

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

IUNIE 2019

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

**REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU**

ARTICOLE REVISTĂ:

- 1. Some certain inequalities with Fibonacci and Lucas numbers...pag.2**
By D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău
- 2. Other solutions for certain problems from School Science and Mathematics Journal...pag.8**
by Nela Ciceu, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău
- 3. În legătură cu problema 234 The Olympic Mathematical Marathon 2018, Vol 1**
By George Apostolopoulos and Daniel Sitaru...pag.11
Marin Chirciu
- 4. Three solutions of a beautiful problem...pag.24**
by Alex – Andrei Cioc, Alexandru Tupan and Daniel Văcaru
- 5. Solutions of two problems from Sclipirea Minții 22...pag.27**
by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania
- 6. Ecuații exponențiale și logaritmice nmai puțin "obișnuite" ...pag.29**
prof. Aurora Olivia Mironescu
- 7. Solution for the problem Q48 from Sclipirea Minții no. 22/2018...pag.32**
By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.
- 8. Other solution for the problem Q45 from the math journal Sclipirea Minții...pag.33**
By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.
- 9. Other solutions for the problems from Math Journal Sclipirea Minții, No. 22...pag.34**
by Gheorghiță Robert-Octavian, "Mihai Eminescu" National College, Buzău, Romania
- 10. Studiu asupra unor inegalități...pag.37**
Cozma Ciprian Ioan
- 11. Studiu asupra unor probleme...pag.42**
Cozma Ciprian Ioan
- 12. A geometric proof of $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$...pag.46**
By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.
- 13. Studiu asupra unei metode numerice de determinare simultană a rădăcinilor unui polinom...pag.47**
Cozma Ciprian Ioan

1. Some certain inequalities with Fibonacci and Lucas numbers

By D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău

1. If $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, then:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{T_k} \geq \frac{3F_n^2 F_{n+1}^2}{nT_{n+1}}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu, N. Stanciu, and Gabriel Tica 2013)

Proof. We have:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{F_k^4}{T_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k^2)^2}{T_k},$$

by *H. Bergström* we get

$$U_n \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^2 \right)^2}{\sum_{k=1}^n T_k}$$

And by

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}, \text{ și } \sum_{k=1}^n T_k = \frac{n}{3} T_{n+1},$$

QED.

2. If $x_k = L_k, k = \overline{1, m}, x_{m+1} = x_1$ și $y_k = F_k, k = \overline{1, m}, y_{m+1} = y_1$, then

$$\frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} \geq \frac{L_m L_{m+1}}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} \geq \frac{F_m F_{m+1}}{L_{m+2}}, \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.

$$U_n = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{x_k^3}{F_{n+1}x_k + F_n x_{k+1}} = \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + F_n x_k x_{k+1}} \geq$$

$$\geq \frac{2}{F_{n+2}} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{F_{n+1}x_k^2 + \frac{F_n}{2}(x_k^2 + x_{k+1}^2)} = \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(x_k^2)^2}{(2F_{n+1} + F_n)x_k^2 + F_n x_{k+1}^2},$$

by *H. Bergström* we get:

$$U_n \geq \frac{2}{F_{n+2}} + 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^2}{(2F_{n+1} + F_n) \sum_{k=1}^m x_k^2 + F_n \sum_{k=1}^n x_{k+1}^2} = \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_n + F_{n+1}} \sum_{k=1}^n x_k^2 =$$

$$= \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} \sum_{k=1}^m L_k^2,$$

And using:

$$\sum_{k=1}^m L_k^2 = L_m L_{m+1} - 2,$$

We get (1).

Also we have:

$$V_m = \sum_{k=1}^m \frac{y_k^3}{L_m y_k + L_{m+1} y_{k+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + L_{m+1} y_k y_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{L_m y_k^2 + \frac{L_{m+1}}{2}(y_k^2 + y_{k+1}^2)} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{(y_k^2)^2}{(2L_m + L_{m+1})y_k^2 + L_{m+1} y_{k+1}^2},$$

And by *H. Bergström* we deduce:

$$V_n \geq 2 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^m y_k^2\right)^2}{(2L_m + L_{m+1}) \sum_{k=1}^m y_k^2 + L_{m+1} \sum_{k=1}^m y_{k+1}^2} = \frac{1}{L_m + L_{m+1}} \sum_{k=1}^m y_k^2 = \frac{1}{L_{m+2}} \sum_{k=1}^m F_k^2,$$

And using:

$$\sum_{k=1}^m F_k^2 = F_m F_{m+1},$$

We obtain (2), done.

3. For any natural number $n > 1$ and for any real number $p \geq 0$, we have

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{F_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p} \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{L_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p} \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. If $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, k = \overline{0, n}, p \in \mathbf{R}_+$, then by *J. Radon* inequality

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^{p+1}}{y_k^p} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n x_k \right)^{p+1}}{\left(\sum_{k=0}^n y_k \right)^p},$$

Where we take $x_k = \binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k$, și $y_k = 1, k = \overline{0, n}$.

Therefore:

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_m^{n-k} F_{m+1}^k \right)^{p+1}}{(n+1)^p} = \frac{(F_m + F_{m+1})^{n(p+1)}}{(n+1)^p} = \frac{F_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p},$$

i.e. (1) is true.

Putting $x_k = \binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k$, and $y_k = 1, k = \overline{0, n}$ by the inequality of *J. Radon* we get:

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_m^{n-k} L_{m+1}^k \right)^{p+1}}{(n+1)^p} = \frac{(L_m + L_{m+1})^{n(p+1)}}{(n+1)^p} = \frac{L_{m+2}^{n(p+1)}}{(n+1)^p},$$

QED.

4. Let $p \geq 0$, and natural numbers n respectively m , we have:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n}{F_m} \right)^{p+1} + \\ & + \left(\frac{\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1}}{F_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \left(((F_{m+1} (F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n))^{p+1} + \right. \\
 &\quad \left. + (F_m (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} + F_m^{2n}))^{p+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \left((F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^n)^{p+1} + \right. \\
 &\quad \left. + (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1})^{p+1} \right),
 \end{aligned}$$

So by *J. Radon* inequality we deduce that:

$$\begin{aligned}
 U_n &\geq \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^{2n+1-k} F_m^k \right)^{p+1} = \\
 &= \frac{1}{2^p (F_m F_{m+1})^{p+1}} (F_m + F_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1},
 \end{aligned}$$

QED.

5.

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\left(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n \right)}{L_m} \right)^{p+1} + \\
 &+ \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} \right)}{L_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1}.
 \end{aligned}$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.
$$\begin{aligned}
 V_n &= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \left(((L_{m+1} (L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n))^{p+1} + \right. \\
 &\quad \left. + (L_m (\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n}))^{p+1} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \left((L_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n+1} L_m^n)^{p+1} + \right. \\ \left. + \left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} + L_m^{2n+1} \right)^{p+1} \right)$$

Therefore

$$V_n \geq \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} L_{m+1}^{2n+1-k} L_m^k \right)^{p+1} = \\ = \frac{1}{2^p (L_m L_{m+1})^{p+1}} (L_m + L_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1},$$

QED.

6.

$$\left(\frac{F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n}{F_m} \right)^{p+1} + \\ + \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} \right)}{F_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1} \quad (1)$$

$$\left(\frac{L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n}{L_m} \right)^{p+1} + \\ + \left(\frac{\left(\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} \right)}{L_{m+1}} \right)^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1} \quad (2)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.
$$U_n = \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} (((F_{m+1}(F_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n-1} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^n F_m^n))^{p+1} +$$

$$+ (F_m (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n-1} + F_m^{2n}))^{p+1}) =$$

$$= \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} ((F_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} F_{m+1}^{2n} F_m + \dots + \binom{2n+1}{n} F_{m+1}^{n+1} F_m^n)^{p+1} +$$

$$+ (\binom{2n+1}{n+1} F_{m+1}^n F_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} F_{m+1} F_m^{2n} + F_m^{2n+1})^{p+1}),$$

So:

$$U_n \geq \frac{1}{(F_m F_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{m+1}^{2n+1-k} F_m^k \right)^{p+1} =$$

$$= \frac{1}{2^p (F_m F_{m+1})^{p+1}} (F_m + F_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{F_{m+2}^{2n+1}}{F_m F_{m+1}} \right)^{p+1}, \text{ i.e. (1).}$$

$$V_n = \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} (((L_{m+1}(L_{m+1}^{2n} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n-1} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^n L_m^n))^{p+1} +$$

$$+ (L_m (\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^n + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n-1} + L_m^{2n}))^{p+1}) =$$

$$= \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} ((L_{m+1}^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} L_{m+1}^{2n} L_m + \dots + \binom{2n+1}{n} L_{m+1}^{n+1} L_m^n)^{p+1} +$$

$$+ (\binom{2n+1}{n+1} L_{m+1}^n L_m^{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} L_{m+1} L_m^{2n} + L_m^{2n+1})^{p+1})$$

$$V_n \geq \frac{1}{(L_m L_{m+1})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} L_{m+1}^{2n+1-k} L_m^k \right)^{p+1} =$$

$$= \frac{1}{2^p (L_m L_{m+1})^{p+1}} (L_m + L_{m+1})^{(p+1)(2n+1)} = \frac{1}{2^p} \left(\frac{L_{m+2}^{2n+1}}{L_m L_{m+1}} \right)^{p+1}, \text{ QED.}$$

REFERENCES:

[1] The Fibonacci Quarterly Journal, 1963-2019.

2. Other solutions for certain problems from School Science and Mathematics Journal

by Nela Ciceu, Bacău and
Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

- 5446: Proposed by Arsalan Wares, Valdosta State University, Valdosta, GA

Polygons $ABCD$, $CEFG$, and $DGHJ$ are squares. Moreover, point E is on side DC , $X = DG \cap EF$, and $Y = BC \cap JH$. If GX splits square $CEFG$ in regions whose areas are in the ratio 5:19. What part of square $DGHJ$ is shaded? (Shaded region in $DGHJ$ is composed of the areas of triangle YHG and trapezoid $EXGC$.)

Solution:

We denote by $[XY...Z]$ area of polygon $XY...Z$. Let $a = EC$, $b = AB$. By $\triangle DEX \approx \triangle DCG$ we obtain

$$\frac{EX}{CG} = \frac{DE}{DC} \Leftrightarrow \frac{EX}{a} = \frac{b-a}{b} \Rightarrow EX = \frac{a(b-a)}{a}, XF = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \frac{[XCF]}{[XECG]} = \frac{5}{19} \Leftrightarrow \frac{[XGF]}{[EFGC]} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{a^3}{2b} = \frac{5a^2}{24} \Rightarrow b = \frac{12a}{5} \Rightarrow DG = \frac{13a}{5}.$$

$$\text{Since } \angle YGH = \angle CDG \text{ and } HG = DB \Rightarrow \triangle YGH \cong \triangle GDC \Rightarrow [YHG] = \frac{6a^2}{5}.$$

$$\text{But } [EXGC] = \frac{19a^2}{24} \Rightarrow [YHG] + [EXGC] = \frac{239a^2}{120}.$$

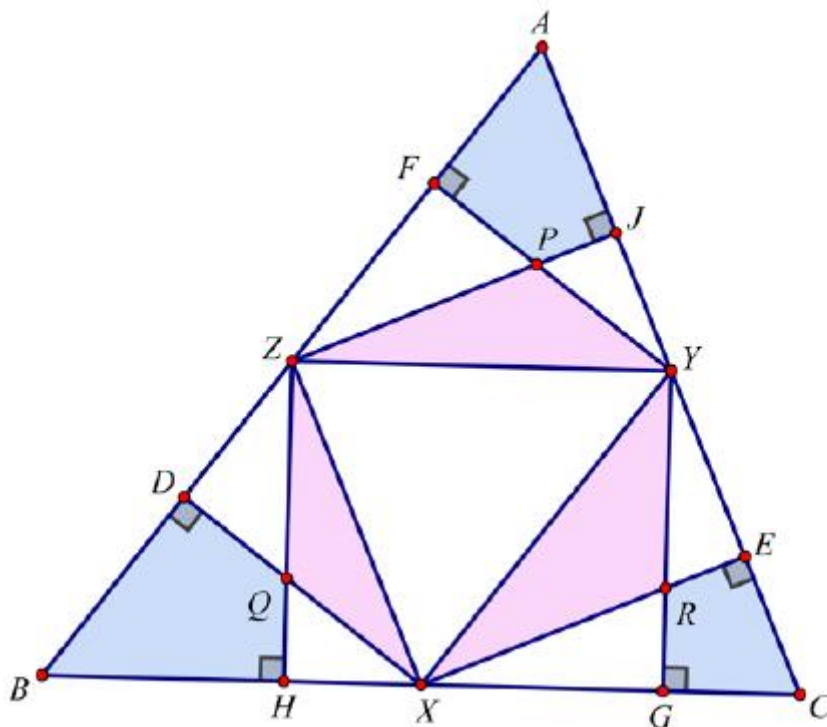
Hence

$$\frac{239}{120} : \frac{169}{25} = \frac{1195}{4056}$$

is part of square $DGHJ$ is shaded, and we are done!

