REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO OCTOMBRIE 2017

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

ARTICOLE REVISTĂ:

1. PROBLEMA LUNII OCTOMBRIE 2017

Se dă un triunghi ABC, numerele reale strict pozitive m, n, p şi punctele $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p}$, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m}$. Să se arate că dreptele BB', CC' sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$(m - n + p)AB^2 + (m + n - p)AC^2 = \left(m + n + p + \frac{2np}{m}\right)BC^2.$$

Prof. Mănescu Avram Corneliu

Aşteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 4.11.2017 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro

2. SOLUȚII PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2017

Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\geq\frac{64p^2\left(9R^2+4r^2\right)}{3\sum a^4}.$$

Marin Chirciu. Pitești

Soluție.

Pentru demonstrația acestei inegalități vom prezenta mai întâi câteva rezultate ajutătoare.

Lema1.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+32R^2r^2+r^4}{r^4}.$$

Soluție.

$$\sum\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2c^2}{(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{\sum b^2c^2(p-a)^2}{\prod(p-a)^2}=\frac{p^6+p^4\left(2r^2-16Rr\right)+p^2\left(32R^2r^2+r^4\right)}{p^2r^4}$$

$$=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+32R^2r^2+r^4}{r^4}.$$

Lema2.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}\geq\frac{12R^2}{r^2}.$$

Soluție.

Folosind **Lema1** inegalitatea de demonstrat se scrie:

$$\frac{p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+32R^2r^2+r^4}{r^4}\geq\frac{12R^2}{r^2}\Leftrightarrow p^4+p^2\left(2r^2-16Rr\right)+32R^2r^2+r^4\geq 12R^2r^2$$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-16Rr\right)+20R^2r^2+r^4\geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $p^2+2r^2-16Rr\geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $p^2+2r^2-16Rr<0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2\left(16Rr-2r^2-p^2\right)\leq 20R^2r^2+r^4$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(16Rr-2r^2-16Rr+5r^2\right)\leq 20R^2r^2+r^4\Leftrightarrow 3\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\leq 20R^2+r^2$

$\Leftrightarrow 2R^2-3Rr-2r^2\geq 0\Leftrightarrow \left(R-2r\right)\left(2R+r\right)\geq 0$, evidentă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

Lema3.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32R^2\right)+\left(4R+r\right)^4}{p^4}.$$

Soluție.

$$\sum\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}=\sum\frac{b^2c^2}{p^2\left(p-a\right)^2}=\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32R^2\right)+\left(4R+r\right)^4}{p^4}.$$

Lema4.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\geq\frac{16}{3}.$$

Soluție.

Folosind identitatea de mai sus inegalitatea se scrie:

$\frac{p^4+p^2\left(2r^2-32R^2\right)+\left(4R+r\right)^4}{p^4}\geq\frac{16}{3}\Leftrightarrow 3\left(4R+r\right)^4\geq p^2\left(13p^2+96R^2-6r^2\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$3\left(4R+r\right)^4\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[13\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)+96R^2-6r^2\right]\Leftrightarrow$

$11R^4-2R^3r-31R^2r^2-15Rr^3-6r^4\geq 0\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(11R^3+20R^2r+9Rr^2+3r^3\right)\geq 0$, evidentă din inegalitatea lui Euler: $R\geq 2r$.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.
Lema5.

$$\sum a^4 \geq 16S^2.$$

F. Goldner, Elem.Math.4/1949

(Inegalitatea lui Goldner, 1949, itemul 4.10, O.Bottema ,Geometric Inequalities) ;

Soluție.

Folosind identitatea cunoscută în triunghi $\sum a^4 = 2\left[p^4 - 2p^2\left(4Rr + 3r^2\right) + r^2\left(4R + r\right)^2\right]$,

inegalitatea se scrie:

$2\left[p^4 - 2p^2\left(4Rr + 3r^2\right) + r^2\left(4R + r\right)^2\right] \geq 16p^2r^2 \Leftrightarrow p^2\left(p^2 - 14r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R + r\right)^2 \geq 0$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $p^2 - 14r^2 - 8Rr \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $p^2 - 14r^2 - 8Rr < 0$, inegalitatea se rescrie:

$p^2\left(8Rr + 14r^2 - p^2\right) \leq r^2\left(4R + r\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ .Rămâne să arătăm că:

$\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(8Rr + 14r^2 - 16Rr + 5r^2\right) \leq r^2\left(4R + r\right)^2 \Leftrightarrow$

$\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(19r^2 - 8Rr\right) \leq r^2\left(4R + r\right)^2 \Leftrightarrow 8R^3 - 7R^2r - 11Rr^2 - 14r^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(R - 2r\right)\left(8R^2 + 9Rr + 7r^2\right) \geq 0$, evidentă din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.
Să trecem acum la rezolvarea inegalității propuse**.**

Inegalitatea de demonstrat se mai scrie $\sum a^4 \cdot \sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right) \geq \frac{64p^2\left(9R^2 + 4r^2\right)}{3}$, care

rezultă din următoarele inegalități:

$\sum a^4 \geq 16S^2$, vezi **Lema5.**

$\sum\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}} \geq \frac{12R^2}{r^2}$,vezi **Lema2.**

$\sum\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}} \geq \frac{16}{3}$, vezi **Lema4.**

Obținem $\sum a^4 \cdot \sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right) \geq 16S^2\left(\frac{12R^2}{r^2}+\frac{16}{3}\right) \geq \frac{64p^2\left(9R^2+4r^2\right)}{3}$.

Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

ALTE SOLUȚII

1. Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău

Deoarece

$$\left(\sum\sin^2\frac{A}{2}\right)^2+\left(\cos^2\frac{A}{2}\right)^2=\left(\frac{2R-r}{2R}\right)^2+\left(\frac{4R+r}{2R}\right)^2=\frac{10R^2+2Rr+r^2}{2R^2},$$

aplicând inegalitatea lui *Bergström* şi teorema sinusurilor obţinem

$$\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)=\sum\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{\sin^4\frac{A}{2}\cos^4\frac{A}{2}}+\sum\frac{\cos^4\frac{A}{2}}{\sin^4\frac{A}{2}\cos^4\frac{A}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{\left(\sum\sin^2\frac{A}{2}\right)^2+\left(\sum\cos^2\frac{A}{2}\right)^2}{\sum\sin^4\frac{A}{2}\cos^4\frac{A}{2}}=\frac{10R^2+2Rr+r^2}{2R^2}\cdot\frac{256R^4}{\sum a^4}=\frac{128R^2(10R^2+2Rr+r^2)}{\sum a^4}.$$

Rămâne de arătat că $6R^2(10R^2+2Rr+r^2)\geq p^2(9R^2+4r^2)$.

Folosind inegalitatea lui *Gerretsen*, $4R^2+4Rr+3r^2\geq p^2$, este suficient să demonstrăm că

$$6R^2(10R^2+2Rr+r^2)\geq(4R^2+4Rr+3r^2)(9R^2+4r^2)$$

$\Leftrightarrow 24R^4-24R^3r-37R^2r^2-16Rr^3-12r^4\geq 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)(24R^2+24R^2r+11Rr^2+6r^3)\geq 0$, evident adevărată cu inegalitatea lui *Euler*, $R\geq 2r$.

2. Gheorghe Alexe si George-Florin Serban, profesori Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius", Braila

Vom folosi urmatoarele rezultate cunoscute:

1) $\sum\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{8R(2R-r)}{r^2}$. **2)** $\sum\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{8R(4R+r)}{p^2}$.

3) $\sum a^4\geq 16S^2=16p^2r^2$.

