Revista MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432 nr. martie 2010

ISTORICUL NOŢIUNILOR MATEMATICE STUDIATE ÎN GIMNAZIU ŞI LICEU

ROXANA MIHAELA STANCIU[1]

- aria triunghiului, paralelogramului şi trapezului; volumul prismei, piramidei şi trunchiului de piramidă; pătrate şi triunghiuri echilaterale înscrise în cerc – papirusurile egiptene şi cărămizile caldeene – 2000 î. e. n.;
- egalitatea şi asemănarea triunghiurilor – Tales – sec. VI î. e. n.;
- teorema catetei şi înălţimii, suma unghiurilor unui triunghi, numere prime, numere perfecte, numere prietene, media aritmetică, geometrică şi armonică – Pitagora – sec. VI î. e. n.;
- teorema cosinusului, teorema lui Pitagora generalizată, raţionamentul deductiv, construcţii cu compasul, lunulele lui Ipocrat – Ipocrat – – sec. IV î. e. n.;
- metoda exhaustivă pentru demonstrarea formulei ariei cercului şi a volumului piramidei – Eudoxiu sec. IV î. e. n.;
- hiperbola şi parabola – Menecmus – sec. IV î. e. n.;
- teorema împărţirii cu rest şi algoritmul lui Euclid pentru aflarea c. m. m. d. c. a două numere întregi, forma numerelor perfecte, există o infinitate de numere prime, $\sqrt{2}$ este iraţional primul text care sa păstrat („Elementele”) – Euclid – sec. III î. e. n.;
- concurenţa înălţimilor şi medianelor unui triunghi, axioma de continuitate, determinarea numărului л cu două zecimale exacte, determinarea ariei elipsei (л a b) prin metode exhaustive, $1 + 3 + \ldots\ldots + \bullet (2n - 1) = n^2$; $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$; $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = n \bullet (n + 1) \bullet (2n + 1) / 6$ – Arhimede – sec. III î. e. n.;
- cercul lui Apoloniu – Apoloniu – sec. III î. e. n.;
- probleme izoperimetrice – Zenodor – sec. III î. e. n.;
- ciurul lui Eratostene pentru determinarea numerelor prime – Eratostene – sec. III î. e.n.;
- simplificarea fracţiilor, rădăcina pătrată şi cubică, progresii aritmetice şi geometrice, metoda „fan cen” pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, rezolvarea ecuaţiei de gradul II – „Matematica în nouă cărţi” – de la chinezi – sec. II î. e.n.;
- teorema lui Menelau – Menelau – sec. I;
- formulele $s^2 = p \bullet (p-a) \bullet (p-b) \bullet (p-c)$, $p = (a + b + c) / 2$; $S = p \bullet r$, $a \bullet b \bullet c = 4 \bullet R \bullet S$ – Heron – sec. II; (sec. I).
- teoremele lui Ptolemeu şi formulele: $\sin^2 (\alpha / 2) = 1 - \cos (\alpha / 2)$, $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \bullet \cos \beta - \sin \alpha \bullet \sin \beta$ – Ptolemeu – sec. II;
- teorema medianei, teorema celor trei perpendiculare, teorema bisectoarei exterioare, biraportul, proprietatea comună a conicelor – Papus – sec. III;
- introducerea operaţiilor şi notaţiilor prescurtate pentru necunoscute – Diofant – precursorul algebrei – sec. III;

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Balaş Sotter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

- numerele negative marchează diferența dintre aritmetică şi algebra – considerate pentru prima data de indieni;
- teorema congruențelor şi determinarea lui π cu şase zecimale exacte – de la chinezi – sec. III;
- algebra şi trigonometria – create de arabi;
- regulile de calcul cu numere negative – de la chinezi;
- regula de trecere a termenilor dintr-o parte în alta, procedeu numit al Djabr, de la care a venit si numele disciplinei algebra – AL Horezmi – sec. IX;
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ – de la indieni;
- $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$ – de la arabi;
- criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 5, 9; adunarea fracțiilor prin aducerea la c. m. m. m. c.; legea creşterii organice sau şirul lui Fibonacci – Leonardo da Pisa (Fibonacci 1175-1240) – sec. XIII;
- simbolurile +, –, $\sqrt{\ }$, =, x, >, <,: – sfârşitul – sec. XV;
- forma actuală a cifrelor – sec. XV, XVI;
- cifra zero – sec. XVII;
- rezolvarea ecuațiilor de gradul III prin radicali – Cardano (1501 – 1576) – 1545;

- rezolvarea ecuației de gradul IV prin radicali – Ferrari (1522 – 1565) – 1545;
- inventarea logaritmilor – Neper (1550 – 1617) – 1614;
- teorema lui Desargues – Desargues (1593 – 1662) – 1636;
- marea teoremă Fermat („Conjectura" lui Fermat):ecuația $x^n + y^n = z^n$, n > 2, n ϵ N, nu are soluție în Z – Pierre Fermat (1601 – 1665) – 1637;
- crearea geometriei analitice – René Descartes (1596 – 1650) şi Pierre Fermat – 1637;
- triunghiul lui Pascal şi teorema lui Pascal pentru hexagon – Blaise Pascal (1623 – 1662) – 1640;
- noțiunea de probabilitate – Blaise Pascal şi Pierre Fermat;
- creatorul probabilități – Jacob Bernoulli (1654 – 1705);
- creatorii calculului diferențial şi integral – Isaac Newton (1642 – 1727) şi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Newton a elaborat metodele sale din 1665 dar nu le-a publicat. Leibniz a publicat descoperirile sale în analiza în 1675.
- demonstrarea teoremei mici a lui Fermat (p > 0, prim, a Є Z, (a, p) = 1 => $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$); notațiile dx şi ∫; denumirile de derivat şi diferențială precum şi formulele pentru $(u/v)'$, $(u^v)'$, $(v \cdot u)^{(n)}$, $\int_a^b$ udv; denumirile de abscisă, ordonată şi coordonată – Leibniz;
- teorema lui Ceva – Ceva Giovani (1648 – 1734) – 1678;
- daca $N = a^\alpha \cdot b^\beta \ldots e^\lambda$, atunci numărul divizorilor este $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \ldots (\lambda + 1)$ şi suma lor $(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha) \cdot (1 + b + b^2 + \ldots b^\beta) \ldots (1 + e + e^2 + \ldots e^\lambda)$ – Johann Wallis (1616 – 1703);
- simbolul ∞ – John Wallis;
- regula lim f (x) / g (x) = lim f'(x) / g' (x) (pentru x → a) a fost dată de Johann Bernoulli, dar publicată de L' Hospital (1661 – 1704) în 1696;

- formula lui Taylor – Taylor (1685 – 1731) – 1712;
- introducerea numărului e – Daniel Bernoulli (1700 – 1782);
- teorema lui Stewart – 1735;
- notațiile π, e, i, f (x); calculul lui e cu 23 de zecimale exacte şi calculul lui π cu 100 de zecimale exacte; lim $(1 + x / n)^n = e^x$ (pentru $n \to \infty$) (1743); lista completă a derivatelor cu demonstrarea acestora, şi extinderea regulilor lui L'Hospital la formele nedeterminate ∞ / ∞, $0 \cdot \infty$ şi $\infty - \infty$ (1755); generalizarea teoremei mici a lui Fermat ($n \geq 2$, $n \in N$, $a \in Z$, $(a, n)= 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$)) – 1758; relația v + f = m +2 pentru poliedru convex (1750) – Leonhard Euler (1707 – 1783);
- media aritmetică ≤ media geometrică ≤ media armonică – Colin MacLaurin (1698 – 1746) – 1748;
- regula lui Cramer– Gabriel Cramer (1700 – 1782) – 1750;
- notația a + b i pentru numere complexe şi teorema fundamentală a algebrei – Jean D'Alembert (1717 – 1783) – sec. XVIII;
- π este irațional – Heinrich Lambert (1728 – 1777) – 1767;
- notațiile $f'(x)$, $f^{(n)}(x)$,– Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) – – 1772;
- introducerea simbolului [•], pentru partea întreaga Arien Marie Legendre (1752 – 1833) – 1798;
- introducerea numerelor transcendente – Joseph Liouville (1809 – – 1882);
- denumirea de determinant (1801); denumirea de număr complex şi reprezentarea în plan a numerelor complexe (1832); rezolvarea problemei construirii poligoanelor regulate (1801); 1 + 2 +…..+ n = n (n + 1) / 2; notația φ (n) pentru indicatorul lui Euler; inelul Z [i]; demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei – Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855);
- noțiunile de limită, convergență, convergența seriilor şi continuitate aşa cum sunt prezentate astăzi; regula lui L'Hospital pentru 0^o, ∞^o şi 1^∞ ; denumirile de linii, coloane, ordine, elemente, diagonala principală şi secundară pentru determinanți (1815); creatorul teoriei grupurilor (1815) – Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857);
- notația $\int_a^b f(x)\,dx$ – Joseph Fourier (1768 – 1830) – 1822;
- notația de funcție de astăzi şi notațiile f (a + 0), f (a – 0) – Peter Dirichlet (1805 – 1859) – 1828;
- denumirea de grup – Evariste Galois (1811 – 1832) – 1830;

- noțiunile de margine inferioară şi superioară ale unei funcții, convergență uniformă – Weierstrass (1815 – 1897) – 1841;
- spațiul cu n dimensiuni – Arthur Cayley şi Hermann Grasmann – – 1843;
- studiul algebrelor (1843) şi grupurilor (1854) noțiunea de matrice – – Arthur Cayley (1821 – 1895);
- integrala Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ – Bernhard Riemann (1823 – 1866) – 1854;
- spațiu vectorial, calcul vectorial, clase, operațiile de asociativitate, comutativitate, distributivitate, simetrie, tranzitivitate – William Hamilton (1805 –1865) – 1853;
- notația $|a_{ij}| = \det(a_{ij})$ — Kronecker (1823 – 1891) – 1853;
- noțiunile de inel şi corp algebric – R. Dedekind (1831 – 1836) – – 1871;
- teoria mulțimilor – G. Cantor (1845 – 1918) – 1872;
- introducerea numerelor raționale prin tăieturi – Dedekind – 1872;

- transcendența numărului e – Charles Hermite (1822 – 1901) – 1873;
- denumirea de subgrup – Sophus Lie (1842 – 1899) – 1874;
- teorema Rouche – E. Rouche – 1875;
- transcendenta numărului π – Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) – 1882;
- introducerea axiomatică a numerelor întregi – David Hilbert (1862 – 1943) – 1900;
- rezolvarea problemei paralelismului:
  - geometria hiperbolică – Nikolai Ivanovici Lobacevski (1792 – – 1856) – 1829;
  - geometria hiperbolică – János Bolyai (1802 – 1860) – 1831;
  - geometria eliptică – Riemann Benhard – (1826 – 1866) – 1854 ;
  - geometria neeuclidică este geometria proiectivă care lasă o cuadrică fixă – Cayley Arthur (1821 – 1895) – 1859;
  - orice grup de transformări generează o geometrie (axiomă) – programul de la Erlangen (1872) – Felix Klein (1849 – 1925);
  - sistemul axiomatic al lui Hilbert – David Hilbert (1862 – 1943) – „Bazele geometriei” – 1899;

Prin profunzimea ideilor şi a modului de exprimare, „Bazele geometriei” lui Hilbert a devenit cartea de temelie a matematicilor moderne şi metoda axiomatizării în sensul Hilbert a fost generalizată pentru toate ramurile noi ale matematicii. Totuşi, pentru uşurarea înțelegerii geometriei afine şi euclidiene, astăzi se adoptă o construcție a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazate pe algebra liniară. Acest fapt este în concordanță cu schimbările determinate de noul curriculum, de noul sistem de evaluare şi de noile manuale.

Bibliografie:

1. N. Mihăileanu – Istoria matematicii, vol. 1, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974.
2. N. Mihăileanu – Istoria matematicii, vol. 2, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
3. N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sãrat, 2007

4. N.Stanciu, 100 de probleme rezolvate, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sãrat, 2006

5. N.Stanciu, ’’Istoricul noțiunilor matematice studiate în gimnaziu şi liceu’’- Revista de culturã matematicã ’’Sã înțelegem matematica’’, Bacău , Nr.3-4 (8-9)- Serie nouã, 2005

Revista MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432 nr. martie 2010

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ALGEBREI LINIARE , GEOMETRIEI AFINE ŞI GEOMETRIEI EUCLIDIENE

NECULAI STANCIU[1]

1. **Introducere**.

Punctul de plecare al acestui articol îl constituie un principiu emis de Felix Klein în memoriul „Consideraţii comparative asupra noilor cercetări geometrice", la Erlangen, în 1872, cunoscut sub numele de Programul de la Erlangen. Cu ajutorul acestui principiu sunt definite: algebra liniară, geometria afină şi geometria euclidiană cu ajutorul invarianţilor unui grup de transformări. Prin emiterea grupului, am identificat sistemul axiomatic ca o teorie a invarianţilor fundamentali (puncte, drepte, relaţia de incidenţă, de ordine, de egalitate, de paralelism, de continuitate) ai unui grup de transformări. În acest sens, ca să studiem o disciplină matematică este esenţial să determinăm grupul în raport cu care noţiunile ei sunt invariante.

În elaborarea acestui articol, am ţinut cont că acum la liceu, se adoptă o construcţie a geometriei cu ajutorul unei axiomatizări bazată pe algebra liniară, care permite îmbinarea metodelor sintetică şi analitică în studiul geometriei şi uşurează înţelegerea geometriei afine şi a geometriei euclidiene.

[1] Prof. , „George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Romania;
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

2. Algebra liniară – Teorema fundamentală

Noțiunile de spațiu vectorial, aplicație liniară precum şi proprietățile acestora sunt tratate în [1] şi [2]

Fie V şi W două spații vectoriale peste corpul K cu

$\dim_K V = n$ şi

$\dim_K W = m$.

2.1. **Teoremă** (fundamentală a algebrei liniare).

$f : V \to W$, este aplicatie liniara daca si numai daca ecuatia ei matriciala este de forma

$$Y = AX \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \right), ([3], p.32)$$

2.2. **Teoremă**. Operația de compunere determină pe mulțimea transformărilor liniare bijective ale unui spațiu vectorial V peste corpul K o structură de grup.

Demonstratie : Fie $f : V \to V$, o transformare liniara bijectiva de ecuatie $Y = AX$ si $g : V \to V$ o alta transformare liniara bijectiva de ecuatie $Z = BY$. Avem $Z = (BA)X$, deci (a) $g \circ f : V \to V$ este o transformare liniara, conform teoremei 2.1. Daca $f : V \to V$ este data de ecuatia $Y = AX$, atunci $X = A^{-1}Y$ si conform teoremei 2.1, avem (b) $f^{-1} : V \to V$ este o transformare liniara .

Din (a) şi (b) rezultă c.c.t.d.

2.3. **Definiție**. Grupul din teorema 2.2 se numeşte grupul liniar (vectorial) general al spațiului vectorial V şi se notează GL(V).

2.4. **Definiție**. Vom numi **algebra liniară** a spațiului vectorial V peste corpul K, studiul proprietățile sistemelor din V care sunt păstrate de transformările grupului GL(V).

3. Geometria afină– Teorema fundamentală

Fie V un spatiu vectorial peste corpul comutativ K, A o multime nevida si $f : \mathcal{A} \mathrm{x} \mathcal{A} \to \mathrm{V}$ o aplicatie care asociaza fiecarei perechi de elemente $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ vectorul $\mathrm{f}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ notat $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, astfel incat : 1) $\forall \mathrm{A}.\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$; 2) $\exists \mathrm{O} \in \mathcal{A}$, astfel incat aplicatia $\mathrm{f}_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$

$\mathrm{f}_0(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ este bijectiva.

3.1. **Definiție**. Aplicația f cu proprietățile de mai sus se numeşte **structură afină**.

3.2. **Definiție**. Mulțimea A dotată cu structura afină f se numeşte **spațiu afin** asociat spațiului vectorial V peste corpul K. Prin convenție elementele lui A se numesc **puncte**. Spațiul afin A asociat spațiului vectorial V peste corpul K cu structura afină f se desemnează deseori prin tripletul (A, V / K, f). $\dim_K \mathrm{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \dim_K \mathrm{V}$.

Fie A_1 şi A_2 două spații afine asociate spațiilor vectoriale V_1 şi V_2 peste acelaşi corp K.

3.3. Definitie. Se numeste transformare afina a spatiului afin $\mathcal{A}_1$ in spatiul afin $\mathcal{A}_2$ o aplicatie $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ cu proprietatea ca $\exists \mathrm{O} \in \mathcal{A}_1$ astfel incat aplicatia $\mathrm{T} : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ data de $\mathrm{T}(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(\mathrm{A}_1)}$, $\forall \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1$ sa fie liniara .Transformarea liniara T se numeste urma transformarii afine τ.

3.4. **Teorema** (fundamentală a geometriei afine) $\tau: A_1 \to A_2$ este transformare afină dacă şi numai dacă este dată de ecuația Y = AX +B.($\dim_K A_1 = n$, $\dim_K A_2 = m$)

([3], p. 245, [4], p. 140)

3.5. **Teoremă**. Operația de compunere determină pe mulțimea transformărilor afine bijective ale unui spațiu afin A o structură de grup ([4], p.136).

3.6. **Definiție**. Grupul din teorema 3.5. se numesc grup afin şi se notează GA (A).

3.7. **Definiție**. Se numeşte **geometrie afină** studiul proprietăților invariante ale spațiului afin la acțiunea grupului afin.

4. Geometrie euclidiană – Teorema fundamentală

Printre spațiile afine distingem o clasă importantă, spațiile punctuale euclidiene.

4.1. **Definiție**. Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar ($< \cdot, \cdot >$) se numeşte **spațiu vectorial euclidian**.

4.2. **Definiție**. Un spațiu afin $\mathcal{E}$ asociat unui spațiu vectorial euclidian E se numeşte **spațiu punctual euclidian**. $\dim_K \mathcal{E} = \dim_K E$.

Fie E_1 şi E_2 două spații vectoriale euclidiene.

4.3. Definitie. Aplicatia $T : E_1 \to E_2$ se numeste ortogonala daca pastreaza produsul scalar$\langle .,. \rangle$.

Fie $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ doua spații punctuale euclidiene asociate spațiilor vectoriale euclidiene E_1 şi E_2 ($\dim_K \mathcal{E}_1 = n$, $\dim_k \mathcal{E}_2 = m$).

4.4. **Definiție**. O transformare afină $\tau: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ se numeşte izometrie dacă urma sa $T: E_1 \to E_2$ este ortogonală.

4.5. **Teoremă**. $T: E_1 \to E_2$ este ortogonală dacă şi numai dacă matricea asociată A verifică relația ${}^T A \bullet A = I_n$

$$((*)\sum_{i=1}^{m} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}, \forall j,k \in \overline{1,n})$$

([4], p. 90).

4.6. **Teorema** (fundamentală a geometriei euclidiene). Transformarea $\tau: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ este izometrie dacă şi numai dacă este dată de ecuația $y = AX + B$ şi matricea A verifică relația ${}^T A \bullet A = I_n$.

Demonstrație: rezultã imediat din definiția 4.4 şi teoremele 3.4 şi 4.5.

4.7. **Observații**.

a) Dacă $\dim_K \mathcal{E}_1 = \dim_k \mathcal{E}_2 = n$ se obține teorema fundamentală a geometriei euclidiene în spațiul punctual euclidian $\mathcal{E}_n$.

b) Teorema fundamentală a geometriei euclidiene plane, respectiv teorema fundamentala a geometriei euclidiene în spațiu se obține din teorema 4.6. pentru $m = n = 2$, respectiv $m = n = 3$.

c) O altă demonstrație pentru teorema fundamentala a geometrie euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor planului ([4], p. 98).

d) O altă demonstrație pentru teorema fundamentala a geometriei euclidiene în spațiu se bazează pe proprietăți elementare ale izometriilor spațiului ([4], p. 98).

4.8. **Teoremă**. Mulțimea izometriilor bijective ale unui spațiu punctual euclidian dotat cu operația de compunere constituie un grup.

Demonstrație. Fie $\tau: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, izometrie cu urma sa $T: E \to E$. Din teorema 3.5.compunerea a două aplicații afine bijective este o aplicație afină şi în plus compunerea a două aplicații ortogonale este o aplicație ortogonală. Deci avem (a) compunerea a doua izometrii bijective este o izometrie. Tot din teorema 3.5. inversa unei aplicaţi afine bijective este o aplicaţie afină şi în plus inversa unei transformări ortogonale este o transformare ortogonală. Deci avem (b) inversa unei izometrii bijective este o izometrie.

Din (a) şi (b) rezultă că mulţimea izometriilor bijective ale unui spaţiu punctual euclidian dotată cu operaţia de compunere constituie un grup.

4.9. **Definiţie**. Grupul din teorema 4.8. se numeşte **grupul izometriilor** spaţiului punctual euclidian $\mathcal{E}$ şi se notează GI($\mathcal{E}$).

4.10. **Definiţie**. Se numeşte **geometrie euclidiană** studiul proprietăţilor invariante ale spaţiului punctual euclidian la acţiunea grupului izometriilor (studiul acelor proprietăţi care sunt păstrate de transformările grupului GI($\mathcal{E}$), adică de izometrii).

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C, Niţă, Gh. Grigore, D. Bulacu, Matematică, Manual pentru clasa a XII – a, profil M_1, E.D.P. Bucureşti, 2002.

[2] M. Ţena, Matematică, manual pentru clasa a XII – a, profil M_1, Ed. Gil, Zalău, 2002.

[3] N. Soare, Curs de geometrie (Partea I), Tipografia Universităţii Bucureşti, 1996.

[4] A. Turtoi – Geometrie, Tipografia Universităţii Bucureşti, 1996.

[5] N.Stanciu**,** *Matematică gimnaziu & liceu-100 de probleme rezolvate*, Editura ’’Rafet’’, Rm. Sãrat, 2007

Media integrală a unei funcţii şi aplicaţii

de Florin Antohe

Scopul acestui **studiu** este de a introduce noţiunea de medie integrală într-un punct, de a ilustra câteva proprietăţi ale acesteia şi de a aplica apoi tehnica de lucru dată de această noţiune la rezolvarea unei probleme, cu scopul declarat de a-i scoate în evidenţă vituţile creatoare. Vom obţine astfel câteva rezultate mai generale legate de o clasă de ecuaţii funcţionale.

Problema 1. Fie f :$[0;\infty)\to[0;\infty)$ o funcţie crescătoare cu proprietatea că există $a\in(0;1)$ astfel încât : $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{ax} f(t)dt$ $\forall$ x $\in[0;\infty)$. (1)

Să se arate că f(x)=0 , pentru orice x $\in[0;\infty)$.

Soluţia 1.

Fiind monotonă , f este integrabilă pe orice interval [0,x] , x>0 (adică este local integrabilă). Efectuând schimbarea de variabilă $u(t)=\frac{t}{a}$ în integrala din membrul drept al relaţiei (1) obţinem că:

$$\int_0^{ax} f(t)dt=a\int_0^x f(at)dt$$

şi deci (1) devine: $\int_0^x [f(t)-af(at)]dt=0$, $\forall$ t $\in[0;\infty)$.

Deoarece a $\in(0;1)$ rezultă că at$\le$t , $\forall$ t $\in$[0 ;x] şi folosind faptul că f este crescătoare deducem că $f(at)\le f(t)\Leftrightarrow -f(at)\ge -f(t)$ şi deci:

$$f(t)-f(at)\ge(1-a)f(t)\ ,\ \forall\ t\in[0;x].$$

Folosim acum monotonia integralei în raport cu integrandul şi rezultă:

$$0=\int_0^x [f(t)-af(at)]dt\ge(1-a)\int_0^x f(t)dt. \qquad (2)$$

Fie $t_0\in[0,x)$. Atunci, cum f(t)≥0, $\forall$ t $\in[0;\infty)$, avem:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^{t_0} f(t)dt+\int_{t_0}^x f(t)dt\ge\int_{t_0}^x f(t)dt\ , \qquad (3)$$

dar f este crescătoare şi deci f(t)$\ge$f(t_0) , $\forall$ t $\in$[t_0,x] , de unde deducem că :

$$\int_{t_0}^x f(t)dt\ge f(t_0)\cdot(t-x_0)$$

şi atunci din (2) şi (3) rezultă că $(1-a)\cdot(t-x_0)\cdot f(t_0)\le0$

Cum 1-a>0 , t-x_0>0 si f(t_0)≥0, rezultă f(t_0)=0 şi cum x, t_0 au fost luate arbitrar rezultă că f(x)=0 , $\forall$ x $\in[0;\infty)$.

Soluția 2.

Faptul că f este integrabilă, ne asigură că F(x)=$\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0\,;\infty)$. este o funcție continuă (4) .

În plus, F(0)=0. Relația (1) se scrie acum :

$$F(x)=F(ax)$$

din care obținem că :

$F(x)=F(ax)=F(a^2x)=...=F(a^nx)$, $\forall\, n\in N$, $\forall\, x\in[0\,;\infty)$. şi deci :

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(a^nx).$$

Dar $a^nx\to 0$, cand $n\to\infty$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$, iar F este continuă în zero , ceea ce înseamnă că : $\lim_{n\to\infty}F(a^nx)=F(0)=0$ şi deci F(x)=0 , $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$.

Prin urmare : $\int_0^x f(t)dt=0$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$. Luăm $t_0\in[0,x)$ şi atunci , cum f este crescătoare obținem : $0=\int_0^x f(t)dt=\int_0^{t_0} f(t)dt+\int_{t_0}^x f(t)dt\geq\int_{t_0}^x f(t)dt\geq(x-t_0)\cdot f(t_0)$.

Observație : Prima întrebare pe care putem să ne-o punem este dacă concluzia acestei problemei rămâne valabilă şi în cazul în care f este descrescătoare. Cu soluția 1 nu putem da răspuns , dar soluția 2 se adaptează astfel.

Integrabilitatea lui f şi deci continuitatea lui F se păstrează şi în situația în care f este descrescătoare. Prin urmare obținem în mod analog că :

$$\int_0^x f(t)dt=0\ ,\ \ \forall\, x\in[0\,;\,\infty).$$

şi cum f este descrescătoare avem :

$$\int_0^x f(t)dt\geq x\cdot f(x),\ \forall\, x\in[0\,;\,\infty).$$

din care obținem : $x\cdot f(x)\leq 0$, $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$, relație adevărată pentru x>0 numai dacă f(x)=0.

Aşadar am obținut în acest fel o nouă problemă.

Problema 2. Fie $f:[0\,;\infty)\to[0\,;\,\infty)$ o funcție descrescătoare cu proprietatea că există $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{ax} f(t)dt$ $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$. Atunci f(x)=0 , $\forall\, x\in[0\,;\,\infty)$.

Observație : Spre deosebire de cazul în care f este crescătoare, aici nu mai avem în general f(0)=0 , dar problema rămâne totuşi interesantă. S-ar părea că soluția 2 care ne-a permis obținerea acestei probleme este mai generală decât soluția 1.

În continuare prezentăm adevărata problemă sursă :

Problema 3. Fie $a,b\in(0\,;\,\infty)$ cu a+b<1 şi $f:[0\,;\,\infty)\to[0\,;\,\infty)$ o funcție crescătoare astfel încât :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{ax} f(t)dt + \int_0^{bx} f(t)dt \ , \ \forall \ \mathbf{x} \in [\mathbf{0} \ ; \ \infty).$$

Să se arate că f(x)=0 , pentru orice x $\in$ [0 ; ∞).

Rezolvare :
Folosind argumentele de la rezolvarea problemei 1 şi ideea din soluţia 2 , din (4) rezultă :

$$F(x) = F(ax) + F(bx) \ , \qquad \forall \ x \in [0 \ ; \ \infty). \qquad (5)$$

care este o ecuaţie funcţională mai greu de prelucrat decât cea obţinută la problemele 1 şi 2. Vom încerca să o abordăm prin cealaltă metodă. Obţinem din (4) că :

$$\int_0^x [f(t) - af(at) - bf(bt)]dt = 0 \ , \ \forall \ x \in [0 \ ; \ \infty).$$

şi luând $t_0 < x$ arbitrar , va rezulta că :

$$f(t) - af(at) - bf(bt) \geq (1-a-b) f(t) \text{ şi deci :}$$

$$\int_0^x [f(t) - af(at) - bf(bt)]dt \geq (1-a-b)\int_0^x f(t)dt \geq (1-a-b)\int_{t_0}^x f(t)dt \geq (1-a-b)(x-t_0)\cdot f(t_0) \, ,$$

adică $f(t_0) = 0$, căci 1-a-b>0 , $x - t_0 > 0$.

Media integrală a unei funcţii

Fie f :$[0,\infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă, adică o funcţie integrabilă în sens Riemann pe orice interval de forma [0,x], cu 0<x<∞. Media integrală a funcţiei f pe intervalul [a,b]$\subset$[0 ; ∞) este , prin definiţie :

$$\mu[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

în timp ce funcţia $\mu_c[f](x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, 0<x<∞ , se numeşte media integrală Cesaro a funcţiei f. Media integrală apare în teoremele de medie pentru integrala Riemann : dacă f este continuă atunci există c$\in$[a,b] , astfel încât $\mu[f] = f(c)$.
Media integrală Cesaro este o transformare integrală care conservă monotonia pentru anumite clase de funcţii.
Ex: Dacă f:$[0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă şi monotonă şi $\mu_c[f] : (0;\infty) \to \mathbf{R}$ este media integrală Cesaro a lui f , atunci $\mu_c[f]$este monotonă şi are acelaşi tip de monotonie cu f. Proprietatea rămâne valabilă şi dacă f nu este continuă.

Vom considera în continuare valoarea limită a mediei integrale , noţiune care ne va fi utilă la rezolvarea problemei 3.

Definiţie: Fie f:I$\to$**R** o funcţie local integrabilă. Funcţia M_f :I$\to \overline{R}$**.**

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt \ , \ \forall \ x_0 \in \mathrm{I} \ ,$$

în ipoteza că limita există , se numeşte media integrală (la dreapta) a lui f în x_0.

Este clar că media integrală a lui f în x_0 este limita mediei integrale a lui f pe intervalul $[x_0,x]$, limită calculată când x tinde la x_0 , cu valori mai mari decât x_0.

Observaţii :

1. Noţiunea de medie integrală într-un punct este uşor improprie. Ea este de fapt derivata primitivei funcţiei f.

2. Deoarece functia f este local integrabilă , rezultă că funcţia F :I $\to$ **R,**

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x \in$ I este continuă pe I şi deci :

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Teorema 1. Fie $I \subset R$ un interval , f :I $\to$ **R** o funcţie local integrabilă şi $\overline{f}$:**R**$\to$ **R** definită prin :

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}$$

Atunci f admite primitive pe I dacă si numai dacă : $M_{\overline{f}}(x) = f(x)$, $\forall x \in I.$

Demonstraţie :

"$\Rightarrow$" Fie f o primitivă a lui f pe I. Atunci F'=f şi $\forall x \in I.$ cu $[x-\eta, x+\eta] \subset I$ avem , cu formula Leibniz-Newton , $\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dxdx = \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)],\ \forall 0 < |h| < \eta$, deci :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dx = \lim_{\substack{h \to 0 \\ 0<|h|<\eta}} \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] = F^{'}(x) = f(x).$$

Dacă $x_0 \in I$ şi $x_0 = \inf I$ (respectiv $x_0 = \sup I$) se procedează în mod asemănător.

"$\Leftarrow$"Fie $a \in I$ fixat şi $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, x \in I.$ Atunci :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt, \forall x, x+h \in I.$$

şi $M_{\overline{f}}(x) = f(x)$ înseamnă că $\lim_{h \to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = M_f(x) = f(x),\ \forall x \in I.$

deci F este derivabilă în x şi F'(x)=f(x), adică F(x) este o primitivă a lui f pe I.

Demonstraţia este completă.

Corolarul 1. Dacă f :I $\to$ **R** este local integrabilă şi admite primitive atunci $M_f(x) = f(x), \forall x \in I.$

Teorema 2. Fie f :I $\to$ **R** monotonă şi $x_0 \in I$. Atunci :

a) dacă f este crescatoare : $f(x_0) \le M_f(x_0) \le f(x_0 + 0);$

b) dacă f este descrescatoare : $f(x_0) \ge M_f(x_0) \ge f(x_0 + 0);$

Demonstrație:
Tratăm doar cazul a) , pentru b) procedându-se analog.
Fiind crescătoare, f este local integrabilă. Pentru orice $x \in [x_0, x]$ avem:

$$f(x_0) \le f(t) \le f(x)$$

deci : $$f(x_0)\cdot(x-x_0) \le \int_{x_0}^{x} f(t)dt \le f(x)\cdot(x-x_0), x > x_0$$

adică $f(x_0) \le \dfrac{1}{(x-x_0)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \le f(x)$ de unde prin trecere la limită obținem inegalitatea din enunț.

Corolarul 2. Dacă f este continuă (la dreapta) în x_0 atunci $M_f(x_0) = f(x_0)$.

Demonstrație. Punând $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt, x \ge x_0$, atunci F este derivabilă la dreapta în x_0 şi :

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = F'_d(x_0) = f(x_0).$$

Observație. În demonstrația teoremei 2 mai trebuia arătat că, în cazul în care f este monotonă pe I, media integrală există în orice punct $x_0 \in I$.
Conform corolarului 2, trebuie să demonstrăm că afirmația este valabilă pentru $x_0 \in I$ cu proprietatea că f nu este continuă în x_0. Are loc :

Propoziție : Dacă f :I$\to \mathbf{R}$ este monotonă , atunci $\forall x_0 \in I$, există $M_f(x_0)$.
Demonstrație : Funcția f fiind monotonă, ea este local integrabilă, adică f este integrabilă pe $[x_0, x]$, pentru orice $x > x_0$, $x \in I.$ conform criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann , f fiind continuă a.p.t pe $[x_0, x]$.
Fie x_0 un punct de discontinuitate al lui f. Cum f este monotonă, f are numai discontinuități de prima speță , adică f are limite laterale (finite) în x_0.
Considerăm $\overline{f} : [x_0, x] \to \mathbf{R}$, $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in (x_0, x] \\ f(x_0+0), x = x_0. \end{cases}$

Atunci : $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \overline{f}(t)dt$ şi deci $M_f(x_0) = M_{\overline{f}}(x_0)$, în ipoteza că aceasta din urmă există.
Dar $\overline{f}$ este continuă la dreapta în x_0 şi deci, pe baza corolarului 2 , $M_{\overline{f}}(x_0)$ există şi este egală cu $f(x_0+0)$.

Propoziția 2. a) Dacă f≥ 0, atunci $M_f \ge 0$;

b) Dacă f este pozitivă şi monotonă atunci şi M_f este monotonă şi are aceeaşi monotonie cu f.

Demonstraţie :
a) Este evident ;
b) Fie f crescătoare şi $x_1 \le x_2$. Alegem h>0 astfel încât $x_1 + h \le x_2$. Pentru $t \in [x_1, x_1 + h]$, $x \in [x_2, x_2 + h]$ avem :

$$f(t) \le f(x_1 + h) \le f(x_2) \le f(u) \le f(x_2 + h)$$

şi deci :

$$\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt \le h \cdot f(x_2) \le \int_{x_2}^{x_2+h} f(u)du,$$

adică $\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt \le \frac{1}{h}\int_{x_2}^{x_2+h} f(u)du$,

de unde rezultă $M_f(x_1) \le M_f(x_2)$, c.c.t.d.
Putem acum să rezolvăm problema 3 prin intermediul noţiunii de medie integrală (într-un punct).

Soluţie:

Fie x_0>0. Din (1) deducem că :

$$\int_0^{x_0} f(t)dt = \int_0^{ax_0} f(t)dt + \int_0^{bx_0} f(t)dt,$$

care scazută din (1) ne dă:

$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{ax_0}^{ax} f(t)dt + \int_{bx_0}^{bx} f(t)dt, \forall x > x_0$, adică:

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a}{ax - ax_0}\int_{ax_0}^{ax} f(t)dt + \frac{b}{bx - bx_0}\int_{bx_0}^{bx} f(t)dt,$$

de unde rezultă (f este monotonă) că:

$$M_f(x_0) = aM_f(ax_0) + bM_f(bx_0) \qquad (6)$$

Deoarece M_f este crescătoare , căci f este crescătoare şi a<1 , b>1 , avem $ax_0 \le x_0$, $bx_0 \le x_0$, deci :
$M_f(ax_0) \le M_f(x_0)$ şi $M_f(bx_0) \le M_f(x_0)$ şi atunci din (6) rezultă :

$$M_f(x_0) \le (a+b)M_f(x_0) \Leftrightarrow (1-a-b)M_f(x_0) \le 0$$

şi cum a+b<1 , adică 1-a-b>0 , rezultă cu necesitate că $M_f(x_0) \le 0$.
Dar f este pozitivă şi deci $M_f(x_0) \ge 0$ ceea ce impune $M_f(x_0) = 0$.
Folosind teorema 2, punctul a) rezultă : $0 \le f(x_0) \le M_f(x_0) = 0$ ceea ce impune $f(x_0) = 0$.
Cum x_0 a fost luat arbitrar, deducem că $f(x_0) = 0$, $\forall x \in [0;\infty)$. În acelaşi mod se poate rezolva problema 2 şi următoarea problemă :

Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0;\infty)$ **cu** $a_1, a_2, ..., a_n < 1$ **şi f :**$[0,\infty) \to [0;\infty)$ **este o funcție crescătoare astfel încât :** $\int_0^x f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{a_i x} f(t)dt$ **,** $\forall x \in [0;\infty)$ **atunci** $f \equiv 0$.

Observații :

1) Noțiunea de medie integrală într-un punct este improprie şi pentru faptul că , f fiind local integrabilă , este integrabilă Riemann pe orice interval [0,a] şi deci , pe baza criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann , f este continuă a.p.t.

Aceasta înseamnă că , exceptând o mulțime A neglijabilă, avem f continuă pe [0,a] şi deci $M_f(x)$ coincide în aceste puncte cu f(x).

De fapt, pentru $x \in [0,a] \setminus A$, $M_f(x)$ este chiar o derivată (a funcției F(x)=$\int_0^x f(t)dt$, care este o primitivă a lui f pe orice interval pe care f este continuă).

2) Media integrală a unei funcții într-un punct , $M_f(x_0)$ este legată de media integrală Cesaro F(x) prin relația următoare:

$$M_f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{xF(x) - x_0 F(x_0)}{x - x_0} .$$

adică M_f este derivata funcției $xF(x)$, unde F este media integrală Cesaro.

3) Pe baza teoremei 1 , dacă f este local integrabilă şi admite primitive pe I , atunci $M_f(x) = f(x), \forall x \in I$.

Dacă privim pe M_f ca un operator definit pe mulțimea funcțiilor local integrabile, rezultatele anterioare arată că mulțimea punctelor fixe ale lui M_f conține clasa funcțiilor care admit primitive.

4) Putem defini media integrala într-un punct şi printr-o limită simetrică :

$$M_f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x_0 - h}^{x_0 + h} f(t)dt,$$

sau printr-o limită la stânga, obținând astfel noțiuni uşor diferite.

Indicăm în continuare şi alte probleme care pot fi rezolvate în acelaşi fel ca şi cele tratate anterior.

Problemă: Determinați funcția crescătoare f:$[0;\infty) \to [0;\infty)$ **pentru care** $\int_0^{2x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;\infty).$

Problemă : Determinați funcția descrescătoare f:$[0;\infty) \to [0;\infty)$ **pentru care** $\int_0^{2x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;\infty).$

Problemă: Determinați funcțiile crescătoare f:$[0;\infty) \to$ **R care satisfac relația:**

$\int_x^{x^k} f(t)dt = 0, \forall x > 0,$ **unde** $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ (fixat).

Rezolvare:

Punem F(x)=$\int_0^x f(t)dt$ şi rezultă : $F(x^k)=F(x), \forall x \in (0;\infty)$. din care obţinem, pe rând ,

$$F(x)=F(x^{\frac{1}{k}})$$
$$F(x^{\frac{1}{k}})=F(x^{\frac{1}{k^2}})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F(x^{\frac{1}{k^{n-1}}})=F(x^{\frac{1}{k^n}})$$

$$F(x)=F(x^{\frac{1}{k^n}})$$

care conduce la F(x)=$\lim\limits_{n\to\infty} F\left(x^{\frac{1}{k^n}}\right)=F(1), \forall x>0.$

Atunci $M_f(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_o \\ x>x_0}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=0, \forall x_0 \in (0;\infty)$.

Cum f este pozitivă şi crescătoare din $0 \le f(x_0) \le M_f(x_0)=0$ rezultă $f(x_0)=0, \forall x_0 \in (0;\infty)$

Bibliografie :

1. Arvinte , V., Probleme elementare de calcul integral, Editura Universităţii Bucureşti, 1995
2. Becheanu, M ş.a (coord) Olimpiada Naţională de Matematică, clasele VII-XII. Editura Paralela 45.
3. Muntean I. , Asupra mediei integrale Cesaro , Gazeta Matematică, Anul 85 (1980)
4. Sireţchi , Gh. Calcul diferenţial şi integral , vol 1-2. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti , 1985.

profesor Şcoala Nichita Stănescu
str. Costache Conachi nr 2 , cod 800643
Galaţi , Judeţul Galaţi

UN CAZ DE REZOLVARE AL ECUATIILOR DE GRAD 7

-DE MARCU STEFAN FLORIN –PROFESOR CALARASI-

Fie un polinom de grad 7 de forma:

$f \in \mathbf{R[X]}, f=X^7+a_1X^5+a_2X^3+a_3X+a_4$ cu $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$ **(1)**

Ne propunem sa aflam in ce conditii ecuatia algebrica f(x)=0 poate fi “rezolvabila prin radicali”,si mai mult, sa rezolvam aceasta ecuatie.

Observatia 1

Se stie ca orice polinom de grad impar cu coeficienti reali admite cel putin o radacina reala.

Observatia 2

Vom presupune $a_4 \neq 0$,cautand solutii reale nenule ale ecuatiei f(x)=0 .

