REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

DECEMBRIE 2019

ISSN 2065-6432

www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

ARTICOLE REVISTĂ:

1. **Inegalităţi Fibonacci – Lucas ... pag.2**

By D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest and Neculai Stanciu, Buzău

2. **Teorema lui CARNOT**
Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753-1823). Aplicatii alei Teoremei lui CARNOT...pag.10

Marin Chirciu

3. **Matematica celulelor de faguri ...pag.46**

Roman Rozalia Ioana

4. **Locuri geometrice cu puncte, drepte sau plane ...pag.51**

Stan Ilie

5. **Segmentul și dreapta...pag.33**

Stan Ilie

6. **O problemă interesantă**

Daniel Văcaru

1. Inegalităţi Fibonacci – Lucas

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

1. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, sunt șiruri de numere reale strict pozitive astfel încât:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ y_{n+2} = y_{n+1} + y_n,\ \forall n \in \mathbf{N}, \text{ atunci:}$$

$$\frac{x_m^2}{(y_q x_n + y_{q+1} x_p)^2} + \frac{x_n^2}{(y_q x_p + y_{q+1} x_m)^2} + \frac{x_p^2}{(y_q x_m + y_{q+1} x_n)^2} \geq \frac{3}{y_{q+2}^2},\ \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu**, **şi Gabriel Tica**, 2013)

Soluţie. Conform inegalității lui *H. Bergström* avem:

$$(1)\quad U = \frac{x_m^2}{(y_q x_n + y_{q+1} x_p)^2} + \frac{x_n^2}{(y_q x_p + y_{q+1} x_m)^2} + \frac{x_p^2}{(y_q x_m + y_{q+1} x_n)^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{x_m}{y_q x_n + + y_{q+1} x_p} + \frac{x_n}{y_q x_p + y_{q+1} x_m} + \frac{x_p}{y_q x_m + y_{q+1} x_n}\right)^2,\ \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

Totodată avem:

$$V = \frac{x_m}{y_q x_n + y_{q+1} x_p} + \frac{x_n}{y_q x_p + y_{q+1} x_m} + \frac{x_p}{y_q x_m + y_{q+1} x_n} =$$

$$= \frac{x_m^2}{y_q x_m x_n + y_{q+1} x_m x_p} + \frac{x_n^2}{y_q x_n x_p + y_{q+1} x_n x_m} + \frac{x_p^2}{y_q x_p x_m + y_{q+1} x_p x_n}$$

unde aplicăm din nou inegalitatea lui *H. Bergström* și deducem că:

$$(2)\quad V \geq \frac{(x_m + x_n + x_p)^2}{(y_q + y_{q+1})(x_m x_n + x_n x_p + x_p x_m)} = \frac{(x_m + x_n + x_p)^2}{y_{q+2}(x_m x_n + x_n x_p + x_p x_m)}$$

Dacă ținem seama de inegalitatea:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx),\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}_+,$$

atunci din (2) deducem că:

$$(3)\quad V \geq \frac{3}{y_{q+2}}$$

Din relațiile (1) și (3) obținem

$$U \geq \frac{3}{y_{q+2}^2},\ \forall m, n, p, q \in \mathbf{N}.$$

Observație. Șirurile *Fibonacci*, respectiv *Lucas*, verifică enunțul.

2.
$$\frac{L_m}{L_{m+1}\left(L_{m+1}^{2n-1}+\binom{2n+1}{1}L_{m+1}^{2n-2}L_m+\ldots+\binom{2n+1}{n}L_{m+1}^{n-1}L_m^n\right)}+$$
$$+\frac{L_{m+1}}{L_m\left(\binom{2n+1}{n+1}L_{m+1}^{n}L_m^{n-1}+\ldots+\binom{2n+1}{2n}L_{m+1}L_m^{2n-2}+L_m^{2n-1}\right)}\geq\frac{4L_mL_{m+1}}{L_{m+2}^{2n+1}},$$
oricare ar fi numerele naturale n şi m.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Notăm membrul stâng al inegalităţii cu V_n, şi avem că:
$$V_n=L_mL_{m+1}\left(\frac{1}{\left(L_{m+1}^{2n+1}+\binom{2n+1}{1}L_{m+1}^{2n}L_m+\ldots+\binom{2n+1}{n}L_{m+1}^{n+1}L_m^n\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\left(\binom{2n+1}{n+1}L_{m+1}^{n}L_m^{n+1}+\ldots+\binom{2n+1}{2n}L_{m+1}L_m^{2n}+L_m^{2n+1}\right)}\right),$$
unde aplicăm inegalitatea lui *H. Bergström* şi deducem că:
$$V_n\geq\frac{4L_mL_{m+1}}{\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}L_{m+1}^kL_m^{2n-k+1}}=\frac{4L_mL_{m+1}}{(L_m+L_{m+1})^{2n+1}}=\frac{4L_mL_{m+1}}{L_{m+2}^{2n+1}},$$
ceea ce încheie demonstraţia.

3. Dacă $a,b\in\mathbf{R}_+^*$, astfel încât $aF_nF_{n+1}>bF_k^2$, atunci:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{aF_nF_{n+1}-bF_k^2}\geq\frac{n}{an-b},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Avem:
$$R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2}{aF_nF_{n+1}-bF_k^2}\Leftrightarrow bR_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{bF_k^2}{aF_nF_{n+1}-bF_k^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow bR_n+n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{bF_k^2}{aF_nF_{n+1}-bF_k^2}+1\right)=aF_nF_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{aF_nF_{n+1}-bF_k^2}\overset{(Bergstrom)}{\geq}$$
$$\overset{(Bergstrom)}{\geq}aF_nF_{n+1}\cdot\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}(aF_nF_{n+1}-bF_k^2)}=aF_nF_{n+1}\cdot\frac{n^2}{anF_nF_{n+1}-b\sum_{k=1}^{n}F_k^2}.$$

Deoarece, $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, obţinem:

$$bR_n + n \geq aF_n F_{n+1} \cdot \frac{n^2}{(an-b)F_n F_{n+1}} = \frac{an^2}{an-b} \Leftrightarrow bR_n \geq \frac{an^2}{an-b} - n = \frac{bn}{an-b} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow R_n \geq \frac{n}{an-b}$, ceea ce demonstrează enunţul.

4. Au loc următoarele inegalităţi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^4}{k^2} \geq \frac{6F_n^2 F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^6}{k^2} \geq \frac{4F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^6}{k^4} \geq \frac{36F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^8}{k^3} \geq \frac{4F_n^4 F_{n+1}^4}{n^2(n+1)^2} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^4}{k^3} \geq \frac{4F_n^2 F_{n+1}^2}{n^2(n+1)^2} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{k}\right)^6 \geq \frac{16F_n^3 F_{n+1}^3}{n^4(n+1)^4} \quad (6)$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ şi } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aplicând inegalitatea lui *H. Bergström* deducem:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^4}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(F_k^2\right)^2}{k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{6F_n^2 F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)},$$

deci (1) este demonstrată.

Conform inegalităţii lui *J. Radon* avem:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^6}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(F_k^2\right)^3}{k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2} = \frac{4F_n^3 F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2},$$

aşa că (2) este demonstrată.
Folosim din nou inegaliatatea lui *J. Radon* rezultă:

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^6}{k^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(F_k^2\right)^3}{\left(k^2\right)^2}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)^2}=\frac{36F_n^3F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2},$$

astfel (3) este demonstrată.
Cu inegalitatea lui *J. Radon* obţinem:

$$D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^8}{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(F_k^2\right)^4}{k^3}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)^4}{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^3}=\frac{4F_n^3F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2},$$

deci şi (4) este dovedită.
Cu inegalitatea lui *H. Bergström* obţinem:

$$E_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^4}{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(F_k^2\right)^2}{k^3}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}k^3}=\frac{4F_n^2F_{n+1}^2}{n^2(n+1)^2},$$

şi (5) este demonstrată.
Utilizăm inegalitatea lui *J. Radon* şi avem:

$$G_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_k}{k}\right)^6=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(F_k^2\right)^3}{\left(k^3\right)^2}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)^2}=\frac{16F_n^3F_{n+1}^3}{n^4(n+1)^4},$$

deci (6) este dovedită, şi demonstraţia este completă.

5. Dacă $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n\in\mathbf{R}$, atunci:

$$2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}F_k\cdot\sin x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}F_k\cdot\cos x_k\right)\leq n\cdot F_n\cdot F_{n+1},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu**, 2007)

Soluţie. Conform *C-B-S*, avem:

(1) $$\left|\sum_{k=1}^{n}F_k\sin x_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right)=F_nF_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k,$$

(2) $$\left|\sum_{k=1}^{n}F_k\cos x_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right)=F_nF_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k.$$

Prin urmare:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} F_k \sin x_k\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} F_k \cos x_k\right| \le F_n F_{n+1} \cdot \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\right)} \overset{MG\le MA}{\le}$$

$$\overset{MG\le MA}{\le} \frac{F_n F_{n+1}}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (\sin^2 x_k + \cos^2 x_k) = \frac{n \cdot F_n \cdot F_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

şi deci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \cos x_k\right) \le \left|\sum_{k=1}^{n} F_k \sin x_k\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} F_k \cos x_k\right| \le \frac{n \cdot F_n \cdot F_{n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Observaţie. Proprietatea de mai sus a fost publicată în RMT, nr. 1/2007, pag. 55, ca Problema **O.X.138**, autor *D.M. Bătineţu-Giurgiu*.

6. Dacă $m \in [1, \infty)$, atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1 + F_{2k-1})^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} F_{2n+2}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu şi G. Tica**, 2013)

Soluţie. Conform cu propoziţia **1.5** avem: $\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = F_{2n+2}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Fie funcţia $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = m^m (x+1)^{m+1} - (m+1)^{m+1} x$, atunci:

$$f'(x) = m^m (m+1)(x+1)^m - (m+1)^{m+1}, \ f''(x) = m^{m+1}(m+1)(x+1)^{m-1}.$$

Avem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{m}.$$

Prin urmare:

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \text{ şi } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

ceea ce arată că f este convexă pe $\mathbf{R}_+^*$, şi că $x_0 = \frac{1}{m}$ este un punct de minim absolut pentru funcţia f pe $\mathbf{R}_+^*$. Deci:

$$f(x) \ge f(x_0) = f\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \Leftrightarrow m^m (x+1)^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} x, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

de unde deducem că:

$$m^m (1 + F_{2k-1})^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} F_{2k-1}, \forall k \in \mathbf{N}^*,$$

şi atunci:

$$m^m \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (1 + F_{2k-1})^{m+1} \ge (m+1)^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = (m+1)^{m+1} \cdot F_{2n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

7. Inegalităţile următoare:

$$n + 4 + 4F_n F_{n+1} > 4F_{n+2} \qquad (1)$$

$$n+4+4L_nL_{n+1}>4L_{n+2} \qquad (2)$$

au loc oricare ar fi numărul natural n.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Avem:

$$n+4+4F_nF_{n+1}>4F_{n+2} \Leftrightarrow \frac{n}{4}+F_nF_{n+1}>F_{n+2}-1,$$

şi deoarece

$$\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1},$$

deducem că:

$$\frac{n}{4}+F_nF_{n+1}=\frac{n}{4}+\sum_{k=1}^{n}F_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(F_k^2+\frac{1}{4}\right)>\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{F_k^2\cdot\frac{1}{4}}=\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1,$$

şi inegalitatea (1) este demonstrată.

Avem:

$$\frac{n}{4}+L_nL_{n+1}=\frac{n}{4}+\left(2+\sum_{k=1}^{n}L_k^2\right)>2+\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot L_k^2}=2+\sum_{k=1}^{n}L_k=2+L_{n+2}-3=L_{n+2}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+4L_nL_{n+1}+4>4L_{n+2},$$

şi astfel (2) este dovedită, iar demonstraţia este completă.

Observaţie. Inegalităţile de mai sus au apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaţionale, The Fibonacci Quarterly.

8. Următoarele inegalităţi:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_k}{F_{k+3}}+\frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}}\right)>\frac{n}{2} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{L_k}{L_{k+3}}+\frac{L_{k+1}}{2L_k+L_{k+1}}\right)>\frac{n}{2} \qquad (2)$$

sunt adevărate, oricare ar fi numărul natural n.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Din inegalitatea lui *Nesbitt* rezultă că:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},$$

pentru orice numere reale positive x, y şi z, cu egalitate dacă şi numasi dacă $x=y=z$.

Punem $x=F_k, y=F_{k+1}, z=F_{k+2}$, şi deoarece $F_k\neq F_{k+1}\neq F_{k+2}$, pentru orice număr natural k, deducem că:

$$\frac{F_k}{F_{k+1}+F_{k+2}}+\frac{F_{k+1}}{F_k+F_{k+2}}+\frac{F_{k+2}}{F_k+F_{k+1}}>\frac{3}{2},$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_k}{F_{k+3}}+\frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}}+1>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{F_k}{F_{k+3}}+\frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}}>\frac{1}{2},$$

pentru orice număr natural k.
Aşadar,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_k}{F_{k+3}}+\frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}}\right)>\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{2},$$

pentru orice număr natural n, deci (1) este demonstrată.
Procedând exact ca mai sus obţinem, inegalitatea (2), şi demonstraţia este completă.

Observaţie. Inegalităţile de mai sus au apărut în numărul din februarie, 2013 al revistei internaţionale, The Fibonacci Quarterly.

9. Inegalitatea următoare:

$$\frac{(F_1^2+1)(F_2^2+1)}{F_1F_2+1}+\frac{(F_2^2+1)(F_3^2+1)}{F_2F_3+1}+\ldots+\frac{(F_{n-1}^2+1)(F_n^2+1)}{F_{n-1}F_n+1}+\frac{(F_n^2+1)(F_1^2+1)}{F_nF_1+1}\geq$$
$$\geq 2F_{n+2}-2,$$

este adevărată, pentru orice număr natural n.

(**D.M. Bătineţu-Giurgiu, şi N. Stanciu**, 2013)

Soluţie. Folosim inegalitatea $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}, \forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$, unde punem $a=x+y$, $b=xy+1$, şi deducem că:

$$(x+y)(xy+1)\leq\frac{(x+y+xy+1)^2}{4}=\frac{(x+1)^2(y+1)^2}{4}, \forall x,y\in\mathbf{R}_+^*,$$

dar,

$$(x+1)^2\leq 2(x^2+1)\Leftrightarrow x^2+2x+1\leq 2x^2+2\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0,$$

este adevărată.
Aşa că,

$$(x+y)(xy+1)\leq(x^2+1)(y^2+1)\Leftrightarrow\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{xy+1}\geq x+y, \forall x,y\in\mathbf{R}_+^*.$$

Aşadar,

$$\frac{(F_1^2+1)(F_2^2+1)}{F_1F_2+1}\geq F_1+F_2;$$
$$\frac{(F_2^2+1)(F_3^2+1)}{F_2F_3+1}\geq F_2+F_3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(F_{n-1}^2+1)(F_n^2+1)}{F_{n-1}F_n+1}\geq F_{n-1}+F_n;$$

$$\frac{(F_n^2+1)(F_1^2+1)}{F_nF_1+1} \geq F_n + F_1.$$

Adunând relaţiile precedente obţinem că:

$$\frac{(F_1^2+1)(F_2^2+1)}{F_1F_2+1} + \frac{(F_2^2+1)(F_3^2+1)}{F_2F_3+1} + \ldots + \frac{(F_{n-1}^2+1)(F_n^2+1)}{F_{n-1}F_n+1} + \frac{(F_n^2+1)(F_1^2+1)}{F_nF_1+1} \geq$$
$$\geq 2(F_1 + F_2 + \ldots + F_n).$$

Deoarece,

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1,$$

din cele de mai sus obţinem inegalitatea din enunţ.

Art.447

2. Teorema lui CARNOT
Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753-1823). Aplicatii alei **Teoremei lui CARNOT**

Marin Chirciu [1]

Articolul prezintă Teorema lui Carnot, Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753-1823) și aplicații ale acesteia.

Teorema lui CARNOT :
Suma distantelor de la centrul O al cercului circumscris unui triunghi ABC la laturile triunghiului este egală cu $R+r$.

Demonstrație:
Cazul triunghiului ascuțitunghic.
Fie M_a, M_b, M_c picioarele perpendicularelor din O pe laturile BC, CA, AB și H_a, H_b, H_c picioarele perpendicularelor din H pe laturile BC, CA, AB ale ΔABC ascuțitunghic.
Avem:
$[ABC]=[OBC]+[OCA]+[OAB] \Leftrightarrow r(a+b+c)=a\cdot OM_a+b\cdot OM_b+c\cdot OM_c$, (1).
Folosim $m(BOC)=2m(BAC)$ și analoagele.
Considerăm triunghiurile asemenea:
$\Delta ABH_b, \Delta ACH_c, \Delta BOM_a \equiv \Delta COM_a$, din care rezultă:
$$\frac{AH_b}{c}=\frac{AH_c}{b}=\frac{OM_a}{R} \Leftrightarrow \frac{AH_b+AH_c}{b+c}=\frac{OM_a}{R} \Leftrightarrow (b+c)OM_a=R(AH_b+AH_c).$$
Se scriu și celelalte două relații analoage , se adună, se ține seama că $BH_a+CH_a=a$ și analoagele, obținând:
$(b+c)OM_a+(c+a)OM_b+(a+b)OM_c=R(a+b+c)$, (2).
Din (1) și (2) se obține:
$$(b+c+a-a)OM_a+(c+a+b-b)OM_b+(a+b+c-c)OM_c=R(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)\sum OM_a-\sum a\cdot OM_a=R(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$(a+b+c)\sum OM_a-r(a+b+c)=R(a+b+c) \Leftrightarrow \sum OM_a=R+r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow OM_a+OM_b+OM_c=R+r.$$
Cazul triunghiului dreptunghic și cazul triunghiului obtuzunghic se tratează corespunzător.

Să trecem la aplicații ale teoremei lui Carnot.
Fie ABC un triunghi și d_a, d_b, d_c distanțele de la centrul O al cercului circumscris la BC, CA, AB . Demonstrați:

---

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești*

PARTEA Întâi

1) $\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}\geq\frac{9}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström și Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$.

2) $\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\geq\frac{18r\sqrt{3}}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sqrt[3]{abc}\geq 2r\sqrt{3}$.

3) $\frac{a^2}{d_a}+\frac{b^2}{d_b}+\frac{c^2}{d_c}\geq\frac{4p^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström șiTeorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$.

4) $\frac{b^2c^2}{d_a}+\frac{c^2a^2}{d_b}+\frac{a^2b^2}{d_c}\geq\frac{48S^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum bc\geq 4S\sqrt{3}$.

5) $\frac{a^4}{d_a}+\frac{b^4}{d_b}+\frac{c^4}{d_c}\geq\frac{48S^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^2\geq 4S\sqrt{3}$.

6) $\frac{b^4c^4}{d_a}+\frac{c^4a^4}{d_b}+\frac{a^4b^4}{d_c}\geq\frac{(4S)^4}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum b^2c^2\geq 16S^2$

7) $\frac{a^6}{d_a}+\frac{b^6}{d_b}+\frac{c^6}{d_c}\geq\frac{(24Sr)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^3\geq 24Sr$.

8) $\frac{m_a^2}{d_a}+\frac{m_b^2}{d_b}+\frac{m_c^2}{d_c}\geq\frac{(9r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a\geq 9r$.

9) $\frac{GA^2}{d_a}+\frac{GB^2}{d_b}+\frac{GC^2}{d_c}\geq\frac{(6r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 8) și $m_a = \frac{3}{2}GA$.

10) $\frac{m_a^4}{d_a} + \frac{m_b^4}{d_b} + \frac{m_c^4}{d_c} \geq \frac{p^4}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum m_a^2 \geq p^2$.

11) $\frac{GA^4}{d_a} + \frac{GB^4}{d_b} + \frac{GC^4}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{2p}{3}\right)^4}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 10) și $m_a = \frac{3}{2}GA$.

12) $\frac{a^2m_a^2}{d_a} + \frac{b^2m_b^2}{d_b} + \frac{c^2m_c^2}{d_c} \geq \frac{(6S)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum am_a \geq 6S$.

13) $\frac{a^2GA^2}{d_a} + \frac{b^2GB^2}{d_b} + \frac{c^2GC^2}{d_c} \geq \frac{(4S)^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 12) și $m_a = \frac{3}{2}GA$.

14) $\frac{a^4m_a^4}{d_a} + \frac{b^4m_b^4}{d_b} + \frac{c^4m_c^4}{d_c} \geq \frac{(12S^2)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum a^2m_a^2 \geq 12S^2$.

15) $\frac{a^2GA^2}{d_a} + \frac{b^2GB^2}{d_b} + \frac{c^2GC^2}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{16S^2}{3}\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 14) și $m_a = \frac{3}{2}GA$.

16) $\frac{m_a^8}{d_a} + \frac{m_b^8}{d_b} + \frac{m_c^8}{d_c} \geq \frac{(3S)^4}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum m_a^4 \geq 9S^2$.

17) $\frac{GA^8}{d_a}+\frac{GB^8}{d_b}+\frac{GC^8}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{4S}{3}\right)^4}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 16) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

18) $\frac{m_b^2m_c^2}{d_a}+\frac{m_c^2m_a^2}{d_b}+\frac{m_a^2m_b^2}{d_c}\geq\frac{\left(27r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_bm_c\geq 27r^2$.

19) $\frac{GB^2GC^2}{d_a}+\frac{GC^2GA^2}{d_b}+\frac{GA^2GB^2}{d_c}\geq\frac{\left(12r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 18) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

20) $\frac{m_b^4m_c^4}{d_a}+\frac{m_c^4m_a^4}{d_b}+\frac{m_a^4m_b^4}{d_c}\geq\frac{\left(3S\right)^4}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_bm_c\geq 27r^2$.

21) $\frac{GB^2GC^2}{d_a}+\frac{GC^2GA^2}{d_b}+\frac{GA^2GB^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{4S}{3}\right)^4}{R+r}$.

Soluție.

Vezi 20) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

22) $\frac{h_a^2}{d_a}+\frac{h_b^2}{d_b}+\frac{h_c^2}{d_c}\geq\frac{\left(9r\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_a\geq 9r$.

23) $\frac{h_a^4}{d_a}+\frac{h_b^4}{d_b}+\frac{h_c^4}{d_c}\geq\frac{\left(27r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_a^2\geq 27r^2$.

24) $\frac{h_b^2h_c^2}{d_a}+\frac{h_c^2h_a^2}{d_b}+\frac{h_a^2h_b^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{54r^2}{R}\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_bh_c \geq \frac{54r^2}{R}$.

25) $$\frac{\left(\frac{h_a}{bc}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_b}{ca}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_c}{ab}\right)^2}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{3}{2R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_a}{bc}=\frac{3}{2R}$.

26) $$\frac{\left(\frac{a}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{h_c}\right)^2}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{2p}{3r}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a}{h_a} \geq \frac{2p}{3r}$.

27) $$\frac{\left(\frac{h_a}{a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_b}{b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_c}{c}\right)^2}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{p}{R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_a}{a} \geq \frac{p}{R}$.

28) $$\frac{\left(\frac{b+c}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{c+a}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{a+b}{h_c}\right)^2}{d_c} \geq \frac{\left(\frac{36r}{p}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{b+c}{h_a} \geq \frac{36r}{p}$.

29) $$\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_c+h_a}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_a+h_b}{h_c}\right)^2}{d_c} \geq \frac{36}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_b+h_c}{h_a} \geq 6$.

30) $$\frac{\left(\frac{a}{h_a}\right)^4}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{h_b}\right)^4}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{h_c}\right)^4}{d_c} \geq \frac{16}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a^2}{h_a^2}\geq 4$.

31) $$\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{p-a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_c+h_a}{p-b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_a+h_b}{p-c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{2p}{r}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{p-a}=\frac{2p}{r}$.

32) $$\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{b+c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_c+h_a}{c+a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_a+h_b}{a+b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{p}{R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}$.

33) $$\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{9}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{h_a}\geq 3$.

34) $$\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^4}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^4}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^4}{d_c}\geq\frac{9}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2\geq 3$.

35) $$\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^{2n}}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^{2n}}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^{2n}}{d_c}\geq\frac{9}{R+r}$$, unde $n\in\boldsymbol{N}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^n\geq 3$.

36) $$\frac{\left(\frac{1}{h_a+r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{1}{h_b+r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{1}{h_c+r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{1}{R^2(R+r)}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{h_a+r_a}\geq\frac{1}{R}$.

37) $$\frac{\left(\frac{a}{h_a+r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{h_b+r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{h_c+r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{2p}{3R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{h_a+r_a}\geq\frac{2p}{3R}$.

38) $$\frac{\left(\frac{h_a}{r+r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_b}{r+r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_c}{r+r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{81}{16(R+r)}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_a}{r+r_a}\geq\frac{9}{4}$.

39) $$\frac{\left(\frac{r_a}{r+r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{r+r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{r+r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{81}{16(R+r)}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{r+r_a}\geq\frac{9}{4}$.

40) $$\frac{\left(\frac{bc}{h_ar_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{ac}{h_br_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{ab}{h_cr_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{16}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{h_ar_a}\geq 4$.

41) $$\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_c+h_a}{r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_a+h_b}{r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{36}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{r_a}=6$.

42) $$\frac{\left(\frac{r_a}{h_b+h_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{h_c+h_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{h_a+h_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{9}{4(R+r)}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{h_b+h_c}\geq\frac{3}{2}$.

43) $\frac{\left(\frac{h_a}{r_b+r_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{h_b}{r_c+r_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{h_c}{r_a+r_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{3r}{R}\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}\geq\frac{3r}{R}$.

44) $\frac{l_a^2}{d_a}+\frac{l_b^2}{d_b}+\frac{l_c^2}{d_c}\geq\frac{(9r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a\geq 9r$.

45) $\frac{l_a^4}{d_a}+\frac{l_b^4}{d_b}+\frac{l_c^4}{d_c}\geq\frac{27S^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a^2\geq 3S\sqrt{3}$.

46) $\frac{1}{l_a^2d_a}+\frac{1}{l_b^2d_b}+\frac{1}{l_c^2d_c}\geq\frac{4}{R^2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_a}\geq\frac{2}{R}$.

47) $\frac{1}{l_a^4d_a}+\frac{1}{l_b^4d_b}+\frac{1}{l_c^4d_c}\geq\frac{81}{p^4(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_a^2}\geq\frac{9}{p^2}$.

48) $\frac{1}{l_b^2l_c^2d_a}+\frac{1}{l_c^2l_a^2d_b}+\frac{1}{l_a^2l_b^2d_c}\geq\frac{81}{p^4(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_bl_c}\geq\frac{9}{p^2}$.

49) $\frac{1}{a^2l_a^2d_a}+\frac{1}{b^2l_b^2d_b}+\frac{1}{c^2l_c^2d_c}\geq\frac{1}{R^4(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{al_a}\geq\frac{1}{R^2}$.

50) $\dfrac{\left(\dfrac{l_a}{p-a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{l_b}{p-b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{l_c}{p-c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(\dfrac{p}{3r}\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{l_a}{p-a}\geq\dfrac{p}{3r}$.

51) $\dfrac{\left(\dfrac{bc}{l_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{ca}{l_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{ab}{l_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{(12r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{bc}{l_a}\geq 12r$.

52) $\dfrac{\left(\dfrac{b+c}{l_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{c+a}{l_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{l_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{48}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{b+c}{l_a}\geq 4\sqrt{3}$.

53) $\dfrac{\left(\dfrac{l_bl_c}{l_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{l_cl_a}{l_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{l_al_b}{l_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{(9r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{l_bl_c}{l_a}\geq 9r$.

54) $\dfrac{\left(\dfrac{l_b+l_c}{l_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{l_c+l_a}{l_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{l_a+l_b}{l_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{36}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{l_b+l_c}{l_a}\geq 6$.

55) $\dfrac{\left(\dfrac{bc}{l_a^2}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{ca}{l_b^2}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{ab}{l_c^2}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{16}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{bc}{l_a^2}\geq 4$.

56) $$\frac{\left(l_a \sin\frac{A}{2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(l_b \sin\frac{B}{2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(l_c \sin\frac{C}{2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{9r}{2}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \sin\frac{A}{2}\geq\frac{9r}{2}$.

57) $$\frac{\left(l_a \cos\frac{A}{2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(l_b \cos\frac{B}{2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(l_c \cos\frac{C}{2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{9r\sqrt{3}}{2}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \cos\frac{A}{2}\geq\frac{9r\sqrt{3}}{2}$.

58) $$\frac{\left(l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(l_b \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(l_c \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{9Sr}{R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\geq\frac{9Sr}{R}$.

59) $$\frac{\left(m_a^2 h_b h_c\right)^2}{d_a}+\frac{\left(m_b^2 h_c h_a\right)^2}{d_b}+\frac{\left(m_c^2 h_a h_b\right)^2}{d_c}\geq\frac{(3S)^4}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a^2 h_b h_c\geq 9S^2$.

60) $$\frac{\left(\frac{b^2+c^2}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{c^2+a^2}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{a^2+b^2}{h_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{(4R)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{b^2+c^2}{h_a}\geq 4R$.

61) $$\frac{\left(\frac{m_a^2}{h_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{m_b^2}{h_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{m_c^2}{h_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{9R}{2}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{m_a^2}{h_a}\geq\frac{9R}{2}$.

62) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^2}{h_bh_c}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^2}{h_ch_a}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^2}{h_ah_b}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{9}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^2}{h_bh_c}\geq 3$.

63) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^2}{h_b+h_c}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^2}{h_c+h_a}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^2}{h_a+h_b}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(\dfrac{9R}{4}\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^2}{h_b+h_c}\geq\dfrac{9R}{4}$.

64) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^4}{h_bh_c}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^4}{h_ch_a}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^4}{h_ah_b}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(27r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^4}{h_bh_c}\geq 27r^2$.

65) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^2}{bc}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^2}{ca}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^2}{ab}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{81}{16(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^2}{bc}\geq\dfrac{9}{4}$.

66) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^4}{l_a^2}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^4}{l_b^2}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^4}{l_c^2}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(27r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^4}{l_a^2}\geq 27r^2$.

67) $\dfrac{\left(\dfrac{m_a^4}{l_ar_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{m_b^4}{l_br_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{m_c^4}{l_cr_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(27r^2\right)^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^4}{l_ar_a}\geq 27r^2$.

68) $\dfrac{\dfrac{(m_a l_a)^4}{(p-a)^2}}{d_a}+\dfrac{\dfrac{(m_b l_b)^4}{(p-b)^2}}{d_b}+\dfrac{\dfrac{(m_c l_c)^4}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\dfrac{p^6}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{m_a^2 l_a^2}{p-a}\geq p^3$.

69) $\dfrac{(m_a l_a)^2}{d_a}+\dfrac{(m_b l_b)^2}{d_b}+\dfrac{(m_c l_c)^2}{d_c}\geq\dfrac{p^4}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a l_a\geq p^2$.

70) $\dfrac{\left(\dfrac{h_a}{l_a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{h_b}{l_b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{h_c}{l_c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(3\cdot\sqrt{\dfrac{2r}{R}}\right)^2}{R+r}=\dfrac{6r}{R(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{h_a}{l_a}\geq 3\sqrt{\dfrac{2r}{R}}$.

71) $\dfrac{a^2(p-a)^2}{d_a}+\dfrac{b^2(p-b)^2}{d_b}+\dfrac{c^2(p-c)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(2S\sqrt{3}\right)^2}{R+r}=\dfrac{12S^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a(p-a)\geq 2S\sqrt{3}$.

72) $\dfrac{(p-b)^2(p-c)^2}{d_a}+\dfrac{(p-c)^2(p-a)^2}{d_b}+\dfrac{(p-a)^2(p-b)^2}{d_c}\geq\dfrac{\left(2S\sqrt{3}\right)^2}{R+r}=\dfrac{3S^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Ine. Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum(p-b)(p-c)\geq S\sqrt{3}$.

73) $\dfrac{(p-b)^4(p-c)^4}{d_a}+\dfrac{(p-c)^4(p-a)^4}{d_b}+\dfrac{(p-a)^4(p-b)^4}{d_c}\geq\dfrac{S^4}{R+r}$

Soluție.

Vezi Ine. Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum(p-b)^2(p-c)^2\geq S^2$.

74) $\dfrac{b^2c^2(p-a)^2}{d_a}+\dfrac{c^2a^2(p-b)^2}{d_b}+\dfrac{a^2b^2(p-c)^2}{d_c}\geq\dfrac{3888r^6}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum bc(p-a)\geq 36\sqrt{3}r^3$.

75) $\dfrac{\dfrac{a}{b+c-a}}{d_a}+\dfrac{\dfrac{b}{c+a-b}}{d_b}+\dfrac{\dfrac{c}{a+b-c}}{d_c}\geq\dfrac{9}{R+r}$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\sqrt{\dfrac{a}{b+c-a}}\geq 3$.

76) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{9}{4(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{a}{b+c}\geq\dfrac{3}{2}$.

77) $\dfrac{\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^2}{d_a}+\dfrac{\left(\dfrac{c+a}{b}\right)^2}{d_b}+\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^2}{d_c}\geq\dfrac{36}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{b+c}{a}\geq 6$.

78) $\dfrac{\dfrac{a^4}{(p-a)^2}}{d_a}+\dfrac{\dfrac{b^4}{(p-b)^2}}{d_b}+\dfrac{\dfrac{c^4}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\dfrac{16p^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{a^2}{p-a}\geq 4p$.

79) $\dfrac{\dfrac{b^2c^2}{(p-a)^2}}{d_a}+\dfrac{\dfrac{c^2a^2}{(p-b)^2}}{d_b}+\dfrac{\dfrac{a^2b^2}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\dfrac{16p^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{bc}{p-a}\geq 4p$.

80) $\dfrac{\dfrac{a^2}{(p-a)^2}}{d_a}+\dfrac{\dfrac{b^2}{(p-b)^2}}{d_b}+\dfrac{\dfrac{c^2}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\dfrac{36}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\dfrac{a}{p-a}\geq 6$.

81) $\frac{\frac{(p-a)^2}{a^2}}{d_a}+\frac{\frac{(p-b)^2}{b^2}}{d_b}+\frac{\frac{(p-c)^2}{c^2}}{d_c}\geq\frac{9}{4(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{p-a}{a}\geq\frac{3}{2}$.

82) $\frac{\frac{1}{a^2(p-a)^2}}{d_a}+\frac{\frac{1}{b^2(p-b)^2}}{d_b}+\frac{\frac{1}{c^2(p-c)^2}}{d_c}\geq\frac{1}{R^2r^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{p-a}\geq\frac{\sqrt{3}}{r}$.

83) $\frac{\frac{1}{(p-a)^2}}{d_a}+\frac{\frac{1}{(p-b)^2}}{d_b}+\frac{\frac{1}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\frac{3}{r^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{a(p-a)}\geq\frac{1}{Rr}$.

84) $\frac{\frac{1}{(p-a)^4}}{d_a}+\frac{\frac{1}{(p-b)^4}}{d_b}+\frac{\frac{1}{(p-c)^4}}{d_c}\geq\frac{1}{r^4(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{(p-a)^2}\geq\frac{1}{r^2}$.

85) $\frac{\frac{(p-a)^4}{a^2}}{d_a}+\frac{\frac{(p-b)^4}{b^2}}{d_b}+\frac{\frac{(p-c)^4}{c^2}}{d_c}\geq\frac{p^2}{4(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{(p-a)^2}{a}\geq\frac{p}{2}$.

86) $\frac{\frac{(p-a)^4}{b^2c^2}}{d_a}+\frac{\frac{(p-b)^4}{c^2a^2}}{d_b}+\frac{\frac{(p-c)^4}{a^2b^2}}{d_c}\geq\frac{9}{16(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{(p-a)^2}{a}\geq\frac{3}{4}$.

87) $$\frac{\left(\frac{1}{b+c-a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{1}{c+a-b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{1}{a+b-c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{81}{4p^2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{9}{2p}$.

88) $$\frac{\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{9}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{3R}{2r}\geq 3$.

89) $$\frac{\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{ca}{c+a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{2S}{R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{b+c}\geq\frac{2S}{R}$.

90) $$\frac{\left(\frac{a^2}{b+c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b^2}{c+a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c^2}{a+b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{p^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a^2}{b+c}\geq p$.

91) $$\frac{\frac{b^2c^2}{(p-a)^2}}{d_a}+\frac{\frac{c^2a^2}{(p-b)^2}}{d_b}+\frac{\frac{a^2b^2}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\frac{144}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{(p-a)^2}\geq\frac{6R}{r}\geq 12$.

92) $$\frac{\frac{a^4}{(p-a)^2}}{d_a}+\frac{\frac{b^4}{(p-b)^2}}{d_b}+\frac{\frac{c^4}{(p-c)^2}}{d_c}\geq\frac{144}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a^2}{(p-a)^2}\geq 12$.

93) $\frac{\left(\frac{p+a}{b+c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{p+b}{c+a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{p+c}{a+b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{225}{16(R+r)}$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{p+a}{b+c}\geq\frac{15}{4}$.

94) $\frac{\left(a\sin\frac{A}{2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(b\sin\frac{B}{2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(c\sin\frac{C}{2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{p^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a\sin\frac{A}{2}\geq p$.

95) $\frac{\left(\frac{1}{a}tg\frac{A}{2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{1}{b}tg\frac{B}{2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{1}{c}tg\frac{C}{2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{1}{R^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{a}tg\frac{A}{2}\geq\frac{1}{R}$.

96) $\frac{r_a^2}{d_a}+\frac{r_b^2}{d_b}+\frac{r_c^2}{d_c}\geq\frac{(4R+r)^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum r_a\geq 4R+r$.

97) $\frac{r_b^2r_c^2}{d_a}+\frac{r_c^2r_a^2}{d_b}+\frac{r_a^2r_b^2}{d_c}\geq\frac{p^4}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum r_br_c=p^2$.