4) $4R+r\geq p\sqrt{3}$. **5)** $\frac{3R\sqrt{3}}{2}\geq p$. **(Mitrinovici)** **6)** $R\geq 2r$. **(Euler)**

$\sum\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}\geq\sum\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{8R(2R-r)}{r^2},\quad \sum\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\geq\sum\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{8R(4R+r)}{p^2}$. **Le adun,** $\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\geq 8R\left(\frac{2R-r}{r^2}+\frac{4R+r}{p^2}\right)$ **.Din 3) rezulta** $3\sum a^4\geq 48p^2r^2$. **Le inmultim,**

$(3\sum a^4)\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\geq 48p^2r^2\cdot 8R\left(\frac{2R-r}{r^2}+\frac{4R+r}{p^2}\right)\geq 64p^2(9R^2+4r^2)$. **Vom arata ca:**

$48p^2r^2\cdot 8R\left(\frac{2R-r}{r^2}+\frac{4R+r}{p^2}\right)\geq 64p^2(9R^2+4r^2)$. **Deci**

$6Rr^2\left(\frac{2R-r}{r^2}\right)+6Rr^2\left(\frac{4R+r}{p^2}\right)\geq 9R^2+4r^2,$

$12R^2-6Rr+6Rr^2\left(\frac{4R+r}{p^2}\right)\geq 9R^2+4r^2,\quad 3R^2-6Rr+6Rr^2\left(\frac{4R+r}{p^2}\right)-4r^2\geq 0,$

$3R(R-2r)+2r^2\left[\frac{3R(4R+r)}{p^2}-2\right]\geq 0,\quad 3R(R-2r)+\frac{2r^2}{p^2}[3R(4R+r)-2p^2]\geq 0,$ **dar** $R-2r\geq 0,$ **din 6) deci** $3R(R-2r)\geq 0$. **Aratam ca** $3R(4R+r)-2p^2\geq 0$. **Aplic 4) si 5) si le inmultim,**

$\frac{3R\sqrt{3}(4R+r)}{2}\geq p^2\sqrt{3},\quad 3R(4R+r)\geq 2p^2,\ 3R(4R+r)-2p^2\geq 0$. **Le adun si obtinem inegalitatea ceruta** $3R(R-2r)+\frac{2r^2}{p^2}[3R(4R+r)-2p^2]\geq 0$. **Egalitate avem** $\Leftrightarrow R-2r=0$ **si** $3R(4R+r)-2p^2=0,\ \Leftrightarrow \Delta ABC$ **echilateral.** $3r\sqrt{3}\leq p\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}$, **(Mitrinovici).**

Deci $\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\geq\frac{64p^2(9R^2+4r^2)}{3\sum a^4}$.

3. Marian Cucoaneș

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO ISSN 2065-6432 – SEPTEMBRIE 2017 www.mateinfo.ro

1. PROBLEMA LUNII SEPTEMBRIE 2017

MATEINFO.RO

Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\ge\frac{64p^2\left(9R^2+4r^2\right)}{3\sum a^4}.$$

Marin Chirciu. Pitești

Așteptăm soluții cât mai interesante până pe data de 1.10.2017 pe adresa de e-mail

Soluție. Avem:

$$\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}=\frac{\sin^4\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}}{\sin^4\frac{A}{2}\cos^4\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{16\cdot\left[\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)^2\right]}{\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{16-8\sin^2A}{\sin^4A}=\frac{16}{\sin^4A}-\frac{8}{\sin^2A}=\frac{16b^4c^4}{16S^4}-\frac{8b^2}{4S}$$

unde S este aria ΔABC. Atunci:

$$\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)=\frac{16(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)}{16S^4}-\frac{8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4S^2}\quad (1)$$

pagina 1

Cum $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2\right]\Rightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2\geq 0\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4$ și cum $16S^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4\Rightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq 16S^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{16S^2}\geq 1\quad (2)$$

Cum pentru orice numere reale x,y,z avem: $3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$; pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4\geq\frac{1}{3}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)^2\Rightarrow$$

$$\frac{(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)\cdot 16}{16S^4}\geq\frac{16}{16S^4}\cdot\frac{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)^2}{3}=$$

$$=\frac{16}{3S^2}\cdot(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\frac{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{16S^2}\geq$$

$$\geq(\text{conform inegalității } (2))\geq\frac{16(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2}$$

$$\Rightarrow\frac{16(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)}{16S^4}\geq\frac{16(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2}$$

$$\Rightarrow\frac{16(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)}{16S^4}-\frac{8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4S^2}\geq$$

$$\geq\frac{16(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2}-\frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{S^2}=$$

$$=\frac{10(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2}\Rightarrow$$

pagina 2

$$\frac{16(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)}{16S^4}-\frac{8(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4S^2}\geq$$

$$\geq\frac{10(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2} \quad (3)$$

Din (1) și (3) obținem:

$$\sum\left(\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)\geq\frac{10(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2} \quad (4)$$

Datorită inegalității (4) pentru a demonstra inegalitatea din enunț este suficient să demonstrăm:

$$\frac{10(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{3S^2}\geq\frac{64p^2(9R^2+4r^2)}{3\sum a^4} \quad (5)$$

Dar (5) $\Leftrightarrow 10(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\geq$ $\geq 64p^2S^2(9R^2+4r^2)$ (6)

Rămâne să demonstrăm inegalitatea (6)

Conform inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz $\Rightarrow 10(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\geq$ $\geq 10(a^2bc+b^2ac+c^2ab)^2=10(abc)^2(a+b+c)^2$ și cum $abc=4RS$ și $a+b+c=2p \Rightarrow 10(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\geq$ $\geq 10\cdot 64R^2\cdot p^2\cdot S^2$ (7)

Datorită inegalității (7) pentru a demonstra inegalitatea (6) este suficient să demonstrăm că:

pagina 3

$10\cdot 64R^2p^2S^2\geq 64p^2S^2(9R^2+4r^2)\Leftrightarrow$ $10R^2\geq 9R^2+4r^2\Leftrightarrow R^2\geq 4r^2\Leftrightarrow R\geq 2r$

Dar aceasta este tocmai inegalitatea lui Euler. Cu aceasta soluția este completă.

Soluție de Marian Cucoaneș

pagina 4

3. O INEGALITATE ALGEBRICĂ ȘI APLICAȚII ALE EI ÎN TRIUNGHI

Marin Chirciu, Pitești[1]

Articolul pornește de la o inegalitate algebrică și obține relații de forma

$$E^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\ ,$$

unde E este o expresie care depinde de elemente ale triunghiului și n este un număr real dintr-o mulțime precizată.

Lemă.

Dacă $x,y,z>0$ atunci $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\geq(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Soluție.

Inegalitatea este echivalentă cu $\sum\frac{x^2}{y^2}+2\sum\frac{y}{x}\geq\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{y}{x}+3\Leftrightarrow\ \sum\frac{x^2}{y^2}+\sum\frac{y}{x}\geq\sum\frac{x}{y}+3$,

adevărată din adunarea inegalităților $\sum\frac{x^2}{y^2}\geq\sum\frac{x}{y}$ și $\sum\frac{y}{x}\geq 3$, prima rezultând

din $a^2+b^2+c^2\geq a+b+c$, cu $a,b,c>0, abc=1$ și luăm

$a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, iar a doua din inegalitatea mediilor.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Aplicații în triunghi.

Aplicația 1.

În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde}\ n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(a,b,c)$ și ținem seama

că $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2p\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr}\geq\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2Rr}=10-\frac{2r}{R}$ unde inegalitatea de mai sus rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$,(G).

Rămâne să arătăm că (1): $10-\frac{2r}{R}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow(2-n)(R-2r)\geq 0$, evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 2$.

Aplicația 2.

În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde}\ n\leq 2.$$

Soluție.

Folosim teorema sinusurilor și **Aplicația 1.**

---

[1] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Aplicația 3.
În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde } n\leq 2.$$

Soluție.
Folosim $h_a=\frac{2S}{a}$ și **Aplicația 1.**

Aplicația 4.
În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde } n\leq 16.$$

Soluție.
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(r_a,r_b,r_c)$ și ținem seama

că $(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=(4R+r)\cdot\frac{1}{r}=1+\frac{4R}{r}$. Rămâne să arătăm că:

(2): $1+\frac{4R}{r}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 8R^2-(n+16)Rr+2nr^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(8R-nr)\geq 0$,

evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 16$.

Aplicația 5.
În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde } n\leq 6.$$

Soluție.
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(a^2,b^2,c^2)$ și ținem seama

că $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2(p^2-r^2-4Rr)\cdot\frac{1}{2Rr}\overset{(G)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2-r^2-4Rr}{Rr}=12-\frac{6r}{R}$

Rămâne să arătăm că (3): $12-\frac{6r}{R}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow (6-n)(R-2r)\geq 0$, evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 6$.

Aplicația 6.
În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde } n\leq 6.$$

Soluție.
Folosim teorema sinusurilor și **Aplicația 5.**

Aplicația 7.
În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{p-a}{p-b}+\frac{p-b}{p-c}+\frac{p-c}{p-a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde } n\leq 16.$$

Soluție.
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(p-a,p-b,p-c)$, ținem seama

că $(p-a+p-b+p-c)\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=p\cdot\frac{4R+r}{rp}=1+\frac{4R}{r}$ și apoi inegalitatea(2) de la

Aplicația 4.
Aplicația 8.
În triunghiul ABC

$$\left(\frac{r_a^2}{r_b^2}+\frac{r_b^2}{r_c^2}+\frac{r_c^2}{r_a^2}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\text{ unde } n\leq 32.$$

Soluție.
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a^2,r_b^2,r_c^2\right)$ și ținem seama

că $\left(r_a^2+r_b^2+r_c^2\right)\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)=\left[(4R+r)^2-2p^2\right]\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2p^2}\geq$

$\geq\left(3p^2-2p^2\right)\cdot\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{r^2p^2}=\frac{8R}{r}-7$, unde inegalitatea rezultă din inegalitatea lui

Doucet $(4R+r)^2\geq 3p^2$, (D) și Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$, (G) .
Rămâne să arătăm că (4):

$$\frac{8R}{r}-7+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 16R^2-(n+32)Rr+2nr^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)(16R-nr)\geq 0,$$

evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 32$.
Aplicația 9.
În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\text{ unde } n\leq 16.$$

Soluție.
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2},\operatorname{tg}\frac{B}{2},\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

că $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right)=\frac{4R+r}{p}\cdot\frac{p}{r}=1+\frac{4R}{r}$ și apoi vezi inegalitatea (2) de

la **Aplicația 4**.
Aplicația 10.
În triunghiul ABC

$$\left(\frac{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde}\ n\leq 32.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2},\operatorname{tg}^2\frac{B}{2},\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

că $\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}\right)=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}\overset{(D+G)}{\geq}$

$\overset{(D+G)}{\geq}\frac{3p^2-2p^2}{p^2}\cdot\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{r^2}=\frac{8R}{r}-7$ și apoi vezi (4) de la **Aplicația 8.**

Aplicația 11.

În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2},\ \text{unde}\ n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\sin^2\frac{A}{2},\sin^2\frac{B}{2},\sin^2\frac{C}{2}\right)$ și ținem seama

că $\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)=\left(1-\frac{r}{2R}\right)\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}\overset{(G)}{\geq}$

$\overset{(G)}{\geq}\left(1-\frac{r}{2R}\right)\cdot\frac{16Rr-5r^2+r^2-8Rr}{r^2}=\frac{2(2R-r)^2}{Rr}.$

Rămâne să arătăm că (5): $\frac{2(2R-r)^2}{Rr}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 16R^2-(n+34)Rr+(2n+4)r^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left[16R-(n+2)r\right]\geq 0$,evidentă din $R\geq 2r$ (Euler) și condiția $n\leq 30$.

Aplicația 12.

În triunghiul *ABC*

$$\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\ ,\ \text{unde}\ n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\cos^2\frac{A}{2},\cos^2\frac{B}{2},\cos^2\frac{C}{2}\right)$ și ținem seama

că $\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)=\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$.

Rămâne să arătăm că

(6): $\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow(4R+r)^3\geq p^2\left[(n+14)R-(2n+1)r\right]\geq 0$.

Distingem cazurile:

1)Dacă $(n+14)R-(2n+1)r\leq 0$, inegalitatea este evidentă.

1)Dacă $(n+14)R-(2n+1)r>0$, folosim inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2\leq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$ și

rămâne să arătăm că:

$(4R+r)^3\geq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\left[(n+14)R-(2n+1)r\right]\Leftrightarrow(2-n)R^2+(2n-3)Rr-2r^2\geq 0$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left[(2-n)R+r\right]\geq 0$, evidentă din $R\geq 2r$ (Euler) și condiția $n\leq 2$.

Aplicația 13.

În triunghiul ascuțitunghic ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}+\frac{\cos B}{\cos C}+\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 6.$$

<u>Soluție.</u>

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(\cos A,\cos B,\cos C)$ și ținem seama

că $(\cos A+\cos B+\cos C)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)=\left(1+\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{p^2-(2R+r)^2}$.

Dacă $n\leq 0$, inegalitatea este evidentă: primul termen din stânga este ≥ 9 și $n\cdot\frac{r}{R}\geq\frac{n}{2}$.

În continuare vom considera $n>0$. Este suficient să arătăm că:

$\left(1+\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{p^2+r^2-8R^2}{p^2-(2R+r)^2}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow$

$(4n+4)R^3+(64-4n)R^2r+(20-7n)Rr^2+(2-2n)r^3\geq p^2\left[(n+16)R-(2n+2)r\right]$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ și observația

că $(n+16)R-(2n+2)r>0$,pentru $n>0$ (vezi inegalitatea lui Euler).

Rămâne să arătăm că:

$(4n+4)R^3+(64-4n)R^2r+(20-7n)Rr^2+(2-2n)r^3\geq$

$\geq\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(n+16)R-(2n+2)r\right]\Leftrightarrow$

$4R^2-(n+10)Rr+(2n+4)r^2\geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left[4R-(n+2)r\right]\geq 0$, care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 6$.

Aplicația 14.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}, \text{ unde } n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2},b\operatorname{tg}\frac{B}{2},c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum a\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{a\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=2(2R-r)\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2}\overset{(G)}{\geq}\frac{2(2R-r)^2}{Rr}$ și apoi vezi inegalitatea (5) de la

Aplicația 11.

Aplicația 15.

În triunghiul ABC

$$\left(\frac{a\sin^2\frac{A}{2}}{b\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{b\sin^2\frac{B}{2}}{c\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{c\sin^2\frac{C}{2}}{a\sin^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}, \text{ unde } n\leq 48.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a\sin^2\frac{A}{2},b\sin^2\frac{B}{2},c\sin^2\frac{C}{2}\right)$ și ținem seama că

$$\sum a\sin^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{a\cdot\sin^2\frac{A}{2}}=p\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{p^4+2p^2\left(r^2-6Rr\right)+r^3(4R+r)}{4Rr^3p}$$

$=\frac{(R-r)\left[p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)\right]}{4R^2r^3}\overset{(G)}{\geq}4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2$. Arătăm că (9):

$$4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 32R^3-(n+82)R^2r+(2n+40)Rr^2-8r^3\geq 0$$

$\Leftrightarrow 32R^3-(n+82)R^2r+(2n+40)Rr^2-8r^3\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)\left[32R^2-(n+18)Rr+4r^2\right]\geq 0$ care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 48$.

Aplicația 16.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{ar_a}{br_b}+\frac{br_b}{cr_c}+\frac{cr_c}{ar_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}, \text{ unde } n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(ar_a,br_b,cr_c)$, ținem seama că

$\sum ar_a \sum \frac{1}{ar_a} = 2p(2R-r)\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2 p} \overset{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}$ și vezi (5) de la **Aplicația 11**.

Aplicația 17.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a r_a}{h_b r_b}+\frac{h_b r_b}{h_c r_c}+\frac{h_c r_c}{h_a r_a}\right)^2 + n\cdot\frac{r}{R} \geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(h_a r_a, h_b r_b, h_c r_c)$, ținem seama că

$\sum h_a r_a \sum \frac{1}{h_a r_a} = \frac{r}{2R}\left[p^2+(4R+r)^2\right]\cdot\frac{4R+r}{rp^2} = \left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$ și vezi inegalitatea (6) de la **Aplicația 12**.

Aplicația 18.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{h_b \operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{h_b \operatorname{tg}\frac{B}{2} h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{h_c \operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{h_c \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2 + n\cdot\frac{r}{R} \geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}, h_b \operatorname{tg}\frac{B}{2}, h_c \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{r}{2Rp}\left[p^2+(4R+r)^2\right]\cdot\frac{4R+r}{rp} = \left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$ și vezi inegalitatea (6) de la **Aplicația 12.**

Aplicația 19.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{h_b \operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\frac{h_b \operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{h_c \operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{h_c \operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{h_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right)^2 + n\cdot\frac{r}{R} \geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2}, h_b \operatorname{ctg}\frac{B}{2}, h_c \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum h_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \sum \frac{1}{h_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2}} = \frac{p(p^2+r^2-8Rr)}{2Rr}\cdot\frac{2R-r}{rp} \overset{(G)}{\geq} \frac{2(2R-r)^2}{Rr}$ și vezi inegalitatea (6) de la **Aplicația 12.**

Aplicația 20.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \sin^2 \frac{A}{2}}{h_b \sin^2 \frac{B}{2}}+\frac{h_b \sin^2 \frac{B}{2}}{h_c \sin^2 \frac{C}{2}}+\frac{h_c \sin^2 \frac{C}{2}}{h_a \sin^2 \frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 16.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a \sin^2 \frac{A}{2}, h_b \sin^2 \frac{B}{2}, h_c \sin^2 \frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum h_a \sin^2 \frac{A}{2}\sum \frac{1}{h_a \sin^2 \frac{A}{2}}=\frac{r(4R+r)}{2R}\cdot\frac{2R}{r^2}=1+\frac{4R}{r}$ și vezi (2) de la **Aplicația 4**.

Aplicația 21.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \cos^2 \frac{A}{2}}{h_b \cos^2 \frac{B}{2}}+\frac{h_b \cos^2 \frac{B}{2}}{h_c \cos^2 \frac{C}{2}}+\frac{h_c \cos^2 \frac{C}{2}}{h_a \cos^2 \frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 16.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a \cos^2 \frac{A}{2}, h_b \cos^2 \frac{B}{2}, h_c \cos^2 \frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum h_a \cos^2 \frac{A}{2}\sum \frac{1}{h_a \cos^2 \frac{A}{2}}=\frac{p^2}{2R}\cdot\frac{2R(4R+r)}{rp^2}=1+\frac{4R}{r}$ și vezi (2) de la **Aplicația 4**.

Aplicația 22.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}+\frac{h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}}{h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}+\frac{h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 18.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}, h_b \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}, h_c \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}\right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}\sum \frac{1}{h_a \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}=\frac{2R-r}{r^2}\cdot\frac{r}{2Rp^2}\left[p^2(r-8R)+(4R+r)^3\right]\overset{Doucet}{\geq}$$

$$\overset{Doucet}{\geq}\frac{2R-r}{2Rrp^2}\cdot\left[p^2(r-8R)+3p^2(4R+r)\right]=\frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}.$$

Este suficient să arătăm că (7):

$$\frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 8R^2-(n+14)Rr+(2n-4)r^2\geq 0\Leftrightarrow (R-2r)\left[8R+(2-n)r\right]\geq 0$$

care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 18$.

Aplicația 23.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}{h_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}+\frac{h_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}{h_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}+\frac{h_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}{h_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 74.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2},h_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2},h_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right)$ și ținem seama că

$$\sum h_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{h_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right)}{2Rr^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-p^2}{rp^2}=$$

$$\frac{p^2+r^2-12Rr}{2Rr^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-p^2}{r}\overset{(G)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{2Rr^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{r}=$$

$$=\frac{4r(R-r)}{2Rr^2}\cdot\frac{4R^2-2Rr-3r^2}{r}=2\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4R^2}{r^2}-\frac{2R}{r}-3\right).$$

Este suficient să arătăm că (8):

$$2\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4R^2}{r^2}-\frac{2R}{r}-3\right)+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 16R^3-24R^2r-(n+22)Rr^2+(2n+12)r^3\geq 0\Leftrightarrow$$

$(R-2r)\left[16R^2+8Rr-(n+6)r^2\right]\geq 0$, care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 74$, care asigură pozitivitatea parantezei drepte de mai sus.

Aplicația 24.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a+2r_a}{h_b+2r_b}+\frac{h_b+2r_b}{h_c+2r_c}+\frac{h_c+2r_c}{h_a+2r_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(h_a+2r_a,h_b+2r_b,h_c+2r_c)$, ținem seama că

$$\sum(h_a+2r_a)\sum\frac{1}{h_a+2r_a}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{2R}\cdot\frac{4R+r}{p^2}=\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]\text{ și vezi}$$

inegalitatea (6) de la **Aplicația 12.**

Aplicația 25.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a-r}{r_b-r}+\frac{r_b-r}{r_c-r}+\frac{r_c-r}{r_a-r}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(r_a-r,r_b-r,r_c-r)$, ținem seama că

$$\sum(r_a-r)\sum\frac{1}{r_a-r}=2(2R-r)\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{4Rr^2}\overset{(G)}{\geq}\frac{2(2R-r)^2}{Rr}$$ și vezi (5) , **Aplicația 11**.

Aplicația 26.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a-r}{h_b-r}+\frac{h_b-r}{h_c-r}+\frac{h_c-r}{h_a-r}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq\frac{16}{3}.$$

<u>Soluție.</u>
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(h_a-r,h_b-r,h_c-r)$ și ținem seama că

$$\sum(h_a-r)\sum\frac{1}{h_a-r}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2R}\cdot\frac{2(p^2-r^2-Rr)}{r(p^2+r^2+2Rr)}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{p^2+r^2+2Rr}\cdot\frac{p^2-r^2-Rr}{Rr}$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{p^2+r^2-2Rr}{p^2+r^2+2Rr}\cdot\frac{p^2-r^2-Rr}{Rr}+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2\left[2p^2+2nr^2-(n+24)Rr\right]\geq(2n+32)R^2r^2+(16-3n)Rr^3+(2-2n)r^4$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și observația că $2p^2+2nr^2-(n+24)Rr>0$, pentru $n\leq\frac{16}{3}$.Rămâne să arătăm că:

$$(16Rr-5r^2)\left[2(16Rr-5r^2)+2nr^2-(n+24)Rr\right]\geq(2n+32)R^2r^2+(16-3n)Rr^3+(2-2n)r^4$$

$\Leftrightarrow(48-9n)R^2+(20n-108)Rr+(24-4n)r^2\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)\left[(48-9n)R+(2n-12)r\right]\geq 0$, care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq\frac{16}{3}$, care asigură pozitivitatea parantezei drepte.

Aplicația 27.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a-2r}{h_b-2r}+\frac{h_b-2r}{h_c-2r}+\frac{h_c-2r}{h_a-2r}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 30.$$

<u>Soluție.</u>
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=(h_a-2r,h_b-2r,h_c-2r)$, ținem seama că

$$\sum(h_a-2r)\sum\frac{1}{h_a-2r}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{2R}\cdot\frac{2R-r}{r^2}\overset{(G)}{\geq}\frac{2(2R-r)^2}{Rr}$$ și vezi (5) , **Aplicația 11**.

Aplicația 28.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{r_b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{r_b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{r_c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{r_c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{r_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 32.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\operatorname{tg}\frac{A}{2},r_b\operatorname{tg}\frac{B}{2},r_c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum r_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2p}\overset{(G+D)}{\geq}\frac{3p^2-2p^2}{p^2}\cdot\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{r^2}=$$

$=\frac{8R}{r}-7$ și vezi inegalitatea (4) de la **Aplicația 8**.

Aplicația 29.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}{r_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}+\frac{r_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}}{r_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}+\frac{r_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}}{r_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 16.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2},r_b\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2},r_c\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum r_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2}{r}\cdot\frac{4R+r}{p^2}=1+\frac{4R}{r}$ și vezi inegalitatea (2) de la **Aplicația 4**.

Aplicația 30.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\sin^2\frac{A}{2}}{r_b\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{r_b\sin^2\frac{B}{2}}{r_c\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{r_c\sin^2\frac{C}{2}}{r_a\sin^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 74.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\sin^2\frac{A}{2},r_b\sin^2\frac{B}{2},r_c\sin^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum r_a\sin^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2R(4R+r)-p^2}{2R}\cdot\frac{p^2+r^2-12Rr}{r^3}\overset{(Gerretsen)}{\geq}$$

$$\overset{(G)}{\geq}\frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{2R}\cdot\frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{r^3}=\frac{4R^2-2Rr-3r^2}{2R}\cdot\frac{4r(R-r)}{r^2}=$$

$=2\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4R^2}{r^2}-\frac{2R}{r}-3\right)$ și vezi inegalitatea (8) de la **Aplicația 23**.

Aplicația 31.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\cos^2\frac{A}{2}}{r_b\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{r_b\cos^2\frac{B}{2}}{r_c\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{r_c\cos^2\frac{C}{2}}{r_a\cos^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\cos^2\frac{A}{2},r_b\cos^2\frac{B}{2},r_c\cos^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum r_a\cos^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2}{2R}\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{rp^2}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr}\overset{(G)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2Rr}=10-\frac{2r}{R}\text{ și}$$

vezi inegalitatea (1) de la **Aplicația 1**.

Aplicația 32.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\sec^2\frac{A}{2}}{r_b\sec^2\frac{B}{2}}+\frac{r_b\sec^2\frac{B}{2}}{r_c\sec^2\frac{C}{2}}+\frac{r_c\sec^2\frac{C}{2}}{r_a\sec^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 18.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\sec^2\frac{A}{2},r_b\sec^2\frac{B}{2},r_c\sec^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum r_a\sec^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\sec^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}\cdot\frac{2R-r}{2Rr}\overset{Doucet}{\geq}$$

$$\overset{Doucet}{\geq}\frac{p^2(r-8R)+3p^2(4R+r)}{p^2}\cdot\frac{2R-r}{2Rr}=(4R+4r)\cdot\frac{2R-r}{2Rr}=\frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}\text{ și vezi}$$

inegalitatea (7) de la **Aplicația 22**.

Aplicația 33.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{r_a\csc^2\frac{A}{2}}{r_b\csc^2\frac{B}{2}}+\frac{r_b\csc^2\frac{B}{2}}{r_c\csc^2\frac{C}{2}}+\frac{r_c\csc^2\frac{C}{2}}{r_a\csc^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{, unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(r_a\csc^2\frac{A}{2},r_b\csc^2\frac{B}{2},r_c\csc^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum r_a\csc^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{r_a\csc^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{r}\cdot\frac{1}{2R}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr}\overset{(G)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2+4Rr}{2Rr}=10-\frac{2r}{R}\text{ și}$$

vezi inegalitatea (1) de la **Aplicația 1**.

Aplicația 34.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{h_a\csc^2\frac{A}{2}}{h_b\csc^2\frac{B}{2}}+\frac{h_b\csc^2\frac{B}{2}}{h_c\csc^2\frac{C}{2}}+\frac{h_c\csc^2\frac{C}{2}}{h_a\csc^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 48.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(h_a\csc^2\frac{A}{2},h_b\csc^2\frac{B}{2},h_c\csc^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum h_a\csc^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{h_a\csc^2\frac{A}{2}}=\frac{p^4+2p^2\left(r^2-6Rr\right)+r^3(4R+r)}{2Rr^2}\cdot\frac{R-r}{2Rr}=$$

$$=\frac{(R-r)\left[p^4+2p^2\left(r^2-6Rr\right)+r^3(4R+r)\right]}{4R^2r^3}$$ și vezi **Aplicația 15.**

Aplicația 35.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a(p-a)}{b(p-b)}+\frac{b(p-b)}{c(p-c)}+\frac{c(p-c)}{a(p-a)}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a(p-a),b(p-b),c(p-c)\right)$, ținem seama că

$$\sum a(p-a)\sum\frac{1}{a(p-a)}=2r(4R+r)\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{4Rrp^2}=\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$$ și vezi inegalitatea (6) de la **Aplicația 12**.

Aplicația 36.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)h_a}{(p-b)h_b}+\frac{(p-b)h_b}{(p-c)h_c}+\frac{(p-c)h_c}{(p-a)h_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)h_a,(p-b)h_b,(p-c)h_c\right)$, ținem seama că

$$\sum(p-a)h_a\sum\frac{1}{(p-a)h_a}=\frac{p\left(p^2+r^2-8Rr\right)}{2R}\cdot\frac{2R-r}{r^2p}\overset{(G)}{\geq}\frac{2(2R-r)^2}{Rr}$$ și vezi inegalitatea (5) de la **Aplicația 11**.

Aplicația 37.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}}{(p-b)\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\sin^2\frac{B}{2}}{(p-c)\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\sin^2\frac{C}{2}}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\sin^2\frac{A}{2},(p-b)\sin^2\frac{B}{2},(p-c)\sin^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$\sum(p-a)\sin^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}}==\frac{rp}{2R}\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{r^2p}\overset{(G)}{\geq}10-\frac{2r}{R}$ și vezi inegalitatea (1) de la

Aplicația 1.

Aplicația 38.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\cos^2\frac{A}{2}}{(p-b)\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\cos^2\frac{B}{2}}{(p-c)\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\cos^2\frac{C}{2}}{(p-a)\cos^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 18.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\cos^2\frac{A}{2},(p-b)\cos^2\frac{B}{2},(p-c)\cos^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$$\sum(p-a)\cos^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2R-r}{2Rr}\cdot\frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}\overset{Doucet}{\geq}$$

$$\overset{Doucet}{\geq}\frac{2R-r}{2Rr}\cdot\frac{p^2(r-8R)+3p^2(4R+r)}{p^2}=\frac{2R-r}{2Rr}\cdot(4R+4r)=\frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}$$ și vezi

inegalitatea (7) de la **Aplicația 22.**

Aplicația 39.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\text{tg}^2\frac{A}{2}}{(p-b)\text{tg}^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\text{tg}^2\frac{B}{2}}{(p-c)\text{tg}^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\text{tg}^2\frac{C}{2}}{(p-a)\text{tg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 16.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\text{tg}^2\frac{A}{2},(p-b)\text{tg}^2\frac{B}{2},(p-c)\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$\sum(p-a)\text{tg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\text{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{r(4R+r)}{p}\cdot\frac{p}{r^2}=1+\frac{4R}{r}$ și vezi (2) din **Aplicația 4.**

Aplicația 40.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\text{ctg}^2\frac{A}{2}}{(p-b)\text{ctg}^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\text{ctg}^2\frac{B}{2}}{(p-c)\text{ctg}^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\text{ctg}^2\frac{C}{2}}{(p-a)\text{ctg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 16.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2},(p-b)\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2},(p-c)\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$$\sum(p-a)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}=\frac{p\left(p^2-12Rr\right)}{r^2}\cdot\frac{(4R+r)^3-12Rp^2}{rp^3}=$$

$$\frac{p^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{(4R+r)^3-12Rp^2}{rp^2}\overset{(G+D)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{3p^2(4R+r)-12Rp^2}{rp^2}=\frac{12R}{r}-15.$$

Este suficient să arătăm că (10):

$$\frac{12R}{r}-15+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow 24R^2-(n+48)Rr+2nr^2\geq 0\Leftrightarrow(R-2r)(24R-nr)\geq 0$$

care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 48$.

Aplicația 41.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\sec^2\frac{A}{2}}{(p-b)\sec^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\sec^2\frac{B}{2}}{(p-c)\sec^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\sec^2\frac{C}{2}}{(p-a)\sec^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\sec^2\frac{A}{2},(p-b)\sec^2\frac{B}{2},(p-c)\sec^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$$\sum(p-a)\sec^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\sec^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{p}\cdot\frac{p}{2Rr}\overset{(G)}{\geq}10-\frac{2r}{R}$$ și vezi inegalitatea (1) de la

Aplicația 1.

Aplicația 42.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(p-a)\csc^2\frac{A}{2}}{(p-b)\csc^2\frac{B}{2}}+\frac{(p-b)\csc^2\frac{B}{2}}{(p-c)\csc^2\frac{C}{2}}+\frac{(p-c)\csc^2\frac{C}{2}}{(p-a)\csc^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 74.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((p-a)\csc^2\frac{A}{2},(p-b)\csc^2\frac{B}{2},(p-c)\csc^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$$\sum(p-a)\csc^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(p-a)\csc^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rr}\overset{(Gerresten)}{\geq}$$

$$\overset{(G)}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{2Rr}=\frac{4r(R-r)}{r^2}\cdot\frac{4R^2-2Rr-3r^2}{2Rr}=$$

$$=2\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4R^2}{r^2}-\frac{2R}{r}-3\right)$$ și vezi inegalitatea (8) de la **Aplicația 23.**

Aplicația 43.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a+2r_a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{(h_b+2r_b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{(h_b+2r_b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{(h_c+2r_c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{(h_c+2r_c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{(h_a+2r_a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 18.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a+2r_a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},(h_b+2r_b)\operatorname{tg}\frac{B}{2},(h_c+2r_c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că

$$\sum(h_a+2r_a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a+2r_a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}==\frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}\cdot\frac{2R-r}{2Rr}\overset{Doucet}{\geq}$$

$$\overset{Doucet}{\geq}\frac{p^2(r-8R)+3p^2(4R+r)}{p^2}\cdot\frac{2R-r}{2Rr}=(4R+4r)\cdot\frac{2R-r}{2Rr}=\frac{2(R+r)(2R-r)}{Rr}$$ și vezi inegalitatea (7) de la **Aplicația 22.**

Aplicația 44.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a+2r_a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{(h_b+2r_b)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\frac{(h_b+2r_b)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{(h_c+2r_c)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{(h_c+2r_c)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{(h_a+2r_a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a+2r_a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2},(h_b+2r_b)\operatorname{ctg}\frac{B}{2},(h_c+2r_c)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum(h_a+2r_a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a+2r_a)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{p(p^2+r^2+4Rr)}{2Rr}\cdot\frac{1}{p}\overset{(G)}{\geq}10-\frac{2r}{R}$$ și vezi inegalitatea (1) de la **Aplicația 1.**

Aplicația 45.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a+2r_a)\sin^2\frac{A}{2}}{(h_b+2r_b)\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{(h_b+2r_b)\sin^2\frac{B}{2}}{(h_c+2r_c)\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{(h_c+2r_c)\sin^2\frac{C}{2}}{(h_a+2r_a)\sin^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 32.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a+2r_a)\sin^2\frac{A}{2},(h_b+2r_b)\sin^2\frac{B}{2},(h_c+2r_c)\sin^2\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum\left(h_a+2r_a\right)\sin^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{\left(h_a+2r_a\right)\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\left(4R+r\right)^2-2p^2}{2R}\cdot\frac{2R\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r^2p^2}\overset{(\text{Doucet}+\text{Gerretsen})}{\geq}$$

$$\overset{(\text{D+G})}{\geq}\frac{3p^2-2p^2}{p^2}\cdot\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{r^2p^2}=\frac{8R}{r}-7$$ și vezi (4) de la **Aplicația 8.**

Aplicația 46.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\left(h_a+2r_a\right)\text{tg}^2\frac{A}{2}}{\left(h_b+2r_b\right)\text{tg}^2\frac{B}{2}}+\frac{\left(h_b+2r_b\right)\text{tg}^2\frac{B}{2}}{\left(h_c+2r_c\right)\text{tg}^2\frac{C}{2}}+\frac{\left(h_c+2r_c\right)\text{tg}^2\frac{C}{2}}{\left(h_a+2r_a\right)\text{tg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}$$, unde $n\leq 38$.

<u>Soluție.</u>

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\left(h_a+2r_a\right)\text{tg}^2\frac{A}{2},\left(h_b+2r_b\right)\text{tg}^2\frac{B}{2},\left(h_c+2r_c\right)\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum\left(h_a+2r_a\right)\text{tg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{\left(h_a+2r_a\right)\text{tg}^2\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{\left(4R+r\right)^4+p^2\left(r^2-8Rr-48R^2\right)}{2Rp^2}\cdot\left[\frac{2R}{r^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]\overset{(\text{G})}{\geq}\left(8+\frac{2r}{R}\right)\left[\frac{2R}{r}-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right].$$

Este suficient să arătăm că:

$$\left(8+\frac{2r}{R}\right)\left[\frac{2R}{r}-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\Leftrightarrow p^2\left[32R^2-\left(n+10\right)Rr+2nr^2\right]\geq 4r\left(4R+r\right)^3$$ care

rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ și condiția $n\leq 38$.

Rămâne să arătăm că:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[32R^2-\left(n+10\right)Rr+2nr^2\right]\geq 4r\left(4R+r\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256R^3-\left(16n+160\right)R^2r+\left(37n+2\right)Rr^2-\left(10n+4\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left[256R^2-16nRr+\left(5n+2\right)r^2\right]\geq 0$$, care este evidentă din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ și condiția $n\leq 38$, care asigură pozitivitatea parantezei drepte.

Aplicația 47.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\left(h_a+2r_a\right)\text{ctg}^2\frac{A}{2}}{\left(h_b+2r_b\right)\text{ctg}^2\frac{B}{2}}+\frac{\left(h_b+2r_b\right)\text{ctg}^2\frac{B}{2}}{\left(h_c+2r_c\right)\text{ctg}^2\frac{C}{2}}+\frac{\left(h_c+2r_c\right)\text{ctg}^2\frac{C}{2}}{\left(h_a+2r_a\right)\text{ctg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}$$, unde $n\leq 30$.

<u>Soluție.</u>

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\left(h_a+2r_a\right)\text{ctg}^2\frac{A}{2},\left(h_b+2r_b\right)\text{ctg}^2\frac{B}{2},\left(h_c+2r_c\right)\text{ctg}^2\frac{C}{2}\right)$, ținem seama că $\sum\left(h_a+2r_a\right)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{\left(h_a+2r_a\right)\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+r^2-8Rr\right)}{2Rr^2}\cdot\frac{2R-r}{p^2}\overset{(G)}{\geq}$

$\overset{(G)}{\geq}\frac{2\left(2R-r\right)^2}{Rr}$ şi vezi inegalitatea (5) de la **Aplicația 11.**

Aplicația 48.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\left(h_a+2r_a\right)\csc^2\frac{A}{2}}{\left(h_b+2r_b\right)\csc^2\frac{B}{2}}+\frac{\left(h_b+2r_b\right)\csc^2\frac{B}{2}}{\left(h_c+2r_c\right)\csc^2\frac{C}{2}}+\frac{\left(h_c+2r_c\right)\csc^2\frac{C}{2}}{\left(h_a+2r_a\right)\csc^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 6.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\left(h_a+2r_a\right)\csc^2\frac{A}{2},\left(h_b+2r_b\right)\csc^2\frac{B}{2},\left(h_c+2r_c\right)\csc^2\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum\left(h_a+2r_a\right)\csc^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{\left(h_a+2r_a\right)\csc^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{2Rr^2}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{4Rp^2}\overset{(G+D)}{\geq}$$

$$\overset{(G+D)}{\geq}\frac{p^2\left(16Rr-5r^2+2r^2-8Rr\right)+r^2\cdot 3p^2}{2Rr^2}\cdot\frac{16Rr-5r^2-r^2-4Rr}{4Rp^2}=12-\frac{6r}{R}$$ şi vezi inegalitatea

(5) de la **Aplicația 11.**

Aplicația 49.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\left(h_a-2r\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\left(h_b-2r\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{\left(h_b-2r\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\left(h_c-2r\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{\left(h_c-2r\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\left(h_a-2r\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 2.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(\left(h_a-2r\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2},\left(h_b-2r\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2},\left(h_c-2r\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$, ținem seama

$$\sum\left(h_a-2r\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{\left(h_a-2r\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{r\left(p^2+r^2+4Rr\right)}{2Rp}\cdot\frac{p}{r^2}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr}\overset{(G)}{\geq}10-\frac{2r}{R}$$

şi vezi inegalitatea (1) de la **Aplicația 1.**

Aplicația 50.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\left(h_a-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\left(h_b-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\frac{\left(h_b-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\left(h_c-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{\left(h_c-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\left(h_a-2r\right)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 74.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a-2r)\operatorname{ctg}\frac{A}{2},(h_b-2r)\operatorname{ctg}\frac{B}{2},(h_c-2r)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum(h_a-2r)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a-2r)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-p^2}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{r^2}\cdot\frac{2R(4R+r)-4R^2-4Rr-3r^2}{2Rr}=$$

$$=\frac{4r(R-r)}{r^2}\cdot\frac{4R^2-2Rr-3r^2}{2Rr}=2\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4R^2}{r^2}-\frac{2R}{r}-3\right)$$ și vezi (8) din **Aplicația 23.**

Aplicația 51.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a-2r)\cos^2\frac{A}{2}}{(h_b-2r)\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{(h_b-2r)\cos^2\frac{B}{2}}{(h_c-2r)\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{(h_c-2r)\cos^2\frac{C}{2}}{(h_a-2r)\cos^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}$$, unde $n\leq 32$.

<u>Soluție.</u>
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a-2r)\cos^2\frac{A}{2},(h_b-2r)\cos^2\frac{B}{2},(h_c-2r)\cos^2\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum(h_a-2r)\cos^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a-2r)\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{2R}\cdot\frac{2R\left[(4R+r)^2-2p^2\right]}{r^2p^2}\overset{(G)}{\geq}$$

$$=\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{2R}\cdot\frac{2R(3p^2-2p^2)}{r^2p^2}=\frac{8R}{r}-7$$ și vezi (4) de la **Aplicația 8.**

Aplicația 52.
În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a-2r)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{(h_b-2r)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}+\frac{(h_b-2r)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}{(h_c-2r)\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}+\frac{(h_c-2r)\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{(h_a-2r)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}$$, unde $n\leq 2$.

<u>Soluție.</u>
Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a-2r)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2},(h_b-2r)\operatorname{tg}^2\frac{B}{2},(h_c-2r)\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)$, apoi

$$\sum(h_a-2r)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a-2r)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{r^2\left[p^2+(4R+r)^2\right]}{2Rp^2}\cdot\frac{4R+r}{r^2}=$$

$$=\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$$ și vezi inegalitatea (6) de la **Aplicația 12.**

Aplicația 53.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{(h_a-2r)\sec^2\frac{A}{2}}{(h_b-2r)\sec^2\frac{B}{2}}+\frac{(h_b-2r)\sec^2\frac{B}{2}}{(h_c-2r)\sec^2\frac{C}{2}}+\frac{(h_c-2r)\sec^2\frac{C}{2}}{(h_a-2r)\sec^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 6.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu, Pitesti

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left((h_a-2r)\sec^2\frac{A}{2},(h_b-2r)\sec^2\frac{B}{2},(h_c-2r)\sec^2\frac{C}{2}\right)$,apoi

$$\sum(h_a-2r)\sec^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{(h_a-2r)\sec^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{2Rp^2}\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{4Rr^2}\overset{(G)}{\geq}$$

$$\overset{(G)}{\geq}\frac{p^2\left(16Rr-5r^2+2r^2-8Rr\right)+r^2\cdot 3p^2}{2Rp^2}\cdot\frac{16Rr-5r^2-r^2-4Rr}{4Rr^2}=12-\frac{6r}{R}$$ și vezi inegalitatea (3)

de la **Aplicația 5.**

Aplicația 54.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{b^2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{b^2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{c^2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{c^2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 48.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2},b^2\operatorname{tg}\frac{B}{2},c^2\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$,ținem seama că

$$\sum a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sum\frac{1}{a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=4p(R-r)\cdot\frac{p^4+2p^2\left(r^2-6Rr\right)+r^3(4R+r)}{16R^2r^3p}\overset{(G)}{\geq}4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2$$ și vezi

Aplicația 15.