Proprietatea 1

Ecuatia f(x)=0 cu f avand forma (1) poate fi rezolvabila prin radicali ,daca au loc relatiile:

$7a_2=2a_1^2$ si $49a_3=a_1^3$ (2)

Solutia 1

Cautam solutii reale de forma $x=u+v$, $u,v \in \mathbf{R}$. Notam $uv=b$ si folosim urmatoarele identitati:

$(u+v)^7=u^7+v^7+7uv(u^5+v^5)+21u^2v^2(u^3+v^3)+35u^3v^3(u+v)$

$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)$

Deducem: $u^5+v^5=x^5-[5b(x^3-3xb)+10b^2x]$

Respectiv: $u^7+v^7=x^7-7b(x^5-5bx^3+15b^2x-10b^2x)-21b^2(x^3-3xb)-35b^3x=$

$=x^7-7bx^5+14b^2x^3-7b^3x$

Asadar : $\begin{cases} u^7+v^7 = x^7-7bx^5+14b^2x^3-7b^3x \\ u^7v^7= b^7 \end{cases}$

Numerele u^7 , v^7 pot fi privite ca fiind solutii ale ecuatiei:

$t^2-(x^7-7bx^5+14b^2x^3-7b^3x)t+b^7=0$

Notam $x^7-7bx^5+14b^2x^3-7b^3x=-C$ si obtinem :

$$u^7=\frac{-C+\sqrt{C^2-4b^7}}{2} \quad , v^7=\frac{-C-\sqrt{C^2-4b^7}}{2}$$

In consecinta , numarul de forma:

$$x=\sqrt[7]{\frac{-C+\sqrt{C^2-4b^7}}{2}}+\sqrt[7]{\frac{-C-\sqrt{C^2-4b^7}}{2}}$$

este solutie a ecuatiei: (3) $x^7-7bx^5+14b^2x^3-7b^3x+C=0$.

Notand $C=7a_4$; $-7b^3=a_3$; $14b^2=a_2$;$-7b=a_1$ ecuatia (3) devine ecuatia f(x)=0.

Mai mult: $7a_2=7\cdot 14b^2=2a_1^2$ si $49a_3=(-7b)^3=a_1^3$.

Asadar, se confirma relatiile (2).

Solutia 2
Aceasta solutie vine in completarea solutiei 1,deoarece vom rezolva ecuatia afland efectiv forma solutiilor.

Vom cauta pentru ecuatia f(x)=0 solutii reale nenule de forma :
$x_0=\alpha+\frac{k}{\alpha}$, cu $k\in$ **N** ,$k\geq 2$ si $\alpha\in$ **R-Q .**

Urmarim ideea ca printr-o substitutie de forma $x\rightarrow x+\frac{k}{x}$,$x\neq 0$ sa ajungem

la un
polinom de forma:
(4) $g=x^7+\frac{M}{x^7}+a_4$, cu $x\neq 0$, $a_4\neq 0$. Calculam deci $g(x)=f(x+\frac{k}{x})$.

Obtinem succesiv:

$$(x+\frac{k}{x})^7 = x^7+7k\,x^5+21k^2x^3+35k^3\,x+35\frac{k^4}{x}+21\frac{k^5}{x^3}+7\frac{k^6}{x^5}+(\frac{k}{x})^7.$$

$$(x+\frac{k}{x})^5=x^5+5kx^3+10k^2\,x+10\frac{k^3}{x}+5\frac{k^4}{x^3}+(\frac{k}{x})^5\ .$$

$$(x+\frac{k}{x})^3=x^3+3kx+3\frac{k^2}{x}+(\frac{k}{x})^3\ .$$

Asadar: $g(x)=x^7+(7k+a_1)x^5+(21k^2+5ka_1+a_2)x^3+(35k^3+10a_1k^2+3a_2k+a_3)x+$

$$+\frac{35k^4+10a_1k^3+3a_2k^2+a_3k}{x}+\frac{21k^5+5a_1k^4+a_2k^3}{x^3}+\frac{7k^6+a_1k^5}{x^5}+(\frac{k}{x})^7+a_4$$

Polinomul g va avea forma (4) daca au loc conditiile:

$$\begin{cases} 7k+a_1=0 \\ 21k^2+5ka_1+a_2=0 \\ 35k^3+10a_1k^2+3a_2k+a_3=0 \\ 35k^4+10a_1k^3+3a_2k^2+a_3k=0 \\ 21k^5+5a_1k^4+a_2k^3=0 \\ 7k^6+a_1k^5=0 \end{cases}$$

Rezolvand acest sistem obtinem: $a_1=-7k$; $a_2=14\,k^2$; $a_3=-7k^3$ (5)

Observatia 3

Polinomul f are forma:

$f=x^7-7k\,x^5+14k^2x^3-7k^3\,x+a_4$,cu $k\in\mathbf{N}$, $k\geq2$, $a_4\neq0$

Eliminand k din relatiile (5) ,regasim conditiile: $7a_2=2a_1^2$,respectiv $49a_3=a_1^3$.

In aceste conditii sa rezolvam efectiv ecuatia f(x)=0.

Observatia 4

Deoarece $g(x)=f(x+\frac{k}{x})$, obtinem ca, daca x_0 este solutie a ecuatiei g(x)=0, atunci

$x_0+\frac{k}{x_0}$ este solutie a ecuatiei f(x)=0.

Avem $g= x^7+ (\frac{k}{x})^7 +a_4$. Notam $x^7=t$ si obtinem :
$g(x)=0 \Leftrightarrow t^2+a_4t+k^7=0$ unde $\Delta=a_4^2-4k^7$

a) Daca $\Delta \geq 0 \Rightarrow t_1=\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}$ si $t_2=\frac{-a_4-\sqrt{\Delta}}{2}$

Ecuatiile $x^7= t_1$; $x^7=t_2$ admit solutiile reale:

$$x_1=\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}, \quad x_2=\sqrt[7]{\frac{-a_4-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Asadar $g(x_1)= g(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1+\frac{k}{x_1}) = f(x_2+\frac{k}{x_2}) =0$.

Observatia 5

$x_1+\frac{k}{x_1}=x_2+\frac{k}{x_2}$ este adevarat deoarece $x_1x_2=k$.

Deci solutia reala a ecuatiei f(x)=0 este de forma:

$$x_0=\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}+\frac{k}{\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}} \in R\text{-}Q \qquad \text{sau}$$

$$x_0=\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[7]{\frac{-a_4-\sqrt{\Delta}}{2}} \ .$$

b) Daca $\Delta<0 \Rightarrow t_1=\dfrac{-a_4+i\sqrt{-\Delta}}{2}$; $t_2=\dfrac{-a_4-i\sqrt{-\Delta}}{2}$

Din relatiile lui Viete stim ca $t_1+t_2=-a_4$ si $t_1t_2=k^7$

Daca notam cu x_1 orice solutie (complexa) a ecuatiei $x^7=t_1$ respectiv cu x_2 orice solutie (complexa) a ecuatiei $x^7=t_2$ obtinem $x_1^7x_2^7=k^7 \Leftrightarrow (x_1 x_2)^7=k^7$

Daca privim aceasta relatie ca fiind o ecuatie in necunoscuta x_1x_2 ,obtinem o solutie reala si anume $x_1x_2=k\in\mathbf{N}$

Mai mult ,deoarece $\overline{t_2}=t_1 \Leftrightarrow x_2^7=\overline{x_1}^7=(x_1)^7$, putem avea $x_2=x_1$

Atunci solutia $x_0=x_1+\dfrac{k}{x_1}=x_2+\dfrac{k}{x_2}=x_1+x_2\in\mathbf{R}$, chiar daca $x_1, x_2\in\mathbf{C}$

In continuare vom lucra in cazul $\Delta\geq 0$. Celelalte solutii ale ecuatiei $g(x)=0$,vor fi numere complexe provenind din rezolvarea ecuatiilor $x^7=t_1$ si $x^7=t_2$

Folosind scrierea sub forma trigonometrica a numerelor t_1, t_2 obtinem:

$x_n^{'}=\sqrt[7]{t_1}\,[\cos(\dfrac{2n\pi}{7})+i\ \sin(\dfrac{2n\pi}{7})]$, $\forall\, n=\overline{1,6}$ (6)

$x_n^{''}=\sqrt[7]{t_2}\,[\cos(\dfrac{2n\pi}{7})+i\ \sin(\dfrac{2n\pi}{7})]$, $\forall\, n=\overline{1,6}$ (7)

<u>Observatia 6</u>

Evident ,ne intereseaza doar solutiile complexe ale ecuatiilor $x^7=t_1$ si $x^7=t_2$

Vom nota $z_n=\cos(\dfrac{2n\pi}{7})+i\ \sin(\dfrac{2n\pi}{7})$,$\forall$ $n=\overline{1,6}$

Observatia 7

$$|z_n|=1\Rightarrow \overline{z_n}=\frac{1}{z_n} \quad ,\forall n=1,6$$

Obtinem deci $g(x_n^{'})=g(x_n^{''})=0\Rightarrow f(x_n^{'}+\dfrac{k}{x_n^{'}})=f(x_n^{''}+\dfrac{k}{x_n^{''}})$,$\forall n=1,6$

Propozitia 1

$\overline{x_n^{'}+\frac{k}{x_n^{'}}}=\ x_n^{"}+\frac{k}{x_n^{"}}$,$\forall$n=

Demonstratie : $x_n^{'}+\frac{k}{x_n^{'}}=\sqrt[7]{t_1}\ z_n+\frac{k}{\sqrt[7]{t_1}z_n}=\sqrt[7]{t_1}\ z_n+\frac{k}{\sqrt[7]{t_1}}\overline{z_n}$

$$x_n^{"}+\frac{k}{x_n^{"}}=\sqrt[7]{t_2}z_n+\frac{k}{\sqrt[7]{t_2}z_n}=\sqrt[7]{t_2}z_n+\frac{k}{\sqrt[7]{t_2}}\overline{z_n}$$

Deoarece $t_1t_2=k^7\Rightarrow$ $k=\sqrt[7]{t_1}\ \sqrt[7]{t_2}$

Atunci: $\begin{cases} x_n^{'}+\frac{k}{x_n^{'}}=\sqrt[7]{t_1}z_n+\sqrt[7]{t_2}\overline{z_n} \\ x_n^{"}+\frac{k}{x_n^{"}}=\sqrt[7]{t_2}z_n+\sqrt[7]{t_1}\overline{z_n} \end{cases}$

Deci , propozitia 1 este evident adevarata.

Propozitia 2 $\{\ x_n^{'}+\frac{k}{x_n^{'}}\ ,\ n=\overline{1,6}\ \}=\{\ x_n^{"}+\frac{k}{x_n^{"}}\ ,\ n=\overline{1,6}\ \}$.

Demonstratie :

Elementele primei multimi sunt numere complexe si sunt conjugate doua cate doua. Analog si elementele celei de-a doua multimi. Folosind si propozitia 1, se observa imediat egalitatea celor doua multimi.

Asadar, cele 6 solutii complexe ale ecuatiei f(x)=0 au forma:

$x_n=\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}\ z_n\ +\ \frac{k}{\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}}\ \overline{z_n}$ sau

$x_n=\sqrt[7]{\frac{-a_4+\sqrt{\Delta}}{2}}\,z_n+\sqrt[7]{\frac{-a_4-\sqrt{\Delta}}{2}}\,\overline{z_n}$

Aplicatie

Sa se arate ca numarul $x=\sqrt[7]{8}\,(1+\sqrt[7]{2})$ este solutie a ecuatiei :

$x^7-14x^5+56x^3-56x-24=0$.

Sa se rezolve apoi ecuatia.

Demonstratie

Evident un calcul direct este destul de complicat. Aplicand cele de mai sus avem:

$k=2, a_1=-14, a_2=56, a_3=-56, a_4=-24 \Rightarrow \Delta=64$

Atunci , solutiile sunt de forma:

$x_0=\sqrt[7]{\frac{24+8}{2}}+\sqrt[7]{\frac{24-8}{2}}=\sqrt[7]{16}+\sqrt[7]{8}$ (solutie reala)

Solutiile complexe sunt de forma :

$x_n=\sqrt[7]{16}\,z_n+\sqrt[7]{8}\,\overline{z_n}$, $\forall$ $n=\overline{1,6}$, cu $z_n=\cos(\frac{2n\pi}{7})+i\,\sin(\frac{2n\pi}{7})$.

Observatia 8

Aplicatia de mai sus poate fi privita in urmatorul context mai general:
“Sa se gaseasca o ecuatie algebrica de grad 7,f(x)=0 unde f are forma (1) care sa admita solutia reala $x_0=\sqrt[7]{k^3}+\sqrt[7]{k^4}$, unde $k\in N$, $k\geq 2$ fixat arbitrar “ .

Demonstratie

Folosind notatiile din aceasta nota avem , $x_1=\sqrt[7]{k^3}$, $x_2=\sqrt[7]{k^4}$ $\Rightarrow t_1=k^3$, $t_2=k^4$. Dar $t_1+t_2=-a_4 \Rightarrow a_4=-k^3-k^4$.

Ecuatia cautata va avea forma:

$x^7 - 7kx^5 + 14k^2x^3 - 7k^3x_4 - k^3 - k^4 = 0$, $k \in N$, $k \geq 2$.

Observatia 9

Analog se pot construi polinoame care sa aiba forma (1) si sa admita radacini reale de tipul $x_0 = \sqrt[7]{k} + \sqrt[7]{k^6}$ sau $x_0 = \sqrt[7]{k^2} + \sqrt[7]{k^5}$, unde $k \in N$, $k \geq 2$.

Revista MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432 nr. martie 2010

Impartirea numerelor naturale si impartirea numerelor intregi

I) Impartirea numerelor naturale

Teorema impartirii cu rest: $d=ic+r$, $0\le r<1$.

"Deimpartitul este egal cu impartitorul ori catul plus restul".

Daca $i=0$, avem $a:1=a$.

Daca $d=0$ si $i\neq 0$ avem $0=i\cdot 0$. Deci $0:a=0$, $a\neq 0$.

Daca $d\neq 0$ si $i=0$ vom avea $d=0c+r$, dar $0\le r<1$, insa $i=0$, deci impartirea cu 0 nu este posibila.

Daca $d=0$ si $i=0$ vom avea $0=0c+r$, , ceea ce ar fi adevarat daca $r=0$.

Probleme

1. Delia a avut o suma de lei din care si-a propus sa-si cumpere numai caiete. Ea si-a putut cumpara doar 10 caiete cu 5750 lei bucata. Ce suma a avut Delia?

Rezolvare:

Daca notam suma Deliei cu S, atunci avem $S=5750\cdot 10+R$, unde $0\le R<5750$.

Daca $R=0$, atunci $S=57500$.

Daca $R=1$, atunci $S=57501$.

....

Daca $R=5749$, atunci $S=63249$.

2. Radu are doua clasoare in care are in total 131 timbre. Daca imparte numarul timbrelor dintr-un clasor la numarul timbrelor din celalalt clasor obtine catul 3 si restul 15. Cate timbre are in fiecare clasor?

Rezolvare: Avem nevoie de o figura.

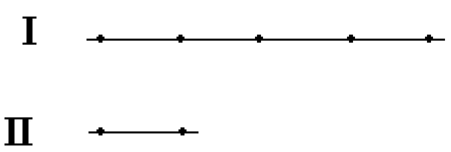


Figure 1

Si prin metoda figurativa deducem ca in clasorul al doilea va avea $(131-15):4=29$ timbre, iar atunci in primul clasor vor fi $3\cdot 29+15=102$ timbre.

3. Intr-o impartire cu rest a doua numere naturale se stie ca suma dintre rest si impartitor este 15, suma dintre cat si impartitor este 17, suma dintre rest, cat si impartitor este 18. Aflati numerele.

Solutie:

$D=C\cdot I+R$, $0\le r<I$

$R+I=15$

C+I=17

I+C+R=18

Din ultimele doua relatii obtinem 17+R=18, de unde R=1. Apoi din a doua si ultima relatie obtinem C+15=18, de unde C=3. Apo inlocuind in a doua relatie avem I=14., iar din prima relatie D=43.

4. Suma a doua numere este 340. Daca impartim numarul mai mare la jumatatea numarului mai mic obtinem catul 3 si restul 25. Aflati numerele.

Solutie:

Notam x si $y \in N$ cele doua numere.

Presupun x<y.

Atunci x+y=340 si y=0,5x·3+25, cu 0,5 x>25.

$x+\frac{3}{2}x+25=340.$

$\frac{5}{2}x=340-25$

$\frac{5}{2}x=315$

x=126

y=340-126

y=214

5. Diferenta a doua numere este 94, iar ea intrece cu 23 sfertul numarului mic. Aflati numerele.

*Solutie:*Notam x si $y \in N$ cele doua numere. Vom avea x-y=94 si $x-y-23=\frac{1}{4}y$.Obtinem $94-23=\frac{1}{4}y$.

$\frac{1}{4}y=71$

y=284.

x=y+94

x=284+94

x=378.

6. Impartind numerele 1243, 6532, 1817 la un acelasi numar, obtinem resturile 13, 7 si 2. Aflati impartitorul.

Solutie:

Fie x nenul, impartitorul comun. Atunci conform teoremei impartirii cu rest avem

1243=xa+13

6532=xb+7

1817=xc+2

unde a, b, c sunt caturile din impartirile efectuate. Scadem din fiecare egalitate restul corespunzator si vom obtine $1230=xa$

$6525=xb$

$1815=xc$

Cum x este acelasi, inseamna ca el este cmmdc al numerelor date si $x \geq 13$.

Atunci cum $1230=2\cdot3\cdot5\cdot41$

$6525=3^2\cdot5^2\cdot29$

$1815=3\cdot5\cdot11^2$

Inseamna ca x =cmmdc$=3\cdot5=15$.

7. Sa se afle cel mai mic numar de doua cifre, pe care impartindu-l la 10, 18, 15 sa obtinem acelasi rest 2.

Solutie:

Fie x numarul cautat; x avand doua cifre este mai mare decat 2.(2 ar fi fost cel mai mic numar cu proprietatile cerute).

Deci $x-2 \in M_{10}$, $x-2 \in M_{18}$ si $x-2 \in M_{15}$; de unde x-2=cmmdc[10,18,15].

Fiind cel mai mic numar cautat.

Avem atunci $x-2=90$ si $x=92$.

8.Care sunt numerele naturale cuprinse intre 200 si 300, cre impartite pe rand la 5, 4, 3 sa dea resturile4, 3, 2?

Solutie:

Daca x este un numar ce indeplineste cerintele problemei, inseamna ca

$x-4 \in M_5$ rezulta ca $x+1 \in M_5$

$x-3 \in M_4$ rezulta ca $x+1 \in M_4$

$x-2 \in M_3$ rezulta ca $x+1 \in M_3$

Din ultimele trei relatii obtinem $x+1 \in M_{[5,4,3]}$

$x+1 \in M_6 =\{60, 120, 180, 240, 300,...\}$

Cum insa $200<x<300$, vom avea $x+1=240$ deci $x=239$

$x+1=300$ de unde $x=299$.

Numerele cautate sunt 239 si 299.

9. Care exte cel mai mare numar $\overline{abc}$ care impartit pe rand la 7, 3, 5 sa dea restul 1?

Solutie: Daca $\overline{abc}$=x, avem

$x-1 \in M_7$

$x-1 \in M_3$

$x-1 \in M_5$

De aici rezulta ca $x-1 \in M_{[7,3,5]}$

$x-1 \in M_{105}$

$\overline{abc}-1 \in M_{105}=\{105, 210, 315, 420, ..., 945\}$

$\overline{abc}-1=105$, de unde $\overline{abc}=106$

$\overline{abc}-1=210$, de unde $\overline{abc}=211$

....

$\overline{abc}-1=945$, de unde $\overline{abc}=946$.

Cum $\overline{abc}$ este cel mai mare numar de trei cifre cu aceste proprietati, vom avea $\overline{abc}=946$.

10. Sa se afle doua numere naturale stiind ca cmmdc=4 si cmmmc=144.

Solutie:

Fie a si b numerele cautate. Atunci (a,b)=4 si [a,b]=144.

Cum $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$ avem $a\cdot b=4\cdot 144$

$a\cdot b=576$

Cum (a,b)=4, rezulta a=4k si b=4x cu (k,x)=1.

Prin inlocuire obtinem $4k\cdot 4x=576$ rezulta $k\cdot x=36$.

Deci $k, x \in D_{36}=\{1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 18, 36\}$

Numerele a si b cautate vor fi (4,144); (16,36); (36,16); (144,4).

11. Sa se afle cmmdc si cmmmc al numerelor 729 si 576.

Solutie:

Pentru a afla cmmdc avem doua metode: Algoritmul lui Euclid si descompunerea numerelor.

Metoda I: Algoritmul lui Euclid

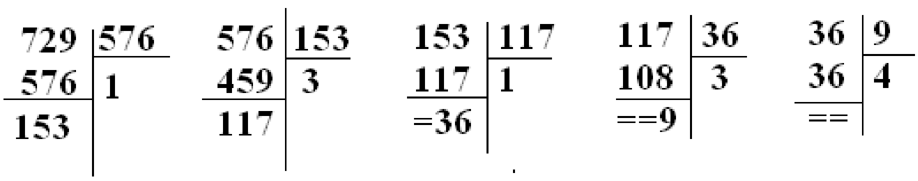


Figure 2

Cmmdc(729, 576)=9, ultimul rest nenul.

Cum $(729, 576)\cdot[729, 576]=729\cdot 576$

[729, 576]=46656.

Metoda a II-a: Descompunerea in factori primi

$729=3^6$

$576=2^6\cdot 3^2$

$(729, 576)=3^2=9$

$[729, 576]=2^6\cdot 3^6=46656$.

12. Ciurul lui Eratostene este o metoda cunoscuta inca din antichitate pentru determinarea numerelor prime.

Exemplu.

Sa se afle numerele prime mai mici decat 100.

Solutie:

Se scriu toate numerele de la 2 la 100, apoi se bareaza multiplii lui 2(mai putin 2), multiplii lui 3(mai putin 3), etc.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

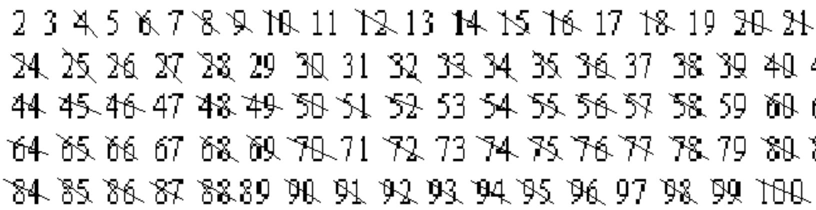


Figure 3

Deci numerele prime mai mici decat 100 sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

13. Sa se determine restul impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3.($n\in N$).

Solutie:

$1^n+2^n+4^n= 1+ (3-1)^n+(3+1)^n=1+C_n^0 3^n- C_n^1 3^{n-1}+ C_n^2 3^{n-2}-....+(-1)^n C_n^n+ +C_n^0 3^n+ C_n^1 3^{n-1}+ C_n^2 3^{n-2}+....+ C_n^n=M_3+2+(-1)^n$.

Daca n este numar par atunci $(-1)^n=1$ si $1^n+2^n+3^n+4^n=M_3$ deci restul impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3 este 0.

Daca n este numar impar atunci $(-1)^n=-1$ si $1^n+2^n+3^n+4^n=M_3+1$ deci restul

impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3 este 1.

14. Sa se arate ca daca $n\in N^*$, atunci n^2 divide $(n+1)^n-1$.

Solutie:

$(n+1)^n-1= C_n^0 n^n+C_n^1 n^{n-1}+ C_n^2 n^{n-2}+...+C_n^n-1= C_n^0 n^n+C_n^1 n^{n-1}+ C_n^2 n^{n-2}+...+ +C_n^{n-1}= n^2(C_n^0 n^{n-2}+C_n^1 n^{n-3}+ C_n^2 n^{n-4}+...+ +C_n^{n-3} n+ C_n^{n-2}+1)$ este divizibil cu n^2, pentru orice n natural, mai mare sau egal cu 2.

Daca n=2 atunci $2^2 \mid 3^2-1$ ceea ce este adevarat.

Daca n=1 atunci $1 \mid 2-1$ ceea ce este adevarat.

II) Teorema impartirii cu rest a numerelor intregi

Fie a si b doua numere intregi cu b nenul. Atunci exista doua numere intregi q si r unice cu proprietatile

$a=bq+r$ si $0\le r<|b|$. (1)

Egalitatea (1) se numeste formula impartirii cu rest pentru numere intregi, iar numerele q si r se numesc catul si respectiv restul impartirii lui a la b.

Exercitii

1. Sa se efectueze impartirea cu rest a lui -50 la 6.

Solutie:

Vom efectua impartirea cu rest a lui 50 la 6. Vom avea $50=6\cdot 8+2$, apoi inmultind cu -1 obtinem $-50=6\cdot(-8)-2$

$-50=6\cdot(-8)-6+4$

$-50=6\cdot(-9)+4$

De aici rezulta ca $q=-9$ si $r=4$.

2. Sa se efectueze impartirea cu rest a lui -721 la -50.

Solutie:

Avem $721=50\cdot 14+21$

$-721=-50\cdot 14-21$

$-721=-50\cdot 14-50+29$

$-721=-50\cdot 15+29$

De aici $q=15$ si $r=29$.

3. Fie a, b, c numere intregi cu c nenul si r_1 si r_2 resturile impartirii lui a si b la c. Atunci restul impartirii lui a+b la c este acelasi cu restul impartirii lui r_1+r_2 la c, iar restul impartirii lui ab la c este egal cu restul impartirii lui $r_1\cdot r_2$ la c.

Solutie:

Avem $a= q_1\cdot c+r_1$, $0\le r_1<|c|$

$b= q_2\cdot c+r_2$, $0\le r_2<|c|$

Atunci $a+b= (q_1+ q_2)\cdot c+ r_1+r_2$

Daca $0\le r_1+r_2<|c|$ atunci restul impartirii lui a+b la c este chiar r_1+r_2, iar daca $r_1+r_2\ge|c|$ atunci conform teoremei impartirii cu rest avem $r_1+r_2=q\cdot c+r$, cu $0\le r<|c|$.

Deci $a+b=(q_1+q_2+q_3)\cdot c+r$ cu $0\le r<|c|$.

Deci restul impartirii lui a+b la c este acelasi cu restul impartirii lui r_1+r_2 la c.

Avem $a\cdot b= (q_1\cdot q_2\cdot c+ q_1\cdot r_2+ q_2\cdot r_1)\cdot c+r_1\cdot r_2$.

Daca $0 \leq r_1 \cdot r_2 < |c|$ atunci restul impartirii lui $a \cdot b$ la c este chiar $r_1 \cdot r_2$, iar daca $r_1 \cdot r_2 \geq |c|$ atunci conform teoremei impartirii cu rest avem $r_1 \cdot r_2 = q \cdot c + r$, cu $0 \leq r < |c|$.

Deci restul impartirii lui $a \cdot b$ la c este acelasi cu restul impartirii lui $r_1 \cdot r_2$ la c.

$a \cdot b = (q_1 \cdot q_2 \cdot c + q_1 \cdot r_2 + q_2 \cdot r_1 + q) \cdot c + r$; $0 \leq r < |c|$.

4. Daca n este un numar intreg, atunci n^2 este de forma 4k sau 8k+1, k intreg.

Solutie:

Deoarece n este un numar intreg avem doua cazuri:

Cazul I. Daca n=2p, p intreg atunci $n^2=4p^2=4k$

Cazul II. Daca n=2p+1, p intreg atunci $n^2=4p^2+4p+1=4p(p+1)+1$

Dar $p(p+1)=2k$ deci $n^2=8k+1$, k intreg.

Qed

5. Daca a, b sunt intregi si 3 nu divide nici pe a, nici pe b, atunci 3 divide pe a-b sau 3 divide pe a+b.

Solutie:

Cum 3 nu divide nici pe a, nici pe b avem a=3k+1 sau a=3k+2 cu k intreg si b=3m+1 sau b=3m+2 cu m intreg.

Cazul I. Daca a=3k+1 si b=3m+1 atunci a-b=3(k-m) divizibil cu 3.

Cazul II. Daca a=3k+1 si b=3m+2 atunci a+b=3(k+m+1) divizibil cu 3.

Cazul III. Daca a=3k+2 si b=3m+1 atunci a+b=3(k+m+1) divizibil cu 3.

Cazul IV. Daca a=3k+2 si b=3m+2 atunci a-b=3(k-m) divizibil cu 3.

6. Sa se arate ca 1000^k-1 este divizibil cu 37, oricare ar fi k natural.

Solutie:

Observam ca 999 este divizibil cu 37. Atunci

$1000^k-1=(999+1)^k-1=C_k^0 999^k+C_k^1 999^{k-1}+\ldots+ C_k^{k-2} 999^2+C_k^{k-1} 999+C_k^k-1=$

$=999(C_k^0 999^{k-1}+C_k^1 999^{k-2}+\ldots+ C_k^{k-2} 999+C_k^{k-1})=M_{37}$

qed

7. Sa se gaseasca toate numerele intregi n cu proprietatea n+1 divide n^2+1.

Solutie:

Avem $n^2+1=(n+1)(n-1)+2$

Cum n+1 divide n^2+1 avem n+1 divide (n+1)(n-1)+2, rezulta ca n+1 divide 2

$D_2=\{-1, 1, -2, 2\}$

Daca n+1=1 rezulta n=0

Daca n+1=2 rezulta n=1

Daca n+1=-1 rezulta n=-2

Daca $n+1=-2$ rezulta $n=-3$.

Deci $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$.

8. Sa se gaseasca prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor -810 si 315.

Solutie:

1) $810=315\cdot 2+180$

2) $315=180\cdot 1+135$

3) $180=135\cdot 1+45$

4) $135=45\cdot 3+0$

In acest sir de impartiri succesive ultimul rest nenul este 45, deci $(-810, 315)=45$.

9. Sa se demonstreze ca numerele 57 si 25 sunt prime intre ele.

Solutie:

Aplicam algoritmul lui Euclid.

1) $57=25\cdot 2+7$

2) $25=7\cdot 3+4$

3) $7=4\cdot 1+3$

4) $4=3\cdot 1+1$

5) $3=1\cdot 3+0$

si deci $(57, 25)=1$ ceea ce inseamna ca cele doua numere 57 si 25 sunt prime intre ele.

10. Se dau doua numere intregi a si b nenule care au cmmdc pe 5, iar caturile impartirilor succesive din algoritmul lui Euclid sunt -1, 3, 2. Sa se afle a si b.

Solutie:

$a=b\cdot(-1)+r_1$; $0\le r_1<|b|$.

$b= r_1\cdot 3+r_2$; $0\le r_2<|r_1|$.

$r_1=r_2\cdot 2+0$.

Dar $(a, b)=5$ rezulta ca $r_2=5$.

$r_1=2r_2=10$.

$b= r_1\cdot 3+r_2=35$

$a=b\cdot(-1)+r_1=-25$.

Cele doua numere sunt $a=-25$ si $b=35$.

11. Sa se gaseasca doua numere intregi nenule a si b care au cmmdc=3 si cmmmc=72. Este solutia unica?

Solutie:

Cum $(a, b)=3$ rezulta ca $a=3k$ si $b=3m$, cu k si m intregi si prime intre ele.

Avem $(a, b)\cdot[a, b]=a\cdot b$.

$3\cdot 72=3k\cdot 3m$

$k\cdot m=24$

$24=2^3\cdot 3$

Cazul I. k=1 si m=24 atunci a=3 si b=72.

Cazul II. k=8 si m=3 atunci a=24 si b=9.

Cazul III. k=3 si m=8 atunci a=9 si b=24.

Cazul IV. k=24 si m=1 atunci a=72 si b=3.etc.

Deci solutia nu este unica.

12. Sa se arate ca numerele 2k+1 si 9k+4 sunt prime intre ele, pentru orice k intreg.

Solutie:

Fie (2k+1, 9k+4)=d, cu d natural.

Cum (d divide 2k+1 si d divide 9k+4) rezulta (d divide 8k+4 si d divide 9k+4) de unde (d divide k si d divide 2k+1) apoi d divide 1, deci

(2k+1, 9k+4)=1.

13. Sa se gaseasca cmmdc a numerelor 2k-1 si 9k+4 in functie de numarul intreg k.

Solutie:

Fie d=(2k-1, 9k+4), d natural.

Cum (d divide 2k-1 si d divide 9k+4) rezulta (d divide 18k-9 si

d divide -18k-8) de unde d divide 17 si apoi d=1 sau d=17.

Daca d=17 atunci 2k-1=17p, cu p intreg.

k=(17p+1)/2 si este intreg.

Deci p=2m+1 cu m intreg.

k=17m+9.

Cazul I. Daca k=17m+9, cu m intreg avem 2k-1=34m+17=17(2m+1)

9k+4=17(9m+5)

Cum (2m+1, 9k+4)=1 avem (2k-1, 9k+4)=17.

Cazul II. Daca $k\in Z\setminus\{17m+9, m\in Z\}$ atunci (2k-1, 9k+4)=1.

14. Sa se arate ca daca a si b sunt numere intregi d=(a, b), iar k si l din Z au proprietatea ca daca ka+lb=d, atunci (k, l)=1.

Solutie:

Presupun d'=(k, l).

d'$\mid$ k si d'$\mid$ l rezulta d'$\mid$ ka+lb rezulta d'$\mid$ d.

Cum d=(a,b) rezulta a=dc si b= de cu (c, e)=1.

$ka+lb=d$

$kdc+lde=d$.

Impartim prin d nenul si obtinem $kc+le=1$.

$d' \mid k$ si $d' \mid l$ rezulta $d' \mid kc+le$ rezulta $d' \mid 1$ rezulta $d'=1$.De aici rezulta ke=1.

q.e.d.

15. Sa se arate ca $(21n+4, 14n+3)=1$. pentru orice n intreg.

Solutie:

Fie $d=(21n+4, 14n+3)$, atunci

$d \mid 21n+4$ si $d \mid 14n+3$ rezulta $d \mid -2(21n+4)+3(14n+3)$

Deci $d \mid 1$, rezulta $d=1$.

16. Sa se arate ca numerele de forma $F_k=2^{2^k}+1$,(k natural) sunt prime doua cate doua.

Solutie:

Fie $F_m=2^{2^m}+1$ si $F_n=2^{2^n}+1$, unde m si n sunt nr. naturale diferite.

Presupunem ca $m>n$ si fie $m=n+k$, $k>0$.

Luam $x=2^{2^n}$ si avem

$F_m-2=2^{2^m}-1=2^{2^{n+k}}+1=x^{2^k}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...(x^{2^{k-1}}+1)$

Cum $F_n=2^{2^n}+1=x+1$ rezulta ca $F_n \mid F_m-2$.

Fie $d \mid F_m-2$ si $d \mid F_m$ rezulta $d \mid 2$ si cum d nu divide 2 rezulta $d \mid 1$, adica $(F_m, F_n)=1$.

17. Fie a si b doua numere intregi nenegative.

1) Aratati ca $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1$.

2) Deduceti ca $(2^a-1, 2^b-1)=1$ daca si numai daca $(a, b)=1$.

Solutie:

1) Din teorema impartirii cu rest in multimea numerelor naturale avem ca exista q si r numere naturale cu $a=bq+r$, $0\le r< b$.

Avem

$2^a-1=2^{bq+r}-1=2^{bq}\cdot 2^r+2^r-2^r-1=(2^{bq}-1)\,2^r+2^r-1=((2^b)^q-1)\,2^r+2^r-1=$

$=(2^b-1)[(2^b)^{q-1}+(2^b)^{q-2}+(2^b)^{q-3}+...+2^b+1]\,2^r+2^r-1=(2^b-1)Q+2^r-1$, unde $Q=(2^b)^{q-1}+(2^b)^{q-2}+(2^b)^{q-3}+...+2^b+1$ si $2^r-1<2^b-1$.

Deci daca r este restul impartirii lui a prin b, atunci 2^r-1 este restul impartirii lui 2^a-1 prin 2^b-1.

In particular, daca d este ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid pentru a si b atunci 2^d-1 este ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid pentru 2^a-1 si 2^b-1, de unde

$(2^a-1, 2^b-1)= 2^d-1 =2^{(a,b)}-1$ qed

2) Daca (a, b)=1 atunci conform punctului (1) avem $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1=1$

Daca $(2^a-1, 2^b-1)=1$ si cum $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1$, rezulta ca $2^{(a,b)}-1=1$, deci $2^{(a,b)}=2$

(a, b)=1

PROFESOR GRAD I BECHIR GHIULNAR

LICEUL TEORETIC „CALLATIS” MANGALIA, JUD. CONSTANTA

NOTĂ MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS

Corneliu Mănescu-Avram

Revista electronică Mateinfo.ro a publicat în fiecare săptămână câte o problemă de concurs, care a beneficiat de interesul constant al cititorilor. Nota de față prezintă extinderi ale unora dintre aceste probleme.

1. Fie ABC un triunghi echilateral şi P un punct ales arbitrar pe cercul înscris în triunghi. Să se demonstreze că suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ nu depinde de poziția punctului P.

(19 – 25.10.2009)

Proprietatea se păstrează într-un cadru mai general :

Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, O centrul său de simetrie şi P un punct arbitrar pe un cerc cu centrul în O. Să se demonstreze că suma $PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_n^2$ nu depinde de poziția punctului P.

Folosim coordonatele complexe, alegem originea în punctul O şi axa reală trecând prin punctul A_1. Putem lua ca unitate raza cercului circumscris poligonului şi atunci afixele vârfurilor poligonului sunt $z_k = \varepsilon^k$, $0 \le k \le n-1$, unde ε este o rădăcină primitivă de ordinal n a unității, de exemplu $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Dacă r este raza cercului considerat, atunci ecuația cercului este $z\bar{z} = r^2$, iar $PA_k^2 = |z - z_k|^2 = (z - z_k)\overline{(z - z_k)} = r^2 - z\overline{z_k} - \bar{z}z_k + 1$. Avem $\sum_{k=1}^{n} z_k =$ $= \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} = 0$, deci $\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = n(r^2+1)$ nu depinde de poziția punctului P.

2. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC cel mult una dintre relațiile : $\begin{cases} b + c = a + 2r \\ c + a = b + 2r \\ a + b = c + 2r \end{cases}$ este adevărată.

(2 – 8.11.2009, *Marian Teler*)

Afirmația rămîne adevărată dacă egalitățile se înlocuiesc cu inegalități, mai precis :

Într-un triunghi ABC cel mult una dintre relațiile : $\begin{cases} b + c \le a + 2r \\ c + a \le b + 2r \\ a + b \le c + 2r \end{cases}$ este adevărată.

Se demonstrează că prima inegalitate este adevărată dacă şi numai dacă $m(\hat{A}) \geq \frac{\pi}{2}$.
Într-adevăr, fie I centrul cercului înscris şi A', B', C' punctele de contact ale acestui cerc respectiv cu laturile BC, CA, AB. Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente, deci dacă se notează $AB' = AC' = x$, atunci $CB' = CA' = b - x$, $BC' = BA' = c - x$. Din $BA' + CA' = a$, rezultă $2x = b + c - a$.. În triunghiul dreptunghic AIB' este adevărată inegalitatea $r \geq x$ dacă şi numai dacă $\frac{m(\hat{A})}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{m(\hat{A})}{2}$, aşadar $m(\hat{A}) \geq \frac{\pi}{2}$.

Un triunghi are cel mult un unghi drept sau obtuz, deci afirmația din enunț este adevărată.

3. Fie S aria totală şi V volumul unui con circular drept. Să se demonstreze inegalitatea

$$S^3 \geq 72\pi V^2.$$

(7 − 13.12.2009, *Corneliu Mănescu-Avram*)

Problema este un caz particular de inegalitate *izoperimetrică*. Cazul general este extrem de complicat, de aceea vom studia numai corpurile rotunde. Pentru un corp convex C cu dimensiuni variabile, notăm q (C) valoarea maximă a raportului $\frac{36\pi V^2}{S^3}$, unde V este volumul şi S este aria corpului. Se ştie că mulțimea valorilor funcției q este intervalul (0, 1]. Evident, q (sferă) = 1, iar problema cere să se demonstreze că q (con) = $\frac{1}{2}$. Este adevărată următoarea

Propoziție. a) q (cilindru) = $\frac{2}{3}$.

b) q (trunchi de con) = $\dfrac{2\left(k^2+k+1\right)^2\left[k^4+1+\left(k^2+1\right)\sqrt{k^4-k^2+1}\right]}{(k+1)^2\left(k^2+1+\sqrt{k^4-k^2+1}\right)^3}$, unde R, r sunt razele bazelor şi k este o constantă din intervalul (0, 1) astfel încât $r = kR$.

Demonstrație : a) Aria totală şi volumul unui cilindru circular drept sunt $S = 2\pi R(G + R)$, $V =$ $= \pi R^2 G$, unde R este raza bazei şi G este generatoarea cilindrului. Dacă $G = xR$, cu $x \in (0, +\infty)$, atunci

$$\frac{36\pi V^2}{S^3} = \frac{36\pi\left(\pi R^2 G\right)^2}{[2\pi R(G+R)]^3} = \frac{9x^2}{2(x+1)^3}.$$

Considerăm funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$. Derivata $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(x+1)^4}$ este strict pozitivă pe intervalul (0, 2), se anulează în punctul $x_0 = 2$ şi este strict negativă pe intervalul $(2, +\infty)$. Rezultă că $x_0 = 2$ este punct de maxim pentru funcția f şi deci

$$q\ (\text{cilindru}) = \frac{9}{2} f(2) = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{27} = \frac{2}{3}.$$

b) Aria totală şi volumul unui trunchi de con circular drept sunt $S = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$,

$V = \dfrac{\pi\left(R^2+Rr+r^2\right)\sqrt{G^2-(R-r)^2}}{3}$, unde R, r sunt razele bazelor şi G este generatoarea trunchiului de con. Dacă $G = xR$, cu $x \in (0, +\infty)$ şi $r = kR$, cu $k \in (0, 1)$ constant, atunci

$$\frac{36\pi V^2}{S^3} = \frac{4\left(R^2+Rr+r^2\right)^2\left[G^2-(R-r)^2\right]}{\left[G(R+r)+R^2+r^2\right]^3} = \frac{4\left(k^2+k+1\right)^2\left[x^2-(k-1)^2\right]}{\left[(k+1)x+k^2+1\right]^3}.$$

Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-(k-1)^2}{\left[(k+1)x+k^2+1\right]^3}$. Derivata

$f'(x) = \dfrac{-(k+1)x^2+2\left(k^2+1\right)x+3(k+1)(k-1)^2}{\left[(k+1)x+k^2+1\right]^4}$ are o singură rădăcină pozitivă

$x_0 = \dfrac{k^2+1+2\sqrt{k^4-k^2+1}}{k+1}$, este strict pozitivă pe intervalul $(0, x_0)$ şi strict negativă pe intervalul $(x_0, +\infty)$, deci funcția f are un maxim în punctul x_0, de unde deducem

$$q\ (\text{trunchi de con}) = 4\left(k^2+k+1\right)^2 f(x_0) = \frac{2\left(k^2+k+1\right)^2\left[k^4+1+\left(k^2+1\right)\sqrt{k^4-k^2+1}\right]}{(k+1)^2\left(k^2+1+\sqrt{k^4-k^2+1}\right)^3}.$$

4. Într-un cub se înscrie o sferă. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la un punct oarecare situat pe sferă la fețele cubului este constantă.

(14 − 20.12.2009, *Anghel Valentin*)

Afirmația rămâne adevărată în spațiul euclidian n-dimensional $\mathbb{R}^n$:

Într-un cub $n-$ dimensional se înscrie o sferă. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la un punct oarecare situat pe sferă la fețele de dimensiune $n-1$ ale cubului este constantă.

Demonstrația în cazul general este aceeaşi ca în cazul $n = 3$:

Considerăm un reper cartezian $Ox_1 \dots x_n$ cu originea în centrul de simetrie al cubului şi axele de coordonate perpendiculare pe fețele de dimensiune $n-1$ ale cubului. Dacă lungimea razei sferei înscrise în cub este r, atunci vârfurile cubului $n-$ dimensional sunt punctele $(\pm r, \pm r, \dots, \pm r)$ (n componente), fețele de dimensiune $n-1$ ale cubului sunt conținute în hiperplanele cu ecuațiile $x_1 = \pm r,\ x_2 = \pm r, \dots, x_n = \pm r$, ecuația sferei înscrise în cub este $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$, iar distanțele de la un punct $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de pe sferă la fețele de dimensiune $n-1$ ale cubului sunt $|a_1 \pm r|, |a_2 \pm r|, \dots, |a_n \pm r|$. Avem $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = r^2$ şi suma pătratelor acestor distanțe

$$|a_1 + r|^2 + |a_1 - r|^2 + |a_2 + r|^2 + |a_2 - r|^2 + \dots + |a_n + r|^2 + |a_n - r|^2 =$$

$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + nr^2) = 2(n+1)\, r^2$$

nu depinde de poziția punctului P, deci este constantă.

5. Fie a, b, c lungimile laturilor şi R lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 10$ şi $a^4 + b^4 + c^4 = 40$, atunci $R < \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(1 − 7.02.2010, *Biro Istvan*)

Prin schimbarea constantelor se obține o afirmație mai generală :

Fie a, b, c lungimile laturilor şi R lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = u$ şi $a^4 + b^4 + c^4 = v$, unde u, v sunt numere reale strict pozitive astfel încât $u^2 < 3v$, atunci $R < \frac{u}{3}\sqrt{\frac{u}{3(u^2-2v)}}$.

Avem $16R^2S^2 = (u^2 - 2v)R^2 = a^2b^2c^2 < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{u}{3}\right)^3$, de unde se obține inegalitatea propusă.

Se poate obține o evaluare mai bună în cazul general, dar pentru a nu complica inutil calculele, alegem v astfel încât $3v = u^2 + 2u$, în concordanță cu opțiunea autorului problemei.

Considerăm polinomul $f = X^3 - uX^2 + \frac{u(u-1)}{3}X - m \in \mathbb{R}[X]$ şi determinăm valorile parametrului $m \in (0, +\infty)$ pentru care polinomul f are trei rădăcini reale strict pozitive. Derivata funcției polinomiale asociate lui f este $f'(x) = 3x^2 - 2ux + \frac{u(u-1)}{3}$ şi are rădăcinile $x_1 =$

$= \frac{u-\sqrt{u}}{3}$, $x_2 = \frac{u+\sqrt{u}}{3}$. Dacă $u > 1$, atunci rădăcinile derivatei sunt strict pozitive, ceea ce vom presupune în continuare. Derivata este strict pozitivă pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ şi strict negativă pe (x_1, x_2). Rezultă că funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ şi strict descrescătoare pe (x_1, x_2). Avem şi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Deducem că polinomul f are trei rădăcini reale strict pozitive dacă şi numai dacă $f(x_1) \geq 0$ şi $f(x_2) \leq 0$ (1). Din identitatea

$$f = X^3 - uX^2 + \frac{u(u-1)}{3} X - m = \left(\frac{1}{3} X - \frac{u}{9}\right)\left(3X^2 - 2uX + \frac{u(u-1)}{3}\right) - \frac{2u}{9} X + \frac{u^2(u-1)}{27} - m$$

obţinem valorile $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, care înlocuite în (1) ne dau

$$-\frac{2u}{9} x_2 + \frac{u^2(u-1)}{27} \leq m \leq -\frac{2u}{9} x_1 + \frac{u^2(u-1)}{27}. \qquad (2)$$

Dacă a^2, b^2, c^2 sunt rădăcinile lui f, atunci relaţiile lui *Viète* se scriu

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = u \\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \dfrac{u(u-1)}{3} \\ a^2b^2c^2 = m \end{cases},$$

de unde $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = u^2 - \frac{2}{3} u(u-1) = v$,

astfel că sunt îndeplinite condiţiile din enunţ. Avem şi $16R^2S^2 = (u^2 - 2v)R^2 = \frac{u(u-4)}{3} R^2 =$ $= a^2b^2c^2 = m$ şi (2) devine

$$\frac{u^2-3u-2\sqrt{u}}{9(u-4)} \leq R^2 \leq \frac{u^2-3u+2\sqrt{u}}{9(u-4)}$$

şi în final

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{u^2-3u-2\sqrt{u}}{u-4}} \leq R \leq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{u^2-3u+2\sqrt{u}}{u-4}}.$$

6. Două laturi ale unui triunghi şi raza cercului înscris au lungimile respectiv egale cu *a, b, r,* unde $r = \sqrt{\frac{(2a-b)(b-a)}{2}}$ şi $a < b < 2a$. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi.

(15 − 21.02.2010, *Corneliu Mănescu-Avram*)

Originea acestei probleme se află în căutarea perechilor de triunghiuri heronice cu laturile de lungimi *a, b, x*, respectiv *a, b, y*, pentru care lungimea *r* a razei cercului înscris este aceeaşi. Varianta parametrizată este următoarea :

Două laturi ale unui triunghi au lungimile egale respectiv cu $m^4 + n^4$ şi $(m^2 + n^2)^2$, $m, n \in (0, \infty)$, $m > n$. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi, ştiind că raza cercului înscris în triunghi are lungimea $r = mn(m^2 - n^2)$.

Se obțin soluțiile $x = 2(m^4 - m^2n^2 + n^4)$, $y = 2mn(m^2 + mn + n^2)$, prin aceeaşi metodă ca la problema anterioară. Alegem $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, $(m, n) = 1$ şi deducem că există o infinitate de perechi de triunghiuri cu laturile de lungimi (a, b, x), (a, b, y), care au raza cercului înscris de aceeaşi lungime, toate lungimile fiind exprimate prin numere naturale Iată câteva dintre ele :.

m	n	a	b	x	y	r
2	1	17	25	26	28	6
3	1	82	100	146	78	24
3	2	97	169	122	228	30
4	1	257	289	482	168	60
4	3	337	625	386	888	84
5	1	626	676	1202	310	120

Soluția problemei inițiale este $x = 3a - b$, $y = b - a + \sqrt{2b(b-a)}$. Numerele x, y, r sunt naturale, dacă b, $2a - b$ şi $2(b - a)$ sunt pătrate perfecte. Aceste condiții sunt îndeplinite, dacă

$b = u^2$, $2a - b = v^2$, $2(b - a) = u^2 - v^2 = t^2$, $u, v, t \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că o parametrizare pentru a, b, x, y, r este dată de un triplet pitagoric (t, v, u), deci $v = m^2 - n^2$, $u = m^2 + n^2$, $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$m > n$, de unde $a = m^4 + n^4$, $b = (m^2 + n^2)^2$, $x = 2(m^4 - m^2n^2 + n^4)$,
$y = 2mn(m^2 + mn + n^2)$, $r = mn(m^2 - n^2)$.

Bibliografie

1. Problema săptămânii, mateinfo.ro

2. Sándor, J., Geometric theorems, diophantine equations and arithmetic functions, American Research Press, Rehoboth, 2002

3. Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968

4. Dincă, M., Chiriță, M., Numere complexe în matematica de liceu, All Educational, Bucureşti, 1996

5. Bradley, Ch. J., Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present, Oxford University Press, 2005

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Prof.Ilinca Sebastian
Scoala nr.4 Corabia

Rezolvarea unor subiecte date la examenul de titularizare

Concursul Național pentru ocuparea catedrelor vacante s-a desfăşurat în data de 15 iulie 2009 . Noutatea în desfăşurarea acestui concursului a fost faptul că fiecare județ a propus propriile subiecte , un pas important în direcția deşcentralizării . Unele județe au tratat cu maximă importanță acest examen propunînd subiecte adecvate , însă au fost cazuri când subiectele propuse mai fuseseră date şi în alți ani.
Am selecționat cu ajutorul site-ului www.mateinfo.ro câteva subiecte pe care le-am şi rezolvat . Le doresc succes tuturor candidaților din anul acesta şi sper ca rezolvarea acestor subiecte să le fie de real folos.

Vom prezenta în continuare subiecte date în diferite județe.

1)(Satu Mare)Se consideră mulțimile $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}; a,b,c \in N \right\}$ şi

$K = \{n \in N / n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc; a,b,c \in N\}$

a) Calculați $\det(A), A \in M$;

b) Arătați că există o funcție $f : M \to K$ astfel încât $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$;

c) Dacă $m,n \in K$, atunci $m \cdot n \in K$;

d) Arătați că există $E \in M$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + bE + cE^2, \forall a,b,c \in N$,

unde I_3 este matricea unitate de ordin 3 ;

e) Dacă $n \in N$ şi

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ...$$
$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ...$$
$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ...$$

Să se arate că $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = 2^n$

2)(Satu Mare)Fie triunghiul ABC oarecare , A', B', C' mijloacele laturilor $(BC), (AC)$ şi $(AB), D, E, F$ picioarele înălțimilor duse din vârfurile A, B, C ale triunghiului , H ortocentrul triunghiului şi A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $(AH), (BH)$ şi (CH).
Arătați că :

a) Punctele $A', B', C'D'$ sunt conciclice .
b) Patrulaterul $A'B'A_1D$ este inscriptibil .
c) Punctele $A', B', C', D, E, F, A_1, B_1, C_1$ sunt situate pe un cerc ;determinați centrul şi raza acestuia .

Rezolvări:

1.

a) $\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Punctul a) ne sugerează să considerăm funcția $f : M \to K, f(A) = \det(A)$.

$f(A \cdot B) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = f(A) \cdot f(B)$.

c) Fie $m.n \in K,\ m = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1 b_1 c_1$ şi $n = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2 b_2 c_2$

Conform punctului b) există $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \in M$ şi $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} \in M$ astfel încât

$m = f(A), n = f(B)$ şi $f(AB) = f(A) \cdot f(B) = m \cdot n$.

d) Fie $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi se verifică imiediat egalitatea cerută.

e) Fie $A(1,1,0) = I + E$,unde $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Atunci

$$A^n(1,1,0) = (I + E)^n = C_n^0 + C_n^1 E + C_n^2 E^2 + \ldots + C_n^n E^n = (C_n^0 + C_n^3 + \ldots)I + (C_n^1 + C_n^4 + \ldots)E$$

$$+ (C_n^2 + C_n^5 + \ldots)E^2 = A(a_n, b_n, c_n).$$

$$\det A^n(1,1,0) = [\det A(1,1,0)]^n = 2^n.$$

$$\det A^n(1,1,0) = \det A(a_n, b_n, c_n) = a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n.$$

2.

a) $A'B' // AB (A'B'$ linie mijlocie $)$.Analog $B'C' // A'D$.

Avem $A'B' = \dfrac{AB}{2}$, în triunghiul ADB dreptunghic în D $D'C = \dfrac{AB}{2}$. Deci $A'B'C'D$ trapez isoscel.

b) $A_1 B'$ linie mijlocie în triunghiul

$AHC \Rightarrow HC // A_1 B'$. $m(\angle A_1 DEA') = 90^\circ, m(\angle A_1 B'A') = m(\angle(HC, AB)) = 90^\circ$, deci patrulaterul $A'B'A_1 D$ are unghiurile opuse suplementare.

c) Centrul cercului este mijlocul segmentului $[A_1 A']$.

3.(Caraş-Severin) Fie $ABCD$ un patrulater convex oarecare şi notăm cu α unghiul dintre laturile opuse AD şi BC.

a) Demonstrați egalitatea $\cos\alpha = \dfrac{AC^2 + BD^2 - AB^2 - DC^2}{2AD \cdot BC}$.

b) Dacă β este unghiul ascuțit al diagonalelor demonstrați că

$$\cos\beta = \frac{\left|AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2\right|}{2AD \cdot BD}$$

c) Demonstrați că dacă laturile opuse AD şi BC sunt perpendiculare atunci $AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$.

d) Demonstrați că diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare dacă şi numai dacă suma pătratelor laturilor opuse este constantă .

Soluție:

a) Se ştie că $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AD}\cdot\vec{BC}}{AD \cdot BC}$ (1) .Calculăm produsul scalar $\vec{AD}\cdot\vec{BC}$:

$$\vec{AD}\cdot\vec{BC} = \vec{AD}\cdot(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD}\cdot\vec{AC} - \vec{AD}\cdot\vec{AB},$$

$DC^2 = \vec{DC}\cdot\vec{DC} = (\vec{AC} - \vec{AD})^2 = AC^2 + AD^2 - 2\vec{AC}\cdot\vec{AD}$, de unde rezultă că

$\vec{AC}\cdot\vec{AD} = \dfrac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2}$. Analog , $\vec{AD}\cdot\vec{AB} = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2}$.

Înlocuind în relația (1) obținem $\cos\alpha = \dfrac{AC^2 + AD^2 - DC^2 - AB^2 - AD^2 + BD^2}{2AD \cdot BC}$

b) $\cos\beta = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{BD}}{AC \cdot BD}$,

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = \vec{AC}\cdot(\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC}\cdot\vec{AD} - \vec{AC}\cdot\vec{AB} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2} - \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} =$$

$$= \frac{AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2}{2}$$

$\cos\beta = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{BD}}{AC \cdot BD} = \dfrac{\left|\, AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2 \,\right|}{2AC \cdot AD}$, luăm modul deoarece cosinusul unui unghi ascuțit este pozitiv.

c) AD şi BC sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$,adică $\cos\alpha=0$, aplicăm punctul a) şi obținem $AC^2+BD^2=AB^2+DC^2$.

d) AC şi BD sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0 \Rightarrow \cos\beta=0$ şi aplicând b) obținem relația cerută .

4)(Brăila) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(R)$

a) Să se calculeze A^2, A^3, A^4.

b) Fie $n\in N$. Să se arate că $A^n=I_3$ dacă şi numai dacă 4 divide n.

c) Fie $G=\{A^n / n\in N^*\}$. Să se arate că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup comutativ cu 4 elemente.

d) Demonstrați că $(G,\cdot)\approx(Z_4,+)$.

e) Să se calculeze $\det(A+A^2+...+A^{2009})$.

Soluție :

a) Se obține $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$.

b) Rezultă din a).

c) Din a) se obține $G=\{I_3, A.A^2, A^3\}$.

Alcătuim tabla opereației :

$\bullet$	I_3	A	A^2	A^3
I_3	I_3	A	A^2	A^3
A	A	A^2	A^3	I_3
A^2	A^2	A^3	I_3	A
A^3	A^3	I_3	A	A^2

Din tabla operației rezultă că $(G,\cdot)$ este grup comutativ .

d)Alcătuim tabla lui $(Z_4,+)$:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Din tablele operațiilor se observă ca cele două grupuri sunt izomorfe.

e) $A+A^2+...+A^{2009}=502(I_3+A+A^2+A^3)+A$

Se obține $\det(A+A^2+...+A^{2009})=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2009 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2009$

5.(Bihor) Fie $A=\{0,1,a,b\}$ şi $(A,+,\cdot)$ un corp cu patru elemente şi funcția $f:A\to A, f(x)=1+x.$

a)Calculați $\sum_{x\in A} f(x)$.

b) Arătați că $1+1=0$.

c) Arătați că ecuația $1+x=x^2, x\in A$ are soluții .

Soluție:

a) Deoarece $(A,+)$ este un grup finit cu patru elemente ,ordinul fiecarui element este 4.În particular $1+1+1+1=0$ .Atunci

$\sum_{x\in A} f(x)=f(0)+f(1)+f(a)+f(b)=1+0+1+1+1+a+1+b=1+a+b.$

Sau,o altă metodă : Este evident că funcția f este injectivă ,iar codomeniul fiind o mulțime finită ea este şi surjectivă ,deci bijectivă . $\sum_{x\in A} f(x)=0+1+a+b=1+a+b.$

b) Fie p caracteristica corpului $(A,+,\cdot)$.Deoarece caracteristica unui corp este 0 sau un numar prim (în cazul nostru nu poate fi 0 deoarece corpul este finit)şi caracteristica divide ordinul obținem că $p|4$,adică $p=2$.Din definiție,rezultă că $1+1=0$.

c) Deoarece $(A^*,\cdot)$ este grup de ordin 3 rezultă $x^3=1, \forall x\in A^*, x\neq 1$.Deoarece $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)=0$ şi $x+1\neq 0$ rezultă obligatoriu $x^2+x+1=0$ şi ținând cont de faptul că $1=-1$ se obține că ecuația dată are soluții .

6)(Caraş-Severin)Fie funcția $f:R\to R$ dată de legea $f(x)=x+\cos x-1$ şi sirul $(a_n)_{n\in N}$ cu

$a_0=1,\ a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin(\pi x)dx$.

a) Determinați numărul de rădăcini ale funcției f .

b) Arătați că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este monoton.

c) Arătați că $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit .

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluție:

a)Fie funcția $f:R-\{(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi\}\to R,\ k\in Z^*$ dată de $f(x)=x+\cos x-1$.

$f'(x)=1-\sin x>0 \Rightarrow f$ e strict crescătoare ,deci injectivă şi astfel ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.Se observă că $x=0$ este soluție a ecuației date .

Dacă $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ înlocuind în ecuație se obține $(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi-1=0$ sau echivalent

$(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi=1$,absurd deoarece în stânga avem un număr irațional iar în dreapta unul natural.Aşadar ecuația nu are soluția $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

b) $a_{n+1}=\displaystyle\int_0^{a_n}\sin(\pi x)dx=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\cos\pi a_n$.

Demonstrăm că $a_n>0$,$\forall n\in N$.

- Dacă $a_n=0\Rightarrow a_{n+1}=0$,contradicție.
- Dacă $a_n<0\Rightarrow |a_{n+1}|\le a_n<0$,contradicție .

Aşadar , $a_n>0$,$\forall n\in N$.

Fie $g:[0,\infty)\to R, g(x)=x+\cos x$.

$g'(x)=1-\sin x\ge 0 \Rightarrow$ g crescătoare $\Rightarrow g(x)\ge g(0)=0 \Rightarrow x+\cos x\ge 1 \Rightarrow \cos x\ge 1-x$

şi $-\cos\pi a_n\le \pi a_n-1$.

$a_{n+1}\le\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}(\pi a_n-1)=a_n$, de unde rezultă că (a_n) este descrescător.

c) (a_n) fiind descrescător avem $a_n\le a_0=1$.Pe de altă parte $a_n>0$, deci sirul este mărginit .

d) Se ştie că orice şir descrescător mărginit inferior este convergent şi anume la marginea inferioară , deci limita cerută este egală cu 0.

Sau , folosind o altă metodă : Fie $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$.

$a_{n+1}=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi a_n$ trecând la limită în această relație de recurență se obține

$l=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi a_n \Leftrightarrow \pi l=1-\cos\pi l \Leftrightarrow \pi l+\cos\pi l-1=0$ ecuație care conform punctului a) are soluție unică pe $l=0$.

7)(Maramureş) Să se demonstreze că într-un triunghi ABC : $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 6$.

Soluție: Fie D intersecția bisectoarei din A cu $[BC]$ şi $BM\perp AD$.

Aplicăm teorema bisectoarei şi obținem : $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{BD}{a}=\frac{c}{b+c}$ de unde rezultă că $BD=\frac{ac}{b+c}$ (1) .În triunghiul BMA dreptunghic în M avem $\sin\frac{A}{2}=\frac{BM}{c}$ dar $BM<BD$ şi ținând cont de relația (1) obținem $\sin\frac{A}{2}\le\frac{ac}{(b+c)c}\le\frac{a}{b+c}$. Analog , obținem şi următoarele relații : $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{a+c}$ şi $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{a+b}$.

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\ge 2+2+2.$$

8)(Suceava) Fie pătratul $ABCD$ de latură a şi un punct variabil $M\in(BC)$ .Notăm cu E intersecția dintre dreptele DM şi BC, iar cu F intersecția dintre dreptele AM şi CD.

a) Demonstrați că $\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FD}=1$.

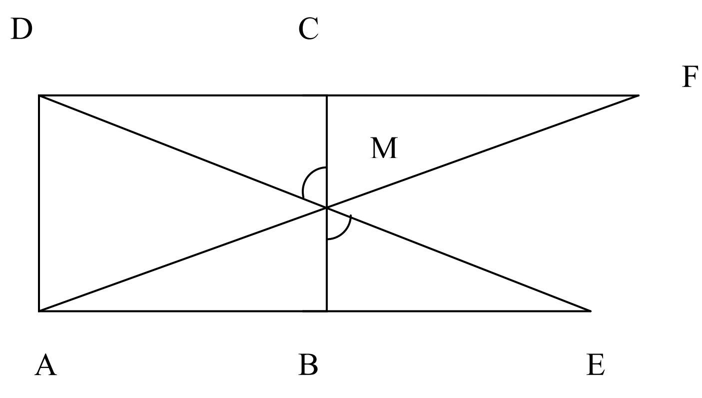
b) Demonstrați că media geometrică a lungimii bazelor trapezului $BEFC$ este egală cu lungimea laturii pătratului $ABCD$.

c) Arătați că $S_{BEFC}\ge S_{ABCD}$.

d) Determinați poziția punctului $M\in(BC)$ astfel încât S_{BEFC} să fie maximă .

e) Dacă M sete mijlocul segmentului (BC) determinați raza cercului circumscris patrulaterului $AEFD$.

Soluție:



a)Deoarece $BE\,//\,DC\Rightarrow\Delta BMA\sim\Delta CMD$ şi avem :

$$\frac{BE}{DC}=\frac{BM}{MC}\Leftrightarrow\frac{BE}{DC+BE}=\frac{BM}{MC+BM}\Leftrightarrow\frac{BE}{EA}=\frac{BM}{BC}.$$

Analog, $FC\,//\,BA\Rightarrow\Delta CMF\sim\Delta BMA$ şi rezultă $\frac{CF}{FD}=\frac{CM}{BC}$.

$\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FD}=\frac{BM}{BC}+\frac{CM}{BC}=1$.

b) Folosim relația de la punctul a): $BE\cdot FD+CF\cdot EA=EA\cdot FD$

Scriem $FD=a+CF, EA=a+BF$ şi înlocuind în prima relație obținem

$2BE\cdot CF=BE\cdot CF+a^2$ adică $\sqrt{BE\cdot CF}=a$.

c) $S_{BEFC}=\frac{(BE+CF)a}{2}\geq^{b)}\sqrt{BE\cdot CF}\cdot a\geq a^2=S_{ABCD}$.

d) Se foloseşte c).

e) Dacă M este mijlocul lui (BC) rezultă că $MD=ME$ şi $MA=MF$ adică patrulaterul $AEFD$ este paralelogram.Se calculează uşor şi se obține $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

9. (Tulcea) Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ şi şirul $(x_n)_{n\in N}$ dat de $x_0=2, x_{n+1}=f(x_n),(\forall)n\in N$.

a) Să se dcetermine $\operatorname{Im} f$.

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in N}$ are limita 1.

c) Să se arate că şirul $(y_n)_{n\in N}, y_n=x_0+x_1+x_2+...+x_n-n$ este convergent .

Soluție :

a) $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0\Rightarrow f$ strict crescătoare şi deci ,injectivă.

x	0						$+\infty$
$f'(x)$	+ +						
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	2

$\operatorname{Im} f=[\frac{1}{2},2]$.

b) Arătăm că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este descrescător : $x_1=\frac{5}{4}<x_0$.

Dacă persupunem $x_{n+1}<x_n$, şi cum f e strict crescătoare obținem $x_{n+2}=f(x_{n+1})<f(x_n)=x_{n+1}$

$x_n \le x_0$. Arătăm că $x_n \ge 1$:dacă $x_n > 1 \Rightarrow f(x_n) > f(1) = 1$.

Fie $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$, înlocuind în relația de recurență se boține ecuația $l(l+2) = 2l+1$de unde se

obține $l = 1$.

c) $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow (y_n)_n$ crescător.

Avem $y_n > y_0 = x_0 = 2$ şi $y_n \le x_0 + \sum_{i=1}^{n} |x_i - 1| \le 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 3$, deci $(y_n)_n$ e convergent.

10.(Satu-Mare) Se consideră polinomul $f = x^4 - 10x^2 + 1$, numărul $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C$ rădăcinile polinomului f.

a) Determinați $f(a), f(-a)$.

b) Arătați că f este ireductibil în $Q[X]$.

c) Dacă $g \in Q[X]$ şi $g(a) = 0$,arătați că restul împărțirii lui g la f este egal cu zero.

d) Se consideră polinomul $h = \frac{x^2 - 5}{2}$ .Rezolvați în R ecuația $h(x) = \sqrt{6}.$

e) Arătați că nu există nici un polinom $w \in Z[X]$ cu proprietatea că $w(a) = \sqrt{6}.$

Soluție :

a) Se verifică uşor faptul că $f(a) = f(-a) = 0$.

b) Presupunem prin reducere la absurd că f are o rădăcină rațională, $(\exists)\ \frac{p}{q} \in Q$ astfel încât

$f(\frac{p}{q}) = 0$ rezultă că $p, q \,|\, 1$ .Se verifică faptul că ± 1 nu sunt rădăcini ale polinomului f .

Rădacinile polinomului f sunt $a, -a, -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{3}$, deci polinomul are numai rădăcini iraționale.Dacă f ar fi reductibil în $Q[X]$ ar rezulta că există $g.h \in Q[X]$ cu $f = g \cdot h$ cu $grad(g) = grad(h) = 2$ sau $grad(g) = 1, grad(h) = 3$ (sau celelalte relații) . Dacă $grad(g) = 1$, f are o rădăcină rațională –contradicție . Dacă $grad(g) = 2$ rezultă $f = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + u)$, prin identificarea coeficienților rezultă un sistem ce nu are soluții.

c) Fie c, r câtul şi respectiv restul împărțirii lui g la f , $grad(r) < 4$ şi $g = c \cdot f + r$ .Din $f(a) = g(a) = 0$ rezultă $r(a) = 0$, aşadar f şi r au o rădăcină comună . Fie $d = (f, g)$.

$$\left.\begin{array}{c} d \mid f \\ f \text{ ireductibil în } Q[X] \end{array}\right\} \Rightarrow d$$ este polinom constant (contradicție) sau $d = f$.

Dacă $d = f \Rightarrow f \mid r$, $grad(r) < grad(f) \Rightarrow r$ este polinomul nul.

d) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{6} + 5 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = -a$

e) Presupunem prin reducere la absurd că există un polinom $w \in Z[X]$ cu proprietatea că $w(a) = \sqrt{6}$.

$w = c \cdot f + r$ cu $grad(r) < 4$, $w(a) = c(a) f(a) + r(a) \Rightarrow r(a) = \sqrt{6}$.

Dacă $r = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,din $r(a) = \sqrt{6}$ obținem ecuația

$a_0 + 5a_2 + \sqrt{2}(a_1 + 11a_3) + \sqrt{3}(a_1 + 9a_3) + \sqrt{6}(2a_2 - 1) = 0$ de unde ținând cont că $a_i \in Z, i = \overline{0,3}$ rezultă cu necesitate :

$$\begin{cases} a_0 + 5a_2 = 0 \\ a_1 + 11a_3 = 0 \\ a_1 + 9a_3 = 0 \\ 2a_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație obținem $a_2 = \dfrac{1}{2} \notin Z$, contradicție.

BIBLIOGRAFIE:

www.mateinfo.ro