda \vec{u}}{4}$

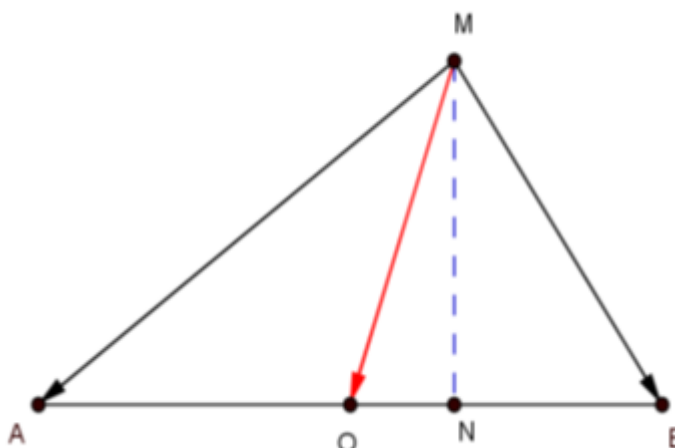
Fie $\frac{\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{4} = \vec{a}$ este constant prin urmare avem: $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{\lambda \vec{u}}{4}$

Deci locul geometric este o dreaptă paralelă cu dreapta d.

2.4.) Se cere locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor la două puncte

fixe este o constantă.

Soluția:



A, B, puncte fixe și M punctul mobil iar din enunț avem: $MA^2 - MB^2 = k^2$

Presupunem că $MA > MB$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = k^2$$

Dar $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OB}$, unde O este mijlocul segmentului AB

și $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} = -2\overrightarrow{OM}$

Folosind cele două relații obținem:

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = 4 \cdot OB \cdot ON = k^2, \text{ unde } MN \perp AB$$

Deci $ON = \frac{k^2}{4OB} = \frac{k^2}{2AB}$ este constant și proiecția lui M pe AB este fix, deci locul geometric

al punctului M este:

- a) dreapta MN perpendiculară pe AB dacă problema se pune în plan.
- b) un plan perpendicular pe AB dus prin N dacă problema se pune în spațiu.

2.5.) Se cere locul geometric al punctelor care au suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe o constantă.

Soluția:

Folosim aceeași figură ca la problema 4.)

Fie $AB = a$

Din enunț avem $MA^2 + MB^2 = k^2$ constant

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2 \text{ constant care se poate scrie sub forma}$$

$$(\overline{MA} + \overline{MB})^2 - 2 \overline{MA} \cdot \overline{MB} = k^2$$

$$\text{sau } (\overline{MA} - \overline{MB})^2 + 2 \overline{MA} \cdot \overline{MB} = k^2$$

$$\text{Știind că } \overline{MA} + \overline{MB} = 2 \overline{MO} \text{ și } \overline{MA} - \overline{MB} = \overline{BA}$$

$$\text{rezultă: } 4MO^2 - 2 \overline{MA} \cdot \overline{MB} = k^2 \quad (1) \quad \text{respectiv: } BA^2 + 2 \overline{MA} \cdot \overline{MB} = k^2 \quad (2)$$

prin adunarea celor două relații se obține: $4MO^2 + BA^2 = 2k^2$

$$MO^2 = \frac{1}{4}(2k^2 - a^2)$$

$$\text{deci } MO = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2} = \text{constant}$$

În concluzie locul geometric este:

- a) cercul cu centrul O și raza $OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ dacă problema se pune în plan.
- b) sferă cu centrul O și raza $OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ dacă problema se pune în spațiu.

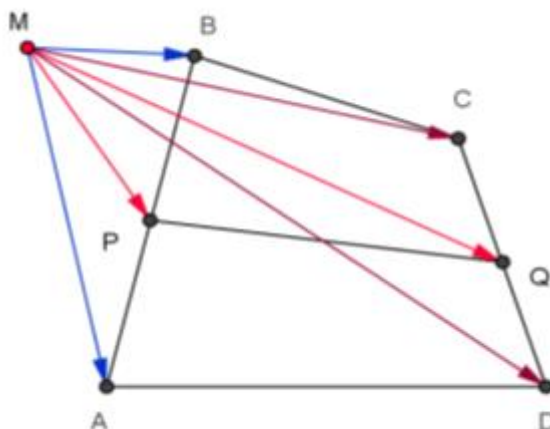
Condiția de existență a locului geometric este $k > \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (semidiagonala pătratului cu latura

a) Pentru $k = a$ avem $OM = \frac{a}{2}$ și locul geometric devine cercul respectiv sfera cu diametrul AB.

2.6.) Se consideră în spațiu punctele A, B, C, D.

Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care, $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

Soluția:



Fie M un punct curent al locului geometric și fie P și Q mijloacele segmentelor AB și CD. Atunci putem scrie:

$$2\overline{MP} = \overline{MA} + \overline{MB} \quad \text{și} \quad 2\overline{MQ} = \overline{MD} + \overline{MC}$$

Ridicând la pătrat cele două egalități și aplicând Teorema cosinusurilor rezultă:

$$4 MP^2 = MA^2 + MB^2 + 2 \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2 (MA^2 + MB^2) - AB^2$$

respectiv

$$4 MQ^2 = MD^2 + MC^2 + 2 \overline{MD} \cdot \overline{MC} = 2 (MD^2 + MC^2) - CD^2$$

ținând seama de egalitatea $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ obținem:

$$4 MP^2 = 4 MQ^2 + CD^2 - AB^2 \quad \text{sau} \quad MP^2 - MQ^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4} = \text{constant}$$

Deci locul geometric este un plan perpendicular pe dreapta ce unește mijloacele laturilor AB și CD.

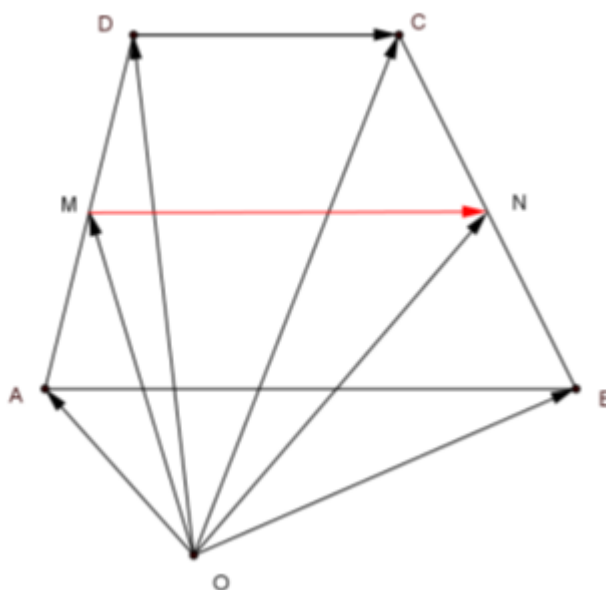
3. AVANTAJELE CALCULULUI VECTORIAL LA REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE

În acest capitol voi prezenta cinci probleme de geometrie aplicând la fiecare calculul vectorial.

Cerințele problemelor vor fi: paralelism, concurență, relații metrice, coliniaritate și inegalități geometrice.

3.1.) Linia mijlocie într-un trapez este paralelă cu bazele și egală cu semisuma lor.

Demonstrație:



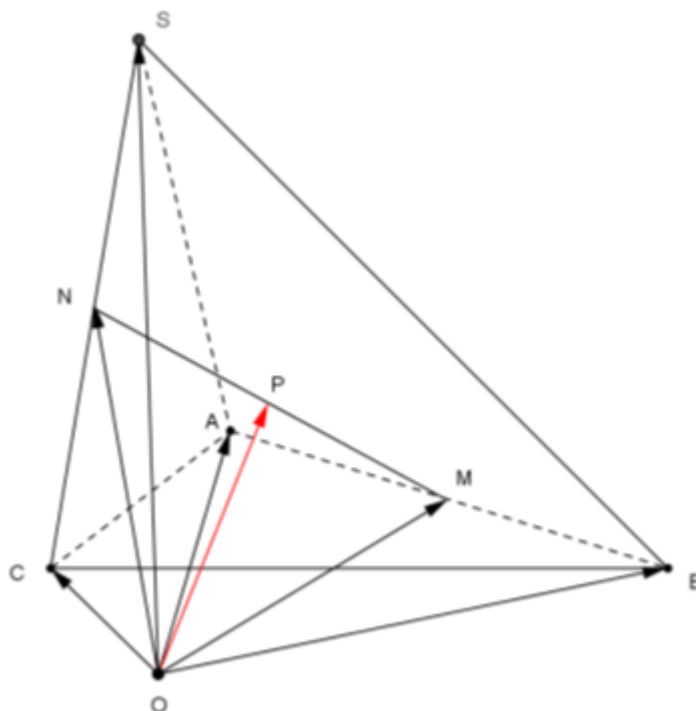
Fie trapezul ABCD ($AB \parallel CD$)

M mijlocul lui AB respectiv N mijlocul lui BC iar $O \in (ABCD)$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \quad \text{dar} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}}{2}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}.$$

rezulta că $MN \parallel AB$ și $MN = \frac{AB + DC}{2}$

3.2.) Dreptele ce unesc mijloacele muchiilor opuse unui tetraedru sunt concurente.*Demonstrație:*

Se consideră originea planului în O și notăm cu $\vec{s}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, vectorii de poziție ai punctelor S, A, B, C, fata de originea O.

Fie M si N mijloacele muchiilor opuse SC si AB, iar P mijlocul segmentului MN.

Atunci:

$$2 \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

$$\text{M mijlocul lui SC} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\vec{s} + \vec{c}}{2} \quad (\text{i})$$

$$\text{N mijlocul lui AB} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad (\text{ii})$$

$$\text{Din relațiile (i) și (ii)} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{s}}{2} \quad (\text{iii})$$

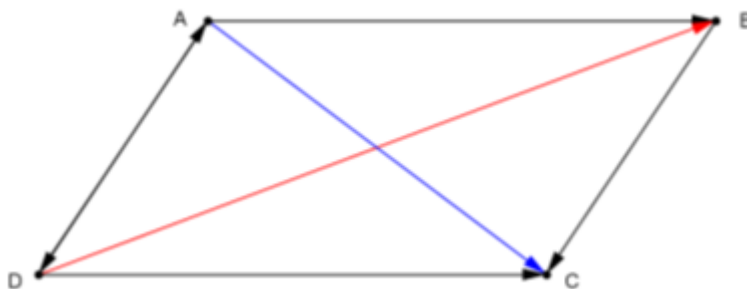
Dacă calculăm vectorul de poziție al mijlocului segmentului de dreapta care uneste E și F cu mijloacele muchiilor opuse $\overline{SB}$ și $\overline{AC}$ datorita simetriei expresiei (iii), vom obține pentru vectorul $\overrightarrow{OP}$ aceeași expresie; deci dreapta EF trece prin același punct P.

Rezultă că punctul P este locul unde se întâlnesc toate dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse.

3.3.) Într-un paralelogram suma pătratelor laturilor unui paralelogram este egală cu suma

pătratelor diagonalelor.

Demonstratie:



Fie ABCD paralelogram, prin notațiile $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

În $\triangle ABD$ și $\triangle ABC$, $\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{AC}$ se exprimă prin relațiile:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (i)$$

Ținând seama de relațiile (i) obținem:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$$

Prin ridicarea la pătrat a egalităților obținem:

$$DB^2 = DA^2 + AB^2 + 2 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

și

$$AC^2 = AB^2 + DA^2 - 2 \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Adunând aceste două egalități membru cu membru ajungem la relația cerută:

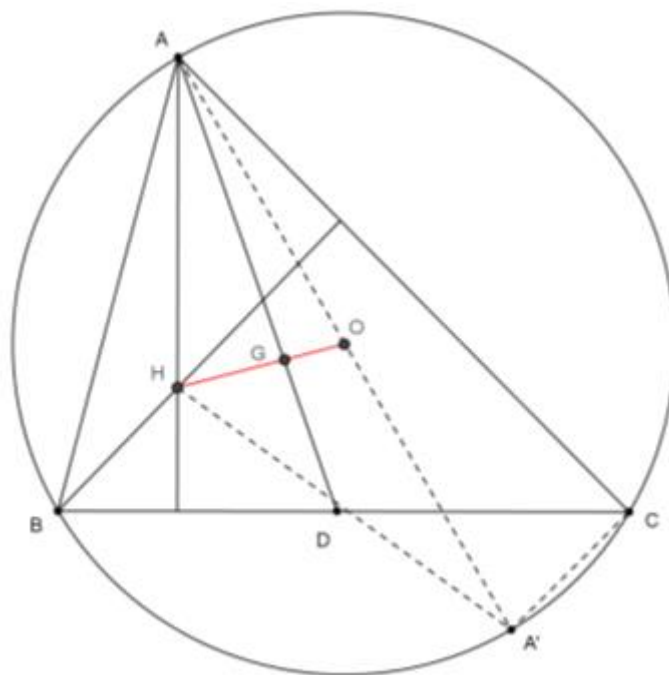
$$DB^2 + AC^2 = 2 (AD^2 + AB^2)$$

3.4.) Coliniaritatea punctelor O, G și H unde : O centrul cercului circumscris triunghiului

G centrul de greutate a triunghiului

H ortocentrul triunghiului

Demonstratie:



Dacă G este centrul de greutate a triunghiului ABC $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

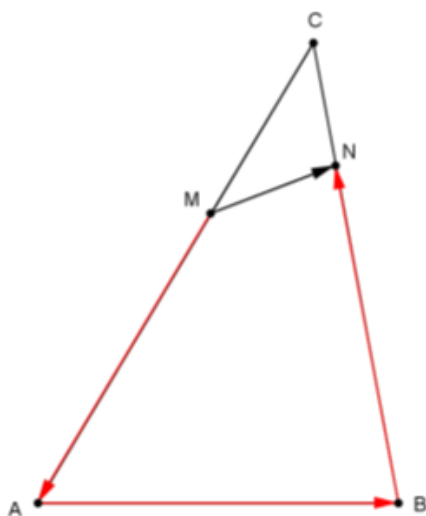
Prin urmare $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (1)

Din Teorema lui Silvester rezultă $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (2)

Deci din relația (1) și (2) obținem: $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow O, G, H$ sunt coliniare
și $OH = 3OG$

3.5.) Într-un triunghi oarecare ABC are loc inegalitatea: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Demonstrație:



presupunem că cea mai mică latură este AB

Luăm punctele $M \in (AC)$ și $N \in (BC)$ astfel încât $AM \equiv BN \equiv AB$

Evident $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$

ridicând la puterea a doua obținem:

$$MN^2 = 3 AB^2 + 2 (\overline{MA} \cdot \overline{AB} + \overline{MA} \cdot \overline{BN} + \overline{AB} \cdot \overline{BN})$$

$$MN^2 = 3 AB^2 + 2 (-AB^2 \cos A - AB^2 \cos B - AB^2 \cos C)$$

$$MN^2 = AB^2 [3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)] \geq 0$$

$$\text{deci} \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Egalitatea are loc dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Majoritatea problemelor de geometrie pe care o întâlnim în clasele gimnaziale cât și liceale au mai multe metode de rezolvare.

