

REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2019

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

**REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTOR PERMANENȚI AI REVISTEI
NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ȘI NELA CICEU**

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Altă soluție pentru o problemă din Gazeta Matematică ... pag. 2**
Nela Ciceu, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău
2. **Other inequalities with Fibonacci and Lucas numbers ... pag. 4**
D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău
3. **Dezvoltări din RMM Nr. 24 Spring Edition 2020 ... pag. 14**
Marin Chirciu
4. **PARALELE, PARALELOGrame, PARALELIPIEDE ... pag. 41**
Stan Ilie
5. **CONSTRUCȚII CU COMPASUL: CERURILE DE RAZĂ n și $\sqrt{n}$... pag. 48**
Stan Ilie
6. **IMAGINEA UNOR FUNCȚII ... pag. 55**
Balogh Erika
7. **PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU ... pag. 63**
Postolea Georgel
8. **PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU ... pag. 66**
Gheorghiță Adrian Ștefan
9. **STUDIU ASUPRA UNEI METODE NUMERICE DE DETERMINARE
SIMULTANĂ A RĂDĂCINILOR UNUI POLINOM ... pag. 70**
Cozma Ciprian Ioan
10. **DRUMURI MINIME ÎNTRE DOUĂ PUNCTE ... pag. 80**
Stan Ilie

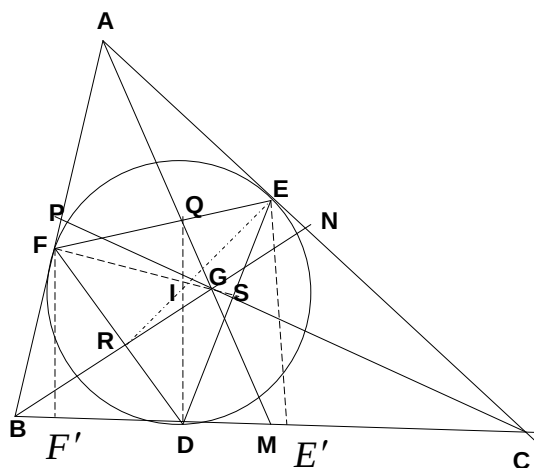
1. Altă soluție pentru o problemă din Gazeta Matematică

*Nela Ciceu, Roșiori, Bacău și Roxana Mihaela Stanciu, Buzău***Problema 27057 din GM-B, 4/2015.**

Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC , $IF \perp AB$, $ID \perp BC$, $IE \perp AC$, unde $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Dacă $ID \cap EF = \{Q\}$, $IE \cap FD = \{R\}$, $IF \cap DE = \{S\}$, atunci arătați că:

(a) $AQ \cap BR \cap CS = \{G\}$, unde G este centrul de greutate al $\triangle ABC$;

(b) $\frac{AQ}{QM} \cdot \frac{BR}{RN} \cdot \frac{CS}{SP} \leq 1$.

Neculai Stanciu, Buzău și Titu Zvonaru, Comănești**Soluție.**

(a) Vom demonstra că Q aparține mediane din A a triunghiului ABC .

Fie $\{M\} = AQ \cap BC$, $E' = \text{Pr}_{BC} E$ și $F' = \text{Pr}_{BC} F$.

Avem

$$\begin{aligned} F'D &= BD - BF' = \\ &= (p-b) - (p-b)\cos B = 2(p-b)\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac} \end{aligned}$$

și analog

$$E'D = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ab}.$$

Rezultă că

$$\frac{QF}{QE} = \frac{DF'}{DE'}.$$

Folosim relația (R_1) din *RecMat-2/2011*, p. 108

<http://recreatiimatematice.ro/arhiva/articole/RM22011ZS.pdf>

și obținem că

$$\begin{aligned} \frac{AF}{AB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{QE}{QF} &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{BM}{MC} &= \frac{AB}{AF} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{QF}{QE} = \frac{c}{p-a} \cdot \frac{p-a}{b} \cdot \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac} \cdot \frac{ab}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow BM &= MC, \text{ adică } Q \text{ aparține medianei din } A \text{ a triunghiului } ABC. \end{aligned}$$

Analog R aparține medianei din B a triunghiului ABC și S aparține medianei din C a triunghiului ABC . Deci $AQ \cap BR \cap CS = \{G\}$.

(b) Folosim relația (R_2) din *RecMat-2/2011*, p. 108

<http://recreatiimatematice.ro/arhiva/articole/RM22011ZS.pdf>

și obținem că

$$\frac{AQ}{QM} = \frac{a \cdot \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-b} + \frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-c}} = \frac{2(p-a)}{a}$$

și analog

$$\frac{BR}{RN} = \frac{2(p-b)}{b}, \text{ respectiv } \frac{CS}{SP} = \frac{2(p-c)}{c}.$$

Rezultă că

$$\frac{AQ}{QM} \cdot \frac{BR}{RN} \cdot \frac{CS}{SP} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{8 \cdot \frac{S^2}{p}}{4RS} = \frac{2S}{pR} = \frac{2r}{R} \stackrel{\text{Euler}}{\leq} 1, \text{ Q.E.D.}$$

Notă. Relațiile (R_1) și (R_2) sunt demonstrate în *RecMat-1/2005*, p. 15

<http://www.recreatiimatematice.ro/arhiva/articole/RM12005ZI.pdf>

2. Other inequalities with Fibonacci and Lucas numbers

by D.M. Băținețu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău

1. For any natural number n are true the following inequalities:

$$e^{n+3-L_{n+2}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \quad (1)$$

$$e^{n+2-L_n L_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2} \right)^n \quad (2)$$

$$e^{n+1-F_{n+2}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k} \right)^n \quad (3)$$

$$e^{n-F_n F_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \quad (4)$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. In $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R}$, we take $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k - 1$ and we get:

$$(*) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \right)^n.$$

By M.A. – M.H. we have:

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-1}$$

So from (*) we obtain:

$$e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^n \geq e^{-\sum_{k=1}^n L_k} = e^{n+3-L_{n+2}}, \text{ where we}$$

using the fact

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3,$$

so (1) is proved.

Taking $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 - 1$, in $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbf{R}$ we obtain that:

$$(**) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \right)^n.$$

By M.A. – M.H. yields that:

$$\left(\sum_{k=1}^n L_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}\right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^2 \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}\right)^{-1},$$

and from (**) we get:

$$\begin{aligned} e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} &\geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}\right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n L_k^2 - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}\right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k^2}\right)^n \geq e^{n - \sum_{k=1}^n L_k^2} = e^{n+2-L_n L_{n+1}}, \end{aligned}$$

using

$$\sum_{k=1}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2,$$

(2) is proved

We take $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k - 1$, in $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$:

$$(***) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k\right)^n.$$

So

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}\right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}\right)^{-1},$$

from (***) follow that:

$$e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}\right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}\right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}\right)^n \geq e^{n - \sum_{k=1}^n F_k} = e^{n+1-F_{n+2}},$$

Where we used:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1,$$

hence (3).

Putting $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 - 1$, in $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ we deduce that:

$$(***) \quad e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 - 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2\right)^n.$$

Hence

$$\left(\sum_{k=1}^n F_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2}\right) \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^2 \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2}\right)^{-1},$$

And by (****) we deduce:

$$e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^{-n} \Leftrightarrow e^{\sum_{k=1}^n F_k^2 - n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k^2} \right)^n \geq e^{-\sum_{k=1}^n F_k^2} = e^{-F_n F_{n+1}},$$

Where we taking account by

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

And we are done !.

2. If m is a positive nenule real number and n is a natural nenule number, and ABC is a triangle with area S with usual notations we have

$$\frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m} + \frac{b^{2(m+1)}}{(F_n m_b^2 + F_{n+1} m_c^2)^m} + \frac{c^{2(m+1)}}{(F_n m_c^2 + F_{n+1} m_a^2)^m} \geq \frac{4^{m+1} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S \quad (1)$$

$$\frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m} + \frac{m_b^{2(m+1)}}{(F_n c^2 + F_{n+1} a^2)^m} + \frac{m_c^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2)^m} \geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{4^m F_{n+2}^m} S \quad (2)$$

$$\frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m} + \frac{b^{2(m+1)}}{(F_n m_b^2 + F_{n+1} m_c^2 + F_{n+2} m_a^2)^m} + \frac{c^{2(m+1)}}{(F_n m_c^2 + F_{n+1} m_a^2 + F_{n+2} m_b^2)^m} \geq \frac{2^{m+2} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S \quad (3)$$

$$\frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m} + \frac{m_b^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2 + F_{n+2} a^2)^m} + \frac{m_c^{2(m+1)}}{(F_n c^2 + F_{n+1} a^2 + F_{n+2} b^2)^m} \geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{8^m F_{n+2}^m} S \quad (4)$$

(D.M. Băţineţu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. By *J. Radon* inequality, formula

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

And *Ionescu-Weitzenböck* inequality, i.e.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

We deduce

$$\begin{aligned} I_n &= \sum \frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2)^m}, \\ I_n &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2))^m} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1})^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{F_{n+2}^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m}. \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \end{aligned}$$

so,

$$I_n \geq \frac{4^m}{3^m F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

But

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

Hence

$$I_n \geq \frac{4^{m+1}\sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S,$$

so (1) is proved

Similarly

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum \frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m} = \sum \frac{(m_a^2)^{m+1}}{(F_n b^2 + F_{n+1} c^2)^m}, \\ Y_n &\geq \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n b^2 + F_{n+1} c^2))^m} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1})^m (a^2 + b^2 + c^2)^m} = \\ &= \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{F_{n+2}^m (a^2 + b^2 + c^2)^m}. \end{aligned}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$Y_n \geq \frac{3^{m+1}}{4^{m+1} F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

We get

$$Y_n \geq \frac{3^{m+1}\sqrt{3}}{4^m F_{n+2}^m} S,$$

so (2) is proved

Analogously

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum \frac{a^{2(m+1)}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m} = \sum \frac{(a^2)^{m+1}}{(F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2)^m}, \\ Z_n &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n m_a^2 + F_{n+1} m_b^2 + F_{n+2} m_c^2))^m} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{m+1}}{2^m F_{n+2}^m (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^m}. \end{aligned}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$Z_n \geq \frac{2^m}{3^m F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S, \text{ then}$$

$$Z_n \geq \frac{2^{m+2} \sqrt{3}}{3^m F_{n+2}^m} S,$$

so (3) is proved.

Also we have

$$\begin{aligned} X_n &= \sum \frac{m_a^{2(m+1)}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m} = \sum \frac{(m_a^2)^{m+1}}{(F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2)^m}, \\ X_n &\geq \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(\sum (F_n a^2 + F_{n+1} b^2 + F_{n+2} c^2))^m} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^m (a^2 + b^2 + c^2)^m} = \\ &= \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^{m+1}}{2^m F_{n+2}^m (a^2 + b^2 + c^2)^m}. \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2), \\ X_n &\geq \frac{3^{m+1}}{2^{3m+2} F_{n+2}^m} (a^2 + b^2 + c^2). \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4\sqrt{3}S, \\ X_n &\geq \frac{3^{m+1} \sqrt{3}}{2^{3m} F_{n+2}^m} S, \end{aligned}$$

We are done !.

3. If ABC is a triangle with $\angle A = 90^\circ$, then:

$$\frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq \frac{3}{2a^2},$$

for any natural numbers m, n, p .

(D.M. Băținețu-Giurgiu și N. Stanciu, 2013)

Proof. By the inequality of *H. Bergström* we have:

$$\begin{aligned} (1) \quad U &= \frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{F_m}{bF_n + cF_p} + \frac{F_n}{bF_p + cF_m} + \frac{F_p}{bF_m + cF_n} \right)^2 \end{aligned}$$

We have:

$$V = \frac{F_m}{bF_n + cF_p} + \frac{F_n}{bF_p + cF_m} + \frac{F_p}{bF_m + cF_n} =$$

$$= \frac{F_m^2}{bF_mF_n + cF_mF_p} + \frac{F_n^2}{bF_nF_p + cF_nF_m} + \frac{F_p^2}{bF_pF_m + cF_pF_n}$$

$$(2)V \geq \frac{(F_m + F_n + F_p)^2}{(b+c)(F_mF_n + F_nF_p + F_pF_m)}$$

And by:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx),$$

and (2) we get

$$(3)V \geq \frac{3}{b+c}$$

By (1), (3) and $\angle A = 90^\circ$,

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

results that:

$$U \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{(b+c)^2} \geq \frac{3}{2(b^2+c^2)} = \frac{3}{2a^2},$$

q.e.d.

4. $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, such that $a+b+c \leq 24$, then:

$$\frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{L_{n+1}^2 + bL_{n+2}L_n}} + \frac{L_{n+2}}{\sqrt{L_{n+2}^2 + cL_nL_{n+1}}} \geq 1, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băţineţu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.

$$U_n = \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{L_{n+1}^2 + bL_{n+2}L_n}} + \frac{L_{n+2}}{\sqrt{L_{n+2}^2 + cL_nL_{n+1}}}.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad U_n &= \sum \frac{L_n}{\sqrt{L_n^2 + aL_{n+1}L_{n+2}}} = \sum \frac{L_n^2}{\sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + aL_nL_{n+1}L_{n+2}}} = \\ &= \sum \frac{L_n^2}{\sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

where:

$$p_n = L_nL_{n+1}L_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Denoting:

$$v_n = \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n},$$

$$V_n = v_n + v_{n+1} + v_{n+2} = \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + ap_n} + \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + bp_n} + \sqrt{L_n} \cdot \sqrt{L_n^3 + cp_n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

We have:

$$V_n^2 = \left(\sum \sqrt{L_n} \sqrt{L_n^3 + ap_n} \right)^2 \stackrel{C-B-S}{\leq} s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

where:

$$s_n = L_n + L_{n+1} + L_{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Since:

$$(x+y+z)^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz, \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+^*, \text{ și}$$

$$V_n^2 \leq s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + (a+b+c)p_n) \leq s_n (L_n^3 + L_{n+1}^3 + L_{n+2}^3 + 24L_n L_{n+1} L_{n+2}),$$

then:

$$(2) \quad V_n^2 \leq s_n \cdot s_n^3 = s_n^4, \forall n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow v_n \leq s_n^2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

By *H. Bergström*, (1) and (2) yields that:

$$U_n \geq \frac{(s_n)^2}{V_n} \geq \frac{s_n^2}{s_n^2} = 1, \forall n \in \mathbf{N},$$

q.e.d.

5. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, with $abc=1$, $m \in \mathbf{R}_+$, then:

$$\frac{1}{a^{3m+3}(L_n b + L_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(L_n c + L_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_n a + L_{n+1} b)^{m+1}} \geq \frac{3}{L_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. We use the inequality of *J. Radon*:

$$(1) \quad A_n = \frac{1}{a^{3m+3}(L_n b + L_{n+1} c)^{m+1}} + \frac{1}{b^{3m+3}(L_n c + L_{n+1} a)^{m+1}} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_n a + L_{n+1} b)^{m+1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} \right)^{m+1}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$B_n = \frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{L_n ab + L_{n+1} ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{L_n bc + L_{n+1} ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{L_n ac + L_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

By the inequality of *H. Bergström*

$$(2) \quad B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq}$$

$$\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}$$

From (1) and (2) results:

$$A_n \geq \frac{1}{3^m} \left(\frac{3}{L_{n+2}} \right)^{m+1} = \frac{3}{L_{n+2}^{m+1}}, \forall n \in \mathbf{N},$$

q.e.d.

6. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, such that $abc=1$, then:

$$\frac{1}{a^6(F_nb + F_{n+1}c)^2} + \frac{1}{b^6(F_nc + F_{n+1}a)^2} + \frac{1}{c^6(F_na + F_{n+1}b)^2} \geq \frac{3}{F_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. We use *Bergström's* inequality

$$\begin{aligned} (1) \quad A_n &= \frac{1}{a^6(F_nb + F_{n+1}c)^2} + \frac{1}{b^6(F_nc + F_{n+1}a)^2} + \frac{1}{c^{3m+3}(F_na + F_{n+1}b)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^3(F_nb + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_nc + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_na + F_{n+1}b)} \right)^2, \forall n \in \mathbf{N}. \\ B_n &= \frac{1}{a^3(F_nb + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_nc + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_na + F_{n+1}b)} = \\ &= \frac{\frac{1}{a^2}}{F_nab + F_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{F_nbc + F_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{F_nac + F_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N}, \\ (2) \quad B_n &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ &\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

By (1) and (2) we have that:

$$A_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{F_{n+2}} \right)^2 = \frac{3}{F_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N},$$

q.e.d.

Observation. For $n=0$, we have $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, we obtain

$$\frac{1}{a^6(b+c)^2} + \frac{1}{b^6(c+a)^2} + \frac{1}{c^6(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}, \text{ with } abc=1.$$

7. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, $abc=1$, then:

$$\frac{1}{a^3(F_nb + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_nc + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_na + F_{n+1}b)} \geq \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.
$$B_n = \frac{1}{a^3(F_nb + F_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(F_nc + F_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(F_na + F_{n+1}b)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{F_nab + F_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{F_nbc + F_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{F_nac + F_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

$$B_n = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(F_n + F_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{F_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq}$$

$$\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N},$$

q.e.d.

Observation. For $n = 0: F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2$, we obtain

$a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ with $abc = 1$, then:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

i.e. the problem from IMO, **Canada**, 1995, proposed by **Russia**.

8. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, $abc = 1$, then:

$$\frac{1}{a^6(L_nb + L_{n+1}c)^2} + \frac{1}{b^6(L_nc + L_{n+1}a)^2} + \frac{1}{c^6(L_na + L_{n+1}b)^2} \geq \frac{3}{L_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof. (1)
$$A_n = \frac{1}{a^6(L_nb + L_{n+1}c)^2} + \frac{1}{b^6(L_nc + L_{n+1}a)^2} + \frac{1}{c^{3m+3}(L_na + L_{n+1}b)^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} \right)^2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$B_n = \frac{1}{a^3(L_nb + L_{n+1}c)} + \frac{1}{b^3(L_nc + L_{n+1}a)} + \frac{1}{c^3(L_na + L_{n+1}b)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{L_nab + L_{n+1}ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{L_nbc + L_{n+1}ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{L_nac + L_{n+1}bc}, \forall n \in \mathbf{N},$$

$$(2) B_n \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq}$$

$$\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

By (1) and (2) we obtain:

$$A_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{L_{n+2}} \right)^2 = \frac{3}{L_{n+2}^2}, \forall n \in \mathbf{N},$$

q.e.d.

9. If $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, $abc=1$, then

$$\frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} \geq \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

(D.M. Băținețu-Giurgiu and N. Stanciu, 2013)

Proof.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{a^3(L_n b + L_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(L_n c + L_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(L_n a + L_{n+1} b)} = \\ &= \frac{\frac{1}{a^2}}{L_n ab + L_{n+1} ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{L_n bc + L_{n+1} ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{L_n ac + L_{n+1} bc}, \forall n \in \mathbf{N}, \\ B_n &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{(L_n + L_{n+1})(ab + bc + ca)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{L_{n+2}(abc)^2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{L_{n+2}} \stackrel{MA-MG}{\geq} \\ &\stackrel{MA-MG}{\geq} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}}{L_{n+2}} = \frac{3}{L_{n+2}}, \forall n \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

And we are done.

3. Dezvoltări din RMM Nr. 24 Spring Edition 2020

Marin Chirciu

21 May 2019

Pornind de la trei probleme **Problem X.64, X.65, X.75** din **Romanian Mathematical Magazine-24, Spring Edition 2020**, articolul prezintă o clasă de inegalități în triunghi, cu sume de forma: $\frac{y+z}{x} f^2(a) + \frac{z+x}{y} f^2(b) + \frac{x+y}{z} f^2(c)$, unde $x, y, z > 0$ și f este o funcție care depinde de elementele triunghiului ABC .

Demonstrăm următorul rezultat ajutător:

Lemă.

Fie $x, y, z > 0$ și $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție. Are loc relația

$$\sum \frac{y+z}{x} f^2(a) \geq 2 \sum f(b) f(c).$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \text{Avem } \sum \frac{y+z}{x} f^2(a) &= \sum \left(\frac{y+z}{x} + 1 - 1 \right) f^2(a) = \sum \frac{x+y+z}{x} f^2(a) - \sum f^2(a) \stackrel{\text{CS}}{\geq} \\ &\stackrel{\text{CS}}{\geq} (x+y+z) \frac{\left(\sum f(a) \right)^2}{x+y+z} - \sum f^2(a) = (x+y+z) \frac{\left(\sum f(a) \right)^2}{(x+y+z)} - \sum f^2(a) = \\ &= \left(\sum f(a) \right)^2 - \sum f^2(a) = \sum f^2(a) + 2 \sum f(b) f(c) - \sum f^2(a) = 2 \sum f(b) f(c). \end{aligned}$$

(Simbol:CS=Cauchy-Schwarz=Bergström=Titu Andreescu).