98) $\frac{r_a^{-2}}{d_a}+\frac{r_b^{-2}}{d_b}+\frac{r_c^{-2}}{d_c}\geq\frac{r^{-2}}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r}$.

99) $\frac{a^2r_a^2}{d_a}+\frac{b^2r_b^2}{d_b}+\frac{c^2r_c^2}{d_c}\geq\frac{36S^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum ar_a\geq 6S$.

100) $\frac{r_a^4}{d_a}+\frac{r_b^4}{d_b}+\frac{r_c^4}{d_c}\geq\frac{p^4}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum r_a^2 \geq p^2$.

101) $$\frac{\left(\frac{a^2}{r_br_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b^2}{r_cr_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c^2}{r_ar_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{16}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a^2}{r_br_c}\geq 4$.

102) $$\frac{\left(\frac{a^2}{r_a^2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b^2}{r_b^2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c^2}{r_c^2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{16}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a^2}{r_a^2}\geq 4$.

103) $$\frac{\left(\frac{a^2}{r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b^2}{r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c^2}{r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{(12r)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a^2}{r_a}\geq 12r$.

104) $$\frac{\left(\frac{r_a}{bc}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{ca}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{ab}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{3}{2R}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{r_a}{bc}\geq \frac{3}{2R}$.

105) $$\frac{\left(\frac{a}{r_a^2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{r_b^2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{r_c^2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{6}{p}\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a}{r_a^2}\geq \frac{6}{p}$.

106) $$\frac{\left(\frac{1}{r_a^2}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{1}{r_b^2}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{1}{r_c^2}\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(\frac{3}{p}\right)^4}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{1}{r_a^2}\geq \frac{9}{p^2}$.

107) $$\frac{\left(a^2r_a\right)^2}{d_a}+\frac{\left(b^2r_a\right)^2}{d_b}+\frac{\left(c^2r_a\right)^2}{d_c}\geq\frac{\left(108r^2\right)^2}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^2r_a\geq 108r^2$.

108) $$\frac{\left(\frac{bc}{r_b+r_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{ca}{r_c+r_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{ab}{r_a+r_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{(6r)^2}{R+r}$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{r_b+r_c}\geq 6r$.

109) $$\frac{\left(\frac{a}{r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{b}{r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{12}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{r_a}\geq 2\sqrt{3}$.

110) $$\frac{\left(\frac{r_b+r_c}{a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_c+r_a}{b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_a+r_b}{c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{27}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_b+r_c}{a}\geq 3\sqrt{3}$.

111) $$\frac{\left(\frac{1}{r_b+r_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{1}{r_c+r_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{1}{r_a+r_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{1}{R^2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{r_b+r_c}\geq\frac{1}{R}$.

112) $$\frac{\left(\frac{r_a}{r_b+r_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_b}{r_c+r_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_c}{r_a+r_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{9}{4(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{r_b+r_c}\geq\frac{3}{2}$.

113) $$\frac{\left(\frac{r_b+r_c}{r_a}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{r_c+r_a}{r_b}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{r_a+r_b}{r_c}\right)^2}{d_c}\geq\frac{36}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_b+r_c}{r_a}\geq 6$.

114) $$\frac{\left(\frac{bc}{r_br_c}\right)^2}{d_a}+\frac{\left(\frac{ca}{r_cr_a}\right)^2}{d_b}+\frac{\left(\frac{ab}{r_ar_b}\right)^2}{d_c}\geq\frac{16}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{r_br_c}\geq 4$.

PARTEA a DOUA

1) $\sum\frac{1}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström șiTeorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$.

2) $\sum\frac{a}{d_b+d_c}\geq\frac{9r\sqrt{3}}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sqrt[3]{abc}\geq 2r\sqrt{3}$.

3) $\sum\frac{a^2}{d_b+d_c}\geq\frac{2p^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström șiTeorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$.

4) $\sum\frac{b^2c^2}{d_b+d_c}\geq\frac{24S^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum bc\geq 4S\sqrt{3}$.

5) $\sum\frac{a^4}{d_b+d_c}\geq\frac{24S^2}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^2\geq 4S\sqrt{3}$.

6) $\sum\frac{b^4c^4}{d_b+d_c}\geq\frac{(4S)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum b^2c^2\geq 16S^2$

7) $\sum\frac{a^6}{d_b+d_c}\geq\frac{(24Sr)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^3\geq 24Sr$.

8) $\sum\frac{m_a^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(9r)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a\geq 9r$.

9) $\sum\frac{GA^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(6r)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 8) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

10) $\sum\frac{m_a^4}{d_b+d_c}\geq\frac{p^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a^2\geq p^2$.

11) $\sum\frac{GA^4}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{2p}{3}\right)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 10) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

12) $\sum\frac{a^2m_a^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(6S)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum am_a\geq 6S$.

13) $\sum\frac{a^2GA^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(4S)^2}{2(R+r)}$

Soluție.

Vezi 12) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

14) $\sum\frac{a^4m_a^4}{d_b+d_c}\geq\frac{(12S^2)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^2m_a^2\geq 12S^2$.

15) $\sum\frac{a^2GA^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{16S^2}{3}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 14) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

16) $\sum\frac{m_a^8}{d_b+d_c}\geq\frac{(3S)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a^4\geq 9S^2$.

17) $\sum\frac{GA^8}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{4S}{3}\right)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 16) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

18) $\sum\frac{m_b^2m_c^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(27r^2)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_bm_c\geq 27r^2$.

19) $\sum\frac{GB^2GC^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(12r^2)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 18) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

20) $\sum\frac{m_b^4m_c^4}{d_b+d_c}\geq\frac{(3S)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_bm_c\geq 27r^2$.

21) $\sum\frac{GB^2GC^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{4S}{3}\right)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi 20) și $m_a=\frac{3}{2}GA$.

22) $\sum \frac{h_a^2}{d_b+d_c} \geq \frac{(9r)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_a \geq 9r$.

23) $\sum \frac{h_a^4}{d_b+d_c} \geq \frac{(27r^2)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_a^2 \geq 27r^2$.

24) $\sum \frac{h_b^2 h_c^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{54r^2}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum h_b h_c \geq \frac{54r^2}{R}$.

25) $\sum \frac{\left(\frac{h_a}{bc}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{3}{2R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}$.

26) $\sum \frac{\left(\frac{a}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{2p}{3r}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a}{h_a} \geq \frac{2p}{3r}$.

27) $\sum \frac{\left(\frac{h_a}{a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{p}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_a}{a} \geq \frac{p}{R}$.

28) $\sum \frac{\left(\frac{b+c}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{36r}{p}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{b+c}{h_a}\geq\frac{36r}{p}$.

29) $\sum\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{18}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{h_a}\geq 6$.

30) $\sum\frac{\left(\frac{a}{h_a}\right)^4}{d_b+d_c}\geq\frac{8}{R+r}$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a^2}{h_a^2}\geq 4$.

31) $\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{p-a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{2p}{r}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{p-a}=\frac{2p}{r}$.

32) $\sum\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{b+c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{p}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{b+c}=\frac{p}{R}$.

33) $\sum\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{h_a}\geq 3$.

34) $\sum\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^4}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{2(R+r)}$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2\geq 3$.

35) $\sum\frac{\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^{2n}}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{2(R+r)}$, unde $n\in\boldsymbol{N}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^n\geq 3$.

36) $\sum\frac{\left(\frac{1}{h_a+r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{1}{2R^2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{h_a+r_a}\geq\frac{1}{R}$.

37) $\sum\frac{\left(\frac{a}{h_a+r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{2p}{3R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{h_a+r_a}\geq\frac{2p}{3R}$.

38) $\sum\frac{\left(\frac{h_a}{r+r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{81}{32(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_a}{r+r_a}\geq\frac{9}{4}$.

39) $\sum\frac{\left(\frac{r_a}{r+r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{81}{32(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{r+r_a}\geq\frac{9}{4}$.

40) $\sum\frac{\left(\frac{bc}{h_ar_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{8}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{h_ar_a}\geq 4$.

41) $\sum\frac{\left(\frac{h_b+h_c}{r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{18}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_b+h_c}{r_a}=6$.

42) $\sum\frac{\left(\frac{r_a}{h_b+h_c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{8(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_a}{h_b+h_c}\geq\frac{3}{2}$.

43) $\sum\frac{\left(\frac{h_a}{r_b+r_c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{3r}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}\geq\frac{3r}{R}$.

44) $\sum\frac{l_a^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(9r)^2}{2(R+r)}$

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a\geq 9r$.

45) $\sum\frac{l_a^4}{d_b+d_c}\geq\frac{27S^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a^2\geq 3S\sqrt{3}$.

46) $\sum\frac{1}{l_a^2(d_b+d_c)}\geq\frac{2}{R^2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_a}\geq\frac{2}{R}$.

47) $\sum\frac{1}{l_a^4(d_b+d_c)}\geq\frac{81}{2p^4(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_a^2}\geq\frac{9}{p^2}$.

48) $\frac{1}{l_b^2l_c^2\left(d_b+d_c\right)}\geq\frac{81}{2p^4\left(R+r\right)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{l_bl_c}\geq\frac{9}{p^2}$.

49) $\frac{1}{a^2l_a^2\left(d_b+d_c\right)}\geq\frac{1}{2R^4\left(R+r\right)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{al_a}\geq\frac{1}{R^2}$.

50) $\sum\frac{\left(\frac{l_a}{p-a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{p}{3r}\right)^2}{2\left(R+r\right)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{l_a}{p-a}\geq\frac{p}{3r}$.

51) $\sum\frac{\left(\frac{bc}{l_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(12r\right)^2}{2\left(R+r\right)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{l_a}\geq 12r$.

52) $\sum\frac{\left(\frac{b+c}{l_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{24}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{b+c}{l_a}\geq 4\sqrt{3}$.

53) $\sum\frac{\left(\frac{l_bl_c}{l_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(9r\right)^2}{2\left(R+r\right)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{l_bl_c}{l_a}\geq 9r$.

54) $\sum \frac{\left(\frac{l_b+l_c}{l_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{18}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{l_b+l_c}{l_a} \geq 6$.

55) $\sum \frac{\left(\frac{bc}{l_a^2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{8}{R+r}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{bc}{l_a^2} \geq 4$.

56) $\sum \frac{\left(l_a \sin\frac{A}{2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{9r}{2}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \sin\frac{A}{2} \geq \frac{9r}{2}$.

57) $\sum \frac{\left(l_a \cos\frac{A}{2}\right)^2}{d_a+d_c} \geq \frac{\left(\frac{9r\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \cos\frac{A}{2} \geq \frac{9r\sqrt{3}}{2}$.

58) $\sum \frac{\left(l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{9Sr}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum l_a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq \frac{9Sr}{R}$.

59) $\sum \frac{\left(m_a^2 h_b h_c\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{(3S)^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a^2 h_b h_c \geq 9S^2$.

60) $\sum \frac{\left(\frac{b^2+c^2}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{(4R)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{b^2+c^2}{h_a} \geq 4R$.

61) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^2}{h_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{9R}{2}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^2}{h_a} \geq \frac{9R}{2}$.

62) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^2}{h_b h_c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{9}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} \geq 3$.

63) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^2}{h_b+h_c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{9R}{4}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^2}{h_b+h_c} \geq \frac{9R}{4}$.

64) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^4}{h_b h_c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{(27r^2)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^4}{h_b h_c} \geq 27r^2$.

65) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^2}{bc}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{81}{32(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^2}{bc} \geq \frac{9}{4}$.

66) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^4}{l_a^2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(27r^2\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^4}{l_a^2} \geq 27r^2$.

67) $\sum \frac{\left(\frac{m_a^4}{l_a r_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(27r^2\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^4}{l_a r_a} \geq 27r^2$.

68) $\sum \frac{\frac{(m_a l_a)^4}{(p-a)^2}}{d_b+d_c} \geq \frac{p^6}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{m_a^2 l_a^2}{p-a} \geq p^3$.

69) $\sum \frac{(m_a l_a)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{p^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum m_a l_a \geq p^2$.

70) $\sum \frac{\left(\frac{h_a}{l_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{3r}{R(R+r)}$.

Soluție.

Folosim Inegalitatea lui Bergström ,Teorema lui Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{h_a}{l_a} \geq 3\sqrt{\frac{2r}{R}}$.

71) $\sum \frac{a^2(p-a)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{6S^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a(p-a) \geq 2S\sqrt{3}$.

72) $\sum \frac{(p-b)^2(p-c)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{3S^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalit. Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum(p-b)(p-c)\geq S\sqrt{3}$.

73) $\sum\frac{(p-b)^4(p-c)^4}{d_b+d_c}\geq\frac{S^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalit. Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum(p-b)^2(p-c)^2\geq S^2$.

74) $\sum\frac{b^2c^2(p-a)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{1944r^6}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum bc(p-a)\geq 36\sqrt{3}r^3$.

75) $\sum\frac{\frac{a}{b+c-a}}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq 3$.

76) $\sum\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{8(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$.

77) $\frac{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{18}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{b+c}{a}\geq 6$.

78) $\sum\frac{\frac{a^4}{(p-a)^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{8p^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a^2}{p-a}\geq 4p$.

79) $\sum\frac{\frac{b^2c^2}{(p-a)^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{8p^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{p-a}\geq 4p$.

80) $\sum\frac{\frac{a^2}{(p-a)^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{18}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{p-a}\geq 6$.

81) $\sum\frac{\frac{(p-a)^2}{a^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{9}{8(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{p-a}{a}\geq\frac{3}{2}$.

82) $\sum\frac{\frac{1}{a^2(p-a)^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{1}{2R^2r^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{p-a}\geq\frac{\sqrt{3}}{r}$.

83) $\sum\frac{\frac{1}{(p-a)^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{3}{2r^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{a(p-a)}\geq\frac{1}{Rr}$.

84) $\sum\frac{\frac{1}{(p-a)^4}}{d_b+d_c}\geq\frac{1}{2r^4(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{(p-a)^2}\geq\frac{1}{r^2}$.

85) $\sum\frac{\frac{(p-a)^4}{a^2}}{d_b+d_c}\geq\frac{p^2}{8(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{(p-a)^2}{a}\geq\frac{p}{2}$.

86) $\sum \frac{\frac{(p-a)^4}{b^2c^2}}{d_b+d_c} \geq \frac{9}{32(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{(p-a)^2}{a} \geq \frac{3}{4}$.

87) $\sum \frac{\left(\frac{1}{b+c-a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{81}{8p^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{9}{2p}$.

88) $\sum \frac{\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{9}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a}{b+c-a} \geq \frac{3R}{2r} \geq 3$.

89) $\sum \frac{\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{\left(\frac{2S}{R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{bc}{b+c} \geq \frac{2S}{R}$.

90) $\sum \frac{\left(\frac{a^2}{b+c}\right)^2}{d_a+d_c} \geq \frac{p^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a^2}{b+c} \geq p$.

91) $\sum \frac{\frac{b^2c^2}{(p-a)^2}}{d_b+d_c} \geq \frac{72}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{bc}{(p-a)^2} \geq \frac{6R}{r} \geq 12$.

92) $\sum \frac{\frac{a^4}{(p-a)^2}}{d_b+d_c} \geq \frac{72}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{a^2}{(p-a)^2} \geq 12$.

93) $\sum \frac{\left(\frac{p+a}{b+c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{225}{32(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{p+a}{b+c} \geq \frac{15}{4}$.

94) $\sum \frac{\left(a\sin\frac{A}{2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{p^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a\sin\frac{A}{2} \geq p$.

95) $\sum \frac{\left(\frac{1}{a}tg\frac{A}{2}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{1}{2R^2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{1}{a}tg\frac{A}{2} \geq \frac{1}{R}$.

96) $\sum \frac{r_a^2}{d_b+d_c} \geq \frac{(4R+r)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum r_a \geq 4R+r$.

97) $\sum \frac{r_b^2 r_c^2}{d_b+d_c} \geq \frac{p^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum r_b r_c = p^2$.

98) $\sum \frac{r_a^{-2}}{d_b+d_c} \geq \frac{r^{-2}}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r}$.

99) $\sum \frac{a^2 r_a^2}{d_b + d_c} \geq \frac{18S^2}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum ar_a \geq 6S$.

100) $\sum \frac{r_a^4}{d_b + d_c} \geq \frac{p^4}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum r_a^2 \geq p^2$.

101) $\sum \frac{\left(\frac{a^2}{r_b r_c}\right)^2}{d_b + d_c} \geq \frac{8}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum \frac{a^2}{r_b r_c} \geq 4$.

102) $\sum \frac{\left(\frac{a^2}{r_a^2}\right)^2}{d_b + d_c} \geq \frac{8}{R+r}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum \frac{a^2}{r_a^2} \geq 4$.

103) $\sum \frac{\left(\frac{a^2}{r_a}\right)^2}{d_b + d_c} \geq \frac{(12r)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum \frac{a^2}{r_a} \geq 12r$.

104) $\sum \frac{\left(\frac{r_a}{bc}\right)^2}{d_b + d_c} \geq \frac{\left(\frac{3}{2R}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a + d_b + d_c = R + r$ și $\sum \frac{r_a}{bc} \geq \frac{3}{2R}$.

105) $\sum \frac{\left(\frac{a}{r_a^2}\right)^2}{d_b + d_c} \geq \frac{\left(\frac{6}{p}\right)^2}{2(R+r)}$.

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{r_a^2}\geq\frac{6}{p}$.

106) $$\frac{\left(\frac{1}{r_a^2}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(\frac{3}{p}\right)^4}{2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{r_a^2}\geq\frac{9}{p^2}$.

107) $$\sum\frac{\left(a^2r_a\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{\left(108r^2\right)^2}{2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum a^2r_a\geq 108r^2$.

108) $$\sum\frac{\left(\frac{bc}{r_b+r_c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{(6r)^2}{2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{bc}{r_b+r_c}\geq 6r$.

109) $$\sum\frac{\left(\frac{a}{r_a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{6}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{a}{r_a}\geq 2\sqrt{3}$.

110) $$\sum\frac{\left(\frac{r_b+r_c}{a}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{27}{2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{r_b+r_c}{a}\geq 3\sqrt{3}$.

111) $$\sum\frac{\left(\frac{1}{r_b+r_c}\right)^2}{d_b+d_c}\geq\frac{1}{2R^2(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum\frac{1}{r_b+r_c}\geq\frac{1}{R}$.

112) $$\sum \frac{\left(\frac{r_a}{r_b+r_c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{9}{8(R+r)}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{r_a}{r_b+r_c} \geq \frac{3}{2}$.

113) $$\sum \frac{\left(\frac{r_b+r_c}{r_a}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{18}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{r_b+r_c}{r_a} \geq 6$.

114) $$\sum \frac{\left(\frac{bc}{r_b r_c}\right)^2}{d_b+d_c} \geq \frac{8}{R+r}.$$

Soluție.

Vezi Inegalitatea Bergström ,Teorema Carnot $d_a+d_b+d_c=R+r$ și $\sum \frac{bc}{r_b r_c} \geq 4$.

Remarcă.

La toate inegalitățile de mai sus, egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie:

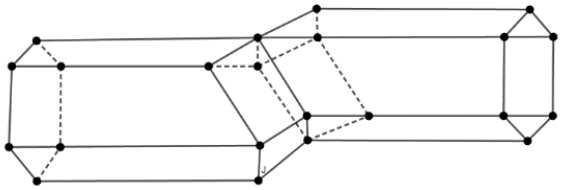
1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.
3. Marin Chirciu, Inegalități geometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2015.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
6. Marin Chirciu, Puncte remarcabile în triunghi. Distanțe. Inegalități, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2019.

19 Martie 2019

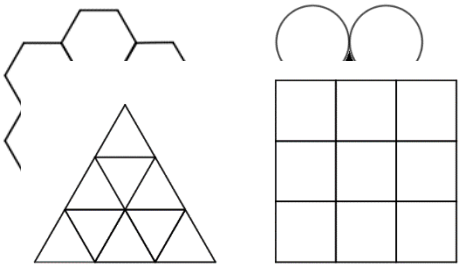
3. Matematica celulelor de faguri

Prof. Roman Rozalia Ioana
Școala Gimnazială ”Augustin Buzura” Copalnic Mănăștur

Dacă despre creierul albinelor, care este cel mai dezvoltat în comparație cu alte insecte, elevul poate să învețe la biologie, la geometrie sau la analiză matematică poate afla că albina este un matematician și un arhitect genial. Ele construiesc eficient fagurii în formă de prisme hexagonale regulate perfecte, cu un minim de resurse materiale și de manoperă. Forma fagurilor a fost studiată încă din Antichitate, iar din 1950 aceasta este folosită ca model în construcția aeronavelor, datorită raportului foarte bun rezistență – greutate.



Desigur, albinele realizează aceste constrcții instinctiv, obținând economie de spațiu și economie de ceară. Forma hexagonală a fagurilor este cea mai apropiată de cerc. Un capăt al celulei este deschis pentru introducerea mierii sau a larvei, iar capătul de jos al celulei nu e drept, ci este format din trei fețe rombice ce se întâlnesc într-un vârf. Astfel, celulele fagurilor nu au axele în prelungire, ci axa celulei dintr-o parte vine în prelungirea muchiei comune a trei celule din partea opusă. Deși fagurii sunt formați din mii de celule, acestea sunt identice și au aceleași dimensiuni.



De ce albinele au ales pentru construcția celulelor forma hexagonală, si nu cilindrică sau triunghiulară, spre exemplu? Celulele cilindrice alăturate au un singur contact după o generatoare și se crează spații goale printre ele, ceea ce ar duce nu numai la lipsa economiei de ceară, dar și de spațiu. Pentru a acoperi planul cu poligoane regulate identice (dintre poligoanele izoperimetrice cu același număr de laturi, poligonul regulat are cea mai mare arie), există trei variante: triunghiul echilateral, pătratul sau hexagonul regulat. Un poligon cu *n* laturi are suma unghiurilor egală cu $(n-2)\cdot 180°$, deci unul dintre unghiuri are $\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$ grade. Dacă acoperim planul cu astfel de poligoane și că *m* poligoane au un vârf comun, deoarece suma unghiurilor formate în jurul unui punct este $360°$, atunci fiecare unghi va avea măsura de $\frac{360°}{m}$. Prin egalarea cele două rezultate $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = \frac{360°}{m}$, se obține $n = \frac{2m}{m-2}$, de unde $n = 2 + \frac{4}{m-2}$. Cum *n* și 2 sunt numere naturale, este necesar ca și $\frac{4}{m-2}$ să fie număr natural. Astfel, $m-2$ este divizor natural al lui 4, iar *m* poate lua valorile 3, 4 sau 6. De aici, se află ce valori poate avea *n*:

6, 4 sau 3, adică planul poate fi acoperit cu hexagone regulate, pătrate sau triunghiuri echilaterale. Căutăm cel mai bun raport izoperimetric $\frac{A}{p^2}$ pentru aceste figuri geometrice, adică figura geometrică cu arie maximă, pentru perimetru minim.

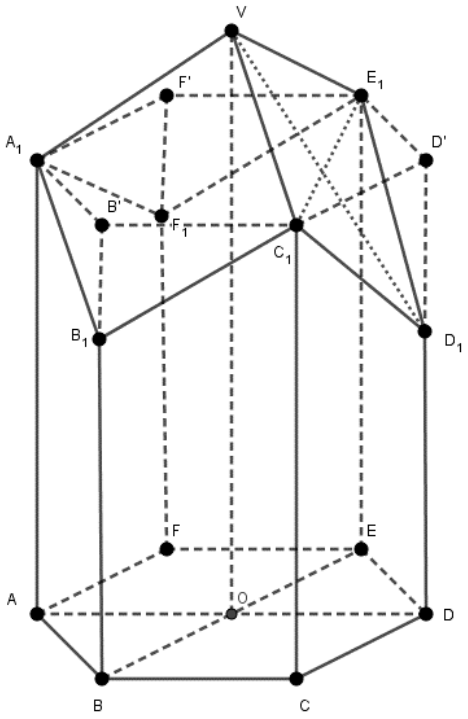
Triunghiul echilateral: $\frac{A}{p^2} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{9l^2} = \frac{\sqrt{3}}{36}$

Pătratul: $\frac{A}{p^2} = \frac{l^2}{16l^2} = \frac{1}{16}$

Hexagone regulate: $\frac{A}{p^2} = \frac{\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}{36l^2} = \frac{\sqrt{3}}{24}$

Comparăm cele trei rapoarte obținute: $\frac{\sqrt{3}}{36} < \frac{1}{16} < \frac{\sqrt{3}}{24}$, de unde se obține următoarea concluzie: un poligon regulat cu laturi mai multe este mai cuprinzător decât unul cu laturi mai puține. Așa se explică de ce albinele au ales să construiască celulele cu secțiunea hexagon regulat. Aceasta este expresia matematică a gândurilor lui Dumnezeu sau a legilor naturii care au condus la forma hexagonală a fagurilor albinelor.

Naturalistul francez René Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757) îi propune matematicianului și fizicianului german Johann Samuel König (1712-1757) următoarea problemă: Analizați o celulă cu 6 muchii de secțiune hexagon regulat, înfundată prin trei fețe rombice întâlnindu-se în axa celulei astfel încât aria celor trei romburi să fie cât mai mică posibil pentru un anumit volum intern al celulei.



Fie hexagonului $ABCDEF$ gura celulei, de latură $2l$, de unde diagonalele $AD = 4l$ și $BD = 2l\sqrt{3}$. Hexagonul $A_1B'C_1D'E_1F'$ reprezintă fundul celulei, dacă ar fi fost perpendicular pe axa celulei și $VA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ redă fundul celulei constituită din trei romburi de dimensiuni egale, cu vârful comun V. Planul $(A_1C_1E_1)$ este perpendicular pe axa OV a celulei, iar vârful V se găsește la aceeași distanță x de acesta ca și planul $(B_1D_1F_1)$, adică distanța $d(V,(A_1C_1E_1)) = d((B_1D_1F_1),(A_1C_1E_1)) = x$ și deci $d(V,(B_1D_1F_1)) = 2x$. Diagonalele unui romb, spre exemplu $VC_1D_1E_1$ din cele trei, au dimensiunile $C_1E_1 = CE = 2l\sqrt{3}$ iar $VD_1 = 2y$. Atunci proiecția diagonalei VD_1 pe planul ABCDEF este raza OD a cercului circumscris hexagonului, adică $Pr_{(ABCDEF)}VD_1 = OD = 2l$. Proiecția diagonalei VD_1 pe axa OV este chiar distanța $d(V,(B_1D_1F_1)) = 2x$. Conform teoremei lui Pitagora, se poate scrie relația $(2y)^2 = (2x)^2 + (2l)^2$, de unde:

$$y^2 = x^2 + l^2. \qquad (1)$$

Comparăm volumul celelei $V_{celulă}$ cu fundul $VA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ și volumul prismei $A_1B'C_1D'E_1F'$ cu baza hexagon regulat, $V_{prismă}$. Pentru aceasta, notăm înălțimea prismei $OO' = h$.

$$V_{prismă} = A_b \cdot h = \frac{3hl^2\sqrt{3}}{2}$$

Pentru a afla volumul celulei, se elimina volumul celor trei piramide echivalente (de dimensiuni egale) $B'A_1B_1C_1$, $D'C_1D_1E_1$și $F'E_1F_1A_1$ și se adaugă volumul piramidei $VA_1C_1E_1$.

$$V_{celulă} = V_{prismă} - 3 \cdot V_{B'A_1B_1C_1} + V_{VA_1C_1E_1}$$

$$A_{B'A_1C_1} = \frac{B'C_1 \cdot A_1C \cdot \sin B'\widehat{C_1}A_1}{2} = \frac{2l\sqrt{3} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}}{2} = l^2\sqrt{3},\ V_{B'A_1B_1C_1} = \frac{A_{B'A_1C_1} \cdot B_1B'}{3} = \frac{l^2x\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{A_1C_1E_1} = \frac{(2l\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3l^2\sqrt{3},\ V_{VA_1C_1E_1} = \frac{A_{A_1C_1E_1} \cdot VO_1}{3} = \frac{3l^2\sqrt{3} \cdot x}{3} = l^2x\sqrt{3}$$

$$\text{Deci } V_{celulă} = V_{prismă} - 3 \cdot \frac{l^2x\sqrt{3}}{3} + l^2\sqrt{3} = V_{prismă}$$

În concluzie, celula construită de către albină are același volum cu prisma hexagonală regulate cu aceleași dimensiuni.

Comparăm ariile pentru a analiza economia de ceară realizată de albine în construcția fagurilor.

În cazul prismei hexagonale regulate, aria totală construită este

$$A_{prismă} = A_l + A_b = 6lh + 6l^2\sqrt{3}$$

Pentru a calcula aria suprafeței unei celule cu fund rombic, din aria laterală a prismei se elimină aria a 6 triunghiuri dreptunghice echivalente, congruente cu $\Delta B'B_1C_1$ și se adaugă aria celor 3 romburi.

$$A_{celulă} = A_l - 6 \cdot A_{B'B_1C_1} + 3 \cdot A_{VC_1D_1E_1}$$

$$A_{B'B_1C_1} = \frac{B'B_1 \cdot B'C_1}{2} = xl,\ A_{VC_1D_1E_1} = \frac{C_1E_1 \cdot VD_1}{2} = 2ly\sqrt{3}$$

$$A_{celulă} = 6lh - 6 \cdot xl + 3 \cdot 2ly\sqrt{3}$$

$$A_{celulă} = 6l\left(h - x + y\sqrt{3}\right)$$

Calculăm diferența dintre cele două arii:

$$A_{prismă} - A_{celulă} = 6lh + 6l^2\sqrt{3} - \left(6lh - 6xl + 6ly\sqrt{3}\right) = 6l\left(l\sqrt{3} + x - y\sqrt{3}\right) \quad (2)$$

Folosind relația (1), se obține $y = \sqrt{x^2 + l^2}$ și înlocuind în relația (2), se obține:

$$A_{prismă} - A_{celulă} = 6l\left(l\sqrt{3} + x - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + l^2}\right)$$

Studiem când această expresie își atinge minimul sau maximul. Pentru aceasta, considerăm funcția $f: (0; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = l\sqrt{3} + x - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + l^2}$, $l \in (0; \infty)$ și o derivăm în raport cu x:

$$f'(x) = 1 - \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

Derivata funcției se anulează $f'(x) = 0$ dacă $x\sqrt{3} = \sqrt{x^2 + l^2}$, de unde $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

x	0	$\frac{l}{\sqrt{2}}$	∞

$f'(x)$	$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$
$f(x)$	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$		$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$

Deci, maximul de economie se realizează pentru $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$, de unde, conform relației (1), obținem:

$$y = \sqrt{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 + l^2} = \frac{l\sqrt{6}}{2}.$$

De aici, obțimen că diagonala $VD_1 = 2y = l\sqrt{6}$. Știm că diagonala $C_1E_1 = 2l\sqrt{3}$, de unde relația dintre cele două diagonale: $VD_1 < C_1E_1$.

Analizăm unghiurile feței rombice. Fie $2\propto = \sphericalangle VC_1D_1$, $\propto = \sphericalangle VC_1E_1$ și $C_1E_1 \cap VD_1 = \{Q\}$. În triunghiul dreptunghic ΔVC_1Q, se obține $\text{tg}\propto = \frac{VQ}{C_1Q} = \frac{\frac{l\sqrt{6}}{2}}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Putem calcula $\text{tg}\, 2\propto = \frac{2\text{tg}\propto}{1-\text{tg}^2\propto} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ și $\cos 2\propto = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 2\propto}} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3}$.

Luând valorile din tabelul cu valorile funcțiilor trigonometrice sinus și cosinus, aflăm că $2\propto = 70°31'44''$.

Unghiul C_1VE_1 este suplementar al unghiului VC_1D_1, deci are măsura de $180° - 2\propto = 109°28'16''$.

Analizâm unghiul pe care îl face fața rombică cu axa celulei, adică unghiul dintre diagonala VD_1și axa OV. Facem notația $\beta = \sphericalangle(VD_1, OV) = \sphericalangle O_1VD_1$ și calculăm $\text{tg}\,\beta = \frac{O_1D_1}{O_1V} = \frac{2l}{2x} = \frac{2l}{\frac{2l}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$, adică $\text{tg}\,\beta = ctg\propto$. Deci, $\beta = 90° - 35°15'52'' = 54°44'8''$.

Înclinarea feței rombice față de secțiunea celulei paralele cu baza, planul $(B_1D_1F_1)$, este $90° - \beta = 90° - 54°44'8'' = 35°15'52''$.

Tangenta unghiului ascuțit al fețelor laterale ale celulei (cum ar fi trapezul DCC_1D_1), adică tangenta unghiului $\sphericalangle CC_1D_1$ are valoarea:

$$tg\sphericalangle CC_1D_1 = \frac{2l}{x} = \frac{2l}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} = \text{tg}\, 2\propto.$$

Deci, unghiurile ascuțite ale fețelor laterale ale celulei sunt congruente cu unghiurile ascuțite ale romburilor.

Concluzionăm că unghiurile formate în jurul vârfurilor A_1, C_1, E_1sunt congruente și au măsura de $70°31'44''$, iar unghiurile formate în jurul vârfurilor V, B_1, D_1, F_1 sunt congruente și au măsura de $109°28'16''$.

Înainte ca Réaumur să îi pună această problemă lui König, putem aminti alți savanți, matematicieni, astronomi din toate timpurile care au fost preocupați de forma regulată a celulelor fagurilor. În Antichitate, Aristotel (384-322 î.Hr.) a remarcat forma hexagonală a celulelor și a menționat acest aspect în scrierea ”*Istoria animalelor*”. Mai târziu, eruditul roman Plinius cel Bătrân (23-79 d.Hr.) descrie munca albinelor, inclusiv forma fagurilor, în lucrarea ”*Naturalis historia*”. Din punct de vedere matematic, prima dată problema este analizată de către Pappus din Alexandria (290-350 d.Hr.), unul dintre ultimii mari matematicieni greci. În lucrarea sa, ”*Colecții matematice - Cartea a V-a*”, Pappus analizează că o regiune poate fi împărțită în hexagoane pentru a obține cel mai optim raport arie/perimetru, adică cea mai mare arie pentru cel

mai mic perimetru. Această conjectura a fost dovedită în 1999 de matematicianul american Thomas C. Hales (n. 1958). Însă forma triromboidală a fundului celulelor a fost descoperită în 1712 de către astronomul și matematicianul francez-italian Giacomo Filippo Maraldi (1665-1729). Acesta a măsurat unghiurile romburilor, cel obtuz având măsura de $109°28'$, iar unghiul ascuțit de $70°32'$.

Totuți, rezultatul lui König și măsurătorile făcute de Maraldi erau ușor diferite. Oamenii de știință erau intrigați de această mică diferență: fie măsurătorile nu erau exacte, fie calculele nu erau corecte. Chiar dacă diferența era aparent neînsemnată, rigurozitatea științifică arăta că ceva nu e bine. Astfel, matematicianul englez Colin Maclaurin (1698 - 1746) a refăcut în 1716 calculele lui König. El a obținut rezultatele date de Maraldi, ceea ce arată că acestea erau corecte, așa cum și raționamentul lui König era corect, însă erorile rezultatelor sale erau datorate tabelelor de logaritmi pe care acesta le folosise. Astfel, acum 300 de ani, albinele au contribuit indirect la corectarea tabelelor de logaritmi ale matematicienilor.

O altă analiză complexă a acestei probleme a fost dată de matematicianul și inginerul Ion Ionescu (1870-1946), unul dintre întemeietorii revistei ”*Gazeta matematică*”. În cartea sa ”*Maxime și minime geometrice*” din anul 1955, acesta analizează maiestria acestor arhitecti – albinele – din toate punctele de vedere. Las cititorului curiozitatea de a analiza soluția propusă de matematicianul român consultând cele 10 pagini dedicate acestui subiect.

Bibliografie:

1. Andone Șt. G., *Varia Mathematica*, Ed.Albatros, București, 1977
2. Opriș T., *Mica enciclopedie a bionicii-inventii tehnice ale naturii*, Editura Didactică şi Pedagogică, București, 2005
3. Ionescu I., *Maxime și minime geometrice*, Ed. Tehnică, București, 1955
4. https://ro.wikipedia.org/wiki/Plinius_cel_Bătrân
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_of_Alexandria
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Callister_Hales

4. LOCURI GEOMETRICE CU PUNCTE, DREPTE sau PLANE
-Studiu de specialitate-

Prof. Stan Ilie[2]

Ne propunem să găsim şi să afişăm locul geometric al punctelor egal depărtate de:

I. Puncte

I.1 Un punct
I.2 Două puncte
I.3 Trei puncte
I.4 Patru şi mai multe puncte

II. Drepte

II.1 O dreaptă
II.2 Două drepte

III. Plane

III.1 Un plan
III.2 Două plane
III.3 Trei plane

Nota #1: La I.1, II.1 şi III.1 se va adăuga "…şi aflate la distanţa a de..."
Nota #2: Acordaţi-vă plăcerea de a vă face o părere…înainte de a "întoarce foaia"!
Nota #3: Câte 1 punct pentru fiecare răspuns corect. Din oficiu 1 punct!

[2] Liceul Tehnologic "Anghel Saligny", Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de un punct fix O este:

.

.

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte fixe A şi B este:

.

.

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei puncte A,B,C este:

.

.

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de n puncte $A_1,A_2,...,A_n$ (n>3) este:

.

.

.

.

Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de o dreaptă fixă d este:

.

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte este:

.

.

.

.

.

Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de un plan fix α este:

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane α şi β este:

.

.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei plane α, β, γ este:

.

.

.

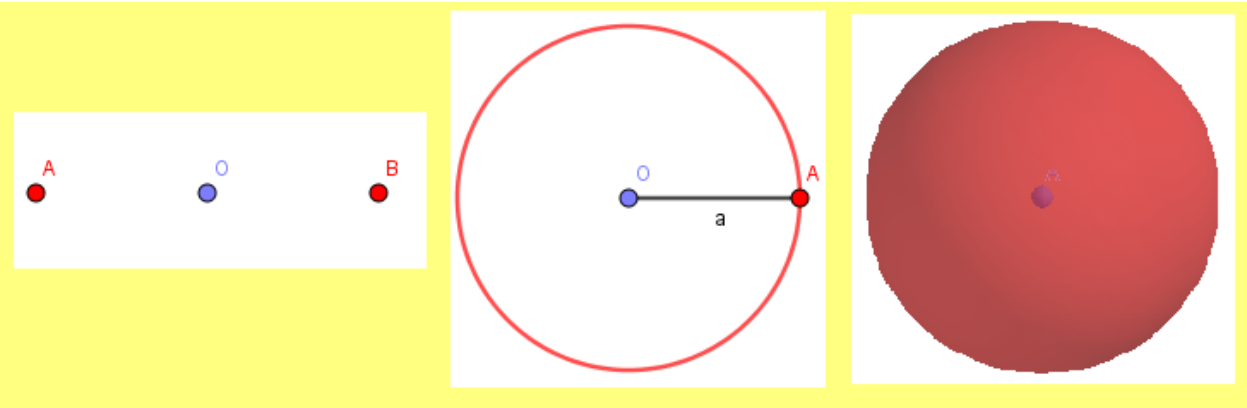
.

.

I. Puncte

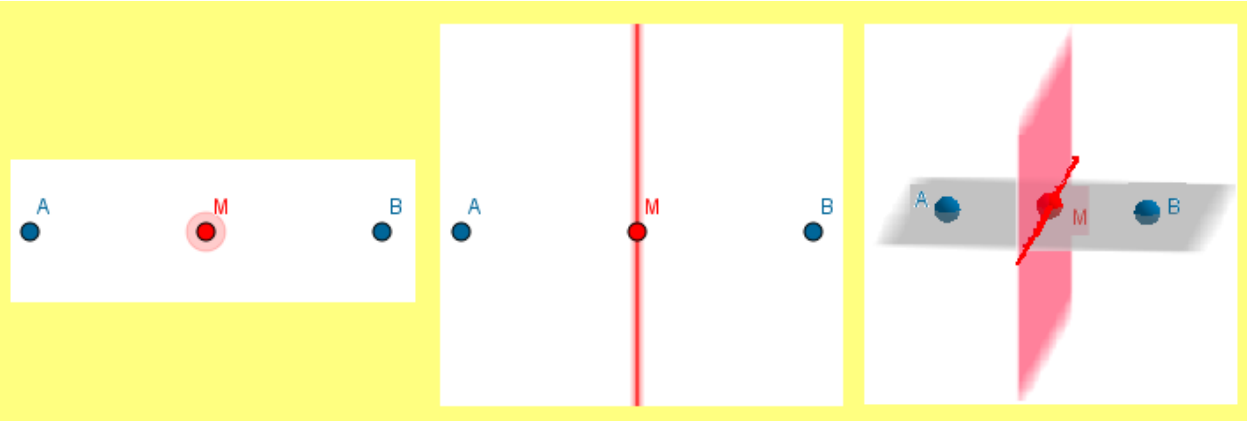
Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de un punct fix O este:
o pereche de puncte/un cerc/o sferă.

I.1.1 ... format din două puncte echidistant situate la distanţa a de punctul O (în 1D)
I.1.2 ... cercul de centru O şi rază a (în 2D)
I.1.3 ... sfera de centru O şi rază a (în 3D)



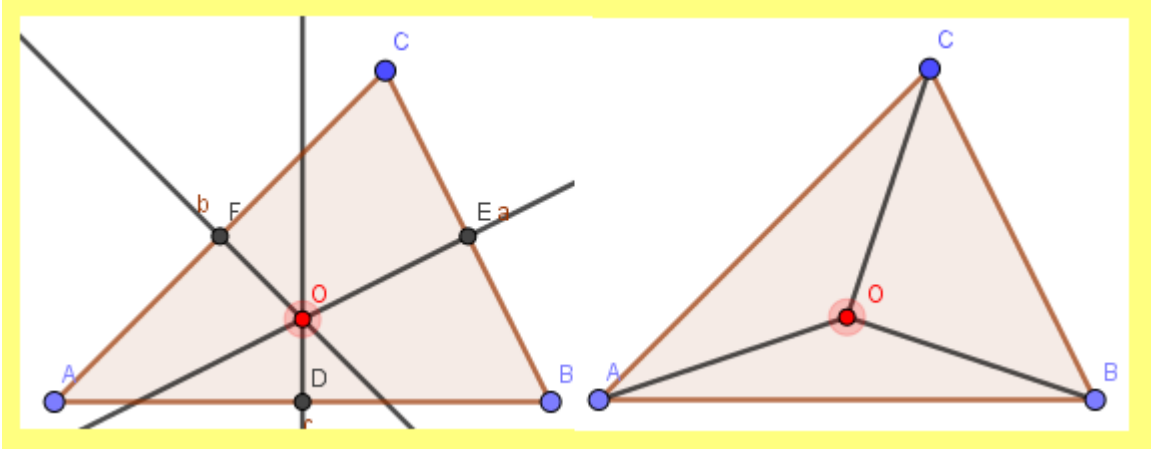
Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte fixe A şi B este:
un punct/o dreaptă/un plan.

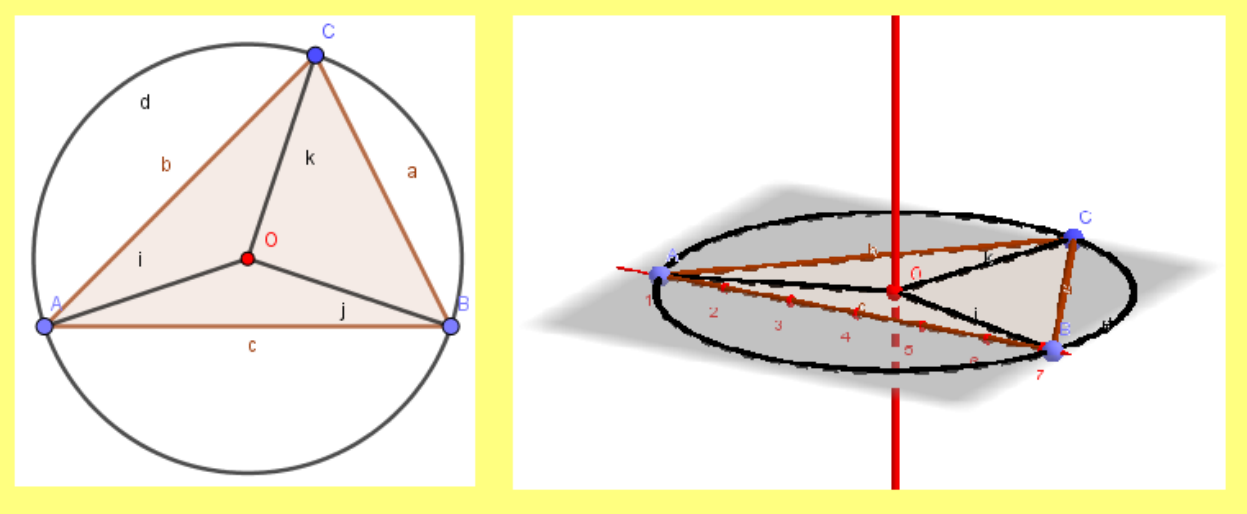
I.2.1 ... un punct M situat la mijlocul segmentului AB (în 1D)
I.2.2 ... perpendiculara pe AB ce trece prin M, deci mediatoarea segmentului AB(în 2D)
I.2.3 ... planul perpendicular pe AB ce trece prin M, deci planul mediator al segmentului AB (în 3D)



Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei puncte A,B,C este:
∅/un punct/o dreaptă.

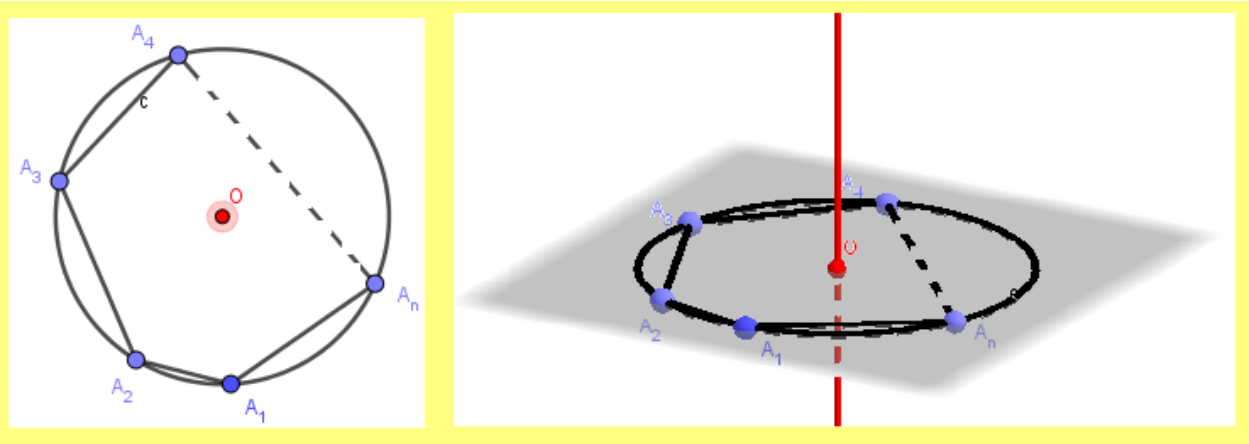
I.3.1 ... mulţimea vidă (pentru puncte coliniare)
I.3.2 ... centrul cercului circumscris triunghiului ABC(în 2D)
I.3.3 ... perpendiculara pe planul triunghiului ABC în centrul cercului său circumscris

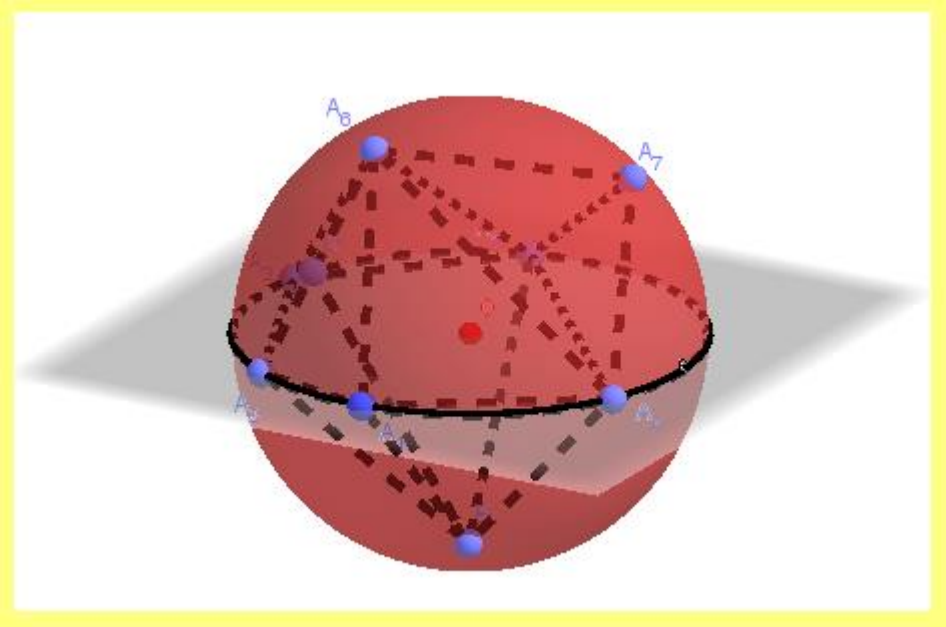




Locul geometric al punctelor egal depărtate de n puncte $A_1, A_2, ..., A_n$ (n>3) este:
∅/un punct/o dreaptă/un punct.

I.4.1 ... mulţimea vidă (pentru puncte ce nu sunt conciclice sau consferice)
I.4.2 ... centrul cercului circumscris n-poligonului (pentru puncte coplanare conciclice-2D)
I.4.3 ... perpendiculara pe planul poligonului, în centrul cercului său circumscris (pentru puncte coplanare conciclice-3D)
I.4.4 ... centrul sferei circumscrise poliedrului (pentru puncte consferice)

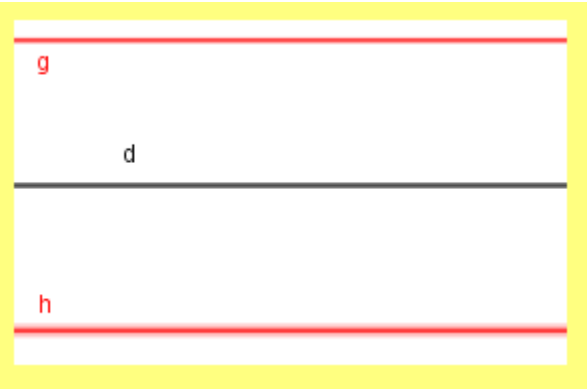


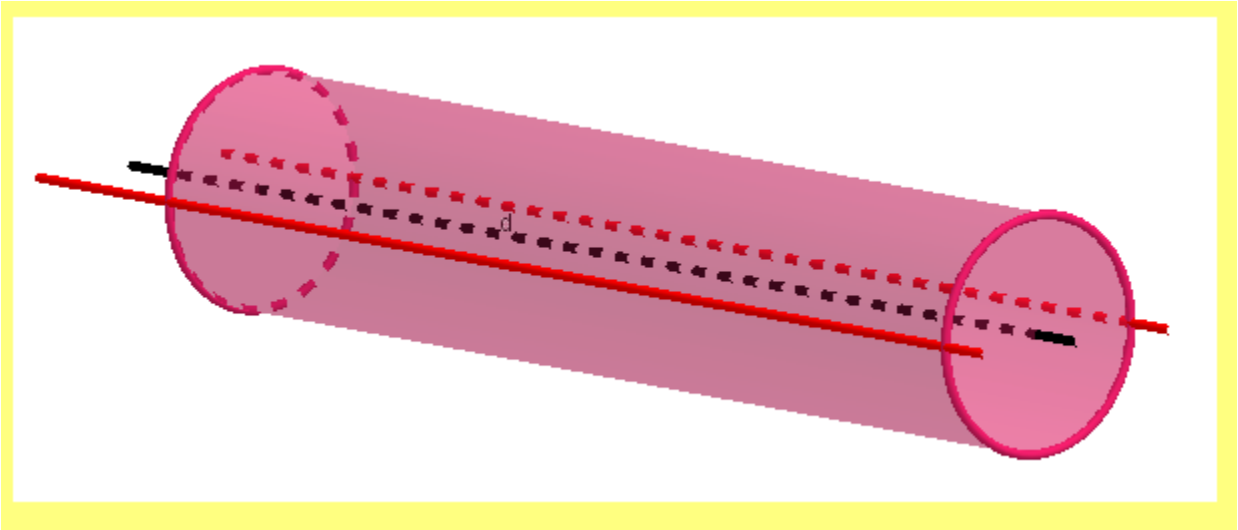


II. Drepte

Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de o dreaptă fixă d este:
o pereche de drepte paralele/ un cilindru

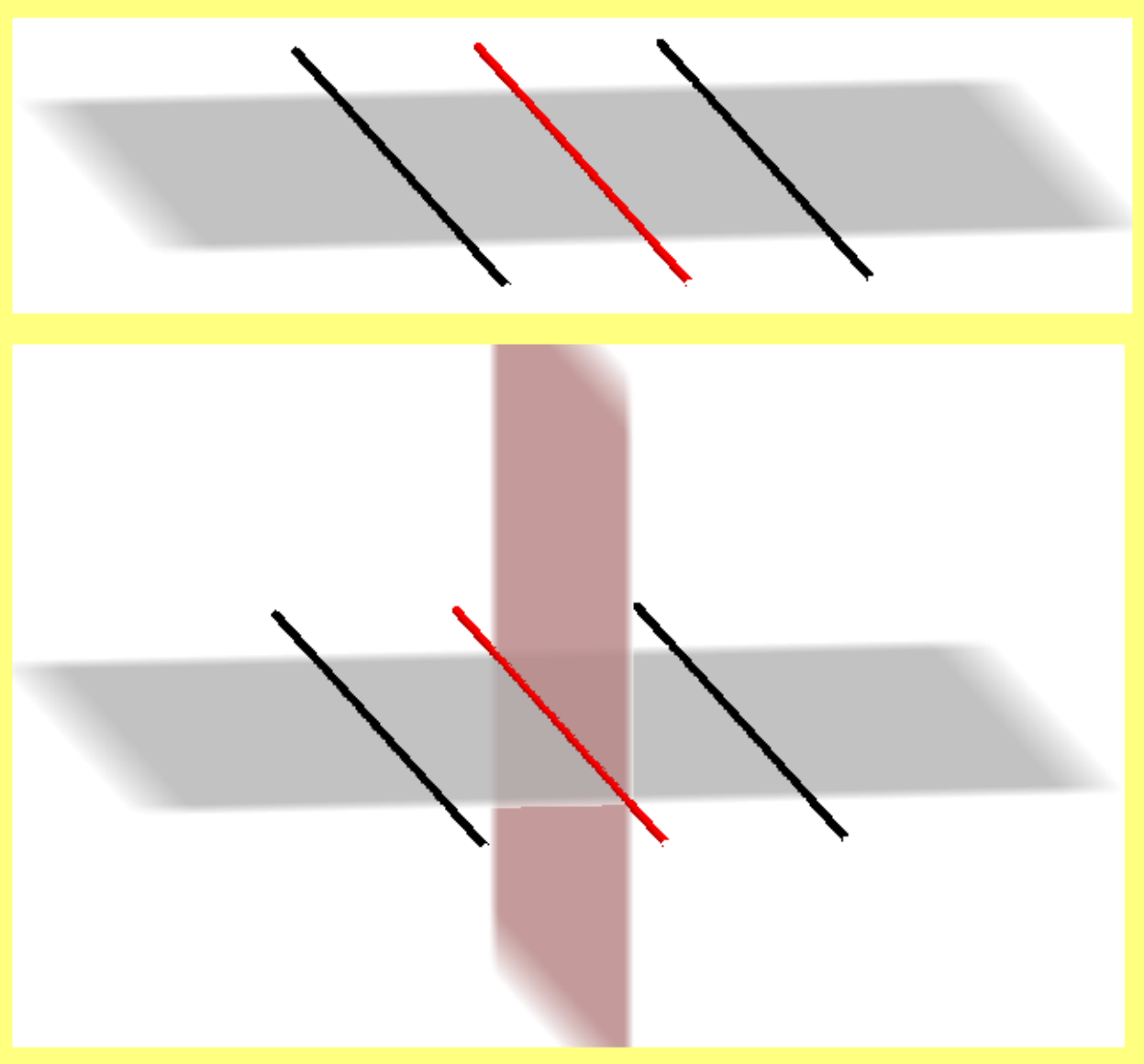
II.1.1 ... format din două drepte paralele echidistant situate la distanţa a de dreapta d(2D)
II.1.2 ... un cilindru(3D)



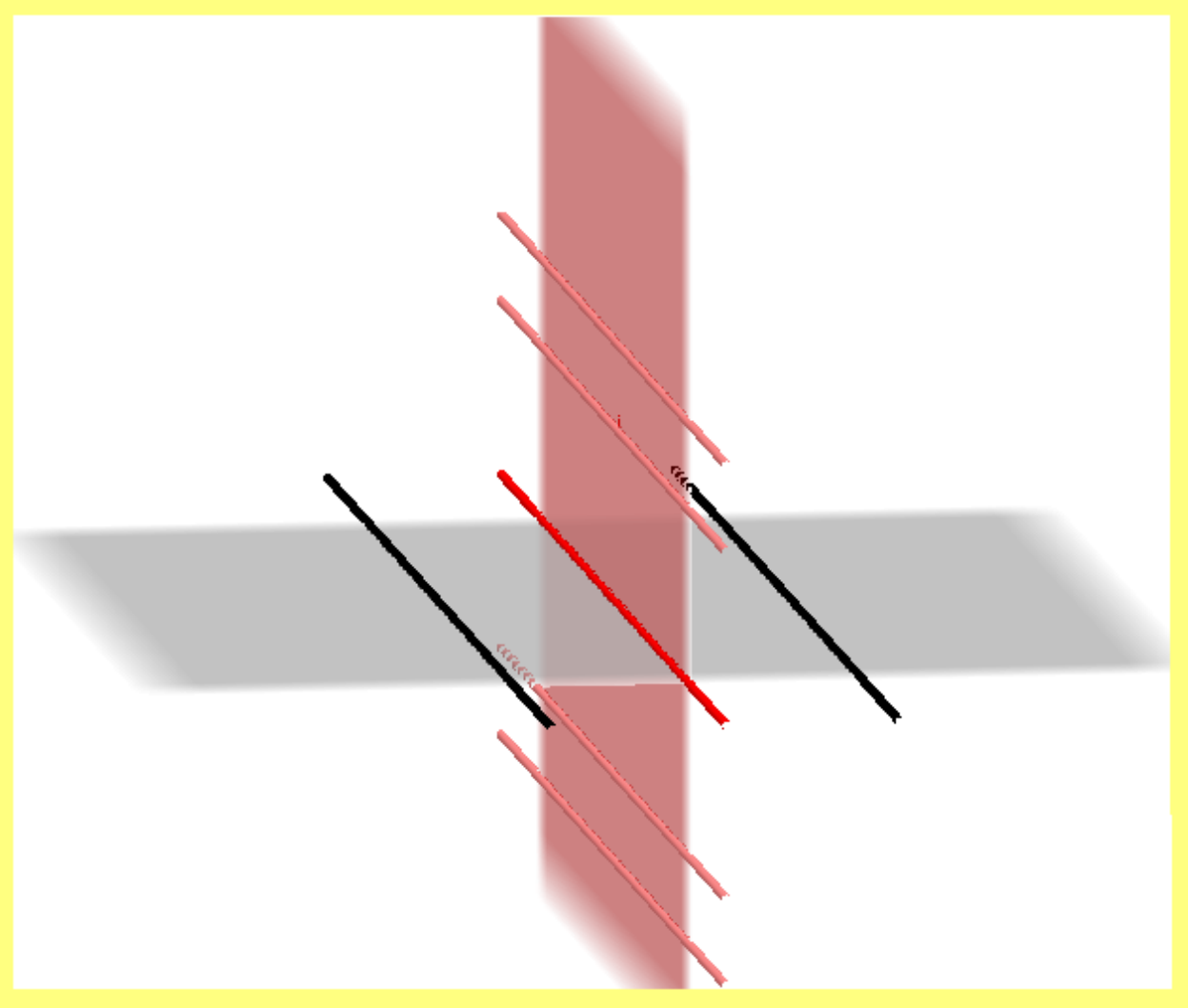


Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele este:
o dreaptă/un plan

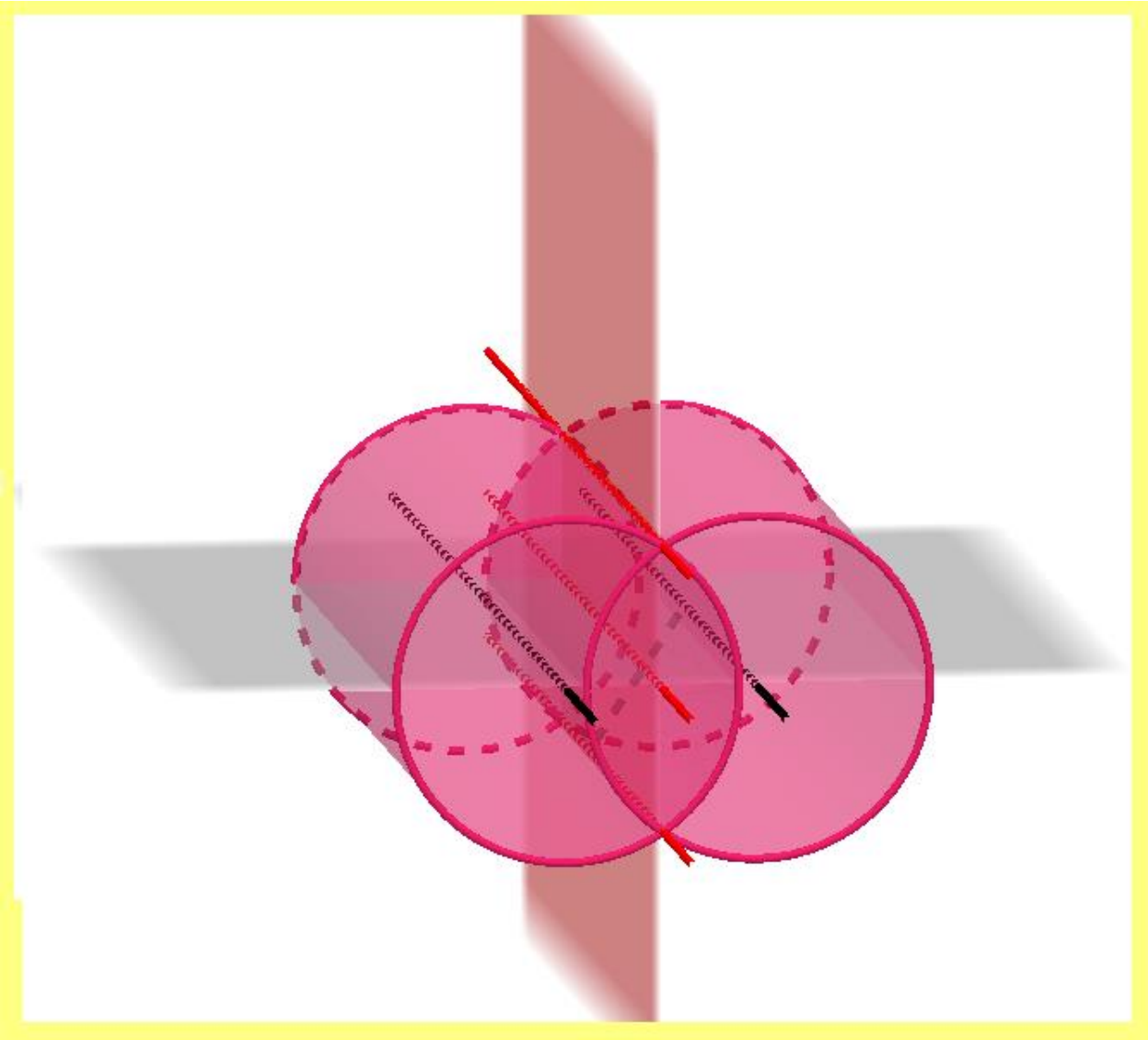
II.2.1.1 O dreaptă paralelă, echidistant situată faţă cele două drepte(în 2D)
II.2.1.2 Un plan perpendicular pe planul celor două drepte, ce conţine dreapta anterioară(în 3D)



Aici interesant este că planul poate proveni din...



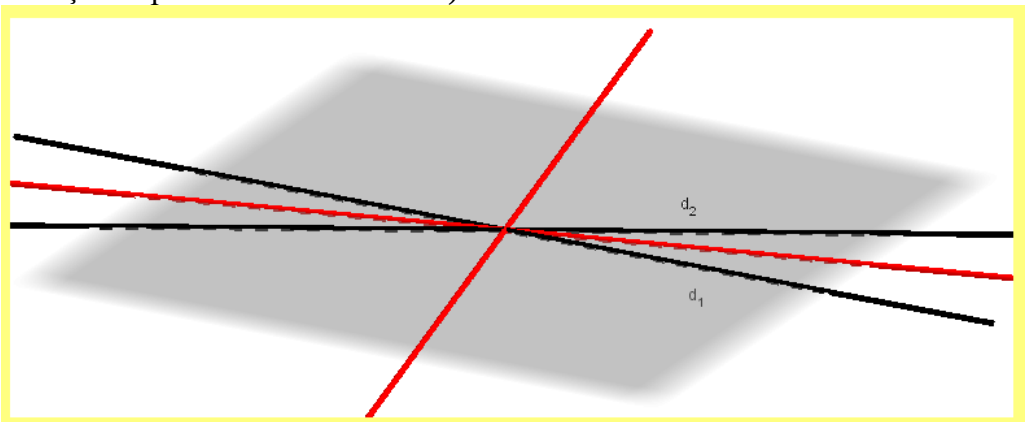
...glisarea dreptei sau din...

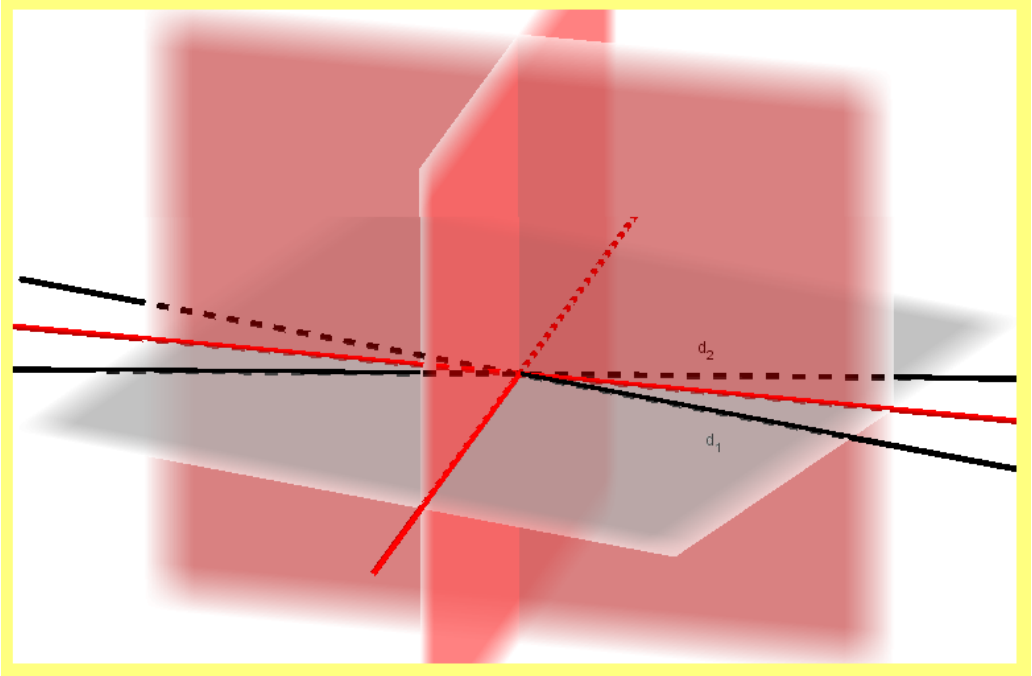


...intersecţia a doi cilindri ce au ca axe cele două drepte paralele şi raze egale(dar variabile)!

Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este:
o pereche de drepte/o pereche de plane

II.2.2.1 Două drepte perpendiculare
(bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte - în 2D)
II.2.2.2 Două plane perpendiculare pe planul celor două drepte
(ce conţin dreptele anterioare - în 3D)

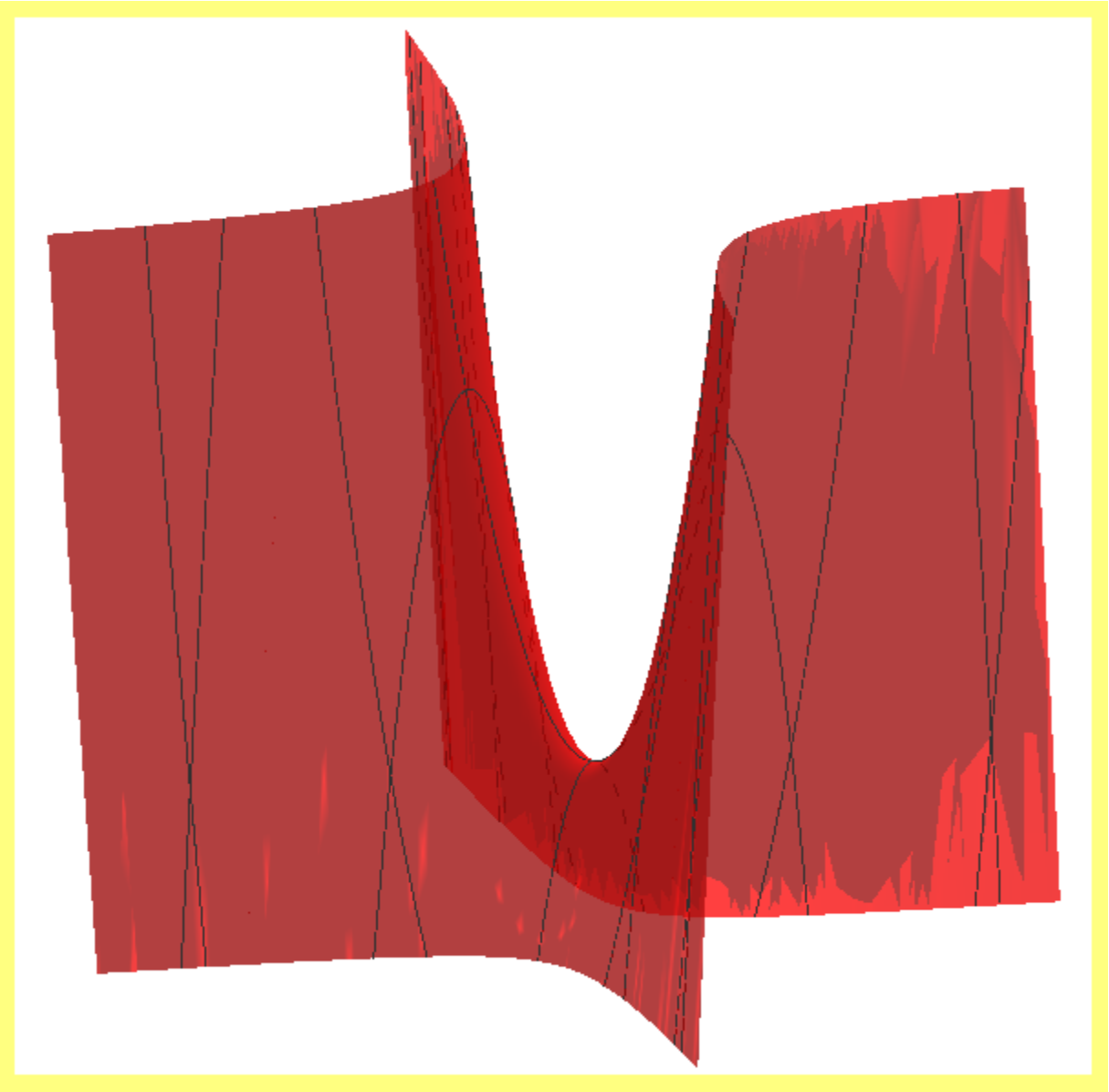




Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte necoplanare este:

…o şa

II.2.3 …

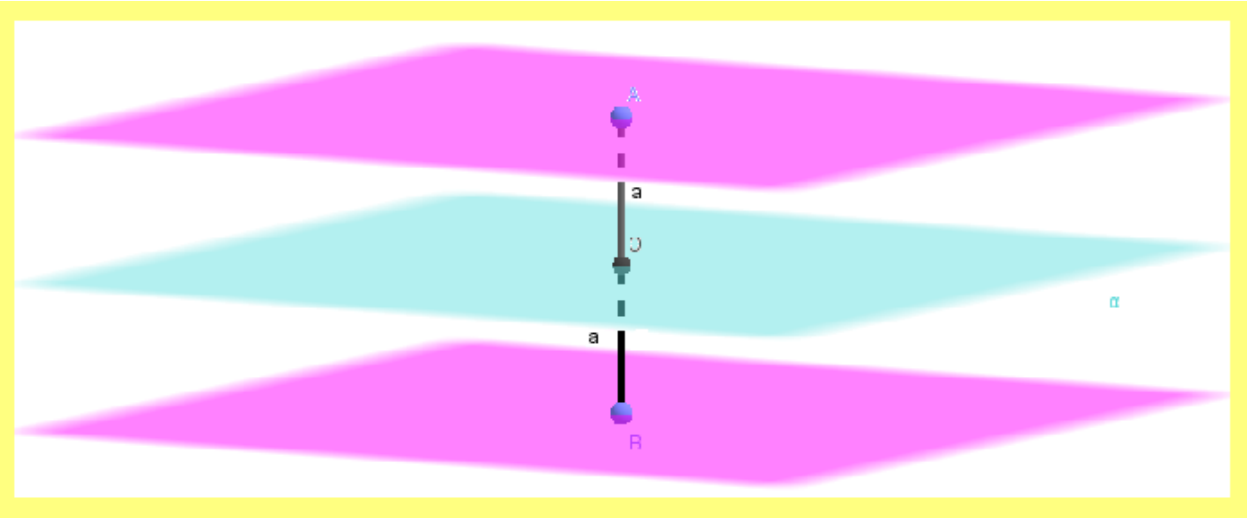


…Un paraboloid hiperbolic

III. Plane

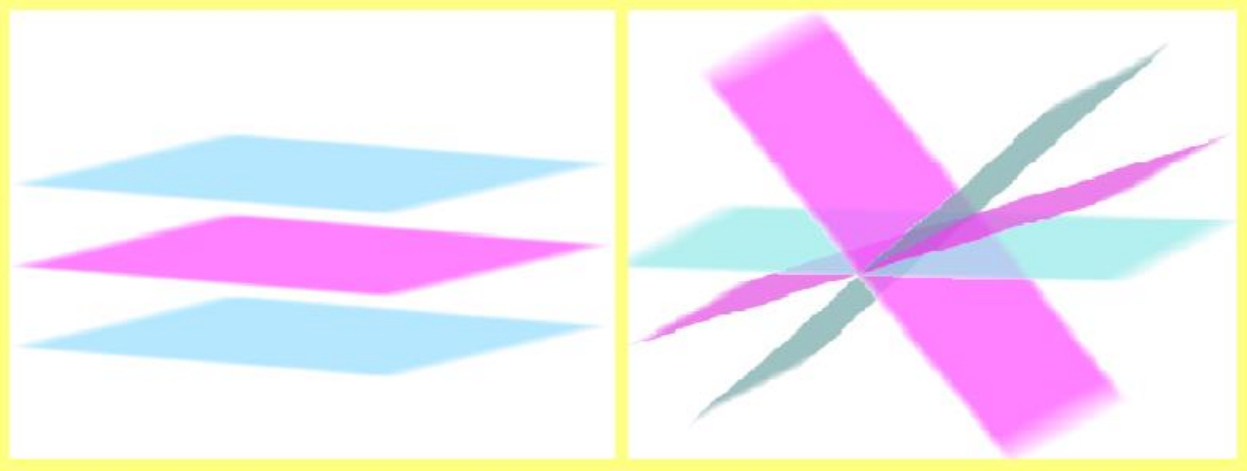
Locul geometric al punctelor aflate la distanţa a de un plan fix α este:
o pereche de plane.

III.1 ... format din două plane echidistant situate la distanţa a de planul **α**



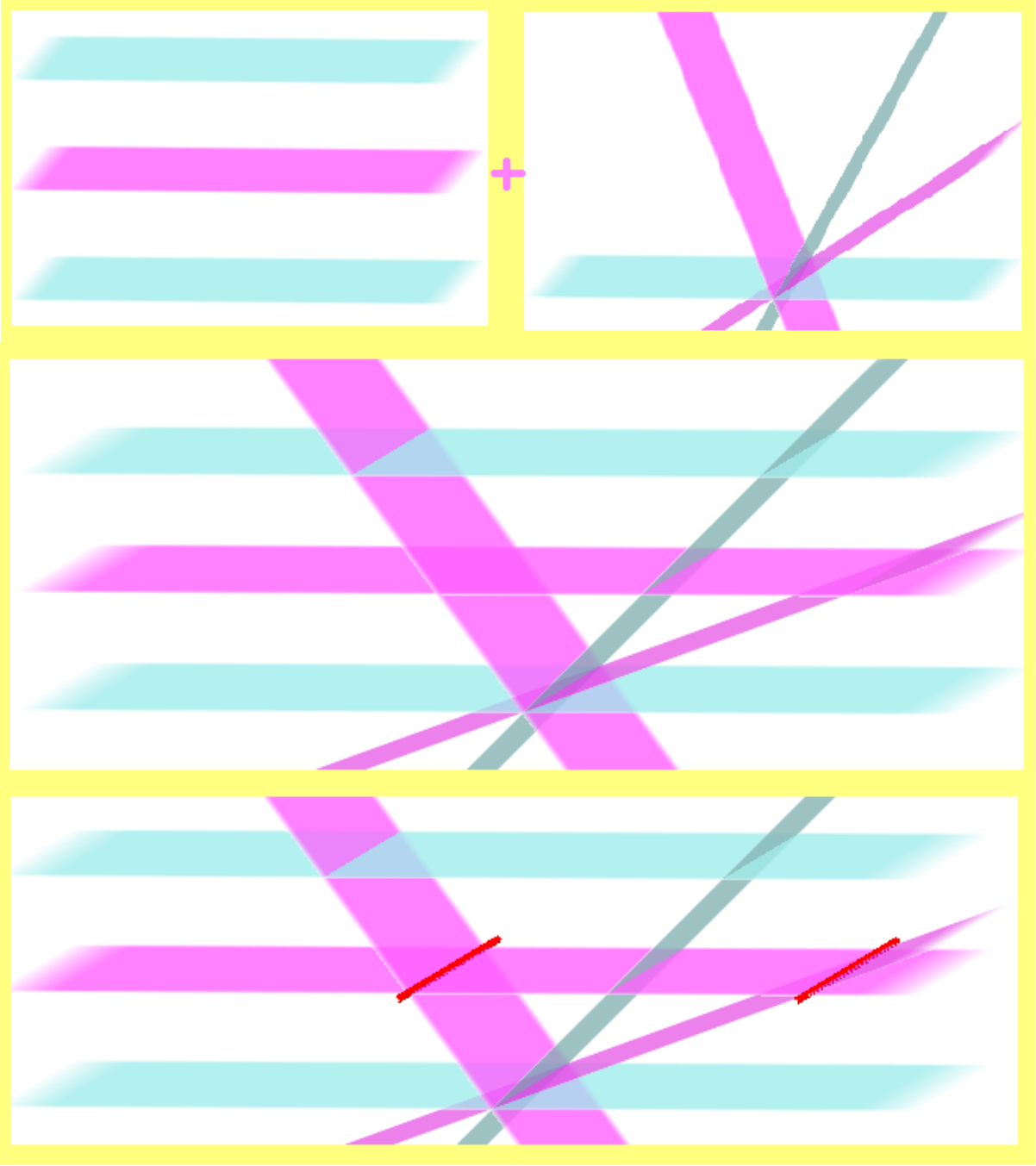
Locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane α şi β este:
un plan/două plane.

III.2.1 ... un plan γ paralel cu α şi β, situat la mijlocul distanţei dintre ele(când α || β)
III.2.2 ... planele bisectoare (când α∩β≠∅)

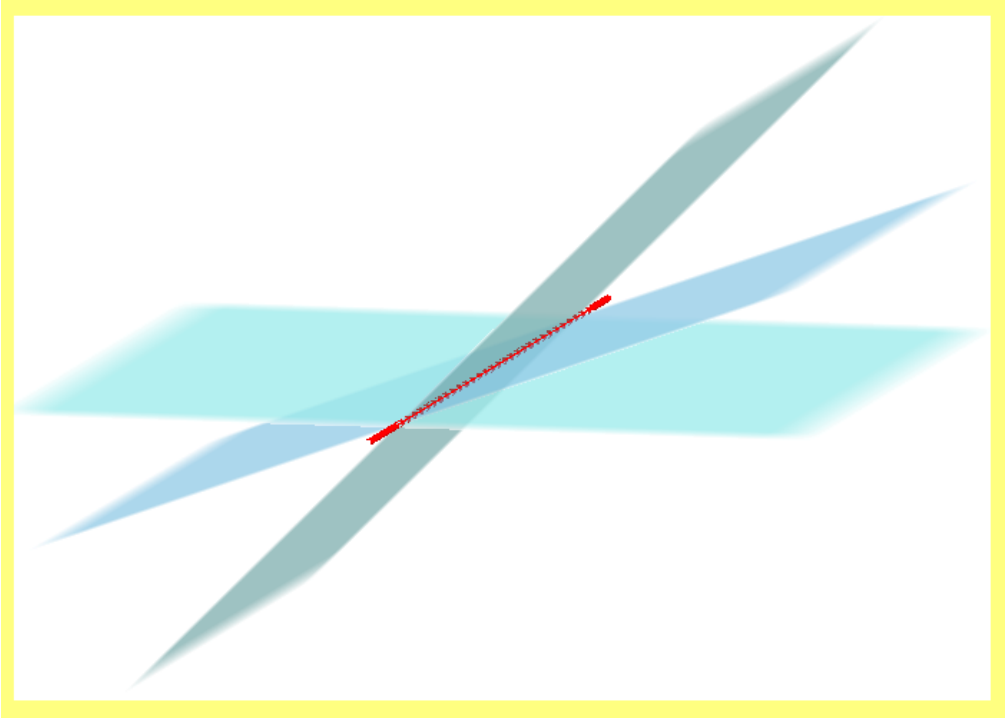


Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei plane α, β, γ este:
∅/două drepte/o dreaptă/ patru drepte/o dreaptă.

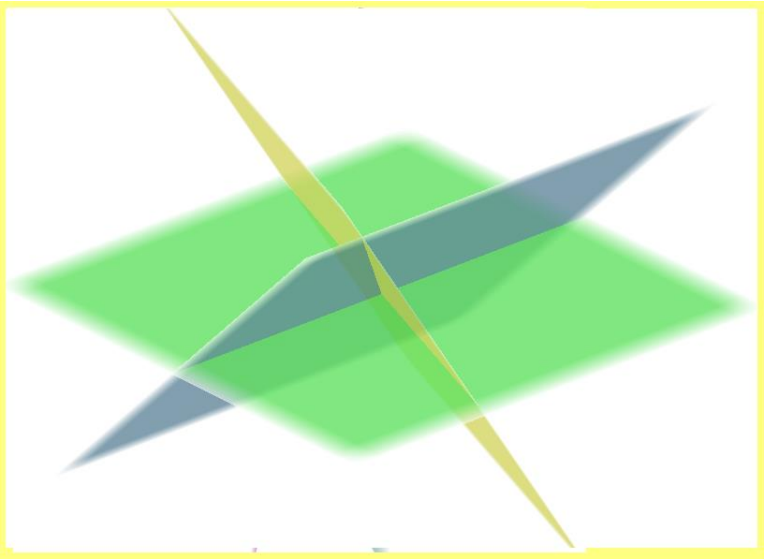
III.3.1 ... mulţimea vidă (pentru plane paralele)
III.3.2 ... format din două drepte paralele(între ele şi paralele cu dreapta comună a planelor concurente) ce se găsesc pe planele bisectoare şi echidistante faţă de planele paralele (pentru cazul a două plane paralele intersectate de al treilea)

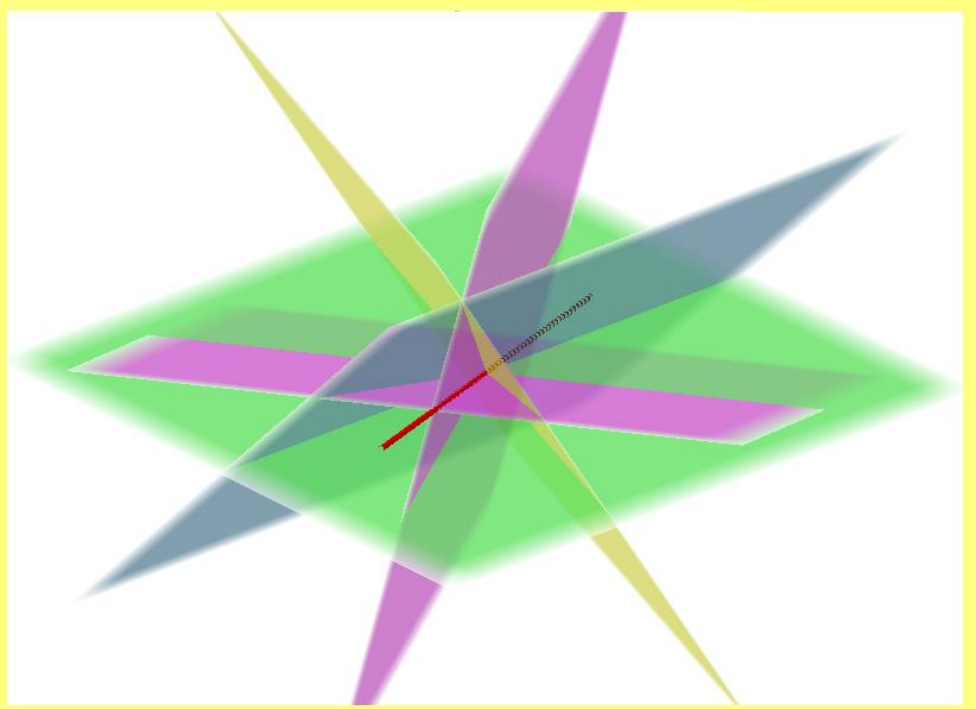


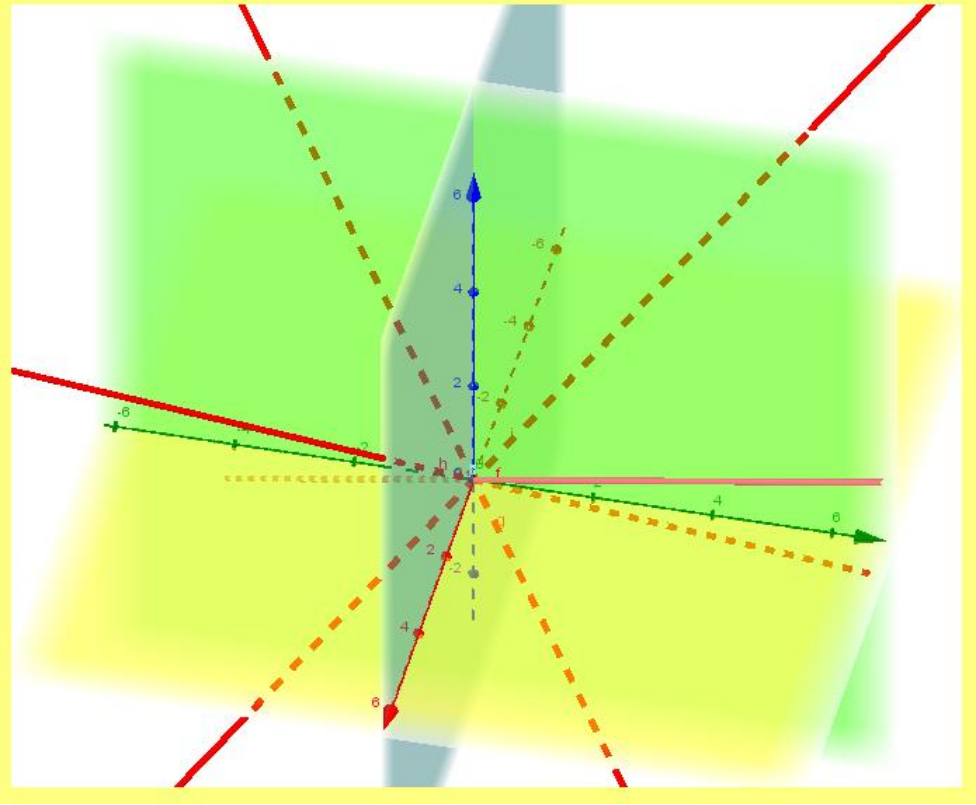
III.3.3 ... dreapta comună (pentru plane ce au o dreaptă comună)



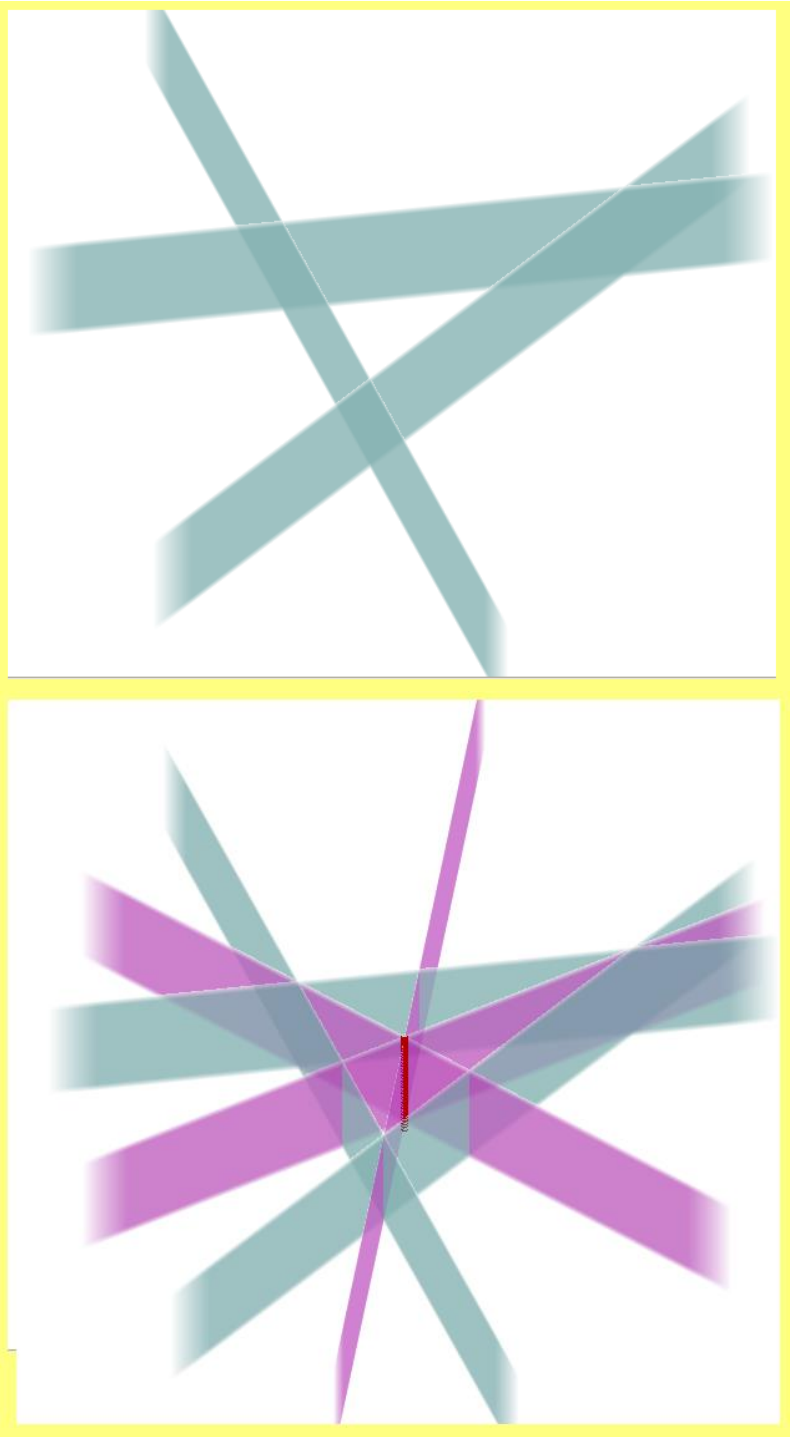
III.3.4 ... format din 4 drepte concurente(bisectoarele unghiurilor triedre-exprimare scurtă), pentru cazul a 3 plane concurente într-un punct.







III.3.5 ... dreapta perpendiculară pe un plan perpendicular pe cele 3 plane şi care trece prin centrul cercului înscris în triunghiul determinat (pentru plane concurente două câte două).
E în regulă şi exprimarea “intersecţia planelor bisectoare ale celor 3 unghiuri diedre”!



5. SEGMENTUL ŞI DREAPTA

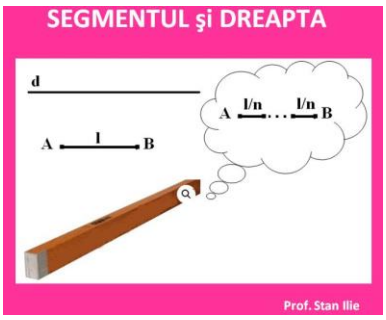
Prof. Stan Ilie[3]

SEGMENTUL ŞI DREAPTA
Un segment eminent(în dragoste repetent),
Se îndrăgosteşte nebuneşte
(Cât ar zice unii: peşte, lipeşte, clipeşte)
De o dreaptă înţe…leaptă,
Căreia însă îi era cam paralel,
Ce-i spunea cu patos el,
Că o viaţă îi va fi fidel
(Şi altele fel de fel!)

Văzând el aşa purtare,
Apelă la o oarecare
Riglă non-gardată
(Ce fusese cândva fată).
Ea moralul îi îmbunătăţi,
Şi egal îl şi n-bucă(tă)ţi!

Morala:
Cât ai avea purtarea de dreaptă,
Tot te foloseşte cineva-n vreo faptă!

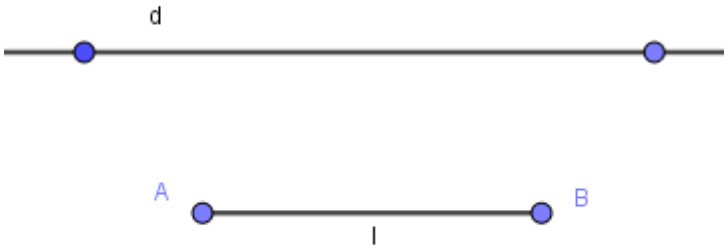
Enunţ:
Folosind doar o riglă negradată, să se împartă în n părţi egale, un segment paralel cu o dreaptă.

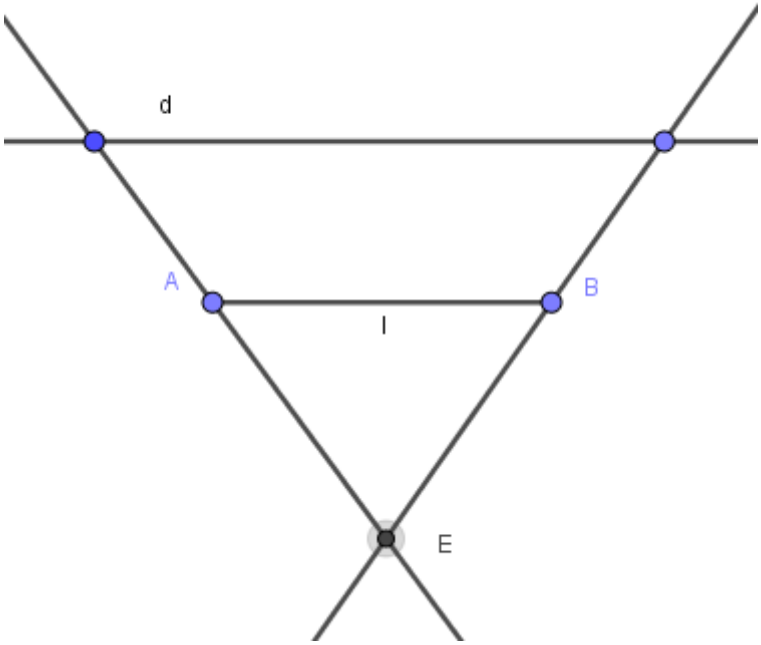


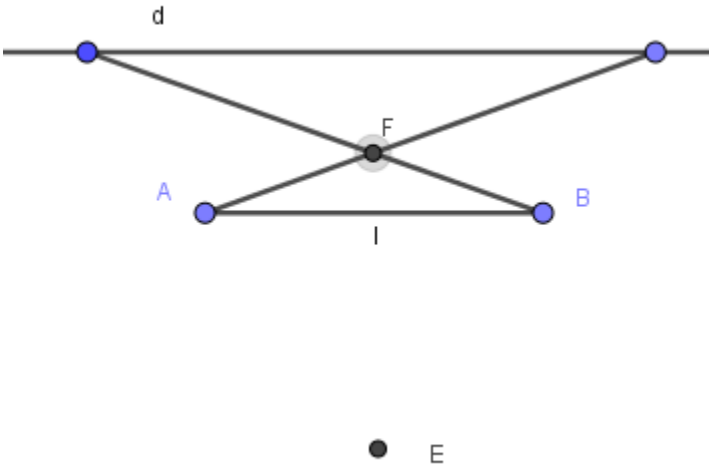
În spiritul ciclului “Ilustraţii fără explicaţii”, urmează exemplificarea:

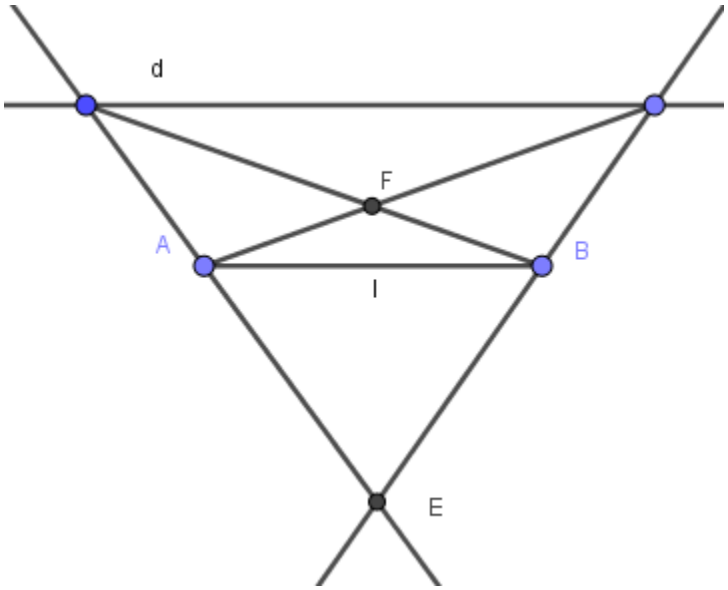
[3] Liceul Tehnologic “Anghel Saligny”, Roşiorii de Vede, Teleorman, stan_ilie@yahoo.com

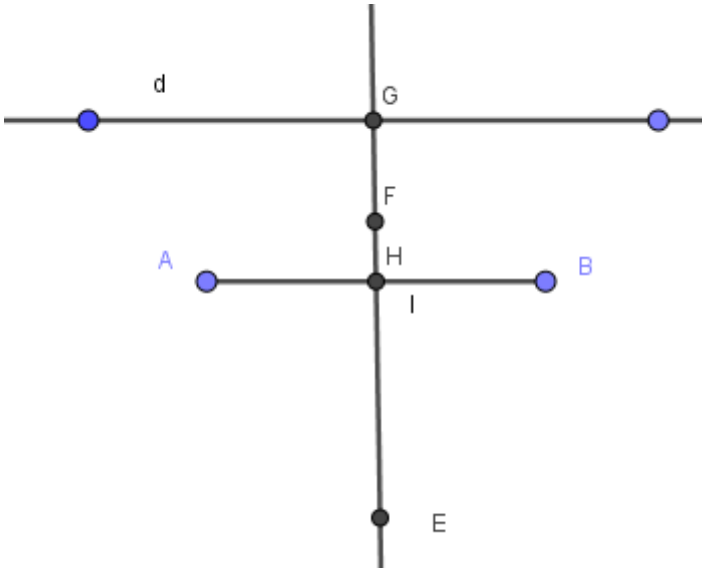
d
A
B
l

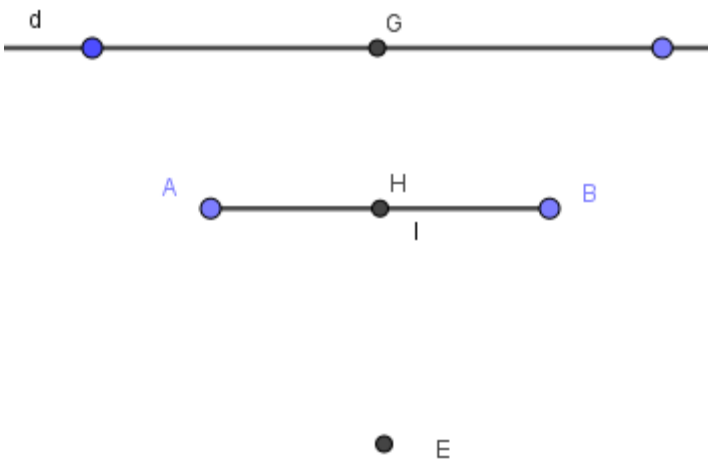

d
A
B
l

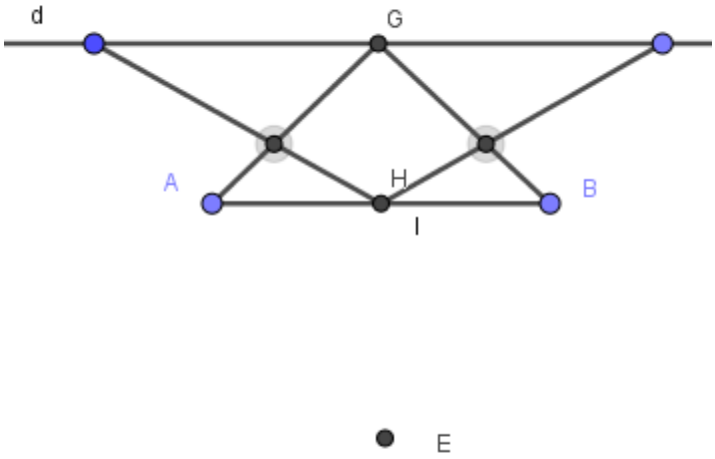

d
A
B
l
E

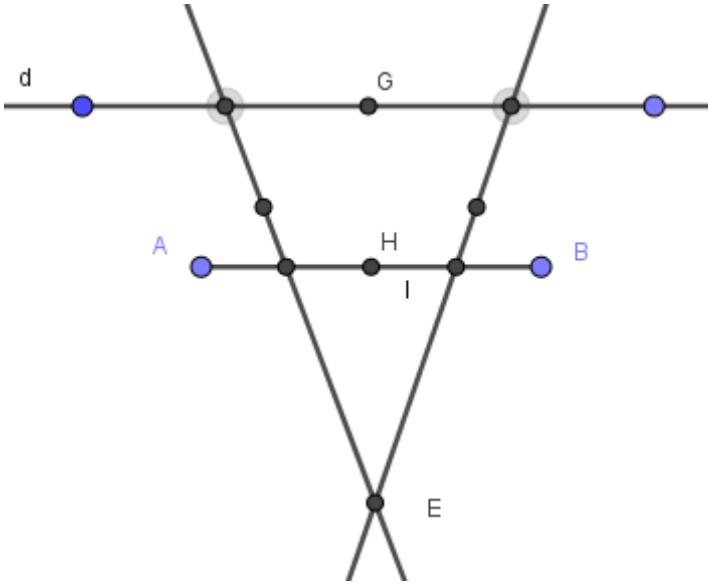

d
F
A
B
l
E

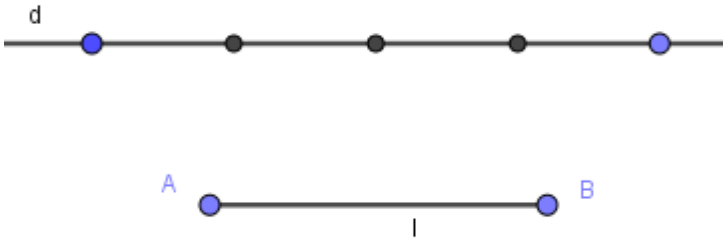

d
F
A
B
I
E

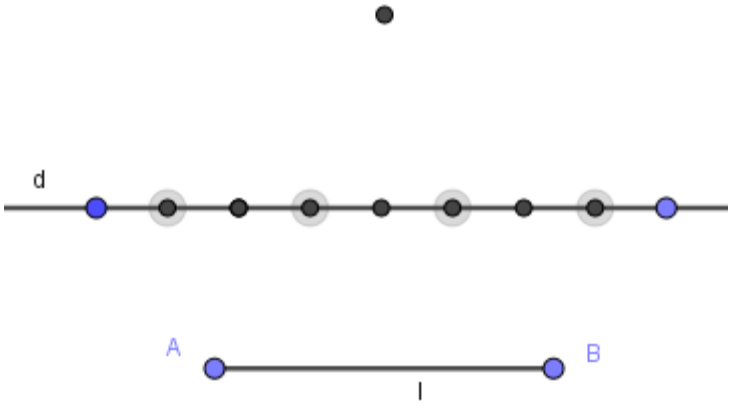

d
G
F
A
H
B
I
E


d
G
A
H
B
I
E


d
G
A
H
B
I
E


d
G
A
H
B
l
E

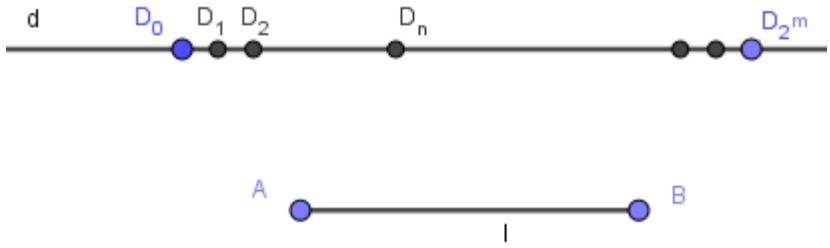

d
A
B
l

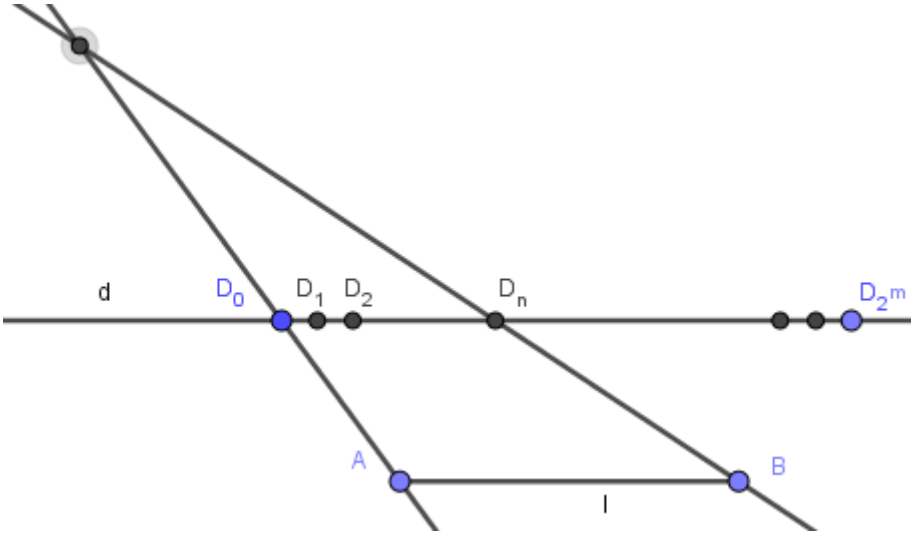

d
A
B
l

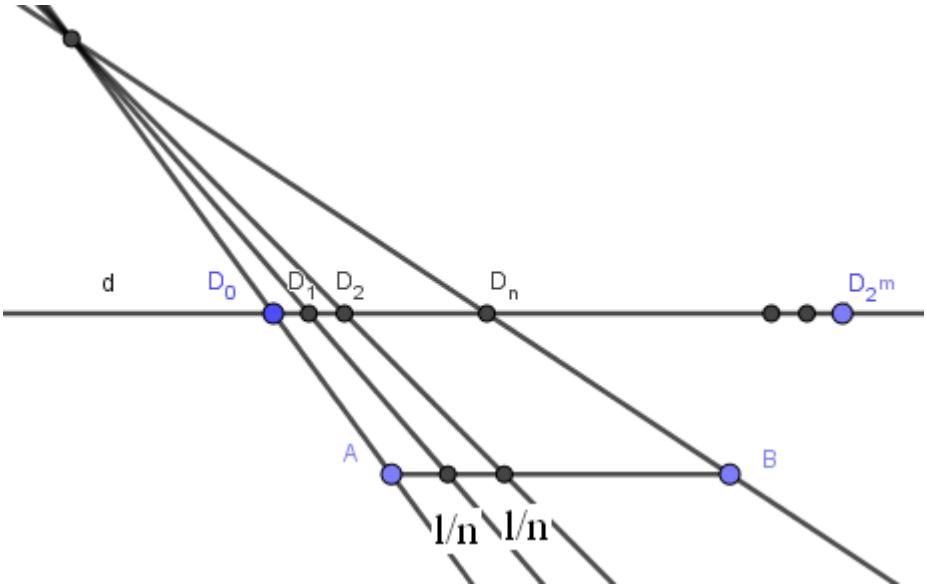
...

...

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N}$ *aî* $2^{m-1} \leq n < 2^m$







Dacă $D_0D_n \equiv AB$ atunci se repoziţionează pe dreaptă D_0 iniţial.

6. O problemă interesantă

Prof. Daniel Văcaru

OBJ. 167. Într – un triunghi neisoscel ABC, notăm cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris, iar cu H ortocentrul. Arătați că $AI \parallel OH$, atunci și numai atunci când $m(\sphericalangle BAC) = 120°$.

Soluție (propusă de **Daniel Văcaru, Pitești, Romania**)

Voi folosi abordarea cu ajutorul coordonatelor baricentrice. Atunci ecuația în coordonate baricentrice a lui AI este

$$AI: sinC \cdot y - sinB \cdot z = 0,$$

iar ecuația lui OH este

$$OH: (sin2B - sin2C) \cdot x + (sin2C - sin2A) \cdot y + (sin2A - sin2B) \cdot z = 0.$$

Condiția de paralelism (cu echivalență) se scrie sub formă de determinant astfel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & sinC & -sinB \\ sin2B - sin2C & sin2C - sin2A & sin2A - sin2B \end{vmatrix} = 0.$$

Să dezvoltăm determinantul după linia II. Obținem

$$sinC \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ sin2B - sin2C & sin2A - sin2B \end{vmatrix} + sinB \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ sin2B - sin2C & sin2C - sin2A \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem:

$$sinC \cdot (sin2A + sin2C - 2sin2B) + sinB \cdot (2sin2C - sinA - sinB) = 0,$$

care continuă ca

$$sinC \cdot (2sinBcos(A - C) - 4sinBcosB) + sinB \cdot (4sinCcosC - 2sinCcos(A - B) = 0,$$

și se dezvoltă în
$2 \cdot sinB \cdot sinC \cdot \cos(A - C) - 4sinBsinCcosB + 4sinBsinCcosC - 2sinBsinCcos(A - B) = 0.$

După împărțirea cu factorul $2sinBsinC$, obținem

$$\cos(A - C) - 2cosB + 2cosC - \cos(A - B) = 0,$$

ceea ce revine la $2sin\left(\frac{C-B}{2}\right)sin\left(\frac{2A-B-C}{2}\right)+4sin\left(\frac{B-C}{2}\right)sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=0$. Împărțim prin factorul nenul (ABC este neisoscel) $2sin\frac{C-B}{2}$ și ținem cont de imparitea funcției sin, obținând $sin\frac{2A-B-C}{2}-2sin\frac{B+C}{2}=0$.

Dar $B+C=180^{\circ}-A$, conducând către $sin\frac{B+C}{2}=cos\frac{A}{2}$ și $sin\frac{2A-B-C}{2}=sin\frac{3A-180^{2}}{2}=sin\left(\frac{3A}{2}-90^{\circ}\right)=-cos\frac{3A}{2}$, adică $-cos\frac{3A}{2}-2cos\frac{A}{2}=0\rightarrow cos\frac{3A}{2}=-2cos\frac{A}{2}$, adică $4cos^{3}\frac{A}{2}-3cos\frac{A}{2}=-2cos\frac{A}{2}\rightarrow 4cos^{3}\frac{A}{2}-cos\frac{A}{2}=0$, cu soluțiile $cos\frac{A}{2}\in\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$. Singura convenabilă este $cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{A}{2}=60^{\circ}\rightarrow m(\widehat{BAC})=120^{\circ}$.