Foarte multe teoreme și probleme se pot demonstra mai simplu și mai scurt folosind metoda vectorială și nu cea elementară. Este bine să cunoaștem mai multe metode ca la demonstrare să putem alege metoda cea mai adecvată.

Cu prezentarea problemelor de mai sus am vrut să vă demonstrez că multe tipuri de probleme în geometrie se pot rezolva mult mai scurt și elegant folosind metoda vectorială.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh.D.Simionescu: Noțiuni de algebră vectorială și aplicații în geometrie, 1982
2. G.Simionescu, V.Ștefănescu: Aplicații ale calculului vectorial în geometrie și trigonometrie, 1975
3. E.Rusu: Vectori, 1976
4. L.Nicolaescu, V.Boskoff: Probleme practice de geometrie, 1990
5. L.Constantinescu, C.Perişor: Geometrie și trigonometrie manual pentru an 1. de liceu ed. 1976

7. O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A PROBLEMEI E : 15112 DIN G.M. 12/2016

Prof. Buzea Gabriela,
Școala Gimnazială Nr. 56, București

Fie ABCD un paralelogram, $BE \perp AC$, $E \in AC$, iar M și N mijloacele segmentelor DC, respectiv AE. Știind că $MN \perp NB$, demonstrați că ABCD este dreptunghi.

(Traian Preda, București)

Soluție :

Fie $MN \cap AB = \{S\}$.

Construiesc $NP \parallel EB$, $P \in AB$

și $CT \parallel MN$, $T \in NB$.

Fie $CT \cap AB = \{R\}$.

$$\left. \begin{array}{l} CT \parallel MN \\ MN \perp NB \end{array} \right\} \Rightarrow CT \perp NB$$

În triunghiul NBC, $\left\{ \begin{array}{l} CT \perp NB \\ BE \perp NC \\ CT \cap BE = \{H\} \end{array} \right\} \Rightarrow H \text{ ortocentru} \Rightarrow NH \perp BC \quad (1).$

În triunghiul AEB, $m(\angle E) = 90^\circ$, $\left\{ \begin{array}{l} NP \parallel EB \\ N \text{ mijl. } [AE] \end{array} \right\} \Rightarrow P \text{ mijl. } [AB] \Rightarrow AP = PB = EP = \frac{AB}{2} \quad (2).$

Din $MC \parallel SR$ și $MN \parallel CR$, rezultă că MCRS paralelogram $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} MC = SR, \\ \text{dar } MC = MD = \frac{DC}{2} \end{array} \right\} \quad (3).$

Din (2) și (3) rezultă că $AP = SR = PB$.

Fie $AS = a$, $SP = b$, $AP = a + b$.

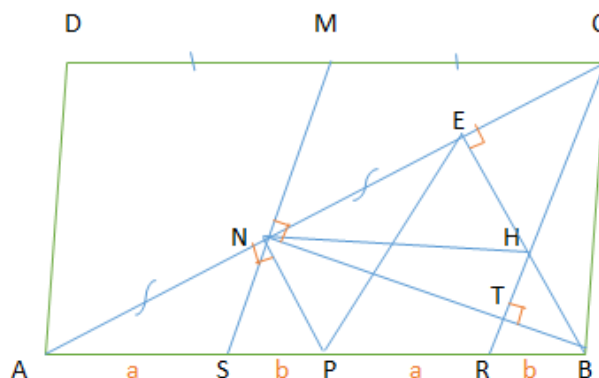
Atunci $PR = a$, $RB = b$, $SP = RB = b \quad (4).$

$NP \parallel BE \Rightarrow m(\angle APN) = m(\angle ABE) \Rightarrow m(\angle SPN) = m(\angle RBH) \quad (5).$

Din $MS \parallel CR$ și $NP \parallel HB \Rightarrow m(\angle SNP) = m(\angle RHB) \quad (6).$

Cum $\left\{ \begin{array}{l} SP = RB \quad (4) \\ m(\angle SPN) = m(\angle RBH) \quad (5) \\ m(\angle SNP) = m(\angle RHB) \quad (6) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle SNP \equiv \triangle RHB \Rightarrow \left. \begin{array}{l} NP = HB \\ \text{Dar, } NP \parallel HB \end{array} \right\} \Rightarrow \text{NHBP}$
paralelogram $\Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} NH \parallel BP \\ \text{Dar } NH \perp BC, \text{ cf } (1) \end{array} \right\} \Rightarrow PB \perp BC \Rightarrow AB \perp BC$, și cum ABCD paralelogram $\Rightarrow$ ABCD dreptunghi.



8. NEW SOLUTIONS FOR SOME PROBLEMS FROM LA GACETA DE LA RSME

by Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

PROBLEMA 281. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sea $A \leq \pi/2$ el mayor ángulo de un triángulo ABC . Si a, b, c son las longitudes de los lados y r, R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita respectivamente, probar que

$$2(R + r) \leq b + c \leq a + 2\sqrt{3}r.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solution: We have

$$\begin{aligned} b+c &\leq a+2\sqrt{3}r \Leftrightarrow b+c-a \leq 2\sqrt{3}r \Leftrightarrow p-a \leq \sqrt{3}\frac{S}{p} \\ &\Leftrightarrow p^2(p-a)^2 \leq 3p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) \leq 3(a+b-c)(a-b+c) \\ 4b^2+4c^2-4a^2 &\leq 4ab \Leftrightarrow 2\cos A \leq 1 \Leftrightarrow A \geq 60^\circ, \end{aligned}$$

true, because the greatest angle of an triangle have the least 60° .

We have equality iff the triangle is equilateral.

Denoting $t = \tan \frac{A}{2}$, we obtain:

$$\begin{aligned} 2R+2r &\leq b+c \Leftrightarrow 2R-a \leq 2(p-a)-2r \Leftrightarrow R-R\sin A \leq p-a-(p-a)\tan \frac{A}{2} \\ R\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right) &\leq (p-a)(1-t) \Leftrightarrow R\frac{(1-t)^2}{1+t^2} \leq (p-a)(1-t). \end{aligned}$$

Since $A \leq 90^\circ$, we have $t \leq 1$. If $t = 1$ we have equality; if $t \neq 1$ it remains to show that

$$\begin{aligned} R(1-t) &\leq (p-a)(1+t^2) \Leftrightarrow R(1-t) \leq (p-a)\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} \Leftrightarrow R(1-t) \leq \frac{bc}{p} \\ R(1-t) &\leq \frac{abc}{ap} \Leftrightarrow R(1-t) \leq \frac{4Rrp}{ap} \Leftrightarrow a(1-t) \leq 4r \Leftrightarrow a(1-t) \leq 4t(p-a) \\ &\Leftrightarrow a \leq t(2b+2c-2a+a) \Leftrightarrow t \geq \frac{a}{2b+2c-a}. \end{aligned}$$

Since, $t \geq t^2$ it suffices to prove that

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \geq \frac{a}{2b+2c-a} \Leftrightarrow (b+c)\cos A \leq b+c-a \Leftrightarrow b^3+b^2c+bc^2+c^3-a^2b-a^2c \leq 2b^2c+2bc^2-2abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b - b^3 + a^2c - c^3 - abc + b^2c - abc + bc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b(a^2 - b^2) + c(a^2 - c^2) - bc(a - b) - bc(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(ab + b^2 - bc) + (a - c)(ac + c^2 - bc) \geq 0,$$

True because the lengths sides a is the largest.

We are done!

PROBLEMA 282. *Propuesto por Cristóbal Sánchez-Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Desde un punto P exterior a una circunferencia dada de radio R trazamos las tangentes PT y PT' . Sean $TT' = 2c$, r el inradio del triángulo PTT' y r_a el radio de la circunferencia exinscrita tangente al lado TT' . Probar que la cantidad

$$\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2}$$

es independiente de la posición del punto P .

Solution:

Let O be the center of the given circle and R it's radius. We denotes M the midpoint of TT' .

If $PO = d$, using the power of the point P and usual formulas we obtain successively that

$$\begin{aligned} OP = d, PT^2 &= (d+R)(d-R) = d^2 - R^2, PM = \frac{PT^2}{PO} = \frac{d^2 - R^2}{d}, TM = \frac{PT \cdot TO}{PO} = \frac{R\sqrt{d^2 - R^2}}{d}, \\ 2c^2 &= \frac{2R^2(d^2 - R^2)}{d^2}, \\ [PTT'] &= \frac{TT' \cdot PM}{2} = \frac{R(d^2 - R^2)\sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}, s = PT + TM = \sqrt{d^2 - R^2} + \frac{R\sqrt{d^2 - R^2}}{d}. \end{aligned}$$

Yields that

$$\begin{aligned} r &= \frac{R(d^2 - R^2)\sqrt{d^2 - R^2}}{d^2} \cdot \frac{d}{(d+R)\sqrt{d^2 - R^2}} = \frac{R(d-R)}{d}, r_a = \frac{R(d^2 - R^2)\sqrt{d^2 - R^2}}{d^2} \cdot \frac{d}{(d-R)\sqrt{d^2 - R^2}} = \frac{R(d+R)}{d}, \\ r^2 + r_a^2 + 2c^2 &= \frac{R^2(d-R)^2}{d^2} + \frac{R^2(d+R)^2}{d^2} + \frac{2R^2(d^2 - R^2)}{d^2} = \frac{4R^2d^2}{d^2} = 4R^2. \end{aligned}$$

Hence, $\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2} = 2R$, and we are done!

PROBLEMA 286. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Sean D y E , respectivamente, puntos en los lados BC y AC de un triángulo ABC . Sean O el punto de intersección de las rectas AD y BE y F el punto de intersección de CO y AB . Si

$$\frac{DO}{OA} = p, \quad \frac{EO}{OB} = q \quad \text{y} \quad \frac{FO}{OC} = r,$$

¿qué relación existe entre p , q y r ?

Solution:

We denote

$$x = BD/DC, \quad y = CE/EA, \quad z = AF/FB.$$

Since $xyz = 1$ (by Ceva's theorem), we have

$$\frac{1}{p} = z + \frac{1}{y} \iff \frac{1}{p} = z(1+x), \quad \frac{1}{q} = x(1+y), \quad \frac{1}{r} = y(1+z).$$

Yields that

$$\begin{aligned} \frac{1}{pqr} &= (1+x)(1+y)(1+z) = 2 + x + y + z + xy + yz + zx = \\ &= 2 + z + \frac{1}{y} + x + \frac{1}{z} + y + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \\ &\Rightarrow pq + qr + rp + 2pqr = 1. \end{aligned}$$

PROBLEMA 289. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

En el triángulo ABC , la bisectriz interior del ángulo A corta al lado opuesto en el punto D . Los puntos O , O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC , ABD y ACD , respectivamente. Probar que $OO_1 = OO_2$.

Solution:

We have

$$OO_1 \perp AB, \quad O_1O_2 \perp AD; \text{ so } \angle OO_1O_2 = \angle BAD.$$

$$OO_2 \perp AC, \quad O_1O_2 \perp AD; \text{ so } \angle OO_2O_1 = \angle CAD.$$

Since AD is bisector yields that triangle OO_1O_2 is isosceles with $OO_1 = OO_2$, and we are done.

PROBLEMA 293. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC , y hacia su interior, levantamos un cuadrado de modo que los lados de estos cuadrados que son paralelos a los lados del triángulo, pero no están contenidos en ellos, forman un triángulo $A'B'C'$ interior al triángulo ABC (que obviamente es semejante a él). Si la razón de semejanza $|AB|/|A'B'| = k$, probar que $k \geq 2\sqrt{3} + 1$.

