

PROBLEME PENTRU CONCURSURI (II)

Corneliu Mănescu-Avram

1. Să se arate că pentru orice număr rațional x există cel puțin un număr rațional y astfel încât să fie adevărată egalitatea

$$6(x^5 + y^5) - 15(x^4 + y^4) + 10(x^3 + y^3) - 1 = 0.$$

Soluție : Verificăm că perechea $(x, 1 - x)$, $x \in \mathbb{Q}$, satisface egalitatea dată. Într-adevăr, fie $p =$

$$\begin{aligned} &= xy. \text{ Din } x + y = 1, \text{ deducem } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2p, x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \\ &= 1 - 3p, x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (1 - 2p)^2 - 2p^2 = 1 - 4p + 2p^2, x^5 + y^5 = \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = (1 - 2p)(1 - 3p) - p^2 = 1 - 5p + 5p^2. \text{ Rezultă identitatea} \end{aligned}$$

$$6(1 - 5p + 5p^2) - 15(1 - 4p + 2p^2) + 10(1 - 3p) - 1 = 0.$$

2. Să se găsească bazele sistemelor de numerație în care

a) numărul 671 se divide cu 176 ;

b) numărul 781 se divide cu 187.

Soluție : a) Fie x baza sistemului de numerație căutat. Avem că $6x^2 + 7x + 1 = (x + 1)(6x + 1)$ se divide cu $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$, deci $6x + 1$ se divide cu $x + 6$. Orice divizor comun al numerelor $6x + 1$ și $x + 6$ este divizor și al numărului $6(x + 6) - (6x + 1) = 35 = 5 \cdot 7$. Evident însă $x > 1$, deci singura soluție convenabilă se obține din $x + 6 = 35$, deci $x = 29$.

b) Asemănător, $7x^2 + 8x + 1 = (x + 1)(7x + 1)$ se divide cu $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$, deci $7x + 1$ se divide cu $x + 7$. Dar $7(x + 7) - (7x + 1) = 48 = 2^4 \cdot 3$ și mulțimea divizorilor lui 48 este $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Rezultă $x + 7 \in D_{48}$, cu soluțiile convenabile $x \in \{9, 17, 41\}$.

3. Să se demonstreze că orice număr compus n , care nu este pătratul unui număr prim, are cel puțin un divizor prim $p \leq \sqrt{n+1} - 1$.

Soluție : Dacă numărul n este compus și nu este pătratul unui număr prim, atunci el are cel puțin doi divizori primi distincți p, q , $p < q$ și $p(p+2) \leq pq \leq n$, deci $p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 \leq n+1$, de unde $p+1 \leq \sqrt{n+1}$ și se obține inegalitatea din enunț.

4. Fie $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, $n, k \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească toate valorile lui k pentru care este

adevărată următoarea identitate : $2S_{2k+1} + (k-1)S_{2k-1} = (k+1)S_k^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție : Pentru $n = 1$ obținem $2 + k - 1 = k + 1$.

Pentru $n = 2$ obținem

$$2(1 + 2^{2k+1}) + (k - 1)(1 + 2^{2k-1}) = (k + 1)(1 + 2^k)^2,$$

care este echivalentă cu $2^{k-2}(5 - k) = k + 1$, deci $k \in \{1, 2, 3\}$ este o condiție necesară.

Această condiție este și suficientă :

$$S_3 = S_1^2, 2S_5 + S_3 = 3S_2^2, S_7 + S_5 = 2S_3^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Egalitățile de mai sus pot fi demonstrate prin inducție sau se pot folosi identitățile :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_7 = \frac{n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2+2n-1)]}{24}.$$

5. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-3}X^3 + a_n$, unde $n \geq 4$ și $a_n \neq 0$, nu are numai rădăcini reale.

Soluție : Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile lui f , care sunt nenule, deoarece $a_n \neq 0$. Polinomul $g(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right)$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$. Dar $g(X) = a_nX^n + a_{n-3}X^{n-3} + \dots + 1$, deci

$$\frac{1}{x_1^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{x_1x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} \right) = 0.$$

Suma pătratelor unor numere reale nenule este un număr real strict pozitiv, deci rădăcinile lui f nu sunt toate reale.

6. Să se găsească rădăcinile reale ale polinomului

$$f = (X^2 - X + 1)^4 + (X^2 - X + 2)^4 - (X^2 + X + 2)^4 - \left(\frac{1}{2}X^2 - X - 1\right)^4.$$