- 5459: Proposed by Arsalan Wares, Valdosta State University, Valdosta, GA

Triangle ABC is an arbitrary acute triangle. Points X , Y , and Z are midpoints of three sides of $\triangle ABC$. Line segments XD and XE are perpendiculars drawn from point X to two of the sides of $\triangle ABC$. Line segments YF and YG are perpendiculars drawn from point Y to two of the sides of $\triangle ABC$. Line segments ZJ and ZH are perpendiculars drawn from point Z to two of the sides of $\triangle ABC$. Moreover, $P = ZJ \cap FY$, $Q = ZH \cap DX$, and $R = YG \cap XE$. Three of the triangles, and three of the quadrilaterals in the figure are shaded. If the sum of the areas of the three shaded triangles is 5, find the sum of the areas of the three shaded quadrilaterals.

**Solution:**

We have the following

$$\begin{aligned} & \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C = \\ & = \sin A \cos B \cos C + \cos A (\sin B \cos C + \cos B \sin C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin(B + C) = \\ & = \sin A \cos B \cos C - \cos(B + C) \sin A = \sin A \sin B \sin C, \end{aligned} \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C = \\ &= 2 \sin C (\cos(A - B) - \cos(A + B)) = 4 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin^2 B \cos^2 A + \sin^2 C \cos^2 A + \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 C \cos^2 B + \sin^2 A \cos^2 C + \sin^2 B \cos^2 C = \\ & = \sin^2 B \cos^2 A + \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 C \cos^2 B + \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 A \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 A = \\ & = \sin(2A + 2B) + \sin(2B + 2C) + \sin(2C + 2A) = -(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = -4 \sin A \sin B \sin C, \\ & \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 C + \cos^2 B \sin^2 A + \cos^2 B \sin^2 C + \cos^2 C \sin^2 A + \cos^2 C \sin^2 B = \sin^2 A + \\ & \sin^2 B + \sin^2 C + (\sin^2 B \cos^2 A + \sin^2 C \cos^2 A + \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 C \cos^2 B + \sin^2 A \cos^2 C + \\ & \sin^2 B \cos^2 C) / 2 = 2 \sin A \sin B \sin C, \end{aligned} \quad (2).$$

$AP \cap ZY = P'$. The circumradius of the triangle AZY is $R/2$ and the lengths of the sides of this triangle are $a/2, b/2, c/2$.

$$AF = (b \cos A)/2, AJ = (c \cos A)/2, FP = R \cos A \cos B, PJ = R \cos A \cos C,$$

$$PP' = R \cos B \cos C,$$

$$[ZPY] = (a/2)(R \cos B \cos C)/2 = (R^2/2) \sin A \cos B \cos C, \quad (3).$$

$$\begin{aligned} [AFPJ] &= [AFP] + [AJP] = ((b \cos A)/2)(R \cos A \cos B)/2 + ((c \cos A)/2)(R \cos A \cos C)/2 = \\ &= (R^2/4)(\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 C), \end{aligned} \quad (4).$$

From (1) and (3) we have that

$$\text{the sum of the areas of the three shaded triangles} = \frac{R^2}{2} \sin A \sin B \sin C, \quad (*).$$

From (2) and (4) we have that

$$\text{the sum of the areas of the three shaded quadrilaterals} = \frac{R^2}{4} \cdot 2 \sin A \sin B \sin C, (**).$$

Hence by (*) and (**) we obtain that

The sum of the areas of the three shaded quadrilaterals = The sum of the areas of the three shaded triangles!

- **5460:** *Proposed by Ángel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain*

If $a, b > 0$ and $x, y > 0$ then prove that

$$\frac{a^3}{ax+by} + \frac{b^3}{bx+ay} \geq \frac{a^2+b^2}{x+y}.$$

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{ax+by} + \frac{b^3}{bx+ay} &= \frac{a^4}{a^2x+aby} + \frac{b^4}{b^2x+ay} \stackrel{\text{Bergstrom}}{\geq} \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)x+2aby} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)x+(a^2+b^2)y} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)(x+y)} = \frac{a^2+b^2}{x+y}. \end{aligned}$$

P.S. In the statement of the problem 5460 the author "Ángel" becomes "Ángle" !

- **5463:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

Let N be a positive integer. Find triangular numbers x and y such that $x^2 + 14xy + y^2 = (72N^2 - 12N - 1)^2$.

Solution:

From the identity

$$\left(\frac{(6N-2)(6N-1)}{2}\right)^2 + 14 \cdot \frac{(6N-2)(6N-1)}{2} \cdot \frac{6N(6N+1)}{2} + \left(\frac{6N(6N+1)}{2}\right)^2 = (72N^2 - 12N - 1)^2$$

we obtain the solution

$$x = \frac{(6N-2)(6N-1)}{2}, \quad y = \frac{6N(6N+1)}{2}.$$

3. În legătură cu problema 234

The Olympic Mathematical Marathon 2018, Vol 1

by
George Apostolopoulos and Daniel Sitaru

Marin Chirciu¹

Articolul pornește de la o inegalitate în triunghi din cartea The Olympic Mathematical Marathon , Volume 1, având ca autori pe George Apostolopoulos din Grecia și Daniel Sitaru din România, apărută la Editura Cartea Românească Educațional în 2018 și dezvoltă inegalități din aceeași clasă de probleme.

$$1) \left(\sum IA \right)^2 \leq 2S \sum \frac{1}{\sin A}.$$

Daniel Sitaru, The Olympic Mathematical Marathon, Vol1, 2018

Soluție.

Demonstrăm rezultatul ajutător.

Lemă.

$$2) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc.$$

Demonstrație.

$$\text{Din } IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \text{ obținem } \sum IA^2 = r^2 \sum \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} = r^2 \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} = p^2 + r^2 - 8Rr$$

$$\text{și } \sum IB \cdot IC = r^2 \sum \frac{1}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = r^2 \frac{\sum \sin \frac{A}{2}}{\prod \sin \frac{A}{2}} \leq r^2 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{r}{4Rr}} = 6Rr.$$

$$\text{Din } \sum IA^2 = p^2 + r^2 - 8Rr \text{ și } \sum IB \cdot IC \leq 6Rr$$

$$\text{rezultă } \left(\sum IA \right)^2 = \sum IA^2 + 2 \sum IB \cdot IC \leq p^2 + r^2 - 8Rr + 12Rr = p^2 + r^2 + 4Rr = \sum bc.$$

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

$$\text{Avem } 2S \sum \frac{1}{\sin A} = 2S \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2rp} = p^2 + r^2 + 4Rr = \sum bc.$$

$$\text{Din } \left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc \text{ și } 2S \sum \frac{1}{\sin A} = \sum bc \text{ deducem concluzia } \left(\sum IA \right)^2 \leq 2S \sum \frac{1}{\sin A}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În continuare folosind **Lema** de mai sus se pot demonstra inegalități cu $\left(\sum IA \right)^2$.

$$1) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \frac{4S}{3} \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

¹ Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}.$$

$$\text{Avem } \frac{4S}{3} \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{4rp}{3} \cdot \frac{p}{r} = \frac{4p^2}{3}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{4p^2}{3} \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{4p^2}{3} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$2) \text{ În } \triangle ABC : (\sum IA)^2 \leq \frac{S}{\sqrt{3}} \sum \csc^2 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \csc^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{S}{\sqrt{3}} \sum \csc^2 \frac{A}{2} = \frac{rp}{\sqrt{3}} \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} = \frac{p}{r\sqrt{3}} (p^2 + r^2 - 8Rr) \geq 3(p^2 + r^2 - 8Rr), \text{ care rezultă}$$

din inegalitatea lui Mitrinovic $p \geq 3r\sqrt{3}$.

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$3(p^2 + r^2 - 8Rr) \geq \sum bc \Leftrightarrow 3(p^2 + r^2 - 8Rr) \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ care rezultă din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$3) \text{ În } \triangle ABC \text{ ascuțitunghic: } (\sum IA)^2 \leq \frac{Rp\sqrt{3}}{6} \sum \sec B \sec C.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \sec B \sec C = \sum \frac{1}{\cos B \cos C} = \frac{4R(R+r)}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \frac{Rp\sqrt{3}}{6} \sum \sec B \sec C &= \frac{Rp\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{4R(R+r)}{p^2 - (2R+r)^2} \geq \frac{R \cdot 9r}{6} \cdot \frac{4R(R+r)}{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - (2R+r)^2} = \\ &= \frac{3Rr}{2} \cdot \frac{4R(R+r)}{2r^2} = \frac{3R^2(R+r)}{r}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic } p \geq 3r\sqrt{3} \text{ și} \\ &\text{ inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \end{aligned}$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{3R^2(R+r)}{r} \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{3R^2(R+r)}{r} \geq p^2 + r^2 + 4Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$\frac{3R^2(R+r)}{r} \geq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow 3R^2(R+r) \geq 4(R+r)^2 \Leftrightarrow 3R^2 \geq 4(R+r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 - 4Rr - 4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(3R+2r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$4) \text{ În } \triangle ABC \text{ ascutitunghic: } (\sum IA)^2 \leq \frac{Rp\sqrt{3}}{3} \sum \sec A.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \sec A = \sum \frac{1}{\cos A} = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \frac{Rp\sqrt{3}}{3} \sum \sec A &= \frac{Rp\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2} \geq \frac{R \cdot 9r}{3} \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2} = \\ &= 3Rr \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2}, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic } p \geq 3r\sqrt{3}. \end{aligned}$$

și inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$3Rr \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2} \geq \sum bc \Leftrightarrow 3Rr \cdot \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(4R^3 + 20R^2r + 11Rr^2 + r^3) \geq p^2(p^2 - 4R^2 - 3Rr),$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$r(4R^3 + 20R^2r + 11Rr^2 + r^3) \geq (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 4R^2 - 3Rr) \Leftrightarrow$$

$$3R^2(R+r) \geq 4(R+r)^2 \Leftrightarrow 3R^2 \geq 4(R+r) \Leftrightarrow R^2 - Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(R+r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$5) \text{ În } \triangle ABC \text{ ascutitunghic: } (\sum IA)^2 \leq \frac{4S}{3} \sum \tan A.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \tan A = \frac{2rp}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{4S}{3} \sum \operatorname{tg} A = \frac{4rp}{3} \cdot \frac{2rp}{p^2 - (2R+r)^2} = \frac{8r^2 p^2}{p^2 - (2R+r)^2}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{8r^2 p^2}{p^2 - (2R+r)^2} \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{8r^2 p^2}{p^2 - (2R+r)^2} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r(4R+r)(2R+r)^2 \geq p^2(3p^2 - 12R^2 - 8r^2),$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$3r(4R+r)(2R+r)^2 \geq (4R^2 + 4Rr + 3r^2)[3(4R^2 + 4Rr + 3r^2) - 12R^2 - 8r^2] \Leftrightarrow$$

$$3(4R+r)(2R+r)^2 \geq (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(12R+r) \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$6) \text{ În } \triangle ABC : (\sum IA)^2 \leq 4S \sum \operatorname{ctg} A.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{ctg} A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2rp}.$$

$$\text{Avem } 4S \sum \operatorname{ctg} A = 4rp \cdot \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2rp} = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$2(p^2 - r^2 - 4Rr) \geq \sum bc \Leftrightarrow 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$7) \text{ În } \triangle ABC : (\sum IA)^2 \leq 2Rp\sqrt{3} \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2}.$$

$$\text{Avem } 2Rp\sqrt{3} \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 2Rp\sqrt{3} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2} = 2R\sqrt{3} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$2R\sqrt{3} \cdot \frac{(4R+r)^2 - p^2}{p} \geq \sum bc \Leftrightarrow 2R\sqrt{3} \cdot \frac{(4R+r)^2 - p^2}{p} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p\sqrt{3}(p^2 + r^2 + 4Rr) \geq 6R[(4R+r)^2 - 2p^2],$$

care rezultă din inegalitatea lui Doucet $4R+r \geq p\sqrt{3}$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să arătăm că:

$$(4R+r)(p^2 + r^2 + 4Rr) \geq 6R[(4R+r)^2 - 2p^2] \Leftrightarrow p^2(16R+r) \leq (4R+r)^2(16R-r),$$

$$\text{adevărată din inegalitatea Blundon-Gerretsen } p^2 \leq \frac{R(4r+r)^2}{2(2R-r)}.$$

Este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{R(4r+r)^2}{2(2R-r)}(16R+r) \leq (4R+r)^2(16R-r) \Leftrightarrow 8R^2 - 17Rr + 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(8R-r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23iunie 2018

$$8) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{4S\sqrt{3}}{9} \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{4S\sqrt{3}}{9} \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{4rp\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2} = \frac{4p\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA\right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{4p\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r} \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{4p\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4p\sqrt{3}(p^2 - 2r^2 - 8Rr), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic}$$

$$p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$9r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4 \cdot 9r(p^2 - 2r^2 - 8Rr) \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

Adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$9) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{S\sqrt{3}}{12} \sum \operatorname{csc}^2 \frac{B}{2} \operatorname{csc}^2 \frac{C}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Solutie.

$$\text{Folosim } \sum \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} = \sum \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{8R(2R-r)}{r^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{S\sqrt{3}}{12} \sum \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} = \frac{rp\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{8R(2R-r)}{r^2} = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2R(2R-r)}{r}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2R(2R-r)}{r} \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2R(2R-r)}{r} \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2p\sqrt{3}R(2R-r), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic}$$

$$p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2 \cdot 9r \cdot R(2R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2, \text{ adevărată din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2 \Leftrightarrow 4R^2 - 7Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$\mathbf{10)} \text{ În } \triangle ABC : (\sum IA)^2 \leq \frac{4R^2 p}{r\sqrt{3}} \sum \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Solutie.

$$\text{Folosim } \sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}.$$

$$\text{Avem } \frac{4R^2 p}{r\sqrt{3}} \sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4R^2 p}{r\sqrt{3}} \cdot \frac{2R-r}{2R} = \frac{2Rp\sqrt{3}}{3r} (2R-r).$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\frac{2Rp\sqrt{3}}{3r} (2R-r) \geq \sum bc \Leftrightarrow \frac{2Rp\sqrt{3}}{3r} (2R-r) \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2p\sqrt{3}R(2R-r), \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic}$$

$$p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2 \cdot 9r \cdot R(2R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2, \text{ adevărată din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2 \Leftrightarrow 4R^2 - 7Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$11) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \frac{4S\sqrt{3}}{27} \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{4S\sqrt{3}}{27} \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} = \frac{4rp\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r^2} = \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4p\sqrt{3}[(4R+r)^2 - 2p^2], \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic}$$

$$p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$27r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4 \cdot 9r[(4R+r)^2 - 2p^2] \Leftrightarrow 11p^2 \leq 64R^2 + 20Rr + r^2, \text{ adevărată din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$11(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 64R^2 + 20Rr + r^2 \Leftrightarrow 5R^2 - 6Rr - 8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R+4r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$12) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \frac{4p^3\sqrt{3}}{27r} \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2}.$$

$$\text{Avem } \frac{4p^3\sqrt{3}}{27r} \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{4p^3\sqrt{3}}{27r} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2} = \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{4p\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4p\sqrt{3}[(4R+r)^2 - 2p^2], \text{ care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic}$$

$$p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$27r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 4 \cdot 9r[(4R+r)^2 - 2p^2] \Leftrightarrow 11p^2 \leq 64R^2 + 20Rr + r^2, \text{ adevărată din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$11(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 64R^2 + 20Rr + r^2 \Leftrightarrow 5R^2 - 6Rr - 8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(5R + 4r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$13) \text{În } \triangle ABC \text{ ascuțitunghic: } \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{4S\sqrt{3}}{9} \sum \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA\right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{4S\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{4S\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(p^2 + r^2 + 4Rr) \left[p^2 - (2R + r)^2 \right] \leq 4rp\sqrt{3}(p^2 - r^2 - 4Rr), \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Mitrinovic $p \geq 3r\sqrt{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$$9(p^2 + r^2 + 4Rr) \left[p^2 - (2R + r)^2 \right] \leq 4r \cdot 9r(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + r^2 + 4Rr) \left[p^2 - (2R + r)^2 \right] \leq 4r^2(p^2 - r^2 - 4Rr), \text{ adevărată din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\Leftrightarrow (p^2 + r^2 + 4Rr) \left[4R^2 + 4Rr + 3r^2 - (2R + r)^2 \right] \leq 4r^2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + r^2 + 4Rr) \cdot 2r^2 \leq 4r^2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2, \text{ adevărată din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$14) \text{În } \triangle ABC : \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{8S\sqrt{3}}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sum \cos^3 A.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \cos^3 A = \frac{(2R + r)^3 - 4R^3 - 3p^2r}{4R^3}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA\right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{8S\sqrt{3}}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{(2R + r)^3 - 4R^3 - 3p^2r}{4R^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{2p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(2R + r)^3 - 4R^3 - 3p^2r}{Rr} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3Rr(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2p\sqrt{3}[(2R+r)^3 - 4R^3 - 3p^2r]$, care rezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p \geq 3r\sqrt{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3Rr(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2 \cdot 9r[(2R+r)^3 - 4R^3 - 3p^2r] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(R+18r) \leq 24R^3 + 68R^2r + 35Rr^2 + 6r^3, \text{ adevărată din inegalitatea lui Gerretsen}$$

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să demonstrăm că:

$$\Leftrightarrow p^2(R+18r) \leq 24R^3 + 68R^2r + 35Rr^2 + 6r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(R+18r) \leq 24R^3 + 68R^2r + 35Rr^2 + 6r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5R^3 - 2R^2r - 10Rr^2 - 12r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R^2 + 8Rr + 6r^2) \geq 0, \text{ evidentă din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$15) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{16S\sqrt{3}}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sum \sin^4 \frac{A}{2}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \sin^4 \frac{A}{2} = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA\right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{16S\sqrt{3}}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{2p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2p\sqrt{3}(8R^2 + r^2 - p^2), \text{ care rezultă din Mitrinovic } p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2 \cdot 9r(8R^2 + r^2 - p^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7p^2 \leq 48R^2 - 4Rr + 5r^2, \text{ adevărată din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Rămâne să demonstrăm că:

$$\Leftrightarrow 7(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 48R^2 - 4Rr + 5r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5R^2 - 8Rr - 4r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R+2r) \geq 0, \text{ evidentă din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$16) \text{ În } \triangle ABC \text{ ascuțitunghic: } \left(\sum IA\right)^2 \leq \frac{Rp\sqrt{3}}{3} \sum \frac{\cos B + \cos C}{\cos A}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\cos B + \cos C}{\cos A} = \frac{p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)}{R[p^2 - (2R+r)^2]}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{Rp\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)}{R[p^2 - (2R+r)^2]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)}{[p^2 - (2R+r)^2]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(p^2 + r^2 + 4Rr)[p^2 - (2R+r)^2] \leq p\sqrt{3}[p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)], \quad \text{care}$$

rezultă din Mitrinovic $p \geq 3r\sqrt{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$$3(p^2 + r^2 + 4Rr)[p^2 - (2R+r)^2] \leq 9r[p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)],$$

adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$3(p^2 + r^2 + 4Rr)[4R^2 + 4Rr + 3r^2 - (2R+r)^2] \leq 9r[p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)] \Leftrightarrow$$

$$3(p^2 + r^2 + 4Rr) \cdot 2r^2 \leq 9r[p^2(r-2R) + (2R+r)(4R^2 + 2Rr + r^2)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(6R-r) \leq 24R^3 + 24Rr^2 + 4Rr^2 + r^3,$$

adevărată tot din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Este suficient să arătăm că:

$$(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(6R-r) \leq 24R^3 + 24Rr^2 + 4Rr^2 + r^3,$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 5Rr + 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(2R-r) \geq 0, \text{ evidentă din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$17) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq 4S \sum \frac{\frac{B}{2} \frac{C}{2}}{\frac{A}{2}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\frac{B}{2} \frac{C}{2}}{\frac{A}{2}} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq 4S \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq 4rp \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp} \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$18) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq 4S \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp}.$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq 4S \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq 4rp \cdot \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{rp} \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$19) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \frac{4S}{3} \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p}{r} \left[\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right].$$

Folosind **Lema** $\left(\sum IA \right)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{4S}{3} \cdot \frac{p}{r} \left[\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right] \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{4}{3} \cdot \left[(4R+r)^2 - 2p^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11p^2 \leq 64R^2 + 20Rr + r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$11(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 64R^2 + 20Rr + r^2 \Leftrightarrow 5R^2 - 6Rr - 8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R+4r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$20) \text{ În } \triangle ABC : \left(\sum IA \right)^2 \leq \frac{4S}{3} \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{p}{r} \left[\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right].$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{4S}{3} \cdot \frac{p}{r} \left[\left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \right] \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{4}{3} \cdot [(4R+r)^2 - 2p^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11p^2 \leq 64R^2 + 20Rr + r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$11(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 64R^2 + 20Rr + r^2 \Leftrightarrow 5R^2 - 6Rr - 8r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(5R+4r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$21) \text{ În } \triangle ABC : (\sum IA)^2 \leq \frac{Rp}{\sqrt{3}} \sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosim } \sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{2(2R-r)}{r}.$$

Folosind **Lema** $(\sum IA)^2 \leq \sum bc$, este suficient să arătăm că

$$\sum bc \leq \frac{Rp}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2(2R-r)}{r} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq \frac{Rp\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2(2R-r)}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2Rp\sqrt{3}(2R-r), \text{ care rezultă din inegalitatea Mitrinovic } p \geq 3r\sqrt{3}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$3r(p^2 + r^2 + 4Rr) \leq 2R \cdot 9r(2R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2,$$

adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$\Leftrightarrow 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 12R^2 - 10Rr - r^2 \Leftrightarrow 4R^2 - 7Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+r) \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23iunie 2018

Bibliografie:

1. George Apostolopoulos and Daniel Sitaru, The Olympic Mathematical Marathon , Volume 1, Editura Cartea Românească Educațional, 2018.

2. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
7. Marin Chirciu, Puncte remarcabile în triunghi.Distanțe.Inegalități, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2019.

4. Three solutions of a beautiful problem

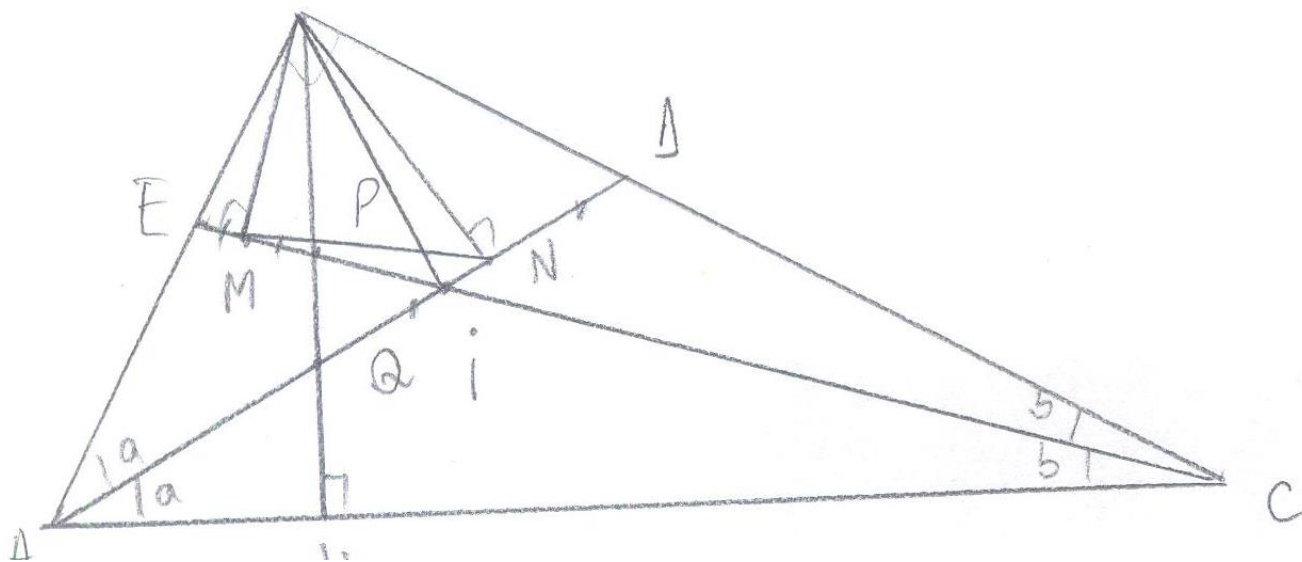
by Alex – Andrei Cioc, Alexandru Tupan and Daniel Văcaru

The PROBLEM is:

OC161. The altitude BH dropped onto the hypotenuse AC of a right triangle ABC intersects the angle bisectors AD and CE at Q respectively P . Prove that the line passing through the midpoints of segments $[QD]$ and $[PE]$ is parallel to the line AC .

[CRUX Mathematicorum]

Solution I (proposed by Alexandru – Andrei Cioc, Pitesti, Romania)



Let note $m(\widehat{BAC}) = 2a$ and $m(\widehat{BCA}) = 2b$. It follows that $2a + 2b = 90^\circ \Rightarrow a + b = 45^\circ$. In $\triangle BEC$, one has $m(\widehat{BEC}) = 90^\circ - b$. Consider $\triangle PHC$. We obtain $m(\widehat{HPC}) = 90^\circ - b$. But the angles $\widehat{HPC} \equiv \widehat{BPE}$ (angles opposite at top) and share the same measure, $90^\circ - b$. Therefore triangle $\triangle BEP$ is isosceles. But $[BM]$ is median in $\triangle BEP$. One obtain $BM \perp PE$. In triangle BAD , $m(\widehat{BDA}) = 90^\circ - a$. In triangle QAH , one obtain $m(\widehat{AQH}) = 90^\circ - a = m(\widehat{BQD})$ (again, $\widehat{BQD}$ and $\widehat{AQH}$ are opposite to the top). It follows that $\triangle BQD$ is isosceles, and $BN \perp DQ$. But $m(\widehat{EBM}) = 90^\circ - m(\widehat{BEC}) = b$ and $m(\widehat{NBD}) = 90^\circ - m(\widehat{ABD}) = a$ and this is followed by $m(\widehat{MBN}) = 90^\circ - a - b = 45^\circ$. Let $\{I\} = AD \cap CE$. Then BI is the bissector of $\widehat{ABC}$, and $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CBI}) = 45^\circ$. One obtain $m(\widehat{BMI}) + m(\widehat{BNI}) = 180^\circ$; it follows that $BMIN$ is inscriptible, and $\widehat{BMN} \equiv \widehat{BIM}$. In triangle BEI , one has $m(\widehat{BIE}) = 180^\circ - m(\widehat{EBI}) - m(\widehat{BEC}) = 135^\circ - 90^\circ + b = 45^\circ + b$; one find $m(\widehat{MNQ}) = 90^\circ - 45^\circ - b = a$; but $m(\widehat{AQH}) = a \Rightarrow \widehat{MNQ} \equiv \widehat{QAH}$; that means $\widehat{MNQ}$ and $\widehat{QAH}$ are internal alternate angles for lines MN and AC with secant AN . One obtain $MN \parallel AC$, as desired.

II) (Alexandru Tupan)

Drop a perpendicular $DW \perp AC$. Use the formula

$$\text{dist}(M, AC) = \frac{|QH| + |DW|}{2}.$$

The idea is to evaluate the two segments in the numerator and compare with the other side. Let

$k = \frac{|AC|}{|AB|}$. Since AD is a bisector, we have

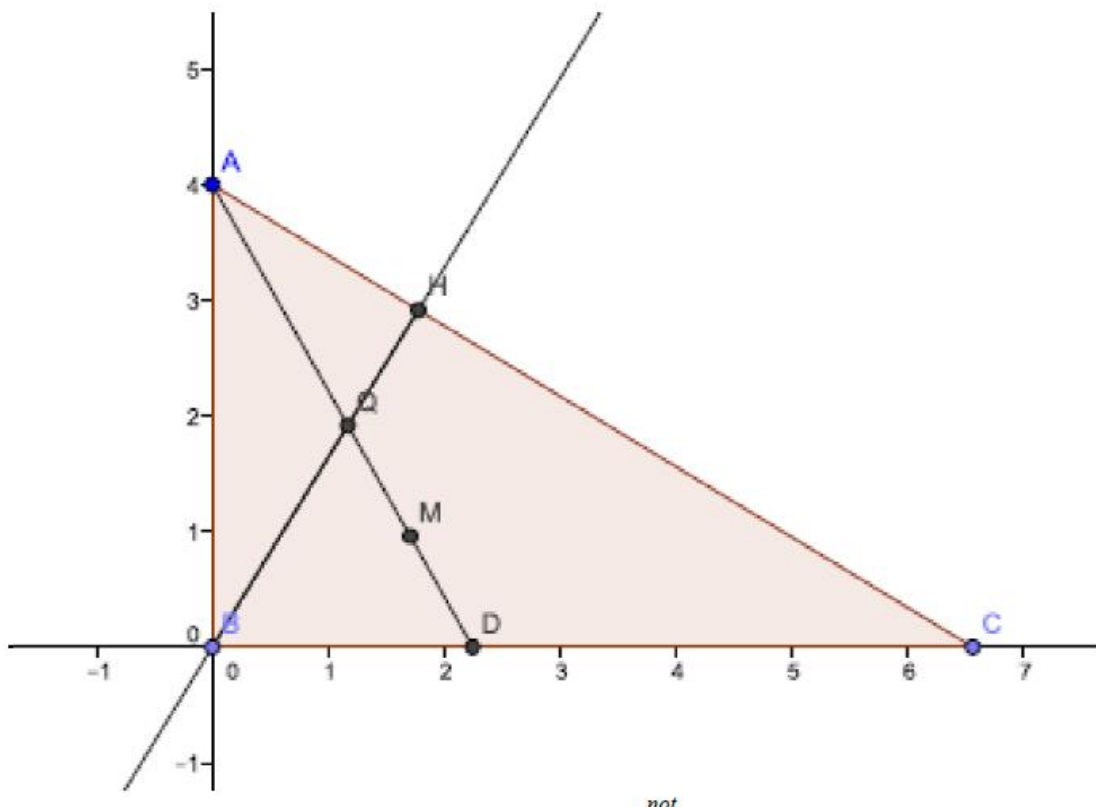
$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow |DW| = \frac{k}{k+1} \cdot |BH|.$$

Similarly, AQ is a bisector and $\frac{|QH|}{|BH|} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow |QH| = \frac{1}{k+1} \cdot |BH|$.

Adding the two formulas above we see that $|DW| + |QH| = |BH|$, so $\text{dist}(M, AC) = \frac{|BH|}{2}$. The conclusion follows easily.

III (Daniel Văcaru).

The third solution is based on the following picture:



Let M the midpoint of $[QD]$. One note $m(\widehat{BCA}) \stackrel{\text{not}}{=} x$. It is clear that $\frac{AH}{CH} = \frac{AH \cdot AC}{CH \cdot AC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$. It follows that $AH \cdot \cos^2 x = CH^2 \cdot \sin^2 x$. But $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \Rightarrow \cos^2 x \cdot \overrightarrow{BH} = \cos^2 x \cdot \overrightarrow{BA} + \cos^2 x \cdot \overrightarrow{AH}$ (1) and $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} \Rightarrow \sin^2 x \cdot \overrightarrow{BH} = \sin^2 x \cdot \overrightarrow{BA} + \sin^2 x \cdot \overrightarrow{AH}$ (2). Adding (1) and (2), one obtain $\overrightarrow{BH} = \cos^2 x \cdot \overrightarrow{BA} + \sin^2 x \cdot \overrightarrow{BC}$

It is clear that $\frac{BQ}{QH} = \frac{AB}{AH} = \frac{AB^2}{AH \cdot AB} = \frac{AH \cdot AC}{AH \cdot AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \frac{BQ}{BH} = \frac{1}{\sin x + 1}$. One obtain

$$\overrightarrow{BQ} = \left(\frac{1}{\sin x + 1} \right) \cdot (\cos^2 x \overrightarrow{BA} + \sin^2 x \cdot \overrightarrow{BC}). \text{ Again, by bissector theorem, one has } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \sin x \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{\sin x}{\sin x + 1} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sin x}{\sin x + 1} \right) \cdot \overrightarrow{BC}. \text{ Eventually, one find } \overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BD}) = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sin x + 1} \right) [(\cos^2 x \overrightarrow{BA} + \sin^2 x \overrightarrow{BC}) + \sin x \overrightarrow{BC}] = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot [(1 - \sin x) \overrightarrow{BA} + \sin x \overrightarrow{BC}]$$

With a similar argument, if one note N the midpoint of $[PE]$, then one obtain

$$\overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2} \right) [\cos x \overrightarrow{BA} + (1 - \cos x) \overrightarrow{BC}]$$

Then one has

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot [(1 - \sin x) \overrightarrow{AB} + \sin x \overrightarrow{CB}] + \left(\frac{1}{2} \right) \cdot [\cos x \cdot \overrightarrow{BA} + (1 - \cos x) \cdot \overrightarrow{BC}] \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) [(1 - \sin x - \cos x) \overrightarrow{AB} + (1 - \cos x - \sin x) \overrightarrow{BC}] = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (1 - \sin x - \cos x) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (1 - \sin x - \cos x) \cdot (\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

Then $\overrightarrow{MN}$ is collinear with $\overrightarrow{AC}$, and the desired parallelism followed this.

I comment the third solution. It is ugly, I recognize, but this solution emphasize vectors and trigonometry. This is the benefit of it. It is a solution of an teacher, and this explains all.

5. Solutions of two problems from Scipirea Minții 22

by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

Q45. Proposed by D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$, $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, n is positive integer.

Find

$$\int_a^b \frac{e^x + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx$$

Solution:

Consider the function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \sin x + P_n(x)$

$$\text{But } f'(x) = e^x + \cos x + P_{n-1}(x) \Rightarrow f(x) - f'(x) = \sin x - \cos x + \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{So, } n!(f(x) - f'(x)) = n!(\sin x - \cos x) + x^n$$

We have

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{e^x + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx \\ I &= \int_a^b \frac{n!(f(x) - f'(x))}{f(x)} dx = n! \int_a^b \left(1 - \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = n!(x - \ln f(x)) \Big|_a^b = n!(b - a - \ln \frac{f(b)}{f(a)}) \end{aligned}$$

Q48.**Proposed by Marian Cucoanes, Marasesti, Romania**Prove that in any triangle ABC holds the following inequality

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \leq 4 \frac{R}{r} - 2$$

Solution:

Using the known formula

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Write the inequality as

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}} = \sum \sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}$$

The Cauchy-Schwarz inequality gives us

$$\sum \sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}} \leq \sqrt{(\sum ab)(\sum \frac{1}{(a-a)(s-b)})} = \sqrt{(s^2 + r^2 + 4Rr)} \frac{1}{r^2}$$

Therefore,

$$\sqrt{(s^2 + r^2 + 4Rr)} \frac{1}{r^2} \leq \frac{4R - 2r}{r} \Leftrightarrow s^2 + r^2 + 4Rr \leq (4R - 2r)^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 \leq 16R^2 - 20Rr + 3r^2$$

According to Gerretsen's inequality $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, we get

$$12R^2 - 24Rr \geq 0 \Rightarrow 12R(R - 2r) \geq 0, \text{ which is obvious}$$

6. Ecuații exponențiale și logaritmice mai puțin "obișnuite"

prof. Aurora Olivia Mironescu
Colegiul de Industrie Alimentară "Elena Doamna", Galați

Sunt ecuații pentru care nu există metode generale de rezolvare; nu se pot reduce la ecuații de gradul I sau II. Tehnicile utilizate apelează la studiul monotoniei, convexității unor funcții, inegalități clasice etc.

Propoziție. Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este strict convexă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, iar $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție liniară, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții în intervalul I .

Demonstrație: Presupunem că există cel puțin trei soluții diferite x_1, x_2, x_3 în intervalul I .
 Fie

$x_3 \in (x_1, x_2)$. Atunci există $\lambda \in (0, 1)$, astfel încât $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Dar $f(x_3) = g(x_3) = \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$, contradicție cu faptul că f este funcție strict convexă.

Observație: 1. Concluzia propoziției se păstrează dacă funcția este strict concavă.

2. Se poate demonstra că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este strict convexă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, iar $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție concavă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții în intervalul I .

Exemplul 1. Rezolvați ecuația $5^x = 4x + 1$.

Soluție: Se verifică faptul că $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ sunt soluții ale ecuației. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x$ este strict convexă, iar funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x + 1$ este o funcție liniară. Rezultă că singurele soluții ale ecuației sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

Exemplul 2. Rezolvați ecuația $2^{\log_3 x} + 3^{\log_x 2} = 4$

Soluție: $3^{\log_x 2} = 2^{\log_x 3}$. Notăm $\log_3 x = t, x > 0, x \neq 1$. Ecuația devine $2^t + 2^{\frac{1}{t}} = 4$. Pentru $t \leq 0$ ecuația nu are soluții. Pentru $t > 0$, aplicând inegalitatea mediilor, rezultă $4 = 2^t + 2^{\frac{1}{t}} \geq 2\sqrt{2^{t+\frac{1}{t}}} \geq 4$, cu egalitate dacă $t = 1$, deci $x = 3$.

Exemplul 3. Rezolvați ecuația: $\log_3(2^x + 1) = \log_3(3^x - 1)$

Etapă locală, Galați, 2010

Soluție: Din condiția $3^x - 1 > 0$ rezultă $x > 0$. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ este bijectivă și are inversa $f^{-1}(x) = \log_3(3^x - 1)$, $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Ecuația devine $f(x) = f^{-1}(x)$, $x > 0$. Cum f, f^{-1} sunt funcții diferite și au reprezentările grafice simetrice față de prima bisectoare, valorile lor comune vor coincide pe dreapta $y = x$, când $f(x) = f^{-1}(x) = x$. Ecuația dată se reduce la ecuația $\log_3(2^x + 1) = x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$. Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$, fiind strict descrescătoare, ecuația $g(x) = 1$ are cel mult o soluție. Găsim $x=1$, unica soluție a ecuației date.

Exemplul 4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^4-5x^2+3} = \frac{x}{x^2+2}$.

Marian Ursărescu, G.M.8/2005

Soluție: Deoarece $3^{x^4-5x^2+3} > 0$, rezultă $x > 0$. Logaritmand, se obține $x^4 - 5x^2 + 3 = \log_3 x - \log_3(x^2 + 2) \Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2) + (x^2 + 2)^2 = \log_3(3x) + (3x)^2$.

Funcția

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x + x^2$ este strict crescătoare, deci injectivă. Rezultă $x^2 + 2 = 3x$, de unde $x = 1$ și $x = 2$.

Exemplul 5. a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $2^x = x + 1$;

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(f(x)) = 2^x - 1$, pentru orice număr real x . Demonstrați că $f(0) + f(1) = 1$.

Soluție: a) Observăm că $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții. Ecuația $2^x = x + 1$ are cel mult două soluții, deoarece o dreaptă intersectează graficul unei funcții strict convexe în cel mult două puncte.

b) Din $f(x) = f(y)$ deducem $f(f(x)) = f(f(y))$, deci $2^x = 2^y$, de unde $x = y$. Prin urmare, f este funcție injectivă. Din $f(f(x)) = 2^x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $f(f(f(x))) = 2^{f(x)} - 1$ și

$f(f(f(x))) = f(2^x - 1)$, deci $f(2^x - 1) = 2^{f(x)} - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ rezultă

$f(0) = 2^{f(0)} - 1$, iar pentru $x = 1$, rezultă $f(1) = 2^{f(1)} - 1$, adică $f(0), f(1)$ sunt soluțiile ecuației $t = 2^t - 1$. Rezultă că $f(0), f(1) \in [0, 1]$. Din injectivitatea funcției, avem că $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$, deci $f(0) + f(1) = 1$.

Exemplul 6. Rezolvați ecuația $2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}$

Etapa națională, 2007, Lucian Dragomir, Oțelul Roșu.

Soluție: Condiția de existență $x \in (0, \infty)$. Se adună în ambii membri $\log_2(x + 1)$.

Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_2 x$ este strict crescătoare ca sumă de două funcții strict crescătoare. Egalitatea din ecuație devine $f(x^2 + 1) = f(x + 1)$, de unde rezultă $x^2 + 1 = x + 1$. Singura soluție care verifică, $x = 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolae Mușuroia, Dana Heuberger, Gheorghe Boroica, Florin Bojor, Vasile Pop-
MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență,
clasa a 10-a, Editura Paralela 45, Pitești, 2016
2. Marian Andronache, Radu Gologan, Dan Schwarz, Dinu Șerbănescu- OLIMPIADA
MATEMATICĂ-2006-2010, Etapele Județeană și Națională, Editura Sigma, București,
2010

7. Solution for the problem Q48 from Scipirea Minții no. 22/2018**By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.****Q48. Proposed by Marian Cucoaneș, Mărășești, Romania**Prove that in any triangle ABC holds the following inequality

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \leq 4 \cdot \left(\frac{R}{r} \right) - 2.$$

Solution (proposed by Daniel Văcaru, Pitești, Romania)

One knows that $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}$. By **AM – GM**, one

has $\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{\frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}}{2}$. Summing, one obtain

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \leq \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}.$$

One obtain

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} = \frac{\sum a(s^2 - (b+c)s + bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2s^3 - 2s(ab+bc+ca) + 3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
 But

$ab+bc+ca = s^2 + r^2 + 4Rr$, and one obtain

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \leq \frac{3abc - 2sr^2 - 8RS}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{4RS}{(s-a)(s-b)(s-c)} - \frac{2sr^2}{(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (1)$$

.On the other hand, one has

$$\frac{S}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{Ss}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{Ss}{S^2} = \frac{s}{S} = \frac{1}{r} \quad (2) \text{ and}$$

$\frac{sr^2}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s \cdot \left(\frac{S^2}{s^2} \right)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1 \quad (3)$. Using (2) and (3) in (1), we obtain the desired inequality.

8. Other solution for the problem Q45 from the math journal Sclpirea Minții

By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.

Q45. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$, $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, n is positive integer.

Find $\int_a^b \frac{x^n + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx$.

Solution (proposed by Daniel Văcaru, Pitești, Romania)

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \sin x + P_n(x)$. Then

$$f(x) - f'(x) = [e^x + \sin x + P_n(x)] - [e^x + \cos x + P_{(n-1)}(x)] = \frac{x^n}{n!} + \sin x - \cos x =$$

$$\frac{1}{n!} \cdot (x^n + n!(\sin x - \cos x)) \Rightarrow x^n + n!(\sin x - \cos x) = n!(f(x) - f'(x))$$

Then is clear that

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{x^n + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} \right) dx &= \int_a^b \left(\frac{n!(f(x) - f'(x))}{f(x)} \right) dx = n! \cdot \int_a^b \left(\frac{f(x) - f'(x)}{f(x)} \right) dx = \\ &= n! \cdot \left[\int_a^b 1 dx - \int_a^b \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) dx \right]. \end{aligned}$$

We have $\int_a^b 1 dx = x \Big|_a^b = b - a$ and $\int_a^b \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) dx = \ln f(x) \Big|_a^b = \ln \frac{f(b)}{f(a)}$. We obtain

$$\int_a^b \left(\frac{x^n + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} \right) dx = n! \cdot \left[(b - a) + \ln \left(\frac{e^a + \sin a + P_n(a)}{e^b + \sin b + P_n(b)} \right) \right].$$

9. Other solutions for the problems from Math Journal Scipirea Minții, No. 22

by Gheorghiță Robert-Octavian, "Mihai Eminescu" National College, Buzău, Romania

Q45.

It is easy to notice that: $(P_n(x))' = P_{n-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Denote: $\int_a^b \frac{x^n + n!(\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx = I$.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b n! \frac{\frac{x^n}{n!} + (\sin x - \cos x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx \Leftrightarrow I = \int_a^b n! \frac{e^x + \sin x + P_n(x) - e^x - \cos x - P_{n-1}(x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx \Leftrightarrow I = n! \int_a^b \frac{e^x + \sin x + P_n(x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx - \\ &- n! \int_a^b \frac{e^x + \cos x + P_{n-1}(x)}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx \Leftrightarrow I = n!(b-a) - n! \int_a^b \frac{(e^x + \sin x + P_n(x))'}{e^x + \sin x + P_n(x)} dx \Leftrightarrow I = n!(b-a) - n! \ln \left(\frac{e^b + \sin b + P_n(b)}{e^a + \sin a + P_n(a)} \right). \end{aligned}$$

Q46.

We group convenient terms and we have:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)} &= \sum \frac{a(2a+b+c+2b+2c)}{(b+c)(2a+b+c)} = \sum \frac{a(2a+b+c)}{(b+c)(2a+b+c)} + \sum \frac{2a(b+c)}{(b+c)(2a+b+c)} \Leftrightarrow \sum \frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)} = \\ &= \sum \frac{a}{b+c} + \sum \frac{2a+b+c}{2a+b+c} - \sum \frac{b+c}{2a+b+c} = \sum \frac{a}{b+c} - \sum \frac{b+c}{2a+b+c} + 3 \text{ and inequality becomes:} \\ \sum \frac{a}{b+c} - \sum \frac{b+c}{2a+b+c} + 3 &\geq 3 \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+c} \geq \sum \frac{b+c}{2a+b+c}. \end{aligned}$$

Consider the following pairs of numbers: $\left\langle \frac{b}{a+b}, \frac{b}{a+c} \right\rangle$ and $\left\langle \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+c} \right\rangle$ with analogs. Applying the inequality of the averages ($AM \geq HM$, with equality for $a=b=c$) for each pair of form $\langle x, y \rangle$ and summing up the inequalities we have:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{b+a} + \frac{a}{b+c} + \frac{c}{b+a} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{a}{c+b} + \frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+b}}{4} &\geq \sum \frac{b+c}{2a+b+c} \Leftrightarrow \frac{3+2 \sum \frac{a}{b+c}}{4} \geq \\ &\geq \sum \frac{b+c}{2a+b+c}. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{But } \sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3+2 \sum \frac{a}{b+c}}{4} \Leftrightarrow 2 \sum \frac{a}{b+c} \geq 3 \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \text{ (true), Nesbitt - Ionescu inequality.} \quad (2)$$

So (1) and (2) $\Rightarrow \sum \frac{a}{b+c} \geq \sum \frac{b+c}{2a+b+c}$. (qed). We have equality iff $a=b=c$, and we are done.

Q47.

(i) How $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1 \Rightarrow x, y, z \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} (xyz)^3 &\geq x^{\frac{1}{x}} y^{\frac{1}{y}} z^{\frac{1}{z}} \Leftrightarrow 3 \ln(xyz) \geq \ln x^{\frac{1}{x}} + \ln y^{\frac{1}{y}} + \ln z^{\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \ln(xyz) \geq \frac{\ln x^{\frac{1}{x}} + \ln y^{\frac{1}{y}} + \ln z^{\frac{1}{z}}}{3} \Leftrightarrow -\ln(xyz) \leq -\frac{\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{y} \ln y + \frac{1}{z} \ln z}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x} \frac{1}{y} \frac{1}{z}\right) &\leq \frac{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{z} \ln\left(\frac{1}{z}\right)}{3} \Leftrightarrow \ln\sqrt[3]{\frac{1}{x} \frac{1}{y} \frac{1}{z}} \leq \frac{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ln \frac{1}{z}}{9}. \\ \ln\sqrt[3]{\frac{1}{x} \frac{1}{y} \frac{1}{z}} &\leq \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) (AM \geq GM) \text{ with equality for } x = y = z = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

We have to prove next inequality: $\ln\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3}\right) \leq \frac{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ln \frac{1}{z}}{9}.$

Denote: $a = \frac{1}{x} > 1, b = \frac{1}{y} > 1, c = \frac{1}{z} > 1.$

Let us consider the next function: $\lambda: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \lambda(t) = t \ln t.$

$\lambda''(t) = \frac{1}{t} > 0 \Rightarrow \lambda$ is convex $\Rightarrow \lambda\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c)}{3}$ (Jensen's inequality).

Then we have only to prove: $\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{\frac{a+b+c}{3} \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}{3} (1) \Leftrightarrow a+b+c \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9.$

But $x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{3}{x+y+z} = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ (qed).

We have equality if and only if $x = y = z = \frac{1}{3}$. The proof is complete.

(ii) How $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1 \Rightarrow x, y, z \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} (x+1)^3 (y+1)^3 (z+1)^3 &\leq (x+1)^{\frac{1}{x}} (y+1)^{\frac{1}{y}} (z+1)^{\frac{1}{z}} \Leftrightarrow 3 \ln(x+1)(y+1)(z+1) \leq \frac{1}{x} \ln(x+1) + \frac{1}{y} \ln(y+1) + \frac{1}{z} \ln(z+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)}) &\leq \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) + \frac{1}{y} \ln(y+1) + \frac{1}{z} \ln(z+1)}{9}. \\ \ln(\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)}) &\leq \ln\left(\frac{x+1+y+1+z+1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) (GM \leq AM) \text{ with equality for } x = y = z = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

We have to prove: $\ln\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) + \frac{1}{y} \ln(y+1) + \frac{1}{z} \ln(z+1)}{9}.$

Let us consider the next function: $\gamma: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}$, which is convex.

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &\leq \frac{\gamma(x) + \gamma(y) + \gamma(z)}{3} \text{ (Jensen's inequality)} \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{x+y+z}{3} + 1\right)}{3 \frac{x+y+z}{3}} \leq \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) + \frac{1}{y} \ln(y+1) + \frac{1}{z} \ln(z+1)}{9} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \frac{4}{3} &\leq \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) + \frac{1}{y} \ln(y+1) + \frac{1}{z} \ln(z+1)}{9} \text{ (qed)}. \text{ , we have equality if and only if } x = y = z = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Q48(1).

Using well known identity: $4R = \frac{r}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$, we have:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} &\leq \frac{1}{r} \frac{r}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} - 2 \Leftrightarrow \frac{\sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \\ &\leq 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 + [\cos(\frac{A+B}{2}) - \cos(\frac{A-B}{2})] \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 + \sin^2 \frac{C}{2} - \\ &- \cos(\frac{A-B}{2}) \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 + \sin^2 \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{\pi-C}{2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 + \sin^2 \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \\ &\cos(\frac{A+B}{2}) \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 + \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \sum \sin^2 \frac{A}{2}, \text{ denote } \sin \frac{A}{2} = x, \sin \frac{B}{2} = y, \sin \frac{C}{2} = z \Rightarrow \sum xy \leq \sum x^2 (\text{true}). \end{aligned}$$

Remark:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= (\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) (\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) \Leftrightarrow \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} - \\ \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} &\Leftrightarrow \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} (1 - \sin^2 \frac{B}{2}) - \sin^2 \frac{B}{2} (1 - \cos^2 \frac{A}{2}) \Leftrightarrow \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

We have equality if and only if the ABC triangle is equilateral. The proof is complete.

10. Studiu asupra unor inegalități

Prof. Cozma Ciprian Ioan

Liceul Tehnologic “Dr. F. Ulmeanu”, Ulmeni, Maramureș

Problema 1

Să se demonstreze că :

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Soluție

Dacă $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \leq 1$, evident adevărată

Pentru $n \geq 2$ avem :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^3-1} < 1$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Adunăm membru cu membru relațiile de mai sus și obținem :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n-1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Pentru $n \geq 2$ avem :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} > 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$$

Adunăm membru cu membru cele $n-2$ inegalități de mai sus și obținem :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n-2}{n} / + (1 + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n+2}{2} / - \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Cum pentru } n \geq 2 \text{ avem : } \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}, (\forall) n \geq 2$$

(2)

Din (1) și (2) obținem :

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 2

Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea :

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Soluție :

Vom demonstra inegalitatea prin inducție matematică

Pentru $n = 2$ avem : $\frac{4^2}{3} < \frac{4!}{(2!)^2} \Leftrightarrow \frac{16}{3} < \frac{24}{4}$, relație adevărată

Presupunem relația adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$ și o demonstrăm pentru $k + 1$

Avem deci de demonstrat : $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}$

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4^k}{k+1} \times \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{4(k+1)}{k+2}$$

$$\text{Rămâne de demonstrat că: } \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} \Leftrightarrow \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

Simplificând prin $\frac{(2k)!}{(k!)^2}$ obținem:

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \Leftrightarrow 4(k+1)^3 < (k+2)(2k+1)(2k+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) < (k+2)(4k^2 + 6k + 2)$$

$$\Leftrightarrow 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 < 4k^3 + 14k^2 + 14k + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2k^2 + 2k : 2k \Leftrightarrow k+1 > 0 \text{ relație adevărată, } (\forall) k \geq 2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{conform}$$

principiului inducției matematice că inegalitatea dată este adevărată, deci :

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, (\forall) n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

Problema 3

Să se arate că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^*$ avem :

$$3\left(\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}\right) - 8\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) + 10 \geq 0$$

Soluție

$$\text{Inegalitatea devine : } 3\left(\frac{x^4}{x^2y^2} + \frac{y^4}{x^2y^2}\right) - 8\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) + 10 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$$

Notăm $\frac{x}{y} = t \in \mathbb{R}^*$ și obținem :

$$3\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 8\left(t + \frac{1}{t}\right) + 10 \geq 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{t^4+1}{t^2}\right) - 8\left(\frac{t^2+1}{t}\right) + 10 \geq 0, (\forall) t \in \mathbb{R}^*$$

Înmulțim egalitatea de mai sus cu $t^2 > 0$ și obținem :

$$3t^4 - 8t^3 + 10 - 8t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 (3t^2 - 2t + 3) \geq 0, (\forall) t \in \mathbb{R}^*$$

Cum $3t^2 - 2t + 3 > 0, (\forall) t \in \mathbb{R}^*$ deoarece $\Delta = -8 < 0, (\forall) t \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ inegalitatea este adevărată

Se obține egalitate pentru : $t=1 \Leftrightarrow x=y$

Problema 4

Arătați că numărul $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Soluție :

$$\begin{aligned} \text{Calculăm } 2A &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}} \end{aligned}$$

Raționalizăm fiecare dintre fracțiile de mai sus cu conjugatul numitorului și obținem :

$$\begin{aligned} 2A &> \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1})^2-(\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} + \dots + \frac{\sqrt{79}-\sqrt{80}}{(\sqrt{79})^2-(\sqrt{80})^2} + \frac{\sqrt{80}-\sqrt{81}}{(\sqrt{80})^2-(\sqrt{81})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{79}-\sqrt{80}+\sqrt{80}-\sqrt{81}}{-1} = \frac{1-\sqrt{81}}{-1} = 8 \end{aligned}$$

Am obținut că $2A > 8$ de unde $A > 4$

Problema 5

Să se arate că : a) $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}, (\forall) k \in \mathbb{R}, k > 0$

b) $\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{2008^2} < 0,1$

Soluție :

a) $\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2+2k+1} < \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}, \text{evident}$

Deoarece $k(k+1) > k^2 > 0, (\forall) k \in \mathbb{R}, k > 0$

De asemenea numerele $X^{n-1}, X^{n-2}, \dots, 1$ formează o progresie geometrică cu rația $x \neq 1$

$$\text{Obținem : } X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1 = \frac{X^{n-1}-1}{x-1}$$

Relația (3) devine :

$$\frac{x(X^n-1)}{x-1} * \frac{X^{n-1}-1}{X^n(X-1)} \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{(X^n-1)^2}{X^{n-1}(x-1)^2} \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{(X^n-1)^2}{(x-1)^2} \geq n^2 * X^{n-1}$$

$$\text{Dar } X^n - 1 = (x-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1)$$

$$\text{Obținem : } \frac{(x-1)^2(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+1)^2}{(x-1)^2} \geq n^2 * X^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1)^2 \geq n^2 * X^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1 \geq n\sqrt{X^{n-1}}.$$

11. Studiu asupra unor probleme

Prof. COZMA CIPRIAN IOAN

Liceul Tehnologic “Dr. F. Ulmeanu”, Ulmeni, Maramureș

Problema 1). Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}} = \frac{4(x^{n-1}-1)}{x^2-1}, \text{ unde } x \neq 0, x \neq \pm 1$$

Soluție. Fie $S_n = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x})} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}(1+\frac{1}{x})} + \frac{1}{\frac{1}{x^3}(1+\frac{1}{x})} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}}(1+\frac{1}{x})} =$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{1}{x})} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) = \frac{x}{x+1} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})$$

Se observă că $x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ este o progresie geometrică cu rația x

Avem: $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{x(x^{n-1}-1)}{x-1}$

S_n devine: $S_n = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x(x^{n-1}-1)}{x-1} = \frac{x^2(x^{n-1}-1)}{x^2-1}$

Revenind la ecuația dată avem: $\frac{x^2(x^{n-1}-1)}{x^2-1} = \frac{4(x^{n-1}-1)}{x^2-1}$

Simplificăm ecuația obținută cu $\frac{x^{n-1}-1}{x^2-1}$ deoarece $x \neq \pm 1$, și obținem:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad S = \{\pm 2\}$$

Problema 2). Arătați că: $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3 - k - 1}{(k+1)!} < \frac{5}{2}$

Soluție. Avem: $k^3 - k - 1 = k(k^2 - 1) - 1 = k(k-1)(k+1) - 1$

Suma devine:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)(k+1)-1}{(k+1)!} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{k(k-1)(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \\ \sum_{k=2}^n \left(\frac{k(k-1)(k+1)}{(k-2)!(k-1)k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)!} \right) &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{8!} + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(n-5)!} - \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-4)!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-3)!} - \frac{1}{n!} + \\
& + \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \\
& = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) < \frac{5}{2} \text{ deoarece } \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > 0
\end{aligned}$$

Problema 3). Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{\log_a^n - \log_b^n}{\log_{ab}^n} = \log_a^b - \log_b^a \text{ unde } a, b, n > 0 \quad a, b, a \cdot b \neq 1$$

Soluție. Avem: $\log_a^n = \log_{ab}^n \cdot \log_a^{ab} = \log_{ab}^n \cdot (\log_a^a + \log_a^b) =$
 $= \log_{ab}^n (1 + \log_a^b) \quad (1)$

Analog:

$$\log_b^n = \log_{ab}^n \cdot \log_b^{ab} = \log_{ab}^n (\log_b^a + \log_b^b) = \log_{ab}^n (\log_b^a + 1) \quad (2)$$

Pe baza relațiilor (1) și (2) obținem:

$$\begin{aligned}
\frac{\log_a^n - \log_b^n}{\log_{ab}^n} &= \frac{\log_{ab}^n (1 + \log_a^b) - \log_{ab}^n (\log_b^a + 1)}{\log_{ab}^n} = \\
&= \frac{\log_{ab}^n (1 + \log_a^b - \log_b^a - 1)}{\log_{ab}^n} = \log_a^b - \log_b^a
\end{aligned}$$

Problema 4). Să se demonstreze identitatea:

$$\begin{aligned}
& C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^n = \\
& = m \left(\frac{1}{m-1} C_{m-1}^1 + \frac{1}{m-2} C_{m-2}^2 + \dots + \frac{1}{m-n} C_{m-n}^n \right)
\end{aligned}$$

Soluție. Pornim de la identitatea: $C_m^p = \frac{m}{m-p} \cdot C_{m-p}^p$

Pentru $p = 1$ avem: $C_m^1 = \frac{m}{m-1} C_{m-1}^1$

Pentru $p = 2$ avem $C_m^2 = \frac{m}{m-2} C_{m-2}^2$

.....
 Pentru $p=n$ avem : $C_m^n = \frac{m}{m-n} C_{m-n}^n$

Adunăm membru cu membru relațiile de mai sus și obținem:

$$\begin{aligned} C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^n &= \frac{m}{m-1} C_{m-1}^1 + \frac{m}{m-2} C_{m-2}^2 + \dots + \frac{m}{m-n} C_{m-n}^n = \\ &= m \left(\frac{1}{m-1} C_{m-1}^1 + \frac{1}{m-2} C_{m-2}^2 + \dots + \frac{1}{m-n} C_{m-n}^n \right) \end{aligned}$$

Problema 5).

Dacă $x + \frac{1}{x} = -1$ să se găsească valoarea expresiei $x^{2010} + \frac{1}{x^{2010}}$,

cu $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Soluție.

Din $x + \frac{1}{x} = -1$ obținem $x^2 + x + 1 = 0$ ecuația care nu are rădăcini reale

Înmulțim ambii membri cu $x-1$ și obținem relația:

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1 = 0 \text{ de unde } x^3 = 1$$

$$\text{Avem: } x^{2010} + \frac{1}{x^{2010}} = (x^3)^{670} + \frac{1}{(x^3)^{270}} = 1 + 1 = 2$$

Problema 6). Să se demonstreze inegalitatea:

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} < 2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Soluție Termenul general al sumei este:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} &= \frac{k(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \\ &= \frac{k(k+1)}{(k-1)!/k \cdot (k+1)} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

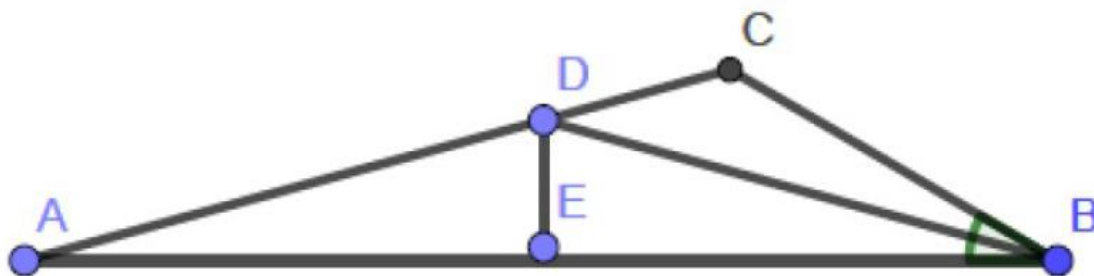
$$\text{Obținem: } S = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} -$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\right) &= 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \\ &= 2 - \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &< 2 \text{ deoarece } \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} > 0 \end{aligned}$$

12.A geometric proof of $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

By Daniel Văcaru, Pitești, Romania.



Let's consider $m(\hat{A}) = x$, $m(\hat{B}) = 2x$. It follows $m(\hat{C}) = 180^\circ - 3x$ and consider

$R = \frac{1}{2}$. It results that $BC = \sin x$, $AC = \sin 2x$ and $AB = \sin 3x$. Consider D so that

ADB is an isosceles triangle. It results that $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sin x}{\sin 3x}$ (1). Consider E so that

$DE \perp AB$. Then it results that $\cos x = \frac{2}{DB} \Rightarrow DB = \frac{\sin 3x}{2 \cos x} = AD$ (2). From (1) and (2)

one obtains $DC = \frac{\sin x}{2 \cos x}$. But

$$AD + DC = AC \Rightarrow \frac{\sin 3x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2 \cos x} = \sin 2x \Rightarrow \sin 3x = 2 \cos x \sin 2x - \sin x \Rightarrow$$

$$\sin 3x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x = 4 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

13. Studiu asupra unei metode numerice de determinare simultană a rădăcinilor unui polinom

Prof. COZMA CIPRIAN IOAN

Liceul Tehnologic “Dr. F. Ulmeanu” , Ulmeni

În acest material îmi propun să fac o analiză a unei metode numerice și anume metoda lui Newton pentru aproximarea rădăcinilor ecuațiilor scalare și aplicații ale acestora la aproximarea simultană a rădăcinilor polinoamelor.

Problema rezolvării ecuațiilor polinomiale a stârnit un mare interes din cele mai vechi timpuri. Studiul a numeroase fenomene din tehnică, economie, științele naturii se reduce, în majoritatea cazurilor, la rezolvarea unor ecuații polinomiale.

În general ecuațiile polinomiale nu dispun de metode exacte de rezolvare, de unde importanța deosebită pe care o are metoda de aproximare prezentată în cadrul acestui material .

Metoda lui Newton

1. Construcția metodei

Fie $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in [a,b]$. Metoda lui Newton se obține în modul cel mai natural printr-un proces de liniarizare. Dezvoltăm funcția f în serie Taylor și reținem primii doi termeni, deci:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0).$$

În locul ecuației $f(x)=0$ se consideră ecuația liniară:

(1)

$$f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) = 0,$$

a cărei soluție este

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{(1)}(x_0)}$$

Interpretarea geometrică a lui x_1 este bine cunoscută: x_1 reprezintă abscisa punctului de intersecție a tangentei duse la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, cu axa Ox .

Punând acum $x_0 = x_k$ și $x_1 = x_{k+1}$, se obține următorul proces iterativ clasic, denumit metoda lui Newton (uneori Newton- Raphson):

(2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{(1)}(x_k)}$$

Ca și în cazul metodelor de interpolare, din faptul că (2) aproximează funcția $f(x)=0$, în vecinătatea punctului x_0 , nu rezultă că x_1 aproximează soluția acestei ecuații. De asemenea, este necesară analiza existenței șirului $\{x_0\}$ dacă nu se face ipoteza $f^{(1)}(x) \neq 0$ pe $[a,b]$.

Dacă în (2) se înlocuiește $f^{(1)}(x_k)$ cu $f^{(1)}(x_0)$,
obține metoda lui Newton simplificată:

(3)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{(1)}(x_0)}$$

în care derivata se calculează numai în punctul x_0 . Se poate de asemenea considera un proces de tip Newton în care calculul derivatei se face după un anumit număr de pași:

(4)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{(1)}(x_{p(k)})}$$

unde $p(k)$ este un număr întreg mai mic sau egal cu k .

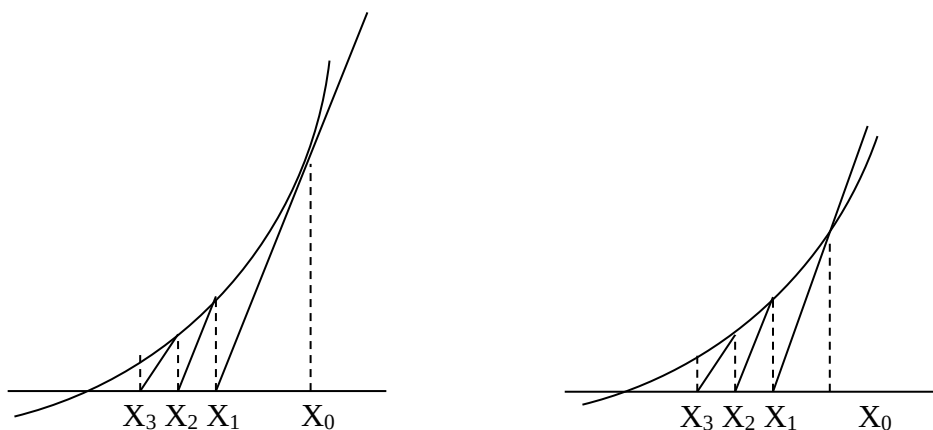
În particular, dacă $p(k)=k$, se obține metoda lui Newton iar dacă $p(k)=0$, se obține metoda lui Newton simplificată.

Un proces iterativ, care generalizează metoda lui Newton simplificată, este metoda liniilor paralele:

$$(5) \quad x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k),$$

unde λ este o constantă care aproximează $1/f^{(1)}(x_0)$.

Reprezentarea grafică a metodei lui Newton simplificată și a metodei liniilor paralele sunt date în figura 1 a și b respectiv.



a

b

Figura 1

Menționăm și metoda lui Newton discretizată în care derivata se înlocuiește cu diferența divizată de ordinul întâi:

(6)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}} \right]^{-1} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

Această metodă coincide cu metoda secantei.

Să aplicăm această metodă polinomului

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

Știm că acest polinom admite o rădăcină simplă α_1 , cuprinsă între marginile $1 < \alpha_1 < 2$. Se poate spune dinainte că aceste margini sunt prea largi ca metoda lui Newton combinată cu metoda interpolării liniare aplicate să dea un rezultat prea bun. Să le aplicăm însă pentru a avea un exemplu care nu necesită calcule complicate.

Aplicăm pentru început metoda lui Newton

$$f(1) = -4 \quad f(2) = 39.$$

Alegem $x_0 = 2$.

Ținând seama de faptul că $f^{(1)}(2) = 109$, obținem:

$$x_1 = 2 - \frac{39}{109} = \frac{179}{109} = 1,64...$$

Metoda lui Newton în multe cazuri se aplică în combinație cu metoda interpolării liniare.

Metoda interpolării liniare constă în a lua ca valoare aproximativă a rădăcinii α numărul c , care împarte intervalul (a, b) în părți proporționale valorilor absolute ale numerelor $f(a)$ și $f(b)$, adică:

(7)

$$\frac{c - a}{b - c} = - \frac{f(a)}{f(b)}$$

semnul minus din membrul al doilea fiind datorat faptului că $f(a)$ și $f(b)$ au semne diferite. De aici rezultă:

(8)

$$c = \frac{b \times f(a) - a \times f(b)}{f(a) - f(b)}$$

Utilizand formula (8) obținem:

$$c = \frac{2 \times (-4) - 1 \times 39}{-4 - 39} = \frac{47}{43} = 1,09...$$

și, prin urmare rădăcina α_1 este cuprinsă între marginile

$$1,09 < \alpha_1 < 1,65.$$

Am obținut o îngustare prea neînsemnată a marginilor pentru a putea considera acest rezultat ca satisfăcător. Desigur, s-ar putea aplica încă o dată metodele noastre pentru noile limite. Este indicat însă să găsim de la început pentru α_1 limite destul de apropiate, spre exemplu, cu o precizie de 0,1 sau chiar 0,01 și să aplicăm aceste metode numai după aceasta. Aceasta ar duce dintr-o dată desigur la faptul că toate calculele devin foarte complicate, dar trebuie să ajungem la aceasta în rezolvarea problemelor concrete, necesitând o cunoaștere destul de exactă a rădăcinilor polinomului.

$$\begin{aligned} \text{Deoarece} \quad & f(1,3) = -0,13987 ; \\ & f(1,31) = 0,0662923851 ; \end{aligned}$$

avem

$$1,3 < \alpha_1 < 1,31 ;$$

adică am găsit valoarea rădăcinii α_1 cu o aproximație de 0,01. Să aplicăm acum acestor noi limite metoda interpolării liniare:

$$c = \frac{1,31 \times (-0,13987) - 1,3 \times 0,0662923851}{-0,13987 - 0,0662923851} = \frac{0,26940980063}{0,2061623851} = 1,30678...$$

Să aplicăm pentru aceleași margini metoda lui Newton, luând acum $x_0 = 1,31$. Deoarece $f^{(1)}(1,31) = 20,99822405$, avem:

$$x_1 = 1,31 - \frac{0,0662923851}{20,92822405} = \frac{27,3496811204}{20,92822405} = 1,30683...$$

Așadar:

$$1,30678 < \alpha_1 < 1,30684 ;$$

și deci, luând $\alpha_1 = 1,30681$; facem o eroare mai mică decât 0,00003.

2. Aproximarea simultană a rădăcinilor ecuațiilor polinomiale prin metoda lui Newton

Considerăm un polinom de gradul $n \geq 3$,

$$(9) \quad f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

cu rădăcinile reale sau complexe simple $x_1, x_2, \dots, x_n$. Fie $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$ diferite aproximații apropiat rezonabile ale acestor rădăcini și fie

$$Q(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^k)$$

Atunci, pentru $x = x_i^k$, $i=1, 2, \dots, n$ vom avea:

$$Q^{(1)}(x_i^k) = \prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)$$

Introducând notația $\Delta_i = -f(x_i^k) / Q'(x_i^k)$ se obține următoarea metodă de determinare simultană a rădăcinilor unui polinom $x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta_i$, $i=1, 2, \dots, n$ sau sub forma:

(10)

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f(x_i^k)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)}$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad ; \quad k=0, 1, \dots$$

unde x_i^{k+1} este noua aproximare a rădăcinii x_i .

Această metodă este un rezultat clasic introdus de către Weierstrass, metodă a cărei convergență este pătratică.

În continuare vom prezenta un program Pascal care realizează aproximarea simultană a rădăcinilor reale ale unui polinom de grad maxim 50 în 50 de pași iterativi cu o precizie de 12 zecimale exacte. Facem precizarea că iterațiile inițiale pe care le dăm trebuie să fie diferite două câte două.

Valorile reale obținute pentru rădăcinile polinomului considerat au o precizie de 12 zecimale exacte.

Pentru realizarea acestui program am utilizat formula de tip Newton

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f(x_i^k)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)}$$

Programul ne oferă și posibilitatea de a analiza precizia (eroarea) aproximărilor obținute. Aceasta se calculează ca și diferență dintre valoarea obținută la iterația $k=50$ și $k=49$.

În cazul în care polinomul are și rădăcini complexe cu partea imaginară diferită de zero aproximațiile obținute pentru aceste rădăcini diverg către valori cu erori mari.

Prezentăm mai jos programul folosit:

```

program sesiune;
uses crt;
label et1;
var n,i,k,j,z: integer;
    a:array[0..50] of double;
    x:array[1..50, 0..50] of double;
    produs:array[1..50, 0..50] of double;

function putere(c:real;j:integer): double;
var i:integer ;
    p:double;
begin
    p:=1;
    for i:=1 to j do
        p:=p*c;
    putere:=p;
end;

function put(c:integer;j:integer): double;
var i:integer;
    p:integer;
begin
    p:=1;
    for i:=1 to j do
        p:=p*c;
    put:=p;
end;

function f(b:double): double;
var i:integer;
    ft:double;
begin
    ft:=a[0];
    for i:=1 to n do
        ft:=ft+a[i]*putere(b,i);
    f:=ft;
end ;

```

```

begin
  clrscr;
  write('Dați gradul polinomului: ');

  readln(n);
  writeln('Dați coeficienții polinomului: ');
  for i:=1 downto 0 do
  begin
    write('Dați a( ', i, ') = ');
    readln(a[i]);
  end;
  writeln('Dați iterațiile inițiale: ');
  et1: for i:=1 to n do
  begin
    write('x[ ', i, ', 0] = ');
    readln(x[i, 0]);
  end;
  writeln;
  for i:=1 to n do
    for k:=0 to 50 do
      produs[i, k]:=1;
    for k:=0 to 49 do
      begin
        for z:=1 to n do
          for j:=1 to n do
            if z<>j then

              begin
                produs[z,k]:=produs[z,k]*(x[z,k]-x[j,k]);

                if produs[z,k]=0 then begin
                  clrscr;
                  writeln('Dați alte iterații      inițiale: ');
                  goto et1;
                end;
              end;
            end;
          end;
        for i:=1 to n do
          x[i,k+1]:=x[i,k]-f(x[i,k])/produs[i,k];
        end;
      end;
    for i:=1 to n do
      begin
        clrscr;
        writeln('    Pasul  ', i, '    Valoarea iterației');
        writeln('-----');
        for k:=0 to 50 do

```

```

begin

writeln('  k=',k:2,'      ', 'x[' ,i, ']= ', x[i,k]:12:12);
if (k=20)or(k=50) then begin
    readln;
    gotoxy(0,0);
    clrscr;
    writeln(' Pasul', ' Valoarea iterației' );
    writeln('-----')
end;
end;clrscr;
writeln;writeln;
writeln('  CONCLUZII: ');
writeln;writeln;
for i:=1 to n do
begin
    writeln;
    if abs(x[i,k]-x[i,k-1])<0.001 then
        writeln('x[' ,i, '] converge către',
        cu precizia
        E= ',abs(x[i,k]-x[i,k-1]:12:12);

    else writeln(' x[' ,i, '] divergent cu eroarea
        E= ', abs(x[i,k]-x[i,k-1]));

if (imod10=0) then begin
    readln;
    clrscr;

end;
end;
readln;
end.

```

Prezentăm în continuare două exemple.

Exemplul 1

$$x^6 - 9x^4 + 26x^2 - 24 = 0$$

Rădăcina	Valoarea aproximației obținute	Precizia	Pasul de la care converge
x[1]	-1.414213562372	E=0.000000000000	K=19

x[2]	1.414213562374	E=0.000000000002	K=19
x[3]	2.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[4]	1.732050807569	E=0.000000000001	K=17
x[5]	-1.732050807570	E=0.000000000001	K=16
x[6]	-2.000000000000	E=0.000000000000	K=15

Exemplul 2

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Rădăcina	Valoarea aproximației obținute	Precizia	Pasul de la care converge
x[1]	-1.000000000000	E=0.000000000000	K=1
x[2]	1.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[3]	2.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[4]	3.000000000000	E=0.000000000000	K=0

Bibliografie

- [1] **A.G.Kuros**, *Curs de algebră superioară*, Editura Tehnică (1955).
- [2] **A.M.Ostrowski**, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Second Edition, Academic Press, New York, 1966.
- [3] **Berinde V.**, *Remarks on the Convergence of the Newton-Raphson Method*, Rev. Anal. Numér, Théor. Approx., 24 (1995) no. 1-2, pp. 15-21.
- [4] **F.J.Traub**, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [5] **Gh. Coman**, *Some Practical Approximation Methods for Nonlinear Equations*, Rev. Anal. Numér, Théor. Approx., 11 (1982) no. 1-2, pp. 41-48.
- [6] **Gh. Coman**, *Some Efficient Methods for Nonlinear Equations*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1985, pp. 53-58.
- [7] **Gh. Coman**, *Optimal Algorithms for the Solution of Nonlinear Equation with Regard to the Efficiency*, Studia Univ. "Babeș-Bolyai", Mathematica, XXXII (1987) no. 3, pp. 46-52.

- [8] **J.M.Ortega** and **W.C.Rheinboldt**, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [9] **Mărușter Șt.**, *Metode numerice în rezolvarea ecuațiilor neliniare*, Editura Tehnică, București, 1981.
- [10] **Păvăloiu Ion**, *On the Efficiency of the Computations for Approximating the Solution of Equations*, Buletinul Științific al Universității din Baia Mare, Seria B, Fascicola Matematică- Informatică, volumul XIV, Nr. 1, 1998, pp. 59-65.
- [11] **Păvăloiu Ion**, *Optimal Algorithms Concerning the Solving of Equations by Interpolation. Research on the Theory of Allure, Approximation, Convexity and Optimation*, Editura Srima, Cluj-Napoca, 1999.
- [12] **Păvăloiu Ion**, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Editura Dacia, 1981.
- [13] **Sendov. Bl., A. Andreev, N. Kjurkchiev**, *Numerical Solution of Polynomial Equations*, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences, *Handbook of Numerical Analysis*, vol. III, Sofia, 1994.