Solution:

Let B_1B_2 the sides of square with order $C - B_1 - B_2 - A$ and C_1C_2 the sides of square with order $A - C_1 - C_2 - B$. Since $A'C_1 = \frac{c}{k}$, $A'B_2 = \frac{b}{k}$, we have $\frac{\sin(\angle C_1AA')}{\sin(\angle B_2AA')} = \frac{c}{b}$, we deduce that AA' is the symmedian from A of triangle ABC . Let L be the point of Lemoine; if S is the area of triangle, then the distance from L to the sides AB is $\frac{2Sc}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Because $\triangle ALB \approx \triangle A'LB'$ we obtain $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\frac{2Sc}{a^2 + b^2 + c^2}}{\frac{2Sc}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{c}{k}} \Rightarrow k = 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}$.

Hence, $k \geq 2\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, i.e well-known Ionescu-Weitzenböck inequality, and we are done.

PROBLEMA 298. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números positivos tales que $ab + bc + ca = 3abc$. Demostrar que

$$\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2+b^2)}} + \sqrt{\frac{b+c}{a(b^2+c^2)}} + \sqrt{\frac{c+a}{b(c^2+a^2)}} \leq 3.$$

Solution:

Using *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* inequality, the hypothesis and inequalities

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab}, \frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{b+c}{2bc}, \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{c+a}{2ca}, \quad (*)$$

we have

$$\left(\sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{c^2+a^2}} \right)^2 \stackrel{C-B-S}{\leq} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \right)$$

$$\stackrel{\text{hypothesis}}{=} 3 \left(\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \right) \stackrel{(*)}{\leq} 3 \left(\frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ca} \right) = 3 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} \stackrel{\text{hypothesis}}{=} 9.$$

PROBLEMA 304. *Propuesto por Marcel Chiriță, Bucarest, Rumanía.*

En un triángulo ABC , sean M el punto medio del lado BC y D el punto medio de la mediana AM . Si la recta perpendicular al segmento DM en su punto medio pasa por el ortocentro del triángulo ABC , probar que $\angle BDC = \pi/2$.

Solution:

Lemma. Let ABC be a triangle with the orthocenter H and BB' , CC' the altitude. If $B'C'$ intersect the extend of BC in P and M is the midpoint on BC , then $PH \perp AM$.

Proof. Let T be the symmetric of H with the respect to M ; it is well-known that T belongs to circumcircle. Since the symmetric of H with the respect to BC belongs to circumcircle we deduce that AT is the diameter. Then $A'' = \text{Pr}_{HM} A \in \text{Circumcircle}$.

BC is radical axis of circles $BCB'C'$ and ABC ;

$B'C'$ is radical axis of circles $BCB'C'$ and $AC'HB'$.

Hence P is radical center of the circles ABC , $BCB'C'$ and $AC'HB'$. But the radical axis of the circles $AC'HB'$ and ABC is AA'' , so the points A , A'' and P are collinear.

From $MH \perp AP$ we deduce that H is the orthocenter of triangle APM , i.e. $PH \perp AM$, and we are done!

We assume that $b > c$ and we denote $m = AM$. By Menelaus theorem we have

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \Rightarrow PB = \frac{ac \cos B}{b \cos C - c \cos B}, \text{ then}$$

$$PM = PB + \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2(b \cos C - c \cos B)} = \frac{a^3}{2(b^2 - c^2)}.$$

Since $\cos \angle BMA = \frac{\frac{a^2}{4} + m^2 - c^2}{am} = \frac{b^2 - c^2}{2am}$ and $\cos \angle BMA = \frac{DM}{2PM}$, we obtain

$$\frac{m(b^2 - c^2)}{a^3} = \frac{b^2 - c^2}{am} \Rightarrow a = m.$$

In triangle BDC , the median BM is half of BC , hence the triangle is right-angled with

$$\angle BDC = \frac{\pi}{2}.$$