Soluție : Următoarele egalități sunt adevărate

$$X^2 - X + 1 - \frac{1}{2}X^2 + X + 1 = \frac{1}{2}X^2 + 2,$$

$$X^2 - X + 1 + \frac{1}{2}X^2 - X - 1 = \frac{3}{2}X^2 - 2X,$$

$$(X^2 - X + 1)^2 + \left(\frac{1}{2}X^2 - X - 1\right)^2 = \frac{5}{4}X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 2,$$

$$X^2 - X + 2 - X^2 - X - 2 = -2X,$$

$$X^2 - X + 2 + X^2 + X + 2 = 2(X^2 + 2),$$

$$(X^2 - X + 2)^2 + (X^2 + X + 2)^2 = 2(X^2 + 1)(X^2 + 4).$$

Rezultă descompunerea

$$\begin{aligned} f &= X(X^2 + 4)\left[\frac{1}{4}(3X - 4)\left(\frac{5}{4}X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 2\right) - 8(X^4 + 3X^2 + 2)\right] = \\ &= \frac{1}{16}X(X^2 + 4)(X - 12)[14X^4 + (X^2 - 2)^2 + 32X^2 + 24] \end{aligned}$$

Deducem că singurele rădăcini reale ale lui f sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = 12$.

Comentariu. Din $f(12) = 0$ se obține egalitatea $133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{103}$ ecuația $x^4 + x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

Soluție : Folosim descompunerea

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Fie x o rădăcină în $\mathbb{Z}_{103}$ a polinomului $X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_{103}[X]$. Celelalte soluții ale ecuației date sunt $\hat{1} + x$, $-x$, $-\hat{1} - x$. Acestea sunt toate soluțiile, deoarece 103 este număr prim, deci $\mathbb{Z}_{103}$ este corp, astfel că ecuația dată, fiind de gradul 4, are cel mult 4 soluții. Dar $103 = 10^2 + 3$ și $x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_{103}$, deci $(\hat{2}x + \hat{1})^2 + \hat{3} = \hat{0}$, de unde $\hat{2}x + \hat{1} = \widehat{10}$, așadar $x = \widehat{56}$ (am folosit faptul că inversul lui $\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_p$ este $\frac{\widehat{p+1}}{2}$). Soluțiile ecuației date sunt $\{\widehat{46}, \widehat{47}, \widehat{56}, \widehat{57}\}$.

Comentariu. Metoda se aplică modulo orice număr prim p astfel încât $p - 3$ este pătrat perfect. Dacă $p = n^2 + 3$ (n par), atunci soluțiile în $\mathbb{Z}_p$ ale ecuației date sunt

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2, \frac{n(n+1)}{2} + 1, \frac{n(n+1)}{2} + 2.$$

8. Fie $P = X(X + 1)(X + 2) \dots (X + 15)$ și $S_k = X^k + (X + 1)^k + (X + 2)^k + \dots + (X + 15)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $P + (12S_4 - 1700S_2 + 416704)^2$ este pătratul unui polinom cu coeficienți întregi.

Soluție : Avem

$$S_2 = 16X^2 + 240X + 1240,$$

$$S_4 = 16X^4 + 480X^3 + 7440X^2 + 57600X + 178312.$$

Considerăm polinoamele

$$u = (X + 1)(X + 2)(X + 4)(X + 7)(X + 8)(X + 11)(X + 13)(X + 14),$$

$$v = X(X + 3)(X + 5)(X + 6)(X + 9)(X + 10)(X + 12)(X + 15).$$

Este adevărată egalitatea $P = uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$, deci este suficient să arătăm că

$$\frac{u-v}{2} = 12S_4 - 1700S_2 + 416704. \quad (1)$$

Cu notația $Y = X^2 + 15X$, grupând factorii egal depărtați de extreme, se obține

$$u = (Y + 14)(Y + 26)(Y + 44)(Y + 56) = Y^4 + 140Y^3 + 6828Y^2 + 134960Y + 896896,$$

$$v = Y(Y + 36)(Y + 50)(Y + 54) = Y^4 + 140Y^3 + 6444Y^2 + 97200Y,$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{u-v}{2} &= 192Y^2 + 18880Y + 448448 = 192X^2(X + 15)^2 + 18880X(X + 15) + 448448 = \\ &= 192X^4 + 5760X^3 + 62080X^2 + 283200X + 448448. \end{aligned} \quad (2)$$

Avem și

$$\begin{aligned} 12S_4 - 1700S_2 + 416704 &= 12(16X^4 + 480X^3 + 7440X^2 + 57600X + 178312) - \\ - 1700(16X^2 + 240X + 1240) + 416704 &= 192X^4 + 5760X^3 + 62080X^2 + 283200X + 448448. \end{aligned} \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă (1). Se observă că

$$\begin{aligned} \frac{u+v}{2} &= Y^4 + 140Y^3 + 6636Y^2 + 116080Y + 448448 = \\ &= (X^2 + 15X)^4 + 140(X^2 + 15X)^3 + 6636(X^2 + 15X)^2 + 116080(X^2 + 15X) + 448448 \end{aligned}$$

are coeficienți întregi, ceea ce încheie demonstrația.