Aplicația 55.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2r_a}{b^2r_b}+\frac{b^2r_b}{c^2r_c}+\frac{c^2r_c}{a^2r_a}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\geq 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\leq 48.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a^2r_a,b^2r_b,c^2r_c\right)$,ținem seama că

$$\sum a^2r_a\sum\frac{1}{a^2r_a}=4p(R-r)\cdot\frac{p^4+2p^2\left(r^2-6Rr\right)+r^3(4R+r)}{16R^2r^3p}\overset{(G)}{\geq}4\left(\frac{R}{r}-1\right)\left(2-\frac{r}{R}\right)^2$$

și vezi **Aplicația 15.**

Aplicația 56.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2\sec^2\frac{A}{2}}{b^2\sec^2\frac{B}{2}}+\frac{b^2\sec^2\frac{B}{2}}{c^2\sec^2\frac{C}{2}}+\frac{c^2\sec^2\frac{C}{2}}{a^2\sec^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\ge 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\le 30.$$

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a^2\sec^2\frac{A}{2},b^2\sec^2\frac{B}{2},c^2\sec^2\frac{C}{2}\right)$,ținem seama că

$$\sum a^2\sec^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{a^2\sec^2\frac{A}{2}}=8R(2R-r)\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2r^2}\overset{(G)}{\ge}\frac{2(2R-r)^2}{Rr}$$ și vezi inegalitatea (5) de la

Aplicația 11.

Aplicația 56.

În triunghiul ABC este adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{a^2\csc^2\frac{A}{2}}{b^2\csc^2\frac{B}{2}}+\frac{b^2\csc^2\frac{B}{2}}{c^2\csc^2\frac{C}{2}}+\frac{c^2\csc^2\frac{C}{2}}{a^2\csc^2\frac{A}{2}}\right)^2+n\cdot\frac{r}{R}\ge 9+\frac{n}{2}\text{ , unde } n\le 2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Punem în **Lemă** $(x,y,z)=\left(a^2\csc^2\frac{A}{2},b^2\csc^2\frac{B}{2},c^2\csc^2\frac{C}{2}\right)$,ținem seama că

$$\sum a^2\csc^2\frac{A}{2}\sum\frac{1}{a^2\csc^2\frac{A}{2}}=8R(4R+r)\cdot\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2p^2}=\left(2+\frac{r}{2R}\right)\left[1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2\right]$$

și vezi inegalitatea(6) de la **Aplicația 12**.

La fiecare din inegalitățile din triunghi de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

1. Romanian Mathematical Magazine 2017, Founding Editor Daniel Sitaru, Romanian Mathematical Society,Mehedinți Branch.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

4. PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

Petre Rău, Galați

PG1. Să se arate că există un singur număr de patru cifre $\overline{abcd}$, pentru care $\overline{abcd}^2 = \overline{xyztabcd}$.

Rezolvare: $\overline{abcd}^2=\overline{xyztabcd} \rightarrow \overline{abcd}\left(\overline{abcd}-1\right)=\overline{xyzt0000}=$ N. Se observă că produsul d(d-1) trebuie să se termine cu cifra 0. Singurele cifre care verifică acest lucru sunt d∈{1, 5, 6}.

Dacă presupunem că d=1, atunci $\overline{abc1}\cdot\overline{abc0} = \overline{xyzt0000}$; se vede că $1\cdot c$ trebuie să se termine cu 0, deci c=0. Atunci, $\overline{ab01}\ \overline{ab00} = (100\overline{ab}+1)\cdot 100\overline{ab} = 10^4\overline{ab}^2+100\overline{ab} = \overline{xyzt0000}$ și pentru ca cifra sutelor lui N să fie 0 trebuie ca b să fie 0, adică $\overline{a001}\ \overline{a000} = (1000a+1)\cdot 1000a = 10^6a^2+10^3a = \overline{xyzt0000}$, de aici rezultă că a=0, deci presupunerea noastră că d=1 nu este corectă.

Dacă d=5, avem $\overline{abc5}\cdot\overline{abc4} = (10\overline{abc}+5)(10\overline{abc}+4) = 100\overline{abc}^2+90\overline{abc}+20 = \overline{xyzt0000}$. Pentru ca cifra zecilor numărului N să fie 0 trebuie ca 9c+2 să se termine cu 0 și singurul c convenabil este 2. Avem $\overline{ab25}\cdot\overline{ab24} = (100\overline{ab}+25)(100\overline{ab}+24) = 10^4\overline{ab}^2 + 4900\overline{ab} + 600 = \overline{xyzt0000}$. În baza unui raționament asemănător, rezultă că 9b+6 se termină cu 0, de unde găsim b=6. De aici avem că $\overline{a625}\cdot\overline{a624} = (1000a+625)(1000a+624) = 10^6a^2 + 1249000a + 390000 = \overline{xyzt0000}$. Dar de aici rezultă că 9a se termină cu 0, adică a=0, ceea ce nu convine.

Dacă c=6, avem $\overline{abc6}\cdot\overline{abc5} = (10\overline{abc}+6)(10\overline{abc}+5) = 100\overline{abc}^2+110\overline{abc}+30 = \overline{xyzt0000}$. Pentru ca cifra zecilor numărului N să fie 0 trebuie ca $1\cdot c+3$ să se termine cu 0, iar singurul c convenabil este 7. Avem $\overline{ab76}\cdot\overline{ab75} = (100\overline{ab}+76)(100\overline{ab}+75) = 10^4\overline{ab}^2+15100\overline{ab}+5700 = \overline{xyzt0000}$. Pentru ca cifra sutelor numărului N să fie 0, trebuie ca $1\cdot b+7$ să se termină cu 0, de unde găsim b=3. Acum avem că $\overline{a376}\cdot\overline{a375} = (1000a+376)(1000a+375) = 10^6a^2+751000a+141000 = \overline{xyzt0000}$. De aici rezultă că $1\cdot a+1$ trebuie să se termine cu 0, deci a=9.

Așadar, am găsit un singur număr cu proprietatea din enunț. El este $9376^2 = 87909376$.

PG2. Să se calculeze minimul și maximul expresiei E = x+3y-2z, știind că x, y și z sunt numere pozitive și avem 7x-2y+6z = 3 și 11x-6y+3z = 4.

Rezolvare: Din condițiile date determinăm variabilele y și z în funcție de variabila x și găsim: $y = \frac{2x-1}{2}$, $z = \frac{1-3x}{2}$; cum avem de a face cu trei variabile pozitive, rezultă că $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Expresia E devine: $E = 6x-2$, deci $E_{min} = 0$ și $E_{max} = 1$.

PG3. Dacă avem satisfăcută relaţia $a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 + 2k^2 = 2k(a^2 + b^2 + c^2)$, k fiind un număr real pozitiv, atunci a, b şi c sunt laturile unui triunghi dreptunghic.

Rezolvare: Relaţia dată mai poate fi scrisă şi sub forma: $(a^4+k^2-2a^2k)+(b^4+c^4+k^2+2b^2c^2-2b^2k-2c^2k) = 0$, sau $(a^2-k)^2+(b^2+c^2-k)^2 = 0$. Am obţinut o sumă nulă de două pătrate, deci avem $a^2-k = 0$ şi $b^2+c^2-k = 0$, adică $a^2=k$ şi $b^2+c^2 = k$.

Găsim deci relaţia $a^2 = b^2+c^2$, ceea ce înseamnă că numerele a, b şi c sunt laturile unui triunghi dreptunghic.

PG4. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi a, b şi c verifică relaţia

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc = n(15a+16b+17c-97n)$$

este dreptunghic, n fiind un număr natural.

Rezolvare: Înmulţind relaţia dată cu 2 şi grupând după cum urmează $(a^2+b^2+49n^2+2ab-14an-14bn) + (a^2+c^2+64n^2+2ac-16an-16cn) + (b^2+c^2+81n^2+2bc-18bn-18cn) = 0$, găsim $(a+b-7n)^2+(a+c-8n)^2+(b+c-9n)^2 = 0$, de unde rezultă că $a+b = 7n$, $a+c = 8n$, $b+c = 9n$. Rezolvând sistemul, găsim soluţia $a=3n$, $b=4n$, $c=5n$, numere care verifică teorema lui Pitagora, pentru orice n natural.

PG5. Se dă triunghiul isoscel ABC în care AB=AC şi unghiul A este ascuţit. Pe latura AB se ia un punct M astfel ca MB=CB. Perpendiculara dusă din M pe latura AB întâlneşte pe AC în N şi pe BC în P. Dacă unghiul <MCN este egal cu unghiul <CPN să se arate că:

$$\widehat{MPC} = \frac{\widehat{PMC}}{2} = \frac{\widehat{CNP}}{3} = \frac{\widehat{ABC}}{4} = \frac{\widehat{PNB}}{5} = \frac{\widehat{NCP}}{6} = \frac{\widehat{MNC}}{7}.$$

Rezolvare:

Fie $\widehat{MNC} = \widehat{CPN} = x$ şi $\widehat{BAC} = y$. Avem: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^0-y}{2}$

$\widehat{BMC} = \widehat{BCM} = \frac{180^0-\widehat{ABC}}{2} = \frac{180^0+y}{4}$.

În triunghiul dreptunghic MBP avem $x+\frac{180^0-y}{2} = 90^0$ şi exprimând în funcţie de x şi y valoarea unghiului $\widehat{ACB}$ obţinem sistemul

$$x+\frac{180^0+y}{4} = \frac{180^0-y}{2}$$
$$x+\frac{180^0-y}{2} = 90^0$$

care are soluţia: $x=18^0$ şi $y=36^0$. Se găseşte astfel că: $\widehat{MPC}=18^0$, $\widehat{PMC}=36^0$, $\widehat{CNP}=54^0$, $\widehat{ABC}=72^0$, $\widehat{PMB}=90^0$, $\widehat{NCP}=108^0$ şi $\widehat{MNC}=126^0$, care verifică egalităţile din enunţ.

5. O PROBLEMA DE LICEU CU MAI MULTE SOLUȚII

Fie $I \subset R$, interval şi $f: I \to R^*$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă pe I.

a) Să se calculeze $\int\left(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{(f(x))^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}dx$, $x \in I$,

b) Să se calculeze $\int\left(1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}\right)\cdot e^{\frac{x}{\ln x}}dx$, $x \in (1,\infty)$

Prof. Marian Teler

Soluţie autor:

a) Avem:

$$\left(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{(f(x))^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{f(x)}} = x'\cdot e^{\frac{(x}{f(x)}} + x\cdot\frac{x'\cdot f(x)-x\cdot f'(x)}{(f(x))^2}\cdot e^{\frac{x}{f(x})} =$$

$$= x'\cdot e^{\frac{x}{f(x)}} + x\cdot\left(\frac{x}{f(x)}\right)'\cdot e^{\frac{x}{f(x)}} = x'\cdot e^{\frac{x}{f(x)}} + x\cdot\left(e^{\frac{x}{f(x)}}\right)' = \left(xe^{\frac{x}{f(x)}}\right)'$$

Rezultă: $\int\left(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{(f(x))^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}dx = xe^{\frac{x}{f(x)}}+c$

b) Se aplică a) pentru funcţia $f:(1,\infty)\to R,\ f(x)=\ln x$,

Obţinem: $\int\left(1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}\right)\cdot e^{\frac{x}{\ln x}}dx = xe^{\frac{x}{\ln x}}+c$

Alte soluţii:

1) PROF. SILVIA MUSĂTOIU, COLEGIUL NAŢIONAL GHEORGHE ŞINCAI, BUCUREŞTI

a) $\int(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{f^2(x)})\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}\,dx = \int e^{\frac{x}{f(x)}}dx + \int x\,(\frac{1}{f(x)}-\frac{xf'(x)}{f^2(x)})\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}\,dx =$

$=\int e^{\frac{x}{f(x)}}dx + \int x\,\frac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}\,dx = \int e^{\frac{x}{f(x)}}dx + \int x\,(e^{\frac{x}{f(x)}})'\,dx =$

$= \int e^{\frac{x}{f(x)}}dx + xe^{\frac{x}{f(x)}} - \int e^{\frac{x}{f(x)}}\,dx = xe^{\frac{x}{f(x)}} + C$

b) Alegem f: $(1,\infty)\to(0,\infty)$, f(x) = lnx . Functia este derivabila cu derivata continua pe $(1,\infty)$, asadar, conform punctului a) rezulta:

$$\int\left(1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}\right)e^{\frac{x}{\ln x}}\,dx = x\cdot e^{\frac{x}{\ln x}}+C$$

2) PROF. FLORIN PARASCHIV, GRUPUL ŞCOLAR VALEA CĂLUGAREASCĂ

a)Fie $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)'=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{(f(x))^2}=\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{xf'(x)}{(f(x))^2}$

Se observa ca $xg'(x)+1=x\left(\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{xf'(x)}{(f(x))^2}\right)+1=1+\dfrac{x}{f(x)}-\dfrac{x^2f'(x)}{(f(x))^2}$

Deci $\displaystyle\int\left(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2f'(x)}{(f(x))^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{f(x)}}dx=\int(xg'(x)+1)\cdot e^{g(x)}dx=\int xg'(x)e^{g(x)}dx+\int e^{g(x)}dx=$

$\displaystyle=\int x\left(e^{g(x)}\right)'dx+\int e^{g(x)}dx=xe^{g(x)}-\int e^{g(x)}dx+\int e^{g(x)}dx=xe^{g(x)}=xe^{\frac{x}{f(x)}}$

b)Se rezolva analog.

Fie $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}\Rightarrow g'(x)=\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}$

Se observa ca $xg'(x)+1=x\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)+1=1+\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{x}{(\ln x)^2}$

Deci $\displaystyle\int\left(1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{(\ln x)^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{\ln x}}dx=\int(xg'(x)+1)\cdot e^{g(x)}dx=\int xg'(x)e^{g(x)}dx+\int e^{g(x)}dx=$

$\displaystyle=\int x\left(e^{g(x)}\right)'dx+\int e^{g(x)}dx=xe^{g(x)}-\int e^{g(x)}dx+\int e^{g(x)}dx=xe^{g(x)}=xe^{\frac{x}{\ln x}}$

3) PROFESOR CODREANU IOAN – VIOREL, SCOALA CU CLASELE I- VIII SATULUNG , MARAMURES

a) Derivam $x\,e^{\frac{x}{f(x)}}$ si obtinem succesiv

$\left(x\,e^{\frac{x}{f(x)}}\right)' = e^{\frac{x}{f(x)}} + x\left(e^{\frac{x}{f(x)}}\right)' = e^{\frac{x}{f(x)}} + x\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)' e^{\frac{x}{f(x)}} = e^{\frac{x}{f(x)}} + x\,\dfrac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}\,e^{\frac{x}{f(x)}} =$

$= \left(1+\dfrac{x}{f(x)}-\dfrac{x^2f'(x)}{f^2(x)}\right)e^{\frac{x}{f(x)}}\,,\ \forall x\in I$

Rezulta

$$\int (1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{f^2(x)})\ e^{\frac{x}{f(x)}}\ dx\ = x\ e^{\frac{x}{f(x)}} + c$$

b) Folosind rezultatul de la punctul a) pentru f: $(1,\infty)\longrightarrow$ R*,

f(x) = lnx ,derivabila si cu derivata f'(x)= $\frac{1}{x}$ continua pe $(1,\infty)$ obtinem

$$\int (1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x})\ e^{\frac{x}{\ln x}}\ dx\ = x\ e^{\frac{x}{\ln x}} + c$$

4) Conf. dr. mat. Gh. Procopiuc, Universitatea Tehnică Iaşi

Fie $I \subset \mathbf{R}$, interval şi $f : I \to \mathbf{R}^*$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă pe I.

a). Să se calculeze

$$\int \left(1+\frac{x}{f(x)}-\frac{x^2 f'(x)}{f^2(x)}\right) e^{\frac{x}{f(x)}} dx, \quad x \in I,$$

b). Să se calculeze

$$\int \left(1+\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}\right) e^{\frac{x}{\ln x}} dx, \quad x \in (o,\infty).$$

Soluţie: a). Notăm cu J integrala de calculat şi fie $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Atunci:

$$J = \int \left(1 + xg(x) + x^2 g'(x)\right) e^{xg(x)} dx =$$

$$= \int \left[1 + x\left(g(x) + xg'(x)\right)\right] e^{xg(x)} dx = \int e^{xg(x)} dx + \int x de^{xg(x)}.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$J = \int e^{xg(x)} dx + xe^{xg(x)} - \int e^{xg(x)} dx = xe^{xg(x)} + C = xe^{\frac{x}{f(x)}} + C.$$

b). Luând în a) $f(x) = \ln x$, găsim $J = xe^{\frac{x}{\ln x}} + C$.