În continuare trecem la prezentarea problemelor care fac obiectul studiului menționat.

1) X.64.BĂTINEȚU INEQUALITY-1

If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot a^2 + \frac{z+x}{y} \cdot b^2 + \frac{x+y}{z} \cdot c^2 \geq 8\sqrt{3} \cdot S$$

Proposed by D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania, RMM-24, Spring Edition 2020

Soluție:

Folosind **Lema**, cu $f(a) = a$ obținem $\frac{y+z}{x} \cdot a^2 + \frac{z+x}{y} \cdot b^2 + \frac{x+y}{z} \cdot c^2 \geq 2 \sum bc$.

Este suficient să arătăm că:

$$\begin{aligned} 2 \sum bc \geq 8\sqrt{3} \cdot S &\Leftrightarrow \sum bc \geq 4\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow \left(\sum bc \right)^2 \geq 48S^2 \Leftrightarrow \left(p^2 + r^2 + 4Rr \right)^2 \geq 48r^2 p^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p^2 (p^2 + 8Rr - 46r^2) + r^2 (4R + r)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(p^2 + 8Rr - 46r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(p^2 + 8Rr - 46r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie: $r^2(4R+r)^2 \geq p^2(46r^2 - 8Rr - p^2)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(46r^2 - 8Rr - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow 24R^2 - 47Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(24R+r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) X.65.BĂTINEȚU INEQUALITY-2

If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot a^4 + \frac{z+x}{y} \cdot b^4 + \frac{x+y}{z} \cdot c^4 \geq 32S^2$$

Proposed by D.M.Bătinețu-Giurgiu, Romania, RMM-24, Spring Edition 2020

Solutie:

Folosind **Lema**, cu $f(a) = a^2$ obținem $\frac{y+z}{x} \cdot a^4 + \frac{z+x}{y} \cdot b^4 + \frac{x+y}{z} \cdot c^4 \geq 2 \sum b^2 c^2$.

Este sufficient să arătăm că:

$$2 \sum b^2 c^2 \geq 32S^2 \Leftrightarrow \sum b^2 c^2 \geq 16S^2 \Leftrightarrow p^4 + p^2(2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2 \geq 16r^2 p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 8Rr - 14r^2) + r^2(4R+r)^2 \geq 0.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum b^2 c^2 = p^4 + p^2(2r^2 - 8Rr) + r^2(4R+r)^2$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(p^2 - 8Rr - 14r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(p^2 - 8Rr - 14r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie: $r^2(4R+r)^2 \geq p^2(8Rr + 14r^2 - p^2)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(8Rr + 14r^2 - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow 8R^2 - 17Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(8R+r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) X.75. In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{r_b^2 r_c^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{r_c^2 r_a^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{r_a^2 r_b^2} \geq \frac{2}{S^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Proposed by D.M.Bătinețu-Giurgiu and Neculai Stanciu, România

Soluție:

$$\text{Folosind Lema obținem } \frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{r_b^2 r_c^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{r_c^2 r_a^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{r_a^2 r_b^2} \geq \frac{2}{r_a r_b r_c} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)$$

$$\text{Alpicând Lema este sufficient să arătăm că } \frac{2}{r_a r_b r_c} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) \geq \frac{2}{S^2}.$$

Folosind identitățile cunoscute în triunghi $r_a r_b r_c = r p^2$ și $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, obținem:

$$\frac{2}{r_a r_b r_c} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = \frac{2}{r p^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{r^2 p^2} = \frac{2}{S^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) X.75. In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{h_b^2 h_c^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{h_c^2 h_a^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{h_a^2 h_b^2} \geq \frac{1}{S^2} \cdot \frac{R}{r}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

$$\text{Folosind Lema obținem } \frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{h_b^2 h_c^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{h_c^2 h_a^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{h_a^2 h_b^2} \geq \frac{2}{h_a h_b h_c} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)$$

$$\text{Alpicând Lema este sufficient să arătăm că } \frac{2}{h_a h_b h_c} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq \frac{1}{S^2} \cdot \frac{R}{r}.$$

Folosind identitățile cunoscute în triunghi $h_a h_b h_c = \frac{2r^2 p^2}{R}$ și $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, obținem:

$$\frac{2}{h_a h_b h_c} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = \frac{R}{r^2 p^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2 p^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{1}{S^2} \cdot \frac{R}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot (b+c)^2 + \frac{z+x}{y} \cdot (c+a)^2 + \frac{x+y}{z} \cdot (a+b)^2 \geq 32\sqrt{3} \cdot S$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

$$\text{Folosind Lema obținem } \frac{y+z}{x} \cdot (b+c)^2 + \frac{z+x}{y} \cdot (c+a)^2 + \frac{x+y}{z} \cdot (a+b)^2 \geq 2 \sum (a+b)(a+c).$$

Este sufficient să arătăm că: $2\sum(a+b)(a+c) \geq 32\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow$

$$2[5p^2 + r(4R+r)] \geq 32\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow 5p^2 + 4Rr + r^2 \geq 16\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow (5p^2 + 4Rr + r^2)^2 \geq 768r^2 p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2(25p^2 + 40Rr - 758r^2) + r^2(4R+r)^2 \geq 0.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum(a+b)(a+c) = 5p^2 + r(4R+r)$.

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(25p^2 + 40Rr - 758r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(25p^2 + 40Rr - 758r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$$r^2(4R+r)^2 \geq p^2(46r^2 - 8Rr - p^2), \text{ care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(758r^2 - 40Rr - 25(16Rr - 5r^2)) \Leftrightarrow 440R^2 - 879Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(440R+r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

6) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot (b+c)^4 + \frac{z+x}{y} \cdot (c+a)^4 + \frac{x+y}{z} \cdot (a+b)^4 \geq 512S^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem

$$\frac{y+z}{x} \cdot (b+c)^4 + \frac{z+x}{y} \cdot (c+a)^4 + \frac{x+y}{z} \cdot (a+b)^4 \geq 2\sum(a+b)^2(a+c)^2.$$

Este sufficient să arătăm că: $2\sum(a+b)^2(a+c)^2 \geq 512S^2 \Leftrightarrow$

$$2\sum(a+b)^2(a+c)^2 \geq 512S^2 \Leftrightarrow \sum(a+b)^2(a+c)^2 \geq 256S^2 \Leftrightarrow$$

$$9p^4 + p^2(8Rr - 6r^2) + r^2(4R+r)^2 \geq 256r^2 p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(9p^2 + 8Rr - 262r^2) + r^2(4R+r)^2 \geq 0.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi

$$\sum(a+b)^2(a+c)^2 = 9p^4 + p^2(8Rr - 6r^2) + r^2(4R+r)^2.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(9p^2 + 8Rr - 262r^2) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(9p^2 + 8Rr - 262r^2) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$$r^2(4R+r)^2 \geq p^2(262r^2 - 8Rr - 9p^2), \text{ care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} (262r^2 - 8Rr - 9(16Rr - 5r^2)) \Leftrightarrow 152R^2 - 303Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(152R+r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

7) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot b^2 c^2 + \frac{z+x}{y} \cdot c^2 a^2 + \frac{x+y}{z} \cdot a^2 b^2 \geq 32S^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot b^2 c^2 + \frac{z+x}{y} \cdot c^2 a^2 + \frac{x+y}{z} \cdot a^2 b^2 \geq 2abc \sum a$.

Este sufficient să arătăm că: $2abc \sum a \geq 32S^2 \Leftrightarrow$

$$2abc \sum a \geq 32S^2 \Leftrightarrow 8Rp^2 \geq 16r^2 p^2 \Leftrightarrow R \geq 2r \text{ (inegalitatea lui Euler)}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

8) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot r_b^2 r_c^2 + \frac{z+x}{y} \cdot r_c^2 r_a^2 + \frac{x+y}{z} \cdot r_a^2 r_b^2 \geq 18S^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot r_b^2 r_c^2 + \frac{z+x}{y} \cdot r_c^2 r_a^2 + \frac{x+y}{z} \cdot r_a^2 r_b^2 \geq 2r_a r_b r_c \sum r_a$.

Este sufficient să arătăm că: $2r_a r_b r_c \sum r_a \geq 18S^2 \Leftrightarrow$

$$2r_a r_b r_c \sum r_a \geq 18S^2 \Leftrightarrow r_a r_b r_c \sum r_a \geq 9r^2 p^2 \Leftrightarrow 2rp^2(4R+r) \geq 9r^2 p^2 \Leftrightarrow R \geq 2r \text{ (Euler)}.$$

Am folosit identitățile cunoscute în triunghi $r_a r_b r_c = rp^2$ și $\sum r_a = 4R + r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

9) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot r_a^2 + \frac{z+x}{y} \cdot r_b^2 + \frac{x+y}{z} \cdot r_c^2 \geq 6\sqrt{3} \cdot S$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot r_a^2 + \frac{z+x}{y} \cdot r_b^2 + \frac{x+y}{z} \cdot r_c^2 \geq 2 \sum r_b r_c$.

Este sufficient să arătăm că: $2 \sum r_b r_c \geq 6\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow$

$$2\sum r_b r_c \geq 6\sqrt{3} \cdot S \Leftrightarrow \sum r_b r_c \geq 3\sqrt{3} \cdot rp \Leftrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3} \cdot rp \Leftrightarrow p \geq 3r\sqrt{3} \text{ (Mitrinović)}.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum r_b r_c = p^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

10) If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot r_a^4 + \frac{z+x}{y} \cdot r_b^4 + \frac{x+y}{z} \cdot r_c^4 \geq 18S^2$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot r_a^4 + \frac{z+x}{y} \cdot r_b^4 + \frac{x+y}{z} \cdot r_c^4 \geq 2\sum r_b^2 r_c^2$.

Este sufficient să arătăm că: $2\sum r_b^2 r_c^2 \geq 18S^2 \Leftrightarrow$

$$2\sum r_b^2 r_c^2 \geq 18S^2 \Leftrightarrow \sum r_b^2 r_c^2 \geq 9S^2 \Leftrightarrow \sum r_b^2 r_c^2 \geq p^2 [p^2 - 2r(4R+r)] \geq 9r^2 p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Euler).

Am folosit identitățile cunoscute în triunghi $\sum r_b^2 r_c^2 \geq p^2 [p^2 - 2r(4R+r)]$ și $\sum r_a = 4R+r$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

11) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cot^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cot^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cot^2 \frac{C}{2} \geq 18, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cot^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cot^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cot^2 \frac{C}{2} \geq 2\sum \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm că: $2\sum \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 18 \Leftrightarrow \sum \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4R+r}{r} \geq 9 \Leftrightarrow R \geq 2r \text{ (Euler)}.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\sum \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2\sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm că: $2 \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq 2 \Leftrightarrow \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq 1$, evident din

$$\sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

13) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + \frac{z+x}{y} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \frac{x+y}{z} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \geq \frac{4r}{3R}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem

$$\frac{y+z}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + \frac{z+x}{y} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \frac{x+y}{z} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \geq 2 \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

Este sufficient să arătăm $2 \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq \frac{4r}{3R} \Leftrightarrow \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq \frac{2r}{3R} \Leftrightarrow$

$$\frac{r}{p} \cdot \frac{4r+r}{p} \geq \frac{2r}{3R} \Leftrightarrow 3R(4R+r) \geq 2p^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen}$$

$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$3R(4R+r) \geq 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \Leftrightarrow 4R^2 - 5Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r) \geq 0,$$

evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: $\prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ și $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

14) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} + \frac{z+x}{y} \cot^2 \frac{C}{2} \cot^2 \frac{A}{2} + \frac{x+y}{z} \cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \geq 54, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} \geq 2 \prod \cot \frac{A}{2} \sum \cot \frac{A}{2}$.

Este sufficient să arătăm $2 \prod \cot \frac{A}{2} \sum \cot \frac{A}{2} \geq 54 \Leftrightarrow \prod \cot \frac{A}{2} \sum \cot \frac{A}{2} \geq 27 \Leftrightarrow$

$$\frac{p}{r} \cdot \frac{p}{r} \geq 27 \Leftrightarrow p^2 \geq 27r^2 \text{ (inegalitatea lui Mitrinović).}$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\prod \cot \frac{A}{2} = \frac{p}{r} \text{ și } \sum \cot \frac{A}{2} = \frac{p}{r}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

15) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \sin^4 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \sin^4 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \sin^4 \frac{C}{2} \geq \frac{3r}{4R}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \sin^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm $2 \sum \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3r}{4R} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2} \geq \frac{3r}{4R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2$ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$ (Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

16) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cos^4 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cos^4 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cos^4 \frac{C}{2} \geq \frac{27r}{4R}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cos^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm $2 \sum \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \geq \frac{27r}{4R} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2} \geq \frac{27r}{4R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 + (4R+r)^2 \geq 54Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 + (4R+r)^2 \geq 54Rr \Leftrightarrow 8R^2 - 15Rr - 2r^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (R-2r)(8R+r) \geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

17) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \sec^4 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \sec^4 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \sec^4 \frac{C}{2} \geq \frac{32}{3}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \sec^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm $2 \sum \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq \frac{32}{3} \Leftrightarrow \sum \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq \frac{16}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{8R(4R+r)}{p^2} \geq \frac{16}{3} \Leftrightarrow 3R(4R+r) \geq 2p^2 \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen}$$

$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$3R(4R+r) \geq 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \Leftrightarrow 4R^2 - 5Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r) \geq 0,$$

evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{8R(4R+r)}{p^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

18) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \csc^4 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \csc^4 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \csc^4 \frac{C}{2} \geq 96, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \csc^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm $2 \sum \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 96 \Leftrightarrow \sum \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 48 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{8R(2R-r)}{r^2} \geq 48 \Leftrightarrow 2R^2 - Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r) \geq 0,$$

evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{8R(2R-r)}{r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

19) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \sin^2 A + \frac{z+x}{y} \sin^2 B + \frac{x+y}{z} \sin^2 C \geq \frac{9r}{R}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \sin^2 A \geq 2 \sum \sin B \sin C$.

Este sufficient să arătăm $2 \sum \sin B \sin C \geq \frac{9r}{R} \Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \geq \frac{9r}{2R} \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \sin B \sin C = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

20) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x}(p-a)^2 + \frac{z+x}{y}(p-b)^2 + \frac{x+y}{z}(p-c)^2 \geq 9Rr, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x}(p-a)^2 \geq 2\sum (p-b)(p-c)$.

Este sufficient să arătăm

$$2\sum (p-b)(p-c) \geq 9Rr \Leftrightarrow r(4R+r) \geq 9Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{inegalitatea lui Euler}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum (p-b)(p-c) = r(4R+r)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

21) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x}a^2(p-a)^2 + \frac{z+x}{y}b^2(p-b)^2 + \frac{x+y}{z}c^2(p-c)^2 \geq 8S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x}a^2(p-a)^2 \geq 2\sum bc(p-b)(p-c)$.

Este sufficient să arătăm

$$2\sum bc(p-b)(p-c) \geq 8S^2 \Leftrightarrow r^2[p^2 + (4R+r)^2] \geq 4r^2p^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{Doucet}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc(p-b)(p-c) = r^2[p^2 + (4R+r)^2]$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

22) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{a^2} \geq \frac{3}{2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{a^2} \geq 2\sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$.

Este sufficient să arătăm

$$2\sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{inegalitatea lui Euler}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{2R-r}{2R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

23) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{(p-a)^2} \geq 24, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{(p-a)^2} \geq 2 \sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} \geq 24 \Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} \geq 12 \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea}$$

lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

24) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{b^2c^2} \geq \frac{1}{2R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{b^2c^2} \geq 2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a^2bc}.$

Este sufficient să arătăm

$$\frac{2}{abc} \sum \frac{(p-b)(p-c)}{a} \geq \frac{1}{2R^2} \Leftrightarrow \frac{2}{4Rrp} \cdot \frac{r}{4Rp} [p^2 + (4R+r)^2] \geq \frac{1}{2R^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, \text{ (inegalitatea lui Doucet).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{a} = \frac{r}{4Rp} [p^2 + (4R+r)^2].$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

25) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} a^2 (b+c)^2 + \frac{z+x}{y} b^2 (c+a)^2 + \frac{x+y}{z} c^2 (a+b)^2 \geq 128S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 (b+c)^2 \geq 2 \sum bc(a+b)(a+c).$

Este sufficient să arătăm

$$2\sum bc(a+b)(a+c) \geq 128S^2 \Leftrightarrow p^2(p^2 + 2r^2 + 16Rr) + r^2(4R+r)^2 \geq 64r^2p^2$$

$$p^2(p^2 - 62r^2 + 16Rr) + r^2(4R+r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(p^2 - 62r^2 + 16Rr) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(p^2 - 62r^2 + 16Rr) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$$r^2(4R+r)^2 \geq p^2(62r^2 - 16Rr - p^2), \text{ care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen:}$$

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R+r)^2 \geq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(62r^2 - 16Rr - p^2) \Leftrightarrow 32R^2 - 63Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(4R+3r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi:

$$\sum bc(a+b)(a+c) = p^2(p^2 + 2r^2 + 16Rr) + r^2(4R+r)^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

26) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 r_a^2 \geq 24S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind Lema obținem } \sum \frac{y+z}{x} a^2 r_a^2 \geq 2 \sum bcr_b r_c.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bcr_b r_c \geq 24S^2 \Leftrightarrow p^2(p^2 + r^2 - 8Rr) \geq 12r^2 p^2 \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ care rezultă din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

$$\text{Rămâne să arătăm că } 16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

$$\text{Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: } \sum bcr_b r_c = p^2(p^2 + r^2 - 8Rr).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

27) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 r_a^2 \geq 6S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind Lema obținem } \sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 r_a^2 \geq 2 \sum (p-b)(p-c) r_b r_c.$$

Este sufficient să arătăm

$2\sum (p-b)(p-c)r_b r_c \geq 6S^2$, evidentă din $\sum (p-b)(p-c)r_b r_c = 3S^2$.

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum (p-b)(p-c)r_b r_c = 3S^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

28) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{r_a^2} \geq 2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{r_a^2} \geq 2\sum \frac{(p-b)(p-c)}{r_b r_c}$.

Este sufficient să arătăm

$$2\sum \frac{(p-b)(p-c)}{r_b r_c} \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 \geq 1 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{Doucet}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{r_b r_c} = \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

29) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(r_b+r_c)^2}{(p-a)^2} \geq 72, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(r_b+r_c)^2}{(p-a)^2} \geq 2\sum \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{(p-b)(p-c)}$.

Este sufficient să arătăm

$$2\sum \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{(p-b)(p-c)} \geq 72 \Leftrightarrow \frac{p^2+r^2+4Rr}{r^2} \geq 36 \Leftrightarrow p^2 \geq 35r^2-4Rr, \text{ care rezultă din}$$

inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că $16Rr-5r^2 \geq 35r^2-4Rr \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

30) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{(r_b+r_c)^2} \geq \frac{r}{R}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{(r_b+r_c)^2} \geq 2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)} \geq \frac{r}{R}, \text{ evidentă din } \sum \frac{(p-b)(p-c)}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)} = \frac{r}{2R}.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)} = \frac{r}{2R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

31) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} h_a^2 + \frac{z+x}{y} h_b^2 + \frac{x+y}{z} h_c^2 \geq 54r^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot h_a^2 \geq 2 \sum h_b h_c$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum h_b h_c \geq 54r^2 \Leftrightarrow \frac{2rp^2}{R} \geq 27r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \geq 27Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

$$\text{Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

$$\text{Rămâne să arătăm că } 2(16Rr - 5r^2) \geq 27Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

$$\text{Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: } \sum h_b h_c = \frac{2rp^2}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

32) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 h_a^2 \geq 6S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 h_a^2 \geq 2 \sum (p-b)(p-c) h_b h_c$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) h_b h_c \geq 6S^2 \Leftrightarrow \frac{4S^2(2R-r)}{R} \geq 6S^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

$$\text{Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: } \sum (p-b)(p-c) h_b h_c = \frac{4S^2(2R-r)}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

33) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{h_a^2} \geq \frac{1}{2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{(p-a)^2}{h_a^2} \geq 2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{h_b h_c}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{(p-b)(p-c)}{h_b h_c} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right] \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{inegalitatea Doucet}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{(p-b)(p-c)}{h_b h_c} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \right].$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

34) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{r_a^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{b^2}{r_b^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{c^2}{r_c^2} \geq 8, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{r_a^2} \geq 2 \sum \frac{bc}{r_b r_c}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{bc}{r_b r_c} \geq 8 \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{r_b r_c} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{inegalitatea Doucet}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{bc}{r_b r_c} = 1 + \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

35) In $\triangle ABC$

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{h_a^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{b^2}{h_b^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{c^2}{h_c^2} \geq 8, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{a^2}{h_a^2} \geq 2 \sum \frac{bc}{h_b h_c}.$

Este sufficient să arătăm

$$2\sum \frac{bc}{h_b h_c} \geq 8 \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{h_b h_c} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2 - 14r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2 \geq 0.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $(p^2 - 14r^2 - 8Rr) \geq 0$, inegalitatea este evidentă.

Cazul 2). Dacă $(p^2 - 14r^2 - 8Rr) < 0$, inegalitatea se rescrie:

$r^2(4R + r)^2 \geq p^2(14r^2 + 8Rr - p^2)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen:

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}. \text{ Rămâne să arătăm că:}$$

$$r^2(4R + r)^2 \geq \frac{R(4R + r)^2}{2(2R - r)}(14r^2 + 8Rr - 16Rr + 5r^2) \Leftrightarrow 8R^2 - 15Rr - 2r^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R - 2r)(8R + r) \geq 0, \text{ evident din inegalitatea lui Euler } R \geq 2r.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{bc}{h_b h_c} = \frac{p^2(p^2 + 2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2}{4p^2 r^2}.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

36) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (r_a - r)^2 \geq 12Rr, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot (r_a - r)^2 \geq 2 \sum (r_b - r)(r_c - r).$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (r_b - r)(r_c - r) \geq 12Rr \Leftrightarrow \sum (r_b - r)(r_c - r) \geq 6Rr \Leftrightarrow p^2 + r^2 - 8Rr \geq 6Rr \Leftrightarrow$$

$$p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum (r_b - r)(r_c - r) = p^2 + r^2 - 8Rr.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

37) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (h_a - r)^2 \geq 24r^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot (h_a - r)^2 \geq 2 \sum (h_b - r)(h_c - r)$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (h_b - r)(h_c - r) \geq 24r^2 \Leftrightarrow \sum (h_b - r)(h_c - r) \geq 12r^2 \Leftrightarrow \frac{r}{R} (p^2 - r^2 - Rr) \geq 12r^2 \Leftrightarrow$$

$$p^2 \geq 13Rr + r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 13Rr + r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum (h_b - r)(h_c - r) = \frac{r}{R} (p^2 - r^2 - Rr)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

38) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 (r_a - r)^2 \geq 32R^2 r^2 p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 (r_a - r)^2 \geq 2abc \sum a(r_b - r)(r_c - r)$.

Este sufficient să arătăm

$$2abc \sum a(r_b - r)(r_c - r) \geq 32R^2 r^2 p^2 \Leftrightarrow \sum a(r_b - r)(r_c - r) \geq 4Rrp, \text{ care rezultă din}$$

$$\sum a(r_b - r)(r_c - r) = 4Rrp.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum a(r_b - r)(r_c - r) = 4Rrp$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

39) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 (h_a - r)^2 \geq 288r^4, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 (h_a - r)^2 \geq 2 \sum bc(h_b - r)(h_c - r)$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bc(h_b - r)(h_c - r) \geq 288r^4 \Leftrightarrow \sum bc(h_b - r)(h_c - r) \geq 144r^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 (5p^2 + r^2 + 4Rr) \geq 144r^4 \Leftrightarrow 5p^2 \geq 143r^2 - 4Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$5(16Rr - 5r^2) \geq 143r^2 - 4Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc(h_b - r)(h_c - r) = r^2 (5p^2 + r^2 + 4Rr)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

40) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} h_a^2 (r_b + r_c)^2 \geq 72S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} h_a^2 (r_b + r_c)^2 \geq 2 \sum h_b h_c (r_a + r_b)(r_a + r_c)$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum h_b h_c (r_a + r_b)(r_a + r_c) \geq 72S^2 \Leftrightarrow \sum h_b h_c (r_a + r_b)(r_a + r_c) \geq 36S^2 \Leftrightarrow 4p^2 r(4R+r) \geq 36S^2 \\ \Leftrightarrow 4p^2 r(4R+r) \geq 36r^2 p^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum h_b h_c (r_a + r_b)(r_a + r_c) = 4p^2 r(4R+r)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

41) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \geq 8p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \geq 2 \sum bc \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bc \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 8p^2 \Leftrightarrow \sum bc \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 4p^2 \Leftrightarrow p^2 + (4R+r)^2 \geq 4p^2 \\ \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, \text{ (inegalitatea lui Doucet).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p^2 + (4R+r)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

42) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \geq 2p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \geq 2 \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 2p^2 \Leftrightarrow \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq p^2 \Leftrightarrow \\ (4R+r)^2 - 2p^2 \geq p^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, \text{ (inegalitatea lui Doucet).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi:

$$\sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = (4R+r)^2 - 2p^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

43) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq 12Rr, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq 2 \sum bc \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bc \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 12Rr \Leftrightarrow \sum bc \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 6Rr \Leftrightarrow p^2 + r^2 - 8Rr \geq 6Rr \Leftrightarrow$$

$$p^2 \geq 14Rr - r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen } p^2 \geq 16Rr - 5r^2.$$

Rămâne să arătăm că $16Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, (inegalitatea lui Euler).

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = p^2 + r^2 - 8Rr.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

44) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 8r^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 8r^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 4r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{p} \cdot \frac{r}{p} [p^2 + (4R+r)^2] \geq 4r^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, \text{ (inegalitatea lui Doucet).}$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: $\sum bc \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p} [p^2 + (4R+r)^2]$ și

$$\prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

45) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geq 24p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geq 24p^2 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum bc \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geq 12p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{r} \cdot \frac{p}{r} (p^2 + r^2 - 8Rr) \geq 12p^2 \Leftrightarrow p^2 \geq 8Rr + 11r^2, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să arătăm că

$$16Rr - 5r^2 \geq 8Rr + 11r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{inegalitatea lui Euler}).$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: $\sum bc \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r} (p^2 + r^2 - 8Rr)$ și

$$\prod \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

46) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq 6r^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind } \mathbf{Lema} \text{ obținem } \sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geq 2 \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 6r^2 \Leftrightarrow \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 3r^2,$$

$$\text{care rezultă din } \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 3r^2.$$

$$\text{Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: } \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 3r^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

47) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2r^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind } \mathbf{Lema} \text{ obținem } \sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 2r^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{p} \cdot \frac{r}{p} [(4R+r)^2 - 2p^2] \geq r^2 \Leftrightarrow (4R+r)^2 \geq 3p^2, (\text{inegalitatea lui Doucet}).$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum (p-b)(p-c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p} \left[(4R+r)^2 - 2p^2 \right] \text{ și } \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

48) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geq 6p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema**

$$\text{obținem } \sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geq 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geq 6p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geq 3p^2 \Leftrightarrow \frac{p}{r} \cdot 3rp \geq 9p^2, \text{ evident, cu egalitate.}$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: $\sum (p-b)(p-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 3rp$ și

$$\prod \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p}{r}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

49) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \csc^4 \frac{A}{2} \geq 288R^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind } \mathbf{Lema} \text{ obținem } \sum \frac{y+z}{x} a^2 \csc^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum bc \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bc \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 288R^2 \Leftrightarrow \sum bc \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 144R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{16R^2(4R+r)}{r} \geq 144R^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} = \frac{16R^2(4R+r)}{r}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

50) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} a^2 \sec^4 \frac{A}{2} \geq 32R^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} a^2 \sec^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum bc \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum bc \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq 32R^2 \Leftrightarrow \sum bc \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq 16R^2, \text{ care rezultă din}$$

$$\sum bc \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} = 16R^2.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum bc \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} = 16R^2$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

51) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \sec^4 \frac{A}{2} \geq 16Rr, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \sec^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum (p-b)(p-c) \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq 16Rr \Leftrightarrow \sum (p-b)(p-c) \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \geq 8Rr, \text{ care rezultă}$$

$$\text{din } \sum (p-b)(p-c) \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} = 16Rr.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum (p-b)(p-c) \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} = 16Rr$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

52) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \csc^4 \frac{A}{2} \geq 72R^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \csc^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum (p-b)(p-c) \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 72R^2 \Leftrightarrow \sum (p-b)(p-c) \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} \geq 36R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R}{r} [4R(4R+r) - 2p^2] \geq 36R^2 \Leftrightarrow 2p^2 \leq 16R^2 - 5Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Rămâne să arătăm că:

$$2(4R^2 + 4Rr + 3r^2) \leq 16R^2 - 5Rr \Leftrightarrow 8R^2 - 13Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(8R + 3r) \geq 0,$$

evident din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi:

$$\sum (p-b)(p-c) \csc^2 \frac{B}{2} \csc^2 \frac{C}{2} = \frac{4R}{r} [4R(4R+r) - 2p^2].$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

53) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 \sin^4 \frac{A}{2} \geq 2S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind Lema obținem } \sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 \sin^4 \frac{A}{2} \geq 2abc \sum a \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2abc \sum a \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq 2S^2 \Leftrightarrow abc \sum a \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq S^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4Rrp \cdot \frac{rp}{4R} \geq S^2, \text{ evident, cu egalitate.}$$

$$\text{Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: } \sum a \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{rp}{4R}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

54) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq \frac{1}{8R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

$$\text{Folosind Lema obținem } \sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq 2 \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{bc}.$$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{bc} \geq \frac{1}{8R^2} \Leftrightarrow \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{bc} \geq \frac{1}{16R^2}, \text{ care rezultă din}$$

$$\sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{bc} = \frac{1}{16R^2}.$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{bc} = \frac{1}{16R^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

55) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{(p-b)^2 (p-c)^2} \geq \frac{9}{2R^2 p^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\sin^4 \frac{A}{2}}{(p-b)^2 (p-c)^2} \geq \frac{2}{\prod (p-a)} \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{p-a}$.

Este sufficient să arătăm

$$\begin{aligned} \frac{2}{\prod (p-a)} \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{p-a} &\geq \frac{9}{2R^2 p^2} \Leftrightarrow \sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{p-a} \geq \frac{9 \prod (p-a)}{4R^2 p^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16R^2 p} \geq \frac{9r^2 p}{4R^2 p^2} \Leftrightarrow p^2 \geq 35r^2 - 4Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui } \end{aligned}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să arătăm că

$$16Rr - 5r^2 \geq 35r^2 - 4Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi: $\sum \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{p-a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16R^2 p}$ și

$$\prod (p-a) = r^2 p.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

56) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 \cos^4 \frac{A}{2} \geq 18p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} b^2 c^2 \cos^4 \frac{A}{2} \geq 2abc \sum a \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm

$$2abc \sum a \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \geq 18S^2 \Leftrightarrow abc \sum a \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \geq 9S^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4Rrp \cdot \frac{p(4R+r)}{4R} \geq 9r^2 p^2 \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum a \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{p(4R+r)}{4R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

57) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq \frac{9}{8R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{a^2} \geq 2 \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{bc}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{bc} \geq \frac{9}{8R^2} \Leftrightarrow \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{bc} \geq \frac{9}{16R^2} \Leftrightarrow \frac{4R+r}{16R^2 r} \geq \frac{9}{16R^2} \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{bc} = \frac{4R+r}{16R^2 r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

58) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{(p-a)^2} \geq \frac{9}{2R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} \cdot \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{(p-a)^2} \geq 2 \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{(p-b)(p-c)}$.

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{(p-b)(p-c)} \geq \frac{9}{2R^2} \Leftrightarrow \sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{(p-b)(p-c)} \geq \frac{9}{4R^2} \Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16R^2 r^2} \geq \frac{9}{4R^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2 \geq 35r^2 - 4Rr$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să arătăm că

$$16Rr - 5r^2 \geq 35r^2 - 4Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, \text{ (inegalitatea lui Euler).}$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi: $\sum \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16R^2 r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

59) In $\triangle ABC$

$$\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \sin^4 \frac{A}{2} \geq \frac{9r^4}{2R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Solutie.

Folosind **Lema** obținem $\sum \frac{y+z}{x} (p-a)^2 \sin^4 \frac{A}{2} \geq 2 \sum (p-b)(p-c) \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}.$

Este sufficient să arătăm

$$2 \sum (p-b)(p-c) \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{9r^4}{2R^2} \Leftrightarrow \sum (p-b)(p-c) \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{9r^4}{4R^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{16R^2} \geq \frac{9r^4}{4R^2} \Leftrightarrow p^2 \geq 35r^2 - 4Rr, \text{ care rezultă din inegalitatea lui}$$

Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Rămâne să arătăm că

$$16Rr - 5r^2 \geq 35r^2 - 4Rr \Leftrightarrow R \geq 2r, (\text{inegalitatea lui Euler}).$$

Mai sus am folosit identitatea cunoscută în triunghi:

$$\sum (p-b)(p-c) \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{r^2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{16R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

60) IX.42.RMM-24 Spring Edition 2020

If $x, y, z > 0$ then in $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$\frac{y+z}{x} \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4p^2 - 9R^2}{4R^2}$$

D.M.Băținețu-Giurgiu, Gabriel Tica

Solutie:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \geq 2 \sum \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Este sufficient să arătăm că: $2 \sum \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq \frac{4p^2 - 9R^2}{4R^2}$, care rezultă din:

$$\sum \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\prod \cos^2 \frac{A}{2}} = 3 \sqrt[3]{\left(\frac{p}{4R}\right)^2}.$$

Rămâne să arătăm că $2 \cdot 3 \sqrt[3]{\left(\frac{p}{4R}\right)^2} \geq \left(\frac{p}{R}\right)^2 - \frac{9}{4}$, adevărată din inegalitatea lui Mitrinović

$$p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}.$$

Într-adevăr notând $\sqrt[3]{\left(\frac{p}{4R}\right)^2} = t$ avem $t \leq \frac{3}{4}$ și inegalitatea de mai sus se scrie

$$6t \geq 16t^3 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 64t^3 - 24t - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (4t-3)(16t^2+12t+3) \leq 0$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\prod \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{4R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

61) In $\triangle ABC$:

$$\frac{y+z}{x} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{6r^2}{R^2}, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{z+x}{y} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} + \frac{x+y}{z} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \geq 2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

Este sufficient să arătăm că: $2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \frac{6r^2}{R^2} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \frac{3r^2}{R^2}$,

care rezultă din:

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\prod \sin^2 \frac{A}{2}} = 3 \sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^2}.$$

Rămâne să arătăm că $3 \sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^2} \geq 3 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^2} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^2$, adevărată din inegalitatea lui

Euler $R \geq 2r$.

Într-adevăr notând $\sqrt[3]{\left(\frac{r}{4R}\right)^2} = t$ avem $t \leq \frac{1}{4}$ și inegalitatea de mai sus se scrie:

$$t \geq 16t^3 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{4}.$$

Am folosit identitatea cunoscută în triunghi $\prod \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{4R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

62) In $\triangle ABC$:

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{r_a}{h_a} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{r_b}{h_b} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{r_c}{h_c} \geq 6, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție:

Folosind **Lema** obținem $\frac{y+z}{x} \cdot \frac{r_a}{h_a} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{r_b}{h_b} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{r_c}{h_c} \geq 2 \sum \sqrt{\frac{r_b r_c}{h_b h_c}}$.

Este sufficient să arătăm că: $2 \sum \sqrt{\frac{r_b r_c}{h_b h_c}} \geq 6 \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{r_b r_c}{h_b h_c}} \geq 3$, care rezultă din:

$$\sum \sqrt{\frac{r_b r_c}{h_b h_c}} \geq 3 \sqrt[3]{\left(\prod \frac{r_a}{h_a} \right)^2} = 3 \sqrt[3]{\prod \frac{r_a}{h_a}} = 3 \sqrt[3]{\frac{rp^2}{2r^2 p^2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{R}{2r}} \geq 3.$$

63) In $\triangle ABC$:

$$\frac{b+c}{a} \cdot \frac{r_a}{h_a} + \frac{c+a}{b} \cdot \frac{r_b}{h_b} + \frac{a+b}{c} \cdot \frac{r_c}{h_c} \geq 6.$$

RMM-25, Summer Edition 2020, Mehmet Shahin, Ankara, Turkey

Soluție:

În aplicația de mai sus punem $x = a, y = b, z = c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

În inegalitățile de mai sus egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

15 Iulie 2019

Bibliografie:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. D.M.Bătinețu-Giurgiu, X.64, X.65, X.75, RMM-24, Spring Edition 2020 Romanian Mathematical Magazine 2019, Founding Editor Daniel Sitaru.
3. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
4. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
5. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
6. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
7. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
8. Marin Chirciu, Puncte remarcabile în triunghi . Inegalități. Distanțe, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2019.

4. PARALELE, PARALELOGrame, PARALELIPIEDE

Studiu de specialitate

Prof. Stan Ilie¹

Se dau 3 puncte necoliniare. Acestea determină un triunghi de arie S .

1. Câte paralelograme ce au vârfurile în cele 3 puncte date există?
2. Justificați răspunsul anterior.
3. Câte sunt paralelograme necongruente?
4. Care sunt ariile paralelogramelor de la întrebarea 1?
5. Care e suprafața acoperită de acestea?
6. Care e suprafața comună acestora?
7. Dacă vârfurile triunghiului au coordonate întregi atunci...
8. Centrul de greutate al paralelogramelor...
9. Centrele de greutate ale paralelogramelor determină de arie

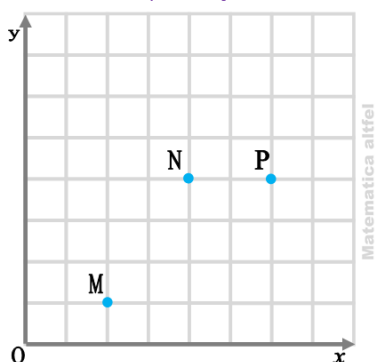
Câte 1 punct pentru fiecare răspuns corect. Din oficiu n puncte!

Pentru $n = 4, 3, 2, 1, 0$ nota maximă ce poate fi obținută este 6, 7, 8, 9 respectiv 10.

Numărul punctelor din oficiu n va fi hotărât individual la începutul testului!

Ideea testului anterior și a studiului următor a pornit de la:

M, N, P sunt trei puncte necoliniare. Aflați coordonatele punctului Q pentru care M, N, P, Q sunt vârfurile unui paralelogram. Câte posibilități există?



<https://www.facebook.com/Mate.Altfel/photos/a.537863809915747/892333987802059/?type=3&theater>

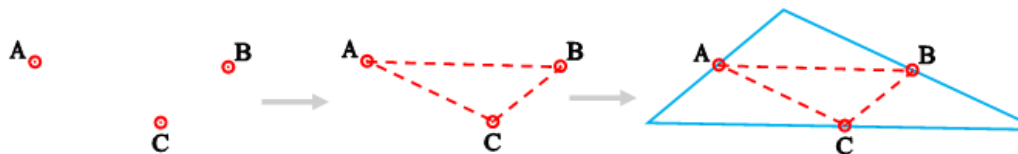
Răspunsuri:

¹ Liceul Tehnologic “Anghel Saligny”, Roșiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

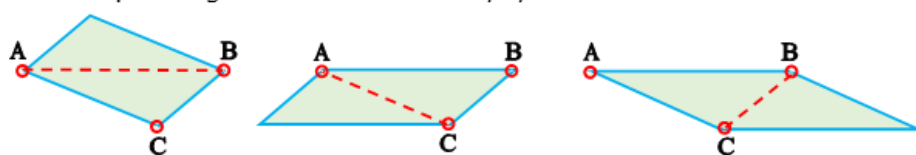
1. 3 paralelograme

2. Justificarea #1:

Punctele date determină un triunghi ABC. Cele trei laturi ale triunghiului sunt pentru paralelogramele căutate: laturi sau diagonale.



Am construit trei paralele (din fiecare vârf al tr. ABC la latura opusă) și observ că s-au format 3 paralelograme ce au ca vârfuri A, B, C.



Justificarea #2:

A, B, C punctele date. Unde ar putea fi plasat D?

ABCD, ABDC, ADCB

(DABC e același caz cu ABCD)

Justificarea #3:

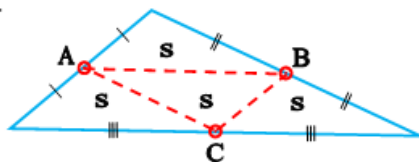
Al 4-lea vârf se obține prin simetria unui punct față de mijlocul segmentului determinat de celelalte două.

3. Depinde de natura triunghiului dat!

1 dacă acesta este echilateral. 2 dacă este isoscel. 3 dacă este scalen.

4. Au arii egale.

Triunghiul ABC este triunghiul median, el împarte triunghiul mare în 4 tr. echivalente (de arie S).



Toate cele trei paralelograme construite sunt echivalente (au aceeași arie, egală cu 2S).

5. 4S. Este aria triunghiului în care ABC este triunghi median.

6. S. Porțiunea comună este cea a triunghiului ABC.

7. Dacă vârfurile triunghiului au coordonate întregi atunci...
...și vârfurile paralelogramelor au coordonate întregi.

Folosim justificarea #3(Al 4-lea vârf se obține prin simetria unui punct față de mijlocul segmentului determinat de celelalte două).

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \Rightarrow M$ mijlocul segmentului BC, $M(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2})$

$\Rightarrow D(x_B+x_C-x_A, y_B+y_C-y_A)$

8. Centrul de greutate al paralelogramelor...
...este G-ul triunghiului ABC.

9. Centrele de greutate ale paralelogramelor determină de arie

Centrele de greutate ale paralelogramelor determină un triunghi(triunghiul median al lui ABC) de arie $S/4$.

Acesta a fost cazul 2D.

Putem încerca - de Amorul Artei – adaptarea întrebărilor pentru cazul 1D...

Dar, cu siguranță, mult mai interesantă este generalizarea pentru cazul 3D:

Poate se întreba și Arhimede:
“4 puncte date necoplanare,
Vârfuri în câte paralelipipede
Pot fi acestea oare?”

Stan Ilie

Provocarea a fost lansată:

<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=10219204994216270&set=gm.2444666542488026&type=3&theater&ifg=1>

<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=10219204994216270&set=gm.2444666542488026&type=3&theater>

Întrebarea #1 din problema 2D

“Câte paralelograme ce au vârfurile în cele 3 puncte date există?” devine acum :

“Câte paralelipede ce au vârfurile în cele 4 puncte date există?”

Fie A, B, C, D cele 4 puncte necoplanare.

Considerăm ca bază planul (ABC). Cunoaștem-din problema 2D- că în el putem construi 3 paralelograme diferite. Punctul D va putea fi unit cu cele 3x4 vârfuri ale lor.

Rezultă astfel 12 paralelipede.

Analog pentru celelalte plane-bază: (ABD), (ACD) și (BCD).

Așadar sunt $3 \times 4 \times 4 = 48$ paralelipede.

Până lămurim dacă acestea sunt distincte, răspunsul este: maxim 48.

Probabil că cel mai simplu ne lămurim folosind sistemul de axe xOyz în care să considerăm punctele A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) și D(0,0,1).

Luând ca bază planul xOy, foarte probabil, că primul paraleliped pe care îl vom construi va fi...
...cubul unitate!

Schimbând baza cu planul yOz respectiv xOz, vom obține-întâi-același cub!!!

Deci acest cub este invocat de 3 ori pentru unghiul triedru cu vârful în A!

La fel pentru B, C respectiv D.

Deci nu există 3x4 astfel de paralelograme ci doar 4.

Ajustăm rezultatul cu $12 - 4 = 8$.

$48 - 8 = 40$.

Avem așadar 40 de paralelipede. Sau maxim 40?

O destul de laborioasă verificare analitică(greu de transcris aici-acum) dezvăluie – pentru fiecare unghi diedru – câte două paralelipede comune!

Așadar pentru fiecare dintre cele 6 combinații AB, AC, AD, BC, BD, CD există câte două paralelipede ce apar de câte două ori.

Ajustăm rezultatul cu $6 \times 2 = 12$.

$40 - 12 = 28$.

Avem așadar 28 de paralelipede.

O soluție frumoasă și ilustrată, dată de doamna Silvia Doandăș pe pagina Matematica Altfel:

Soluție

Avem A, B, C, D patru puncte necoplanare. Ele determină un tetraedru.

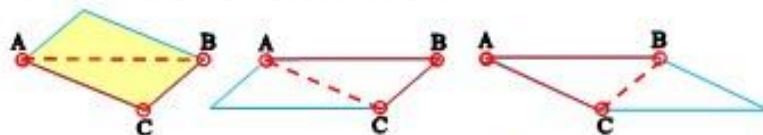
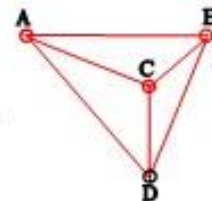
Cele șase muchii ale tetraedrului sunt pentru paralelipedeale căutate:

muchii, diagonale ale fețelor sau diagonale ale corpului.

Avem 4 cazuri: (A, B, C) și D; (A, B, D) și C; (A, C, D) și B; (B, C, D) și A.

Studiem cazul (A, B, C) și D.

Sunt 3 paralelograme ce au ca vîrfuri A, B, C.



Pentru un paralelogram dat, putem construi 4 paralelipede.

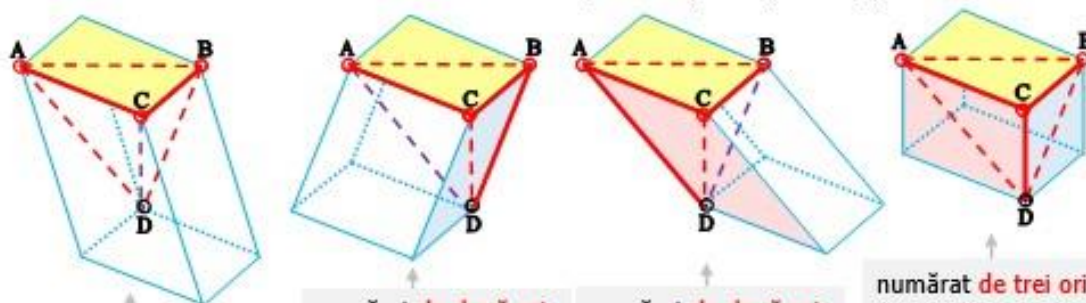
Avem în total $4 \times 3 \times 4 = 48$ paralelipede (nr. maxim)

Împărțim cele 48 de paralelipede în 12 grupe de câte 4.

Desenăm separat cele 4 paralelipede din prima grupă.

(AB=diagonala unei fețe, CA și CB=muchii)

Ne interesează câte muchii ale tetraedrului sunt și muchii pentru paraleliped.



numărat o singură dată
în cazul (A, B, C) și D.

numărat de două ori
în cazul (A, B, C) și D,
în cazul (B, C, D) și A.

numărat de două ori
în cazul (A, B, C) și D,
în cazul (A, C, D) și B.

numărat de trei ori
în cazul (A, B, C) și D,
în cazul (A, C, D) și B,
în cazul (B, C, D) și A.

Observăm că în fiecare grupă de 4 avem **trei feluri de corpuri**:

- 1 corp unic,
- 2 corpuri care o să fie dublate de corpuri din celelalte grupe,
- 1 corp care o să fie triplat de corpuri din celelalte grupe.

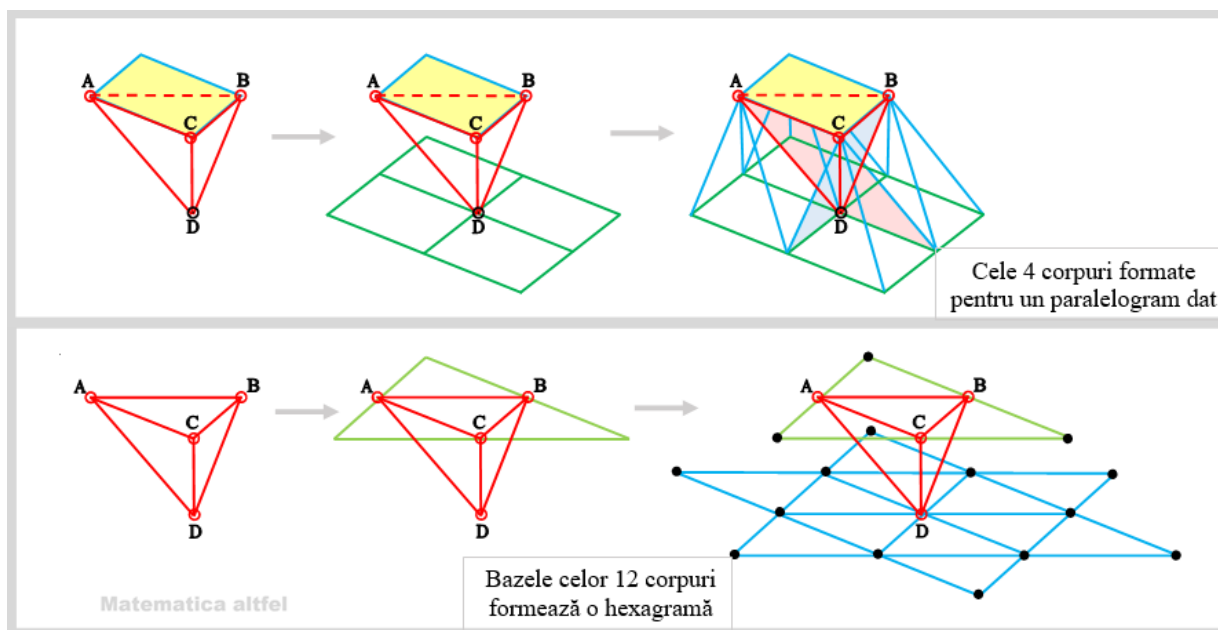
Analog socotim și pentru celelalte 11 grupe de câte 4 corpuri. Obținem:

- 1 x 12 corpuri unice $\Rightarrow 12$
- 2 x 12 corpuri care se numără de două ori $\Rightarrow 12$
- 1 x 12 corpuri care se numără de trei ori $\Rightarrow 12:3$

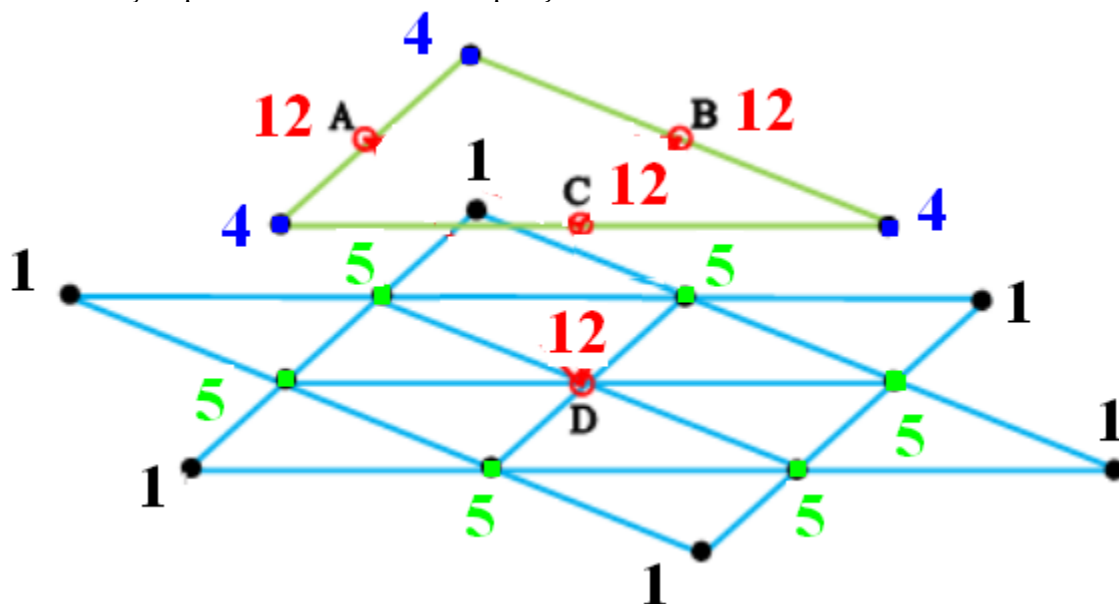
Acum calculăm numărul cerut.

$$12 + 12 + 4 = 28$$

Matematica altfel



Interesantă este și reprezentarea numărului aparițiilor fiecărui



vârf:

$$12+12+12+4+4+4=5+1+5+1+5+1+5+1+5+1+5+1=48$$

Studiul merită desigur continuat. Cu adaptarea celorlalte întrebări. Și, de ce nu, cu cazul 4D!

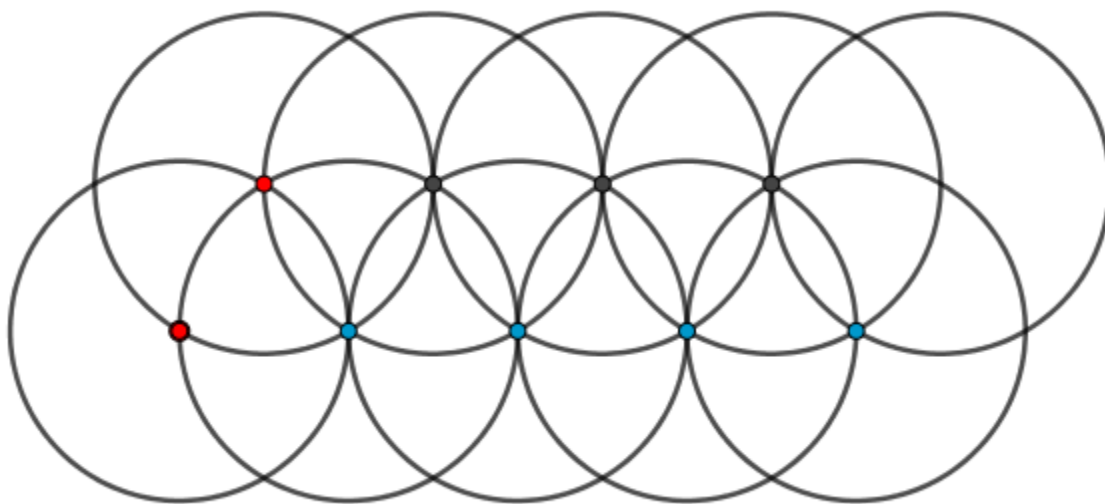
5. CONSTRUCȚII CU COMPASUL: CERCURILE DE RAZĂ n ȘI $\sqrt{n}$

Prof. Stan Ilie²

Am pornit de la postarea:

**O problemă-n minte, iară și-a făcut popas:
Cu o deschidere unitară, într-un vechi compas,
Să trasăm două cercuri de raze n resp. din n radical.
Desigur n -ul natural. Un mic răsfăț duminical...**

Stan Ilie



Urmează detalierea:

² Liceul Tehnologic “Anghel Saligny” Roșiorii de Vede, stan_ilie@yahoo.com

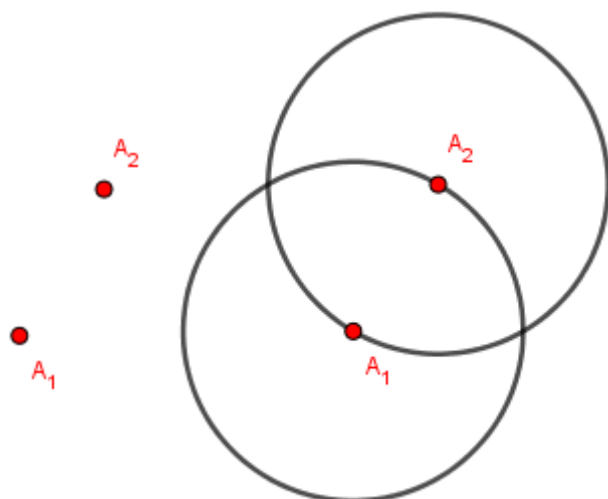


Fig. 1

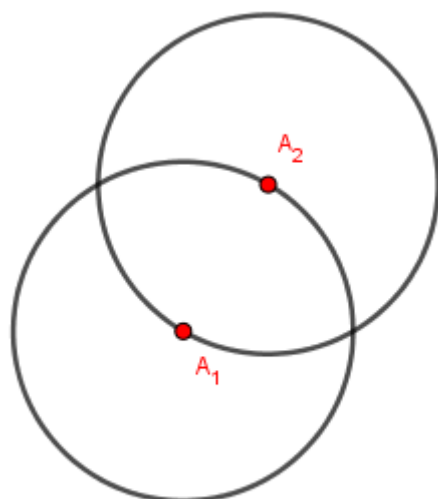


Fig. 2

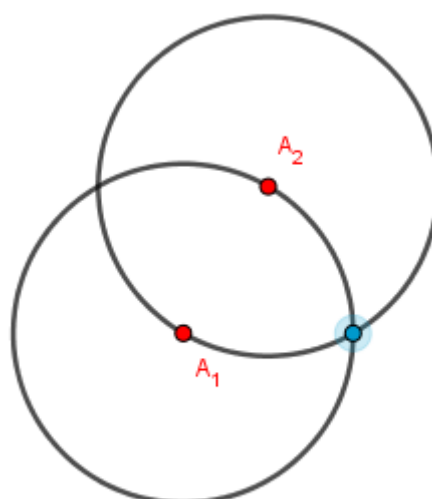


Fig. 3

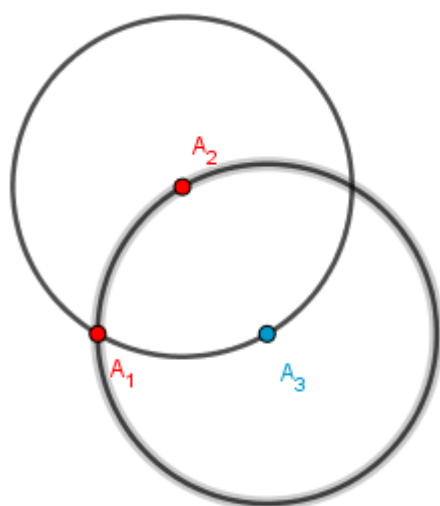


Fig. 4

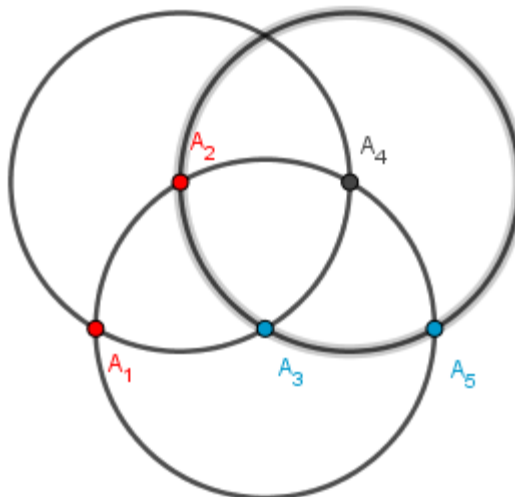
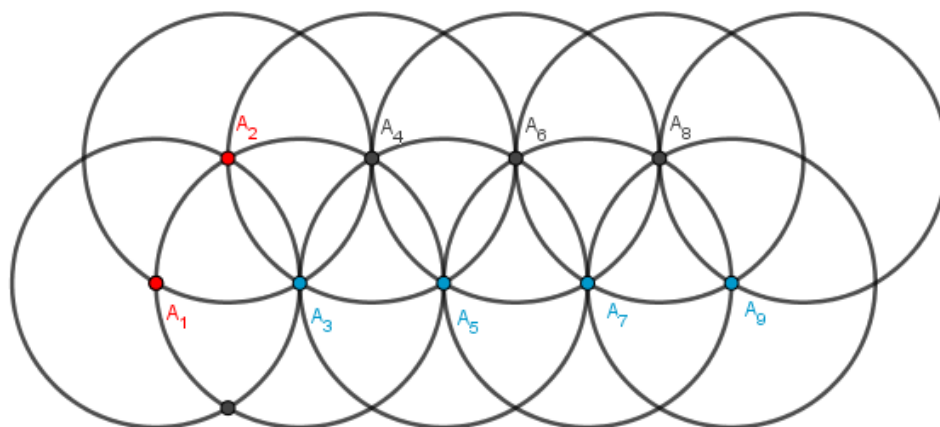


Fig. 5

...



Avem $d(A_1, A_3) = d(A_3, A_5) = d(A_5, A_7) = \dots = 1$

Așadar $d(A_1, A_{2n+1}) = n$

Așa ... în dar avem și $d(A_1, A_2), d(A_1, A_4), d(A_1, A_6), d(A_1, A_8), d(A_1, A_{10}) \dots$

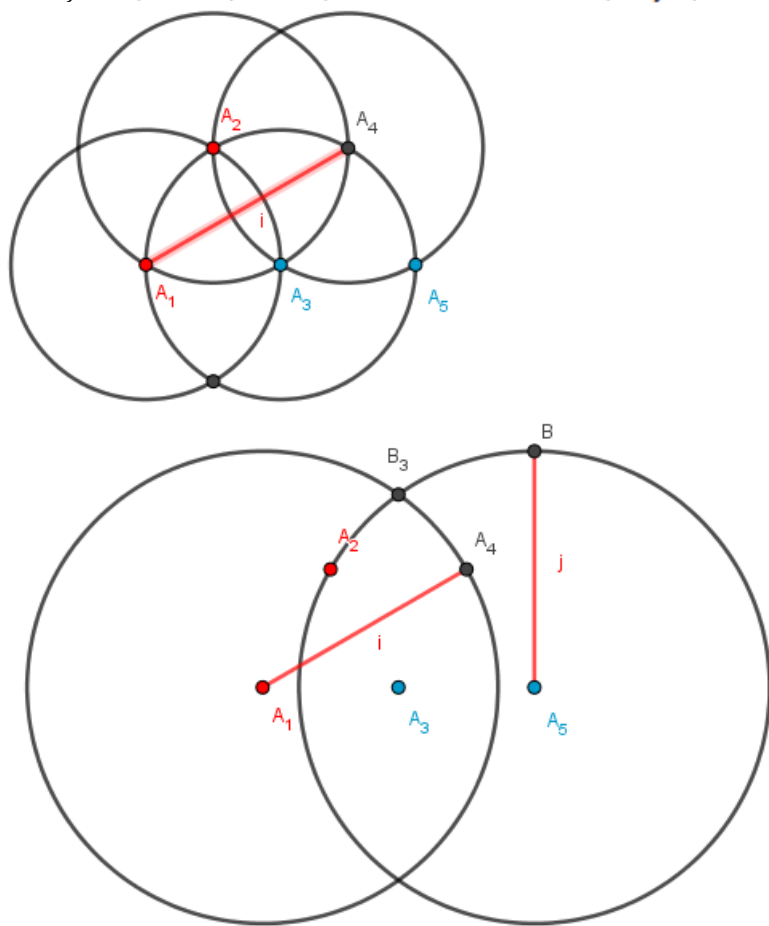
$$\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{21}, \sqrt{31}, \sqrt{43}, \dots = \sqrt{(n-1)^2 + (n-1) + 1}$$

Așadar $d(A_1, A_{2n}) = \sqrt{n^2 - n + 1}$.

Observăm desigur lipsa unor elemente... $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots$

Să începem cu $\sqrt{2}$.

Relația $\sqrt{1}^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$ având cunoscute $\sqrt{1}$ și $\sqrt{3}$ conduce la găsirea lui $\sqrt{2}$



$$A_3B_3 = \sqrt{2}$$

Cum găsim restul?

De nevoie (dar cu mare bunăvoie), „descoperim” că orice număr natural se poate scrie ca diferență a două pătrate! Nu mereu pătratele unor numere naturale...

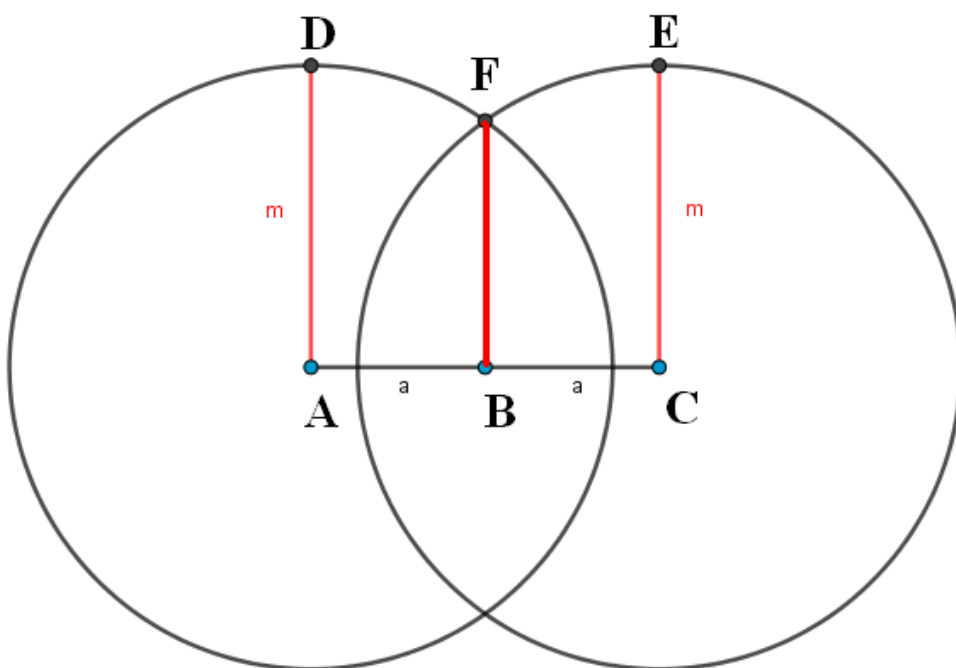
$$n = m^2 - a^2$$

Propun două căi, bazate pe un același tip de construcție:

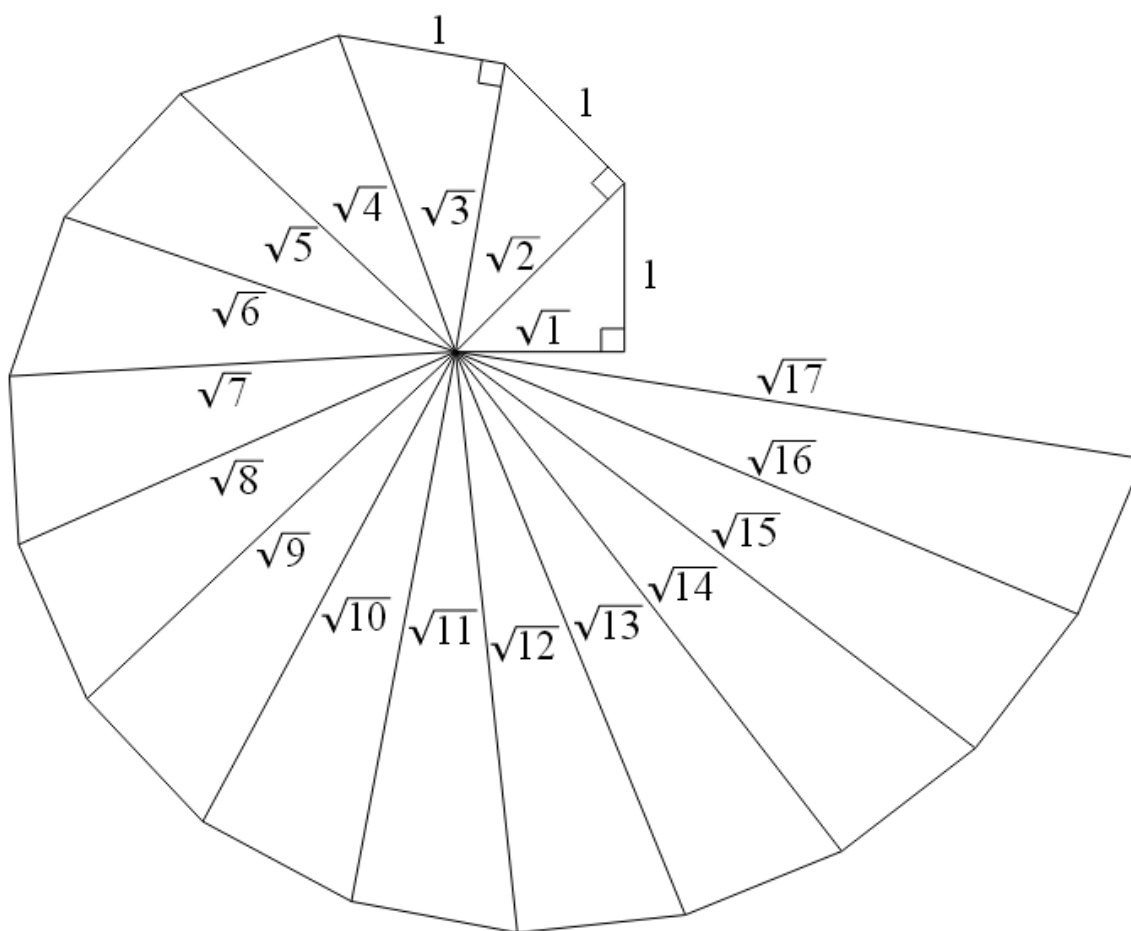
$$n = m^2 - a^2$$

n	m ²	a ²
5	7	2
6	7	1
7		
8	9	1
9		
10	13	3
11	13	2
12	13	1
13	16	3
14	16	2
15	16	1
16		
17	21	4
18	21	3
19	21	2
20	21	1
21		
22	25	3
23	25	2
24	25	1
25		

n	m ²	a ²
5	9	4
6	9	3
7	9	2
8	9	1
9	9	0
10	16	6
11	16	5
12	16	4
13	16	3
14	16	2
15	16	1
16	16	0
17	25	8
18	25	7
19	25	6
20	25	5
21	25	4
22	25	3
23	25	2
24	25	1
25	25	0



Idee: de folosit Spirala lui Theodorus (sau Spirala rădăcinilor pătrate)
în sens invers, printr-un algoritm iterativ.



De unde concluzionăm că:

„Nici măcar problemele cu soluție unică nu au o unică soluție (rezolvare)”.

Nota Bene:

După redactarea materialului o necurată curiozitate mă împinge să caut vreo informație despre acest subiect...

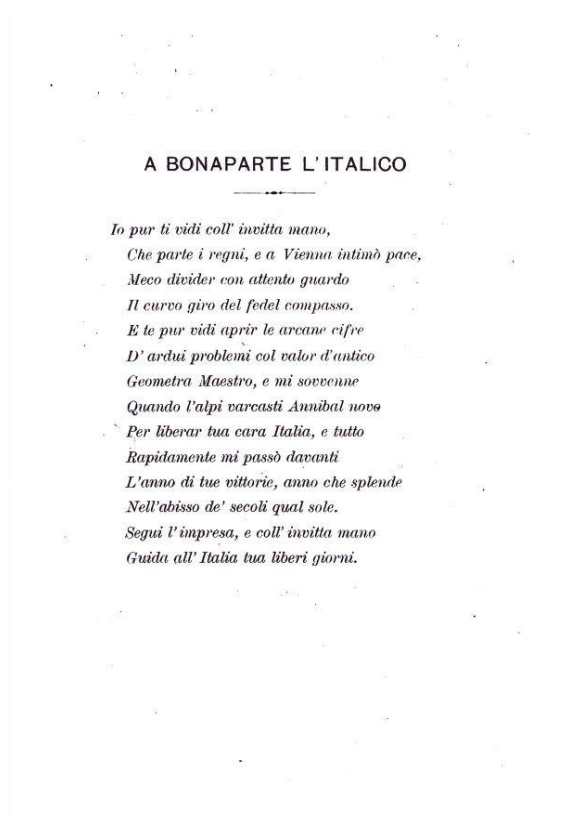
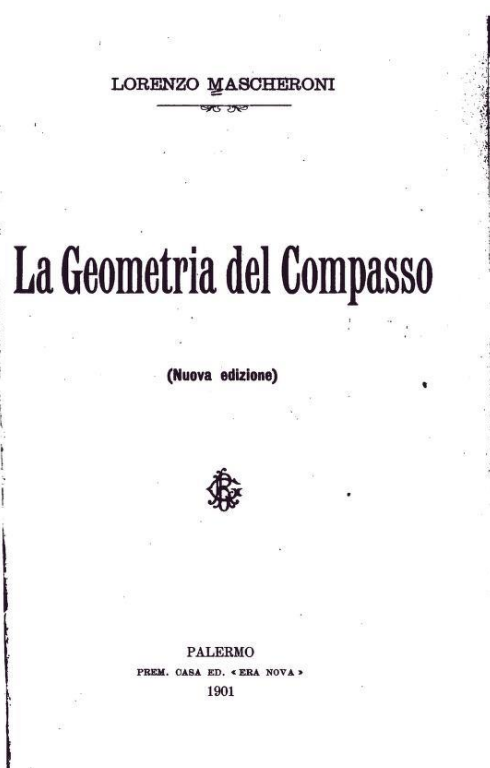
...descopăr că acum 222 de ani...Lorenzo Mascheroni scrie o carte(dedicată lui Napoleon): “La Geometria del Compasso” în care afirmă că orice construcție ce se poate face cu rigla și compasul se poate realiza și doar cu compasul...

Dacă italianul avea internet, ar fi aflat că în 1672 un danez Georg Mohr a scris despre acest aspect in cartea Euclides Danicus...

Aceasta nu mă poate face să mă bucur mai puțin de problema prezentată aici!

Nota Molto Bene: O altă curiozitate pură...iar mă fură...și ce găsim la o căutare pe Google după cuvintele cheie : “ La geometria del compasso”

<https://archive.org/details/LaGeometriaDelCompasso1901>



LIBRO SESTO

DELLE RADICI

100. *Prob.* Trovare facilmente le radici dei numeri interi dall'uno fino al dieci (fig. 43), prendendo per unità la distanza AB .

Sol. Col raggio AB si descriva il cerchio Bd ; si faccia nella sua circonferenza ad $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$. Coi centri B ed E , e col raggio BD si segnino degli archi, che si taglino in a , ed α . Collo stesso raggio BD , e coi centri D e d si segnino due archi, che si taglino in V . Col raggio Aa , e col centro B si tagli la circonferenza in F . Coi centri B ed F , e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in T . Si avrà



$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$

Dim. Si è dimostrato essere $(Aa)^2=2$ (§ 27). Dunque $Aa=\sqrt{2}$. Si è dimostrato essere $BD=\sqrt{3}$ (§ 2). Si ha poi $BE=2=\sqrt{4}$.

Avendo poi i due triangoli BTA , TAF i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $BTA=TAF$ (8, lib. I). Quindi BT parallela ad FA (28, lib. I), e però anche la BT si troverà perpendicolare a BA , come la FA (§ 27) (27, lib. I). Avendo poi il punto A e il punto E la stessa distanza dai punti D e d , così pure il punto B e il punto V ; saranno i quattro punti B , A , E , V sulla stessa retta (§ 13), e sarà $EV=BA$ (§ 14). Sarà dunque $(ET)^2=(TB)^2+(BE)^2$ (47, lib. I) $=(AB)^2+4(AB)^2=5$; quindi $ET=\sqrt{5}$. Istesamente $(aV)^2=(Aa)^2+(AV)^2$. Ma essendo $EV=BA$; è ancora $AV=BE=2AB$; quindi $(AV)^2=4(AB)^2=4$; ed è $(Aa)^2=2$ (§ 27).

6. IMAGINEA UNOR FUNCȚII

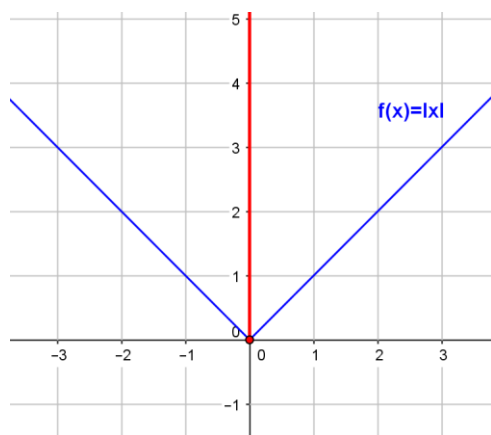
Prof. Balogh Erika

Colegiul Tehnic "C.D.Nenițescu" Baia Mare

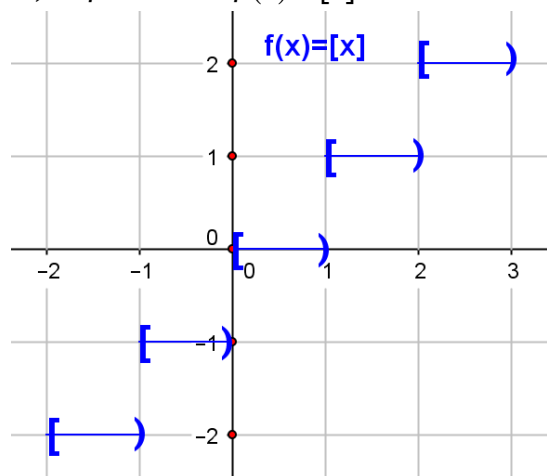
- 1. Determinați Imf pentru următoarele funcții:**
- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$
 - b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$
 - c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$
 - d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + a, a \in \mathbb{R}$
 - e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + a, a \in \mathbb{R}$

Soluția:

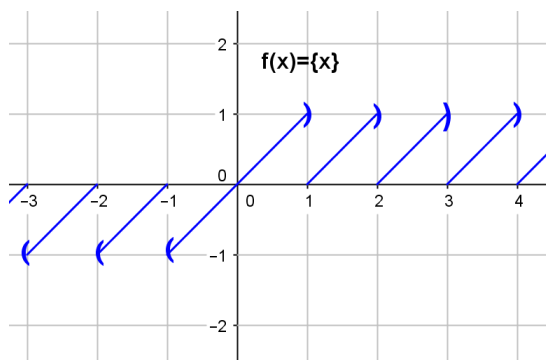
a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

știind proprietatea funcției modul $\Rightarrow \text{Im}f = [0; +\infty)$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$

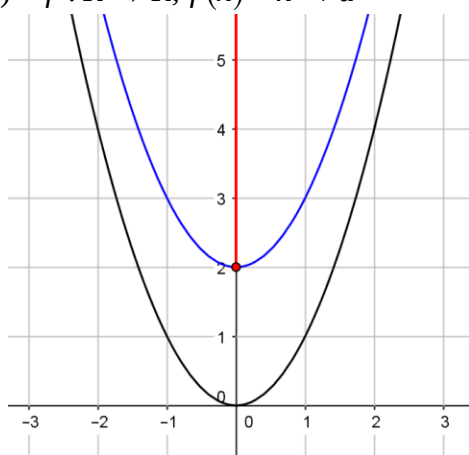
după definiția funcției $\Rightarrow \text{Im}f = \mathbb{Z}$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$



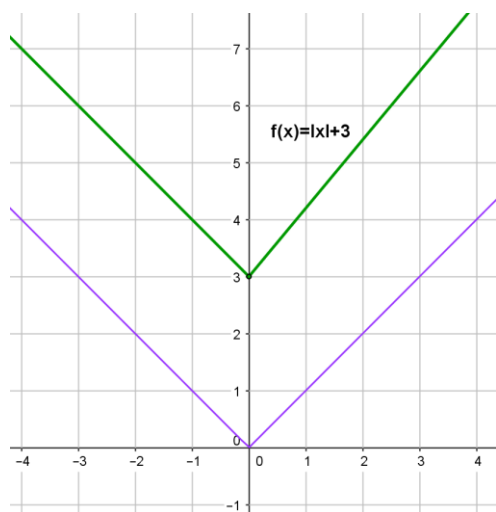
după definiția funcției $\Rightarrow \text{Im}f = (-1;1)$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + a$



știind că $x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Im}f = [a; +\infty)$

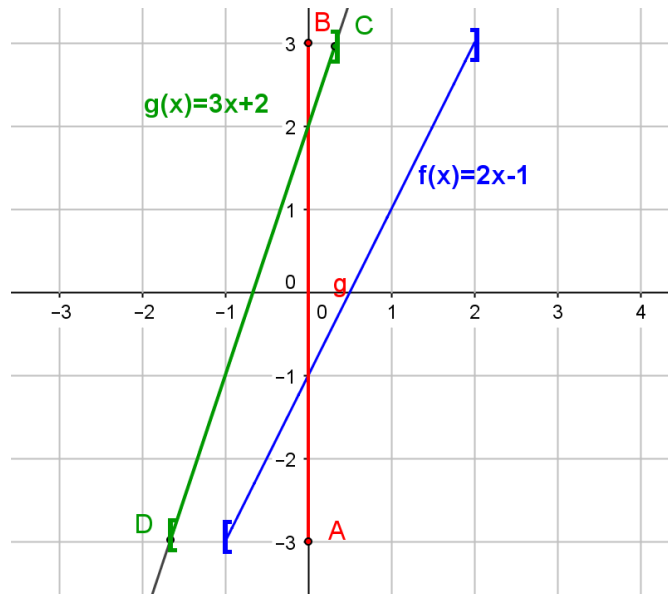
e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + a$



$\text{Im}f = [a; +\infty)$

2. Să se determine valorile lui a și b pentru care funcțiile $f : [-1;2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 2$ au aceeași imagine.

Soluția:

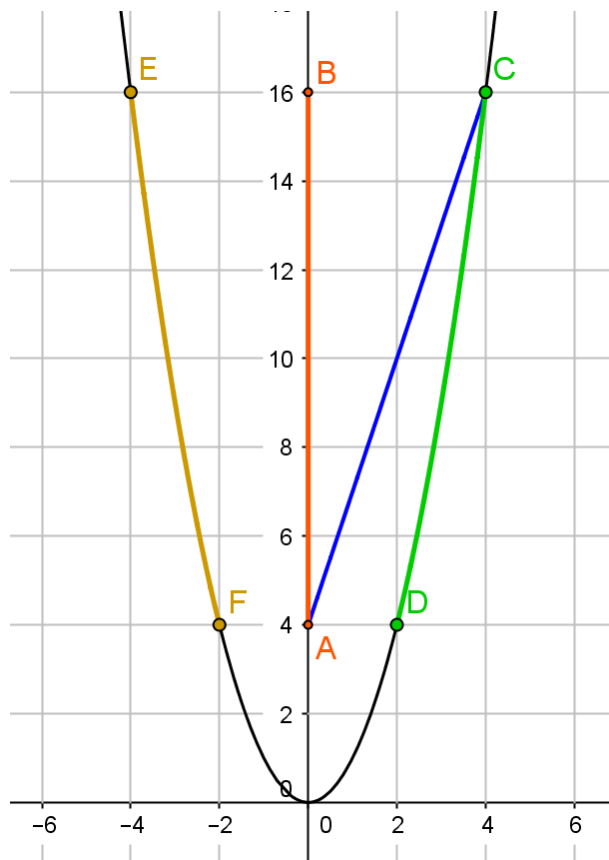


f este o funcție crescătoare $\Rightarrow \text{Im}f = [f(-1); f(2)] = [-3; 3]$
 și g este o funcție crescătoare $\Rightarrow \text{Im}g = [g(a); g(b)] \Rightarrow \text{Im}g = [3a + 2; 3b + 2]$

$$\text{Im}f = \text{Im}g \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2 = -3 \\ 3b + 2 = 3 \end{cases}, \text{rezolvând cele două ecuații} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. Să se determine valorile lui a și b pentru care funcțiile $f : [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4$ și $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ au aceeași imagine.

Soluția:



f este o funcție crescătoare $\Rightarrow \text{Imf} = [f(0); f(4)] = [4; 16]$, $\text{Imf} = \text{Img}$ există două cazuri:

I. g este o funcție crescătoare și $\text{Img} = [4; 16] \Rightarrow a = 2$ și $b = 4$

II. g este o funcție descrescătoare și $\text{Img} = [4; 16] \Rightarrow a = -4$ și $b = -2$

4. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$.

a) determinați mulțimea D, domeniul maxim de definiție a funcției

b) Arătați că $0 < f(x) \leq \frac{4}{3}$

c) Determinați Imf

Soluția:

a) $x^2 - x + 1 > 0$ pentru că $\Delta < 0 \Rightarrow \text{Imf} = \mathbb{R}$

b) din punctual a) $\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - x + 1} > 0$

$$x^2 - x + 1 \geq -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{unde } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

$$x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \quad \text{și} \quad x^2 - x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{în concluzie: } 0 < f(x) \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{c) din b) rezultă } \text{Imf} = \left(0; \frac{4}{3}\right]$$

Generalizare:

$$\text{dacă } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \quad \text{unde } a > 0 \text{ și } \Delta < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{ax^2 + bx + c} \leq -\frac{4a}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \text{Imf} = \left(0; -\frac{4a}{\Delta}\right]$$

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$. Determinați Imf.

Soluția:

$$\text{Introducem notația: } \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} = y, \quad x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = y(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = yx^2 + yx + y$$

$$\Rightarrow x^2(1 - y) - x(y + 3) + 2 - y = 0 \quad (1), \quad \text{știind că domeniul de definiție a lui } f \text{ este } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{ecuația (1) are } \Delta \geq 0$$

Calculăm Δ în funcție de y și obținem relația:

$$\begin{aligned} \Delta &= (y + 3)^2 - 4(1 - y)(2 - y) \\ &= y^2 + 6y + 9 - 4(y^2 - 3y + 2) \\ &= y^2 + 6y + 9 - 4y^2 + 12y - 8 \\ &= -3y^2 + 18y + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Rezolvăm inegalitatea: } -3y^2 + 18y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 18y - 1 \leq 0$$

$$\text{rădăcinile ecuației } 3y^2 - 18y - 1 = 0 \text{ sunt } y_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{336}}{6} = \frac{18 \pm 2\sqrt{84}}{6}$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm 2\sqrt{21}}{3}$$

aplicând tabelul cu semne pentru funcția de gr.II.

$$\Rightarrow y \in \left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3}; \frac{9+2\sqrt{21}}{3} \right], \text{ acest interval obținut reprezintă mulțimea valorilor lui } y \text{ adică}$$

$$\text{Imf} = \left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3}; \frac{9+2\sqrt{21}}{3} \right]$$

6.Fie funcția $f : R - \{1\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$. **Determinați Imf.**

Soluția:

La fel procedăm ca la problema anterioară:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1} &= y \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 &= yx^2 - 2xy + y \\ \Rightarrow x^2(1-y) + x(2y-5) + 6-y &= 0 \\ \Delta &= (2y-5)^2 - 4(1-y)(6-y) \\ &= 4y^2 - 20y + 25 - 4y^2 + 28y - 24 \\ &= 8y + 1 \\ 8y + 1 &\geq 0 \Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{8}; +\infty \right) \\ \text{prin urmare } \text{Imf} &= \left[-\frac{1}{8}; +\infty \right) \end{aligned}$$

7.Fie funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$. **Să se determine Imf.**

Soluția:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x^2 + 1 > 0, \forall x \in R$$

Aplicând inegalitatea cunoscută: $a + \frac{1}{a} \geq 0, \forall a \in R_+$ rezultă:

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Imf} = [2; +\infty)$$

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. **Să se determine Imf.**

Soluția

$$\text{dacă } f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

*caz particular: dacă funcția f este impară, adică $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $f(0) = 0$, atunci:
Imf(0; +∞) și Imf(-∞; 0) vor fi două intervale simetrice față de origine.*

în cazul problemei nr.9. funcția f este impară care se poate verifica ușor.

Mai departe vom demonstra :

$$\text{I. } x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) \in (0; 1)$$

$$\text{II. } f(x) \in (0; 1) \Rightarrow x \in (0; +\infty)$$

$$\text{I. } x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) \in (0; 1)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \frac{x^2+x+1 - x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} < 1 \Rightarrow 2x < \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} \quad \text{radicand la puterea a}$$

doua

$$\Rightarrow 2x^2 - 2 < 2\sqrt{(x^2+1)^2 - x^2} \Rightarrow x^2 - 1 < \sqrt{(x^2+1)^2 - x^2}, \quad x^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 < x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 > 0 \quad \text{care este adevarată}$$

în concluzie $f(x) \in (0; 1)$

$$\text{II. } f(x) \in (0; 1) \Rightarrow x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Dacă } f(x) \in (0; 1) \Rightarrow \exists x \in (0; +\infty)$$

$$\text{notăm } f(x) = y \text{ adică } \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1 - 2\sqrt{(x^2+1)^2 - x^2} + x^2-x+1 = y^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 - 2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2} = y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 1) - y^2 = 2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2} \quad \text{radicand la pătrat și aranjând egalitatea}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x^2y^2 = 4y^2 - y^4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(1 - y^2) = y^2(4 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = \frac{y^2(4 - y^2)}{1 - y^2} \quad \text{și } y \in (0;1) \Rightarrow x = y\sqrt{\frac{4 - y^2}{1 - y^2}} \Rightarrow x > 0$$

Prin urmare $\text{Imf}(0; +\infty) = (0;1)$

ținând seama că $f(0) = 0$ și f este o funcție impară $\Rightarrow \text{Imf} = (-1;1)$

Bibliografia:

- 1.C.Năstăsescu;Matematică Algebră;Manual pentru clasa a IX-a;Editura Didactică și Pedagogică București;1980
- 2.Ion D.Ion;ALGEBRĂ Exerciții și probleme pentru clasa a IX-a și a X-a;Editura Universal Plan București;1980
- 3.A. Cucurezeanu;Exerciții și probleme de ALGEBRĂ pentru Concursuri și Olimpiade Școlare; Tipografia Universul Constanța;1990

7. PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

*Prof. Postolea Georgel**Liceul Teoretic Constantin Angelescu Ianca, judetul Braila*

Problema 1 Să se demonstreze inegalitatea : $\frac{2018}{1 \cdot 2} + \frac{2018}{2 \cdot 4} + \frac{2018}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{2018}{1007 \cdot 2014} < \frac{2013 \cdot 2018}{2014}$

Soluție: înmulțind inegalitatea dată cu $\frac{2}{2018} > 0$ obținem :/

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1007^2} < \frac{2013}{1007}$ folosim inegalitatea $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}$, $n > 1$ obținem:

$S < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1006 \cdot 1007} - \frac{1}{1007}$ deci $S < \frac{2013}{1007}$

Problema 2 Fie ABC un triunghi echilateral de latură a , M un punct oarecare situat în interiorul său și G centrul de greutate al triunghiului.

Notăm cu s_1 -suma distanțelor de la M la cele trei laturi ale triunghiului

și cu $s_2(M)$ -suma distanțelor de la M la cele trei vârfuri ale triunghiului

a) arătați că $\frac{s_1}{s_2(M)} < 1$

b) pentru $a=6$ cm și $M=G$ calculați valoarea raportului $\frac{s_1}{s_2(M)}$

Soluție:

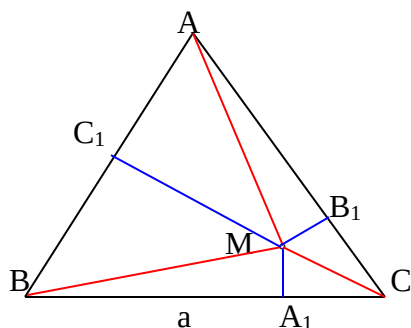


Fig 1.

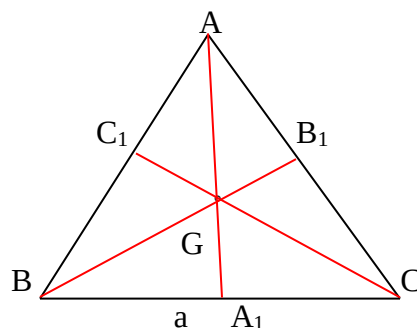


Fig 2.

a) folosim Fig 1.

$$\left. \begin{array}{l} MA_1 \perp BC \\ MB_1 \perp AC \\ MC_1 \perp AB \end{array} \right\}$$

$$MB_1 \perp AC \Rightarrow s_1 = MA_1 + MB_1 + MC_1 \quad s_2(M) = MC + MA + MB$$

$$MC_1 \perp AB$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle MA_1C \text{ (dreptunghic în } A_1) : MA_1 < MC \\ \text{În } \triangle MB_1A \text{ (dreptunghic în } B_1) : MB_1 < MA \\ \text{În } \triangle MC_1B \text{ (dreptunghic în } C_1) : MC_1 < MB \end{array} \right\} \Rightarrow s_1 < s_2(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s_1}{s_2(M)} < 1$$

b) folosim Fig 2.

$$s_1 = C_1G + GA_1 + B_1G = 3 \cdot \frac{1}{3}h = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm unde } h = \text{înălțimea triunghiului}$$

$$s_2(M) = GA + GB + GC = 3 \cdot \frac{2}{3}h = 2h = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

(pentru calculul celor două sume s-a folosit faptul că G se află la două treimi de vârf și la o treime de bază)

$$\Rightarrow \frac{s_1}{s_2(M)} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Problema 3 Se dau sumele :

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2015$$

$$S_2 = 2016 + 2010 + 2008 + \dots + 2$$

Fără a calcula cele 2 sume

a) Comparati sumele si aflati diferenta lor 3,5p

b) Stabiliti paritatea numarului $n = S_1 + S_2 + 2017$. 3,5p

Solutie: a) se observă că S_1 conține primele 1008 numere impare iar S_2 conține primele 1008 numere pare. Fiecare număr par este mai mare decât numărul impar precedent lui cu 1 adică $2-1=4-3=\dots=2016-2015=1$ $\Rightarrow S_2 > S_1$ și $S_2 - S_1 = 1008$ (fiecare număr par aduce o diferență de 1 deci cele 1008 numere pare din S_2 aduce o diferență de 1008) $\Rightarrow$

b) numărul n conține 1009 numere impare , deci n este impar.

Problema 4 Demonstrați că nu se poate obține suma $S=100$ care să fie formată numai cu ajutorul cifrelor 1,2,3,...,9 și operatorul „+” și care să respecte următoarele 2 reguli:

r_1) toate cifrele trebuie folosite cel mult o dată și obligatoriu toate

r_2) suma poate conține și numere de două cifre formate din cifrele date, dar respectând r_1)

Soluție:

-observăm că $1+2+3+\dots+9=(9 \cdot 10):2=45$ pentru a ajunge la 100 mai avem de recuperat 55;

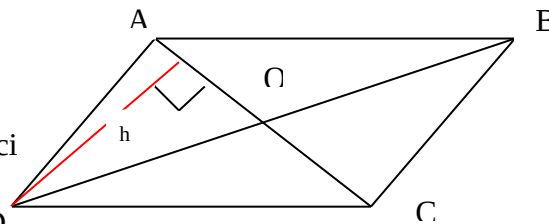
-această recuperare nu se poate face decât dacă formăm numere de două cifre însă prin acest artificiu se pierde suma cifrelor folosite(din 2 și 3 se obține 23 dar se pierde $2+3=5$, deci recuperarea este $23-5=18$);

- oricare număr $\overline{ab}=10a+b$ dar $10a+b-(a+b)=9a$ adică prin introducerea în sumă a unui număr de 2 cifre oricare ar fi el se recuperează un multiplu de 9 .Cum 55 nu este multiplu de 9 recuperarea nu se poate face deci nu se poate obține 100.

Problema 5 Arătați că diagonalele unui paralelogram împart paralelogramul dat în 4 triunghiuri de arie egală.

Soluție: cele 4 triunghiuri sunt: $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$
deoarece $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (L.L.L) și $\triangle BOC \equiv \triangle DOA$ (L.L.L) atunci este clar că triunghiurile „opuse” au aceeași arie mai rămâne de demonstrat că $\triangle BOC$ și $\triangle DOA$ au aceeași arie.

Din vârful D se duce înălțimea h pe AC. Observăm că h este înălțime atât pentru $\triangle DOA$ cât și pentru $\triangle COD$.



$$\left. \begin{array}{l} S_{\triangle DOA} = (AO \cdot h):2 \\ S_{\triangle COD} = (OC \cdot h):2 \\ \text{dar } AO \equiv OC \text{ (ip)} \end{array} \right\} \implies S_{\triangle DOA} \equiv S_{\triangle COD} \text{ c.c.t.d. (analog pentru } \triangle BOC \text{ și } \triangle AOB)$$

Problema 6

Calculați suma: $S=1+2+4+5+6+7+9+10+11+12+\dots+2014+2015+2016+2017$

Soluție: Notăm cu $S_1=1+2+3+\dots+2018$

$$S_2=3+8+13+\dots+2018$$

$$S=S_1-S_2=(2018 \cdot 2019):2-[(3+2018) \cdot 404]:2=1628929$$

8. Probleme propuse pentru gimnaziu

*Probleme propuse de : prof. Gheorghică Adrian Ștefan
Școala Gimnazială “Ion Creangă”, com I.C Brătianu
și Școala Gimnazială “Elena Cuza”, Galați*

1. Problemă propusă pentru cls aV-a

Să se determine cel mai mic și cel mai mare pătrat perfect de patru cifre n de patru cifre pentru care:

$$a = 2011^{2019} + 2013^{2017} + 2015^{2015} + 2017^{2013} + 2019^{2011} + n : 10$$

Rezolvare :

$$U(2011^{2019}) = U(1^{2019}) = 1.$$

$$U(2013^{2017}) = U(3^{2017}) = 3, \text{ pentru că restul împărțirii lui } 2017 \text{ la } 4 \text{ este } 1.$$

$$U(2015^{2015}) = U(5^{2015}) = 5.$$

$$U(2017^{2013}) = U(7^{2013}) = 7, \text{ pentru că restul împărțirii lui } 2013 \text{ la } 4 \text{ este } 1.$$

$$U(2019^{2011}) = U(9^{2011}) = 9, \text{ pentru că restul împărțirii lui } 2019 \text{ la } 2 \text{ este } 1.$$

$$U(a) = U(U(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + U(n)) = U(5 + U(n))$$

$$a : 10 \rightarrow U(n) = 5.$$

$$n = k^2 \rightarrow 30 < k < 100$$

$$U(n) = 5 \rightarrow U(k) = 5 \rightarrow k_{\min} = 35 \rightarrow n_{\min} = 1225.$$

$$k_{\max} = 95 \rightarrow n_{\max} = 9025.$$

2. Problemă propusă pentru cls aV-a

Fie n un număr natural impar.

Dacă a, b, c, d sunt numere prime consecutive, aflați valoarea lui n .

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$$

Rezolvare:

Presupunem $a \neq 2 \Rightarrow a, b, c, d$ numere impare $\Rightarrow a^2, b^2, c^2, d^2$ numere impare

Așadar putem scrie: $a^2 = 2 \cdot m_1 + 1$, $b^2 = 2 \cdot m_2 + 1$, $c^2 = 2 \cdot m_3 + 1$,

$d^2 = 2 \cdot m_4 + 1$, cu $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}$

Prin calcul obținem :

$$2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + 4 = 2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 2) = n = \text{par}, \quad \text{Ceea}$$

denotă o contradicție, pentru că din ipoteză cunoaștem că n este număr impar.

Presupunerea fiind falsă $\Rightarrow a = 2$, fiind singurul număr prim par $\Rightarrow b = 3$, $c = 5$ și $d = 7$.

Prin calcul obținem $n = 87$.

3. Problemă propusă pentru cls aVI-a

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât $3x - 8$, 12 și 13 sunt laturile unui triunghi exprimate în aceeași unitate de măsură, aflați valorile pe care le poate avea x .

Rezolvare:

În orice triunghi suma lungimilor a două laturi va fi mai mare decât lungimea celei de a treia latură.

Cazul I: $3x - 8 < 12 + 13$

$$3x < 33 \rightarrow x < 11$$

Cazul II: $3x - 8 + 12 > 13 \rightarrow x > 3$

Cazul III: $3x - 8 + 13 > 12 \rightarrow x > \frac{17}{3}$

$$x \in \mathbb{Z}, \frac{17}{3} < x < 11 \rightarrow x \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

4. Problemă propusă pentru cls aVI-a

Dacă $4 \mid x$ și $25 \mid y$, determină restul împărțirii numărului : $p = x \cdot y + 2019$ la 100.

Rezolvare

Dacă

$$\begin{aligned}
 4 \mid x \text{ și } 25 \mid y &\Rightarrow 4 \cdot 25 \mid x \cdot y \text{ (conform proprietăților relației de divizibilitate)} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x \cdot y \in M_{100} \Rightarrow x \cdot y = 100 \cdot k, \text{ unde } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \\
 \Rightarrow p = 100 \cdot k + 2019 &= \\
 = 100 \cdot k + 2000 + 19 &= 100 \cdot (k + 20) + 19
 \end{aligned}$$

În concluzie, restul împărțirii lui p la 2019 este 19.

5. Problemă propusă pentru cls aVII-a

Arătați că : $\frac{2018}{2019} - \frac{2019}{2020} < 0$

Rezolvare:

$$\frac{2018}{2019} < \frac{2019}{2020}$$

$$2018 \cdot 2020 < 2019^2$$

$$(2019 - 1)(2019 + 1) < 2019^2$$

$$2019^2 - 1 < 2019^2 \text{ adevărat.}$$

6. Problemă propusă pentru cls aVII-a

Să se arate că numărul $\alpha = \frac{2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019}}{2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019} + \sqrt{2018 \cdot 2019}} \in \left(\frac{2019^2}{2018}, 2019^2 \right)$

Rezolvare :

Amplificăm fracția cu : $2019 + \sqrt{2018 \cdot 2019} + \sqrt{2018 \cdot 2019}$ și obținem :

$$\begin{aligned}
 &\frac{(2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019})(2019 + \sqrt{2018 \cdot 2019} + \sqrt{2018 \cdot 2019})}{2019^2 - 2018 \cdot 2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019}} = \\
 &= \frac{(2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019})(2019 + \sqrt{2018 \cdot 2019} + \sqrt{2018 \cdot 2019})}{2019 - \sqrt{2018 \cdot 2019}} = \\
 &= 2019 + \sqrt{2018 \cdot 2019}
 \end{aligned}$$

$$\frac{2019^2}{2018} < 2019 + \sqrt{2018 \cdot 2019} < 2019^2 - 2019$$

$$\frac{2019^2 - 2018 \cdot 2019}{2018} < \sqrt{2018 \cdot 2019} < 2019 \cdot (2019 - 1)$$

$$\frac{2019}{2018} < \sqrt{2018 \cdot 2019} < 2018 \cdot 2019$$

$$\frac{2019}{2018} < 2018 < \sqrt{2018 \cdot 2019} < 2019 < 2018 \cdot 2019$$

7. Problemă propusă pentru cls aVII-a

Fie $S = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{2019}$. Arătați că : $0,99 < S < 100$.

Rezolvare :

$$S < \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_{\text{de 2000 ori}} = \frac{2000}{20} = 100.$$

$$S > \underbrace{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \dots + \frac{1}{2019}}_{\text{de 2000 ori}} = \frac{2000}{2019} \cong 0,99$$

Din relațiile de mai sus deducem că $0,99 < S < 100$.

Observație: Se poate încerca și demonstrarea relației $1 < S < 100$.

8. Problemă propusă pentru cls aVII-a

Demonstrați că într-un trapez dreptunghic ortodiagonal, lungimea înălțimii este egală cu media geometrică a lungimilor bazelor sale.

Rezolvare:

Se consideră trapezul dreptunghic ABCD cu $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $AB > CD$, $AB \parallel CD$.

Vom demonstra că triunghiurile ADB și DCA sunt asemenea.

$$\angle ADB \equiv \angle ACD (=90^\circ - m(\angle ODC))$$

sau

$$\left. \begin{aligned} m(\angle ADB) &= m(\angle ACD) = 90^\circ - m(\angle CDO) = \\ &= 90^\circ - m(\angle ABO) \quad [\angle CDO \equiv \angle ABO \text{ alt. int.}] \\ \rightarrow \frac{AD}{DC} &= \frac{AB}{DA} \rightarrow AD^2 = AB \cdot CD \\ \angle DAB &\equiv \angle ADC (=90^\circ) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta DCA$$

9. STUDIU ASUPRA UNEI METODE NUMERICE DE DETERMINARE SIMULTANĂ A RĂDĂCINILOR UNUI POLINOM

Prof. COZMA CIPRIAN IOAN
Liceul Tehnologic “Dr. F. Ulmeanu” , Ulmeni

În acest material îmi propun să fac o analiză a unei metode numerice și anume metoda lui Newton pentru aproximarea rădăcinilor ecuațiilor scalare și aplicații ale acestora la aproximarea simultană a rădăcinilor polinoamelor.

Problema rezolvării ecuațiilor polinomiale a stârnit un mare interes din cele mai vechi timpuri. Studiul a numeroase fenomene din tehnică, economie, științele naturii se reduce, în majoritatea cazurilor, la rezolvarea unor ecuații polinomiale.

În general ecuațiile polinomiale nu dispun de metode exacte de rezolvare, de unde importanța deosebită pe care o are metoda de aproximare prezentată în cadrul acestui material .

Metoda lui Newton

1. Construcția metodei

Fie $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in [a,b]$. Metoda lui Newton se obține în modul cel mai natural printr-un proces de liniarizare. Dezvoltăm funcția f în serie Taylor și reținem primii doi termeni, deci:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0).$$

În locul ecuației $f(x)=0$ se consideră ecuația liniară:
(1)

$$f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) = 0,$$

a cărei soluție este

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{(1)}(x_0)}$$

Interpretarea geometrică a lui x_1 este bine cunoscută: x_1 reprezintă abscisa punctului de intersecție a tangentei duse la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, cu axa Ox .

Punând acum $x_0 = x_k$ și $x_1 = x_{k+1}$, se obține următorul proces iterativ clasic, denumit metoda lui Newton (uneori Newton- Raphson):

(2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ca și în cazul metodelor de interpolare, din faptul că (2) aproximează funcția $f(x)=0$, în vecinătatea punctului x_0 , nu rezultă că x_1 aproximează soluția acestei ecuații. De asemenea, este necesară analiza existenței șirului $\{x_0\}$ dacă nu se face ipoteza $f'(x) \neq 0$ pe $[a, b]$.

Dacă în (2) se înlocuiește $f'(x_k)$ cu $f'(x_0)$,
obține metoda lui Newton simplificată:

(3)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

în care derivata se calculează numai în punctul x_0 . Se poate de asemenea considera un proces de tip Newton în care calculul derivatei se face după un anumit număr de pași:

(4)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_{p(k)})}$$

unde $p(k)$ este un număr întreg mai mic sau egal cu k .

În particular, dacă $p(k)=k$, se obține metoda lui Newton iar dacă $p(k)=0$, se obține metoda lui Newton simplificată.

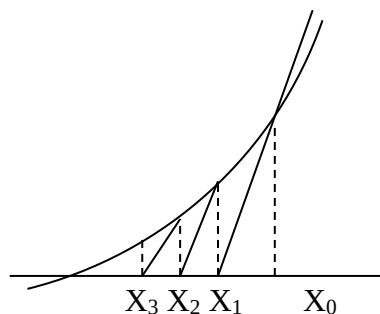
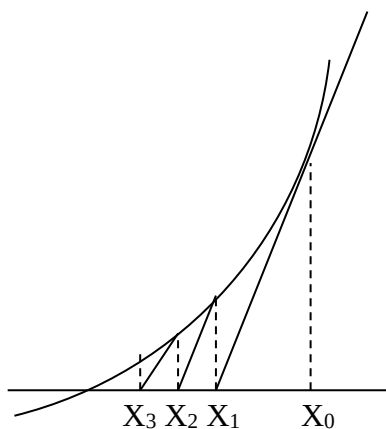
Un proces iterativ, care generalizează metoda lui Newton simplificată, este metoda liniilor paralele:

(5)

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k),$$

unde λ este o constantă care aproximează $1/f'(x_0)$.

Reprezentarea grafică a metodei lui Newton simplificată și a metodei liniilor paralele sunt date în figura 1 a și b respectiv.



a

b

Figura 1

Menționăm și metoda lui Newton discretizată în care derivata se înlocuiește cu diferența divizată de ordinul întâi:

(6)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}} \right]^{-1} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

Această metodă coincide cu metoda secantei.

Să aplicăm această metodă polinomului

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

Știm că acest polinom admite o rădăcină simplă α_1 , cuprinsă între marginile $1 < \alpha_1 < 2$. Se poate spune dinainte că aceste margini sunt prea largi ca metoda lui Newton combinată cu metoda interpolării liniare aplicate să dea un rezultat prea bun. Să le aplicăm însă pentru a avea un exemplu care nu necesită calcule complicate.

Aplicăm pentru început metoda lui Newton

$$f(1) = -4 \quad f(2) = 39.$$

Alegem $x_0 = 2$.

Ținând seama de faptul că $f^{(1)}(2) = 109$, obținem:

$$x_1 = 2 - \frac{39}{109} = \frac{179}{109} = 1,64...$$

Metoda lui Newton în multe cazuri se aplică în combinație cu metoda interpolării liniare.

Metoda interpolării liniare constă în a lua ca valoare aproximativă a rădăcinii α numărul c , care împarte intervalul (a, b) în părți proporționale valorilor absolute ale numerelor $f(a)$ și $f(b)$, adică:

(7)

$$\frac{c - a}{b - c} = - \frac{f(a)}{f(b)}$$

semnul minus din membrul al doilea fiind datorat faptului că $f(a)$ și $f(b)$ au semne diferite. De aici rezultă:

(8)

$$c = \frac{b \times f(a) - a \times f(b)}{f(a) - f(b)}$$

Utilizand formula (8) obținem:

$$c = \frac{2 \times (-4) - 1 \times 39}{-4 - 39} = \frac{47}{43} = 1,09...$$

și, prin urmare rădăcina α_1 este cuprinsă între marginile $1,09 < \alpha_1 < 1,65$.

Am obținut o îngustare prea neînsemnată a marginilor pentru a putea considera acest rezultat ca satisfăcător. Desigur, s-ar putea aplica încă o dată metodele noastre pentru noile limite. Este indicat însă să găsim de la început pentru α_1 limite destul de apropiate, spre exemplu, cu o precizie de 0,1 sau chiar 0,01 și să aplicăm aceste metode numai după aceasta. Aceasta ar duce dintr-o dată desigur la faptul că toate calculele devin foarte complicate, dar trebuie să ajungem la aceasta în rezolvarea problemelor concrete, necesitând o cunoaștere destul de exactă a rădăcinilor polinomului.

$$\begin{aligned} \text{Deoarece} \quad & f(1,3) = -0,13987 ; \\ & f(1,31) = 0,0662923851 ; \end{aligned}$$

avem

$$1,3 < \alpha_1 < 1,31 ;$$

adică am găsit valoarea rădăcinii α_1 cu o aproximație de 0,01. Să aplicăm acum acestor noi limite metoda interpolării liniare:

$$c = \frac{1,31 \times (-0,13987) - 1,3 \times 0,0662923851}{-0,13987 - 0,0662923851} = \frac{0,26940980063}{0,2061623851} = 1,30678...$$

Să aplicăm pentru aceleași margini metoda lui Newton, luând acum $x_0 = 1,31$. Deoarece $f^{(1)}(1,31) = 20,99822405$, avem:

$$x_1 = 1,31 - \frac{0,0662923851}{20,99822405} = \frac{27,3496811204}{20,99822405} = 1,30683...$$

Așadar:

$$1,30678 < \alpha_1 < 1,30684 ;$$

și deci, luând $\alpha_1 = 1,30681$; facem o eroare mai mică decât 0,00003.

2. Aproximarea simultană a rădăcinilor ecuațiilor polinomiale prin metoda lui Newton

Considerăm un polinom de gradul $n \geq 3$,

$$(9) \quad f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

cu rădăcinile reale sau complexe simple $x_1, x_2, \dots, x_n$. Fie $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$ diferite aproximații apropiat rezonabile ale acestor rădăcini și fie

$$Q(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^k)$$

Atunci, pentru $x = x_i^k$, $i=1, 2, \dots, n$ vom avea:

$$Q^{(1)}(x) = \prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)$$

Introducând notația $\Delta_i = -f(x_i^k) / Q'(x_i^k)$ se obține următoarea metodă de determinare simultană a rădăcinilor unui polinom $x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta_i$, $i=1, 2, \dots, n$ sau sub forma:

(10)

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f(x_i^k)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)}$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad ; \quad k=0, 1, \dots$$

unde x_i^{k+1} este noua aproximare a rădăcinii x_i .

Această metodă este un rezultat clasic introdus de către Weierstrass, metodă a cărei convergență este pătratică.

În continuare vom prezenta un program Pascal care realizează aproximarea simultană a rădăcinilor reale ale unui polinom de grad maxim 50 în 50 de pași iterativi cu o precizie de 12 zecimale exacte. Facem precizarea că iterațiile inițiale pe care le dăm trebuie să fie diferite două câte două.

Valorile reale obținute pentru rădăcinile polinomului considerat au o precizie de 12 zecimale exacte.

Pentru realizarea acestui program am utilizat formula de tip Newton

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f(x_i^k)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i^k - x_j^k)}$$

Programul ne oferă și posibilitatea de a analiza precizia (eroarea) aproximărilor obținute. Aceasta se calculează ca și diferență dintre valoarea obținută la iterația $k=50$ și $k=49$.

În cazul în care polinomul are și rădăcini complexe cu partea imaginară diferită de zero aproximațiile obținute pentru aceste rădăcini diverg către valori cu erori mari.

Prezentăm mai jos programul folosit:

```

program sesiune;
uses crt;
label et1;
var n,i,k,j,z: integer;
    a:array[0..50] of double;
    x:array[1..50, 0..50] of double;
    produs:array[1..50, 0..50] of double;

function putere(c:real;j:integer): double;
var i:integer ;
    p:double;
begin
    p:=1;
    for i:=1 to j do
        p:=p*c;
    putere:=p;
end;

function put(c:integer;j:integer): double;
var i:integer;
    p:integer;
begin
    p:=1;
    for i:=1 to j do
        p:=p*c;
    put:=p;
end;

function f(b:double): double;
var i:integer;
    ft:double;
begin
    ft:=a[0];

```

```

        for i:=1 to n do
            ft:=ft+a[i]*putere(b,i);
        f:=ft;
    end ;
begin
    clrscr;
    write('Dați gradul polinomului: ');

    readln(n);
    writeln('Dați coeficienții polinomului: ');
    for i:=1 downto 0 do
        begin
            write('Dați a( , i, ') = ');
            readln(a[i]);
        end;
    writeln('Dați iterațiile inițiale: ');
    et1: for i:=1 to n do
        begin
            write('x[ , i, ', 0] = ');
            readln(x[i, 0]);
        end;
    writeln;
    for i:=1 to n do
        for k:=0 to 50 do
            produs[i, k]:=1;
        for k:=0 to 49 do
            begin
                for z:=1 to n do
                    for j:=1 to n do
                        if z<>j then

                            begin
                                produs[z,k]:=produs[z,k]*(x[z,k]-x[j,k]);

                                if produs[z,k]=0 then begin
                                    clrscr;
                                    writeln('Dați alte iterații      inițiale: ');
                                    goto et1;
                                end;
                            end;
            end;
        end;
        for i:=1 to n do
            x[i,k+1]:=x[i,k]-f(x[i,k])/produs[i,k];
    end;
    for i:=1 to n do
        begin

```

```

clrscr;
writeln('    Pasul ', Valoarea iterației');
writeln('-----');
for k:=0 to 50 do
begin

writeln('    k=',k:2,'    ', 'x['i,']= ', x[i,k]:12:12);
if (k=20)or(k=50) then begin
    readln;
    gotoxy(0,0);
    clrscr;
    writeln(' Pasul ', Valoarea iterației ');
    writeln('-----')
end;
end;clrscr;
writeln;writeln;
writeln('    CONCLUZII: ');
writeln;writeln;
for i:=1 to n do
begin
    writeln;
    if abs(x[i,k]-x[i,k-1])<0.001 then
        writeln('x['i,'] converge către ',
        cu precizia
        E= ',abs(x[i,k]-x[i,k-1]):12:12);

    else writeln(' x['i,'] divergent cu eroarea
        E= ', abs(x[i,k]-x[i,k-1]));

if (imod10=0) then begin
    readln;
    clrscr;
end;
end;
readln;
end.

```

Prezentăm în continuare două exemple.

Exemplul 1

$$x^6 - 9x^4 + 26x^2 - 24 = 0$$

Rădăcina	Valoarea aproximației obținute	Precizia	Pasul de la care converge
x[1]	-1.414213562372	E=0.000000000000	K=19
x[2]	1.414213562374	E=0.000000000002	K=19
x[3]	2.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[4]	1.732050807569	E=0.000000000001	K=17
x[5]	-1.732050807570	E=0.000000000001	K=16
x[6]	-2.000000000000	E=0.000000000000	K=15

Exemplul 2

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Rădăcina	Valoarea aproximației obținute	Precizia	Pasul de la care converge
x[1]	-1.000000000000	E=0.000000000000	K=1
x[2]	1.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[3]	2.000000000000	E=0.000000000000	K=0
x[4]	3.000000000000	E=0.000000000000	K=0

Bibliografie

- [1] **A.G.Kuros**, *Curs de algebră superioară*, Editura Tehnică (1955).
- [2] **A.M.Ostrowski**, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Second Edition, Academic Press, New York, 1966.
- [3] **Berinde V.**, *Remarks on the Convergence of the Newton-Raphson Method*, Rev. Anal. Numér, Théor. Approx., 24 (1995) no. 1-2, pp. 15-21.
- [4] **F.J.Traub**, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [5] **Gh. Coman**, *Some Practical Approximation Methods for Nonlinear Equations*, Rev. Anal. Numér, Théor. Approx., 11 (1982) no. 1-2, pp. 41-48.

- [6] **Gh. Coman**, *Some Efficient Methods for Nonlinear Equations*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1985, pp. 53-58.
- [7] **Gh. Coman**, *Optimal Algorithms for the Solution of Nonlinear Equation with Regard to the Efficiency*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, XXXII (1987) no. 3, pp. 46-52.
- [8] **J.M.Ortega** and **W.C.Rheinboldt**, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [9] **Măruşter Şt.**, *Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor neliniare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.
- [10] **Păvăloiu Ion**, *On the Efficiency of the Computations for Approximating the Solution of Equations*, Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare, Seria B, Fascicola Matematică- Informatică, volumul XIV, Nr. 1, 1998, pp. 59-65.
- [11] **Păvăloiu Ion**, *Optimal Algorithms Concerning the Solving of Equations by Interpolation. Research on the Theory of Allure, Approximation, Convexity and Optimization*, Editura Srima, Cluj-Napoca, 1999.
- [12] **Păvăloiu Ion**, *Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare*, Editura Dacia, 1981.
- [13] **Sendov. Bl., A. Andreev, N. Kjurkchiev**, *Numerical Solution of Polynomial Equations*, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences, *Handbook of Numerical Analysis*, vol. III, Sofia, 1994.

10. DRUMURI MINIME ÎNTRE DOUĂ PUNCTE

Prof. Stan Ilie³

Acest subiect l-am mai abordat în Revista Electronică MateInfo.ro decembrie 2016, ianuarie 2017, martie 2017, aprilie 2017 ca drumuri minime între puncte, drepte, plane.

Mi-a atras atenția însă o problemă:

Drumul cel mai scurt între orașele A și B

Matematica altfel

A

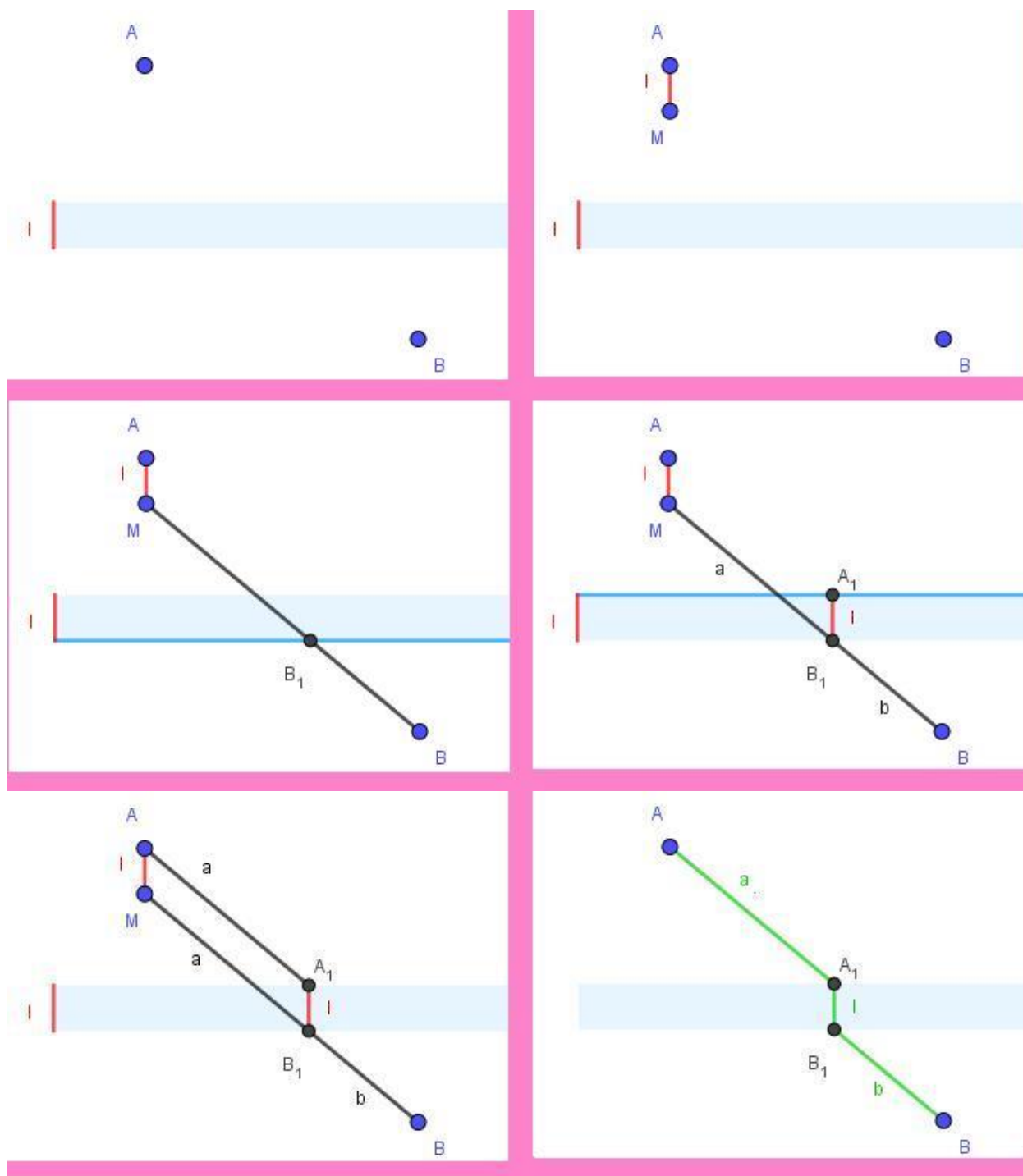
Râul ce separă cele două orașe A și B.

B

Râul trebuie străbătut și el minimal...așadar perpendicular!

³ Liceul Tehnologic “Anghel Saligny”, Roșiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

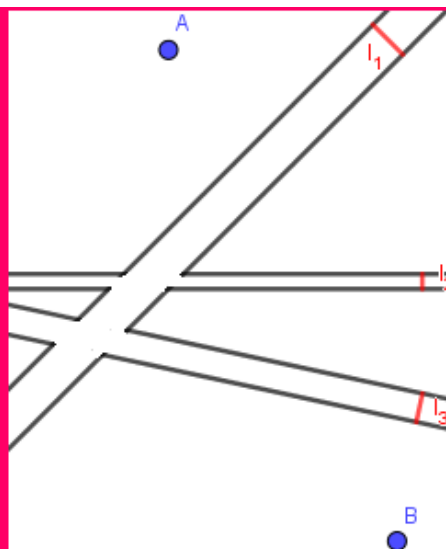
În spiritul ciclului “Ilustrații fără explicații”, urmează construcția traseului:



De la rezolvare la generalizare ... nu e pas prea mare!

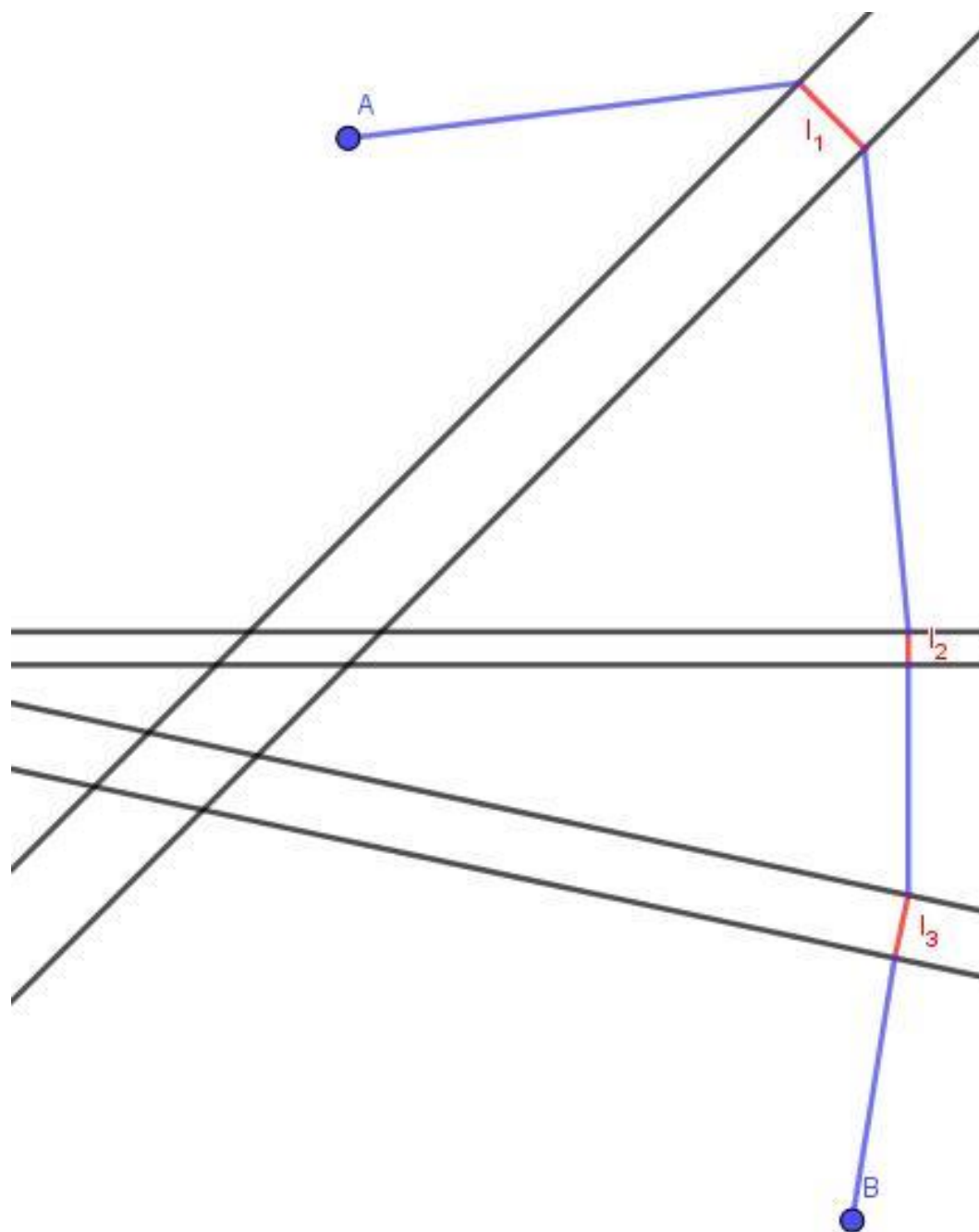
ANUNȚ

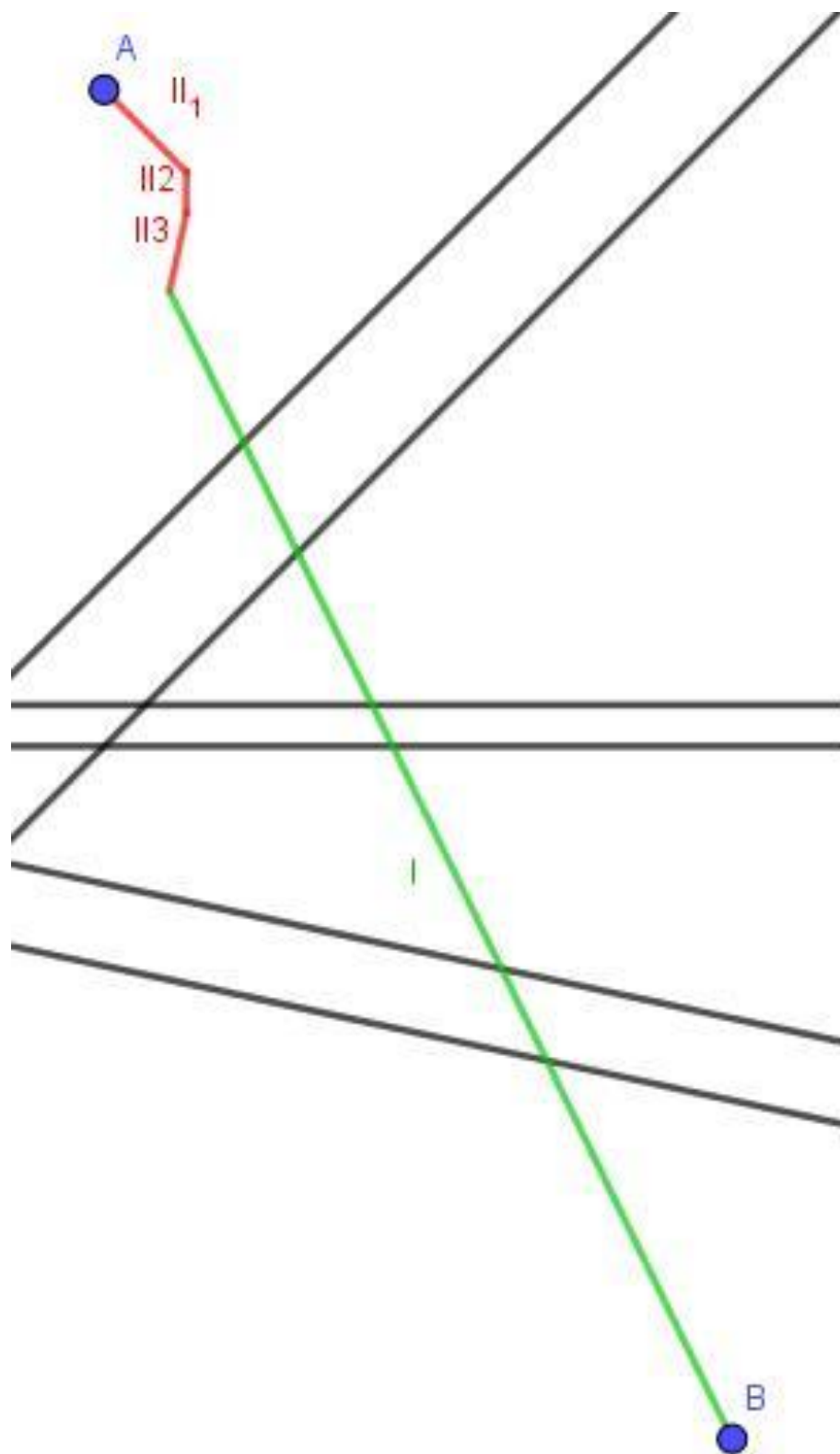
**A venit vremea unui autodenunț:
La această generalizare,
Mai mândru decât de enunț
Sunt doar de...rezolvare!
(Or mai fi și altele, oare?)**

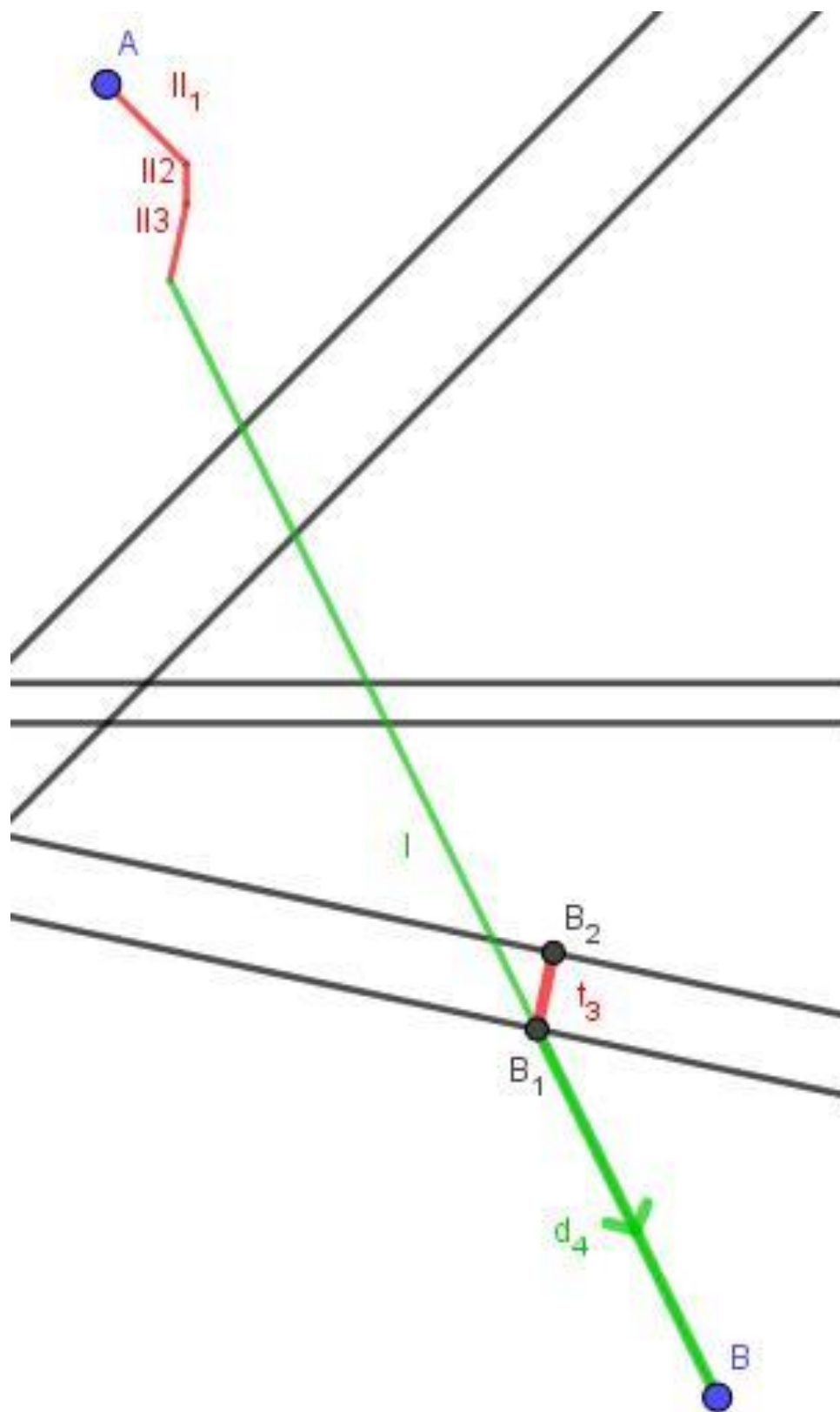


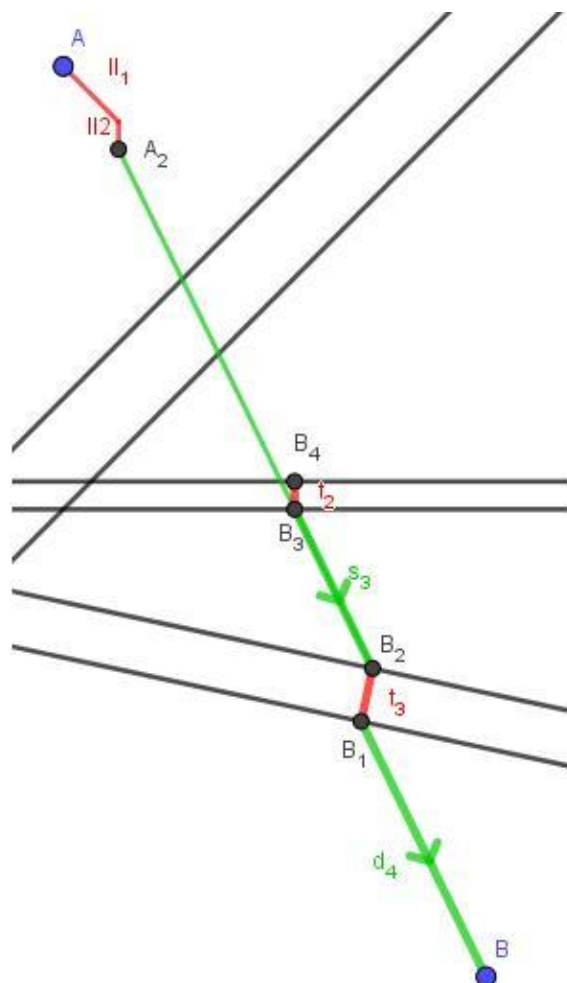
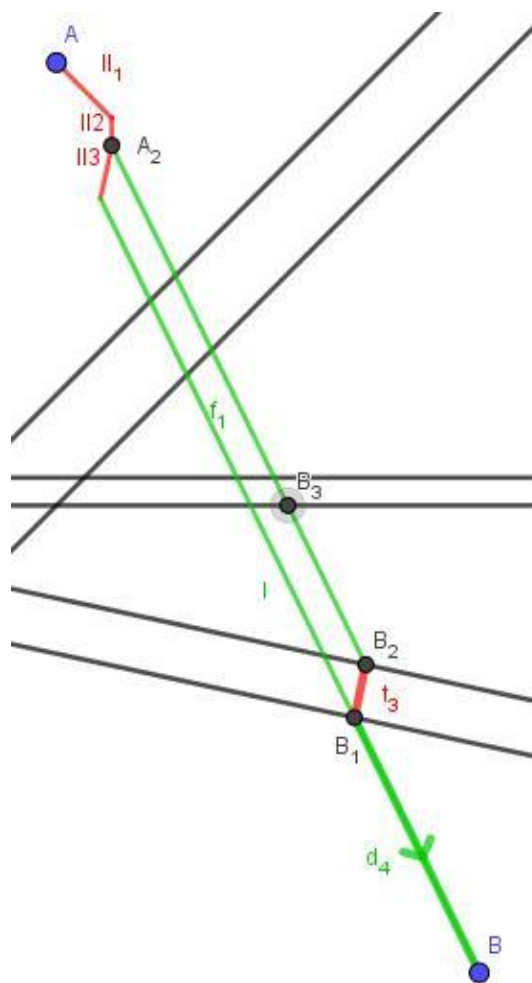
**Drum minim de la A la B, (al unui ceva în 4 labe),
Cu traversări perpendiculare(așadar minimale)
Ale autostrăzilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ construite în cale!
Ca mare favor au lățimi constante, dar neegale!
Por favor!**

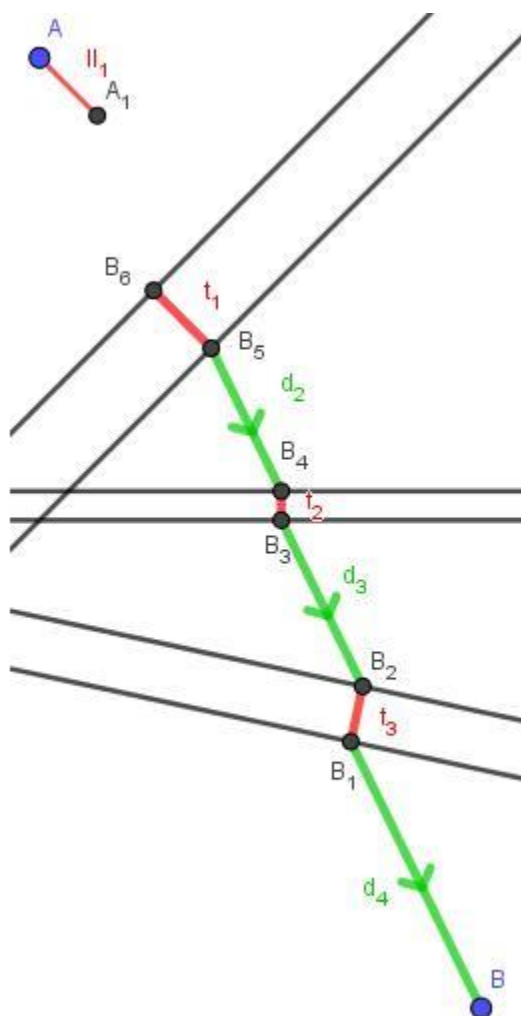
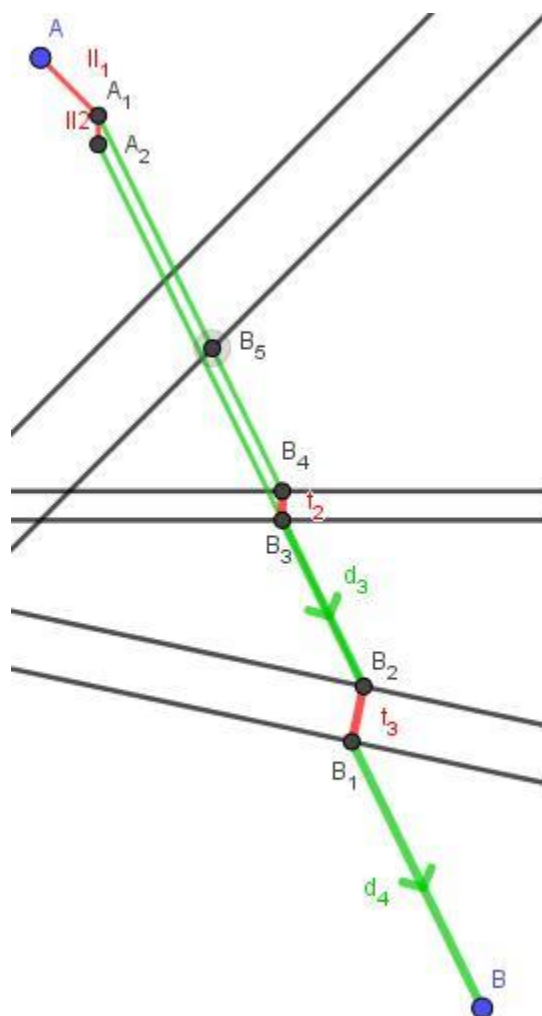
Prof. Stan Ilie

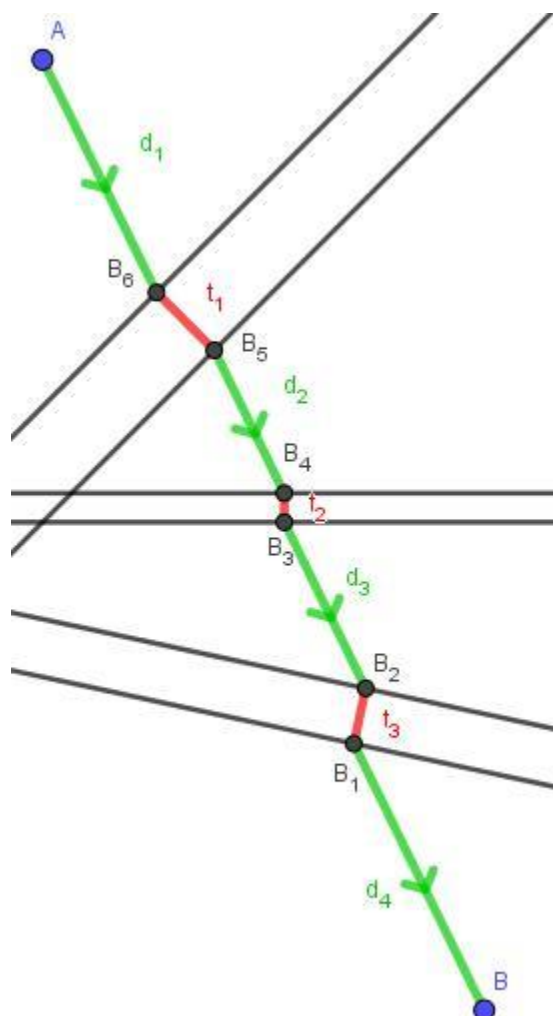












Și o altă generalizare, ce așteaptă rezolvare:

DRUM MINIM ÎNTRE

Două Puncte profunde ... ce atinge și Două Drepte fecunde!



Precizare-În3tare:

Fiind o probabilistică așezare, Nu prea-s 3 elemente coplanare!

Prof. Stan Ilie