9. Care este valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin 2x - \sin x|$?

Soluție : Funcția este periodică cu perioada 2π , deci este suficient s-o studiem pe intervalul $[0, 2\pi]$. Pe de altă parte, $f(2\pi - x) = f(x)$, deci ne putem restrânge la intervalul $[0, \pi]$. Pe acest interval $\sin x \geq 0$, deci $f(x) = \sin x |2\cos x - 1|$, așadar

$$f(x) = \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1), & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ \sin x(-2\cos x + 1), & \text{dacă } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], \end{cases}$$

de unde

$$f'(x) = \begin{cases} 4\cos^2 x - \cos x - 2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ -4\cos^2 x + \cos x + 2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right). \end{cases}$$

Derivata se anulează pentru $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$.

Pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, avem $\cos x \geq \frac{1}{2}$, deci $\cos x_0 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, unde x_0 este un punct de maxim.

Valoarea maximă corespunzătoare este $\frac{5\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{15 - \sqrt{33}}{7 + \sqrt{33}}}$.

Pe intervalul $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, avem $\cos x \leq \frac{1}{2}$, deci $\cos x_1 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$ și x_1 este de asemenea un punct de maxim. Valoarea maximă corespunzătoare este $\frac{5\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{15 + \sqrt{33}}{7 - \sqrt{33}}}$ și ea este mai mare decât cea precedentă, deci aceasta este valoarea maximă absolută.

10. Să se aproximeze cu o eroare de 10^{-3} numărul $\sqrt[4]{n^4 + n^3}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 94$.

Soluție : Vom demonstra inegalitățile

$$\frac{249}{1000} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 94.$$

Adunăm n și ridicăm la puterea a patra. A doua inegalitate este evidentă, după reducerea termenilor asemenea.

Pentru a demonstra prima inegalitate, arătăm că funcția $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x$ este crescătoare și verificăm prin calcul că $f(94) > 0,249$. Într-adevăr,

$$f'(x) = \frac{4x+3}{4\sqrt[4]{x(x+1)^3}} - 1$$

și vom arăta că ea este pozitivă pe intervalul $[4, \infty)$. După eliminarea radicalului și reducerea termenilor asemenea, obținem inegalitatea $96x^2 - 336x - 175 > 0$, care este adevărată pentru $x \geq 4$.

Rezultă că $\sqrt[4]{n^4 + n^3} = n + 0,249\dots$, dacă $n \geq 94$.

11. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, polinomul $f = X^n - nX + 1$ are două rădăcini pozitive x_n, y_n astfel încât $0 < x_n < 1 < y_n$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(y_n - 1)$.

Soluție : Din $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 2 - n < 0$, ținând cont de faptul că funcția polinomială asociată lui f este continuă, rezultă că există $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_n) = f(y_n) = 0$ și $0 < x_n < 1 < y_n$.

Avem

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} > 0, \quad f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)^n} - \frac{1}{n-1} < 0$$

și $f'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$ pe $(0, 1)$, deci f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$, astfel că x_n este unic, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$, prin urmare $(x_n)_{n \geq 3}$ este un șir convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

Pe de altă parte, $f\left(\frac{n}{n-1}\right) = n - \frac{n}{n-1} + 1 < 0$, deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, pentru orice $n \geq 3$.

Rezultă că $y_n > \frac{n}{n-1}$ și y_n este unic, deoarece f' este strict pozitivă pe intervalul $(1, \infty)$, astfel că f este strict crescătoare pe acest interval. Avem și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(y_n - 1) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{n}{n-1} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^{-x}(-\ln x - 1) = \infty$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(y_n - 1) = \infty$.

Pentru calculul limitelor de mai sus am folosit regula lui *l'Hospital*.

12. Să se determine a minim și b maxim astfel ca inegalitatea

$$\frac{x}{ax+1} \leq \ln(1+x) \leq \frac{x}{bx+1}$$

să fie adevărată pentru orice $x \geq 0$.

Soluție : Se studiază funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ și în mod evident a și b sunt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a mulțimii valorilor funcției.

Avem

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x > 0. \quad (1)$$

Într-adevăr, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\ln x \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad \forall x \geq 1, \quad (2)$$

inegalitate care se obține din cea precedentă prin transformări elementare, extragerea rădăcinii pătrate și substituția $x+1 \rightarrow x^2$. Funcția $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$, este derivabilă pe intervalul $[1, \infty)$ și derivata ei este negativă, $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{2x^2} \leq 0, \quad \forall x \geq 1$,

deci g este descrescătoare, $g(x) \leq g(1) = 0$, astfel că (2) este adevărată, deci și (1) este adevărată.

Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, deci

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = a.$$

Avem evident $b = 0$ și

$$a = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \frac{1}{2},$$

unde cea de-a doua limită a fost calculată cu regula lui *l'Hospital*.

În concluzie,

$$\frac{x}{\frac{1}{2}x+1} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \geq 0.$$

13. Să se găsească limita șirului cu termenul general

$$a_n = n - \frac{1}{\sqrt[n]{e-1}}.$$

Soluție : Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ are derivate de orice ordin. Dacă există $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, deoarece $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$. Aplicăm de două ori regula lui l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x e^x + 2 e^x} = \frac{1}{2},$$

așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Comentarii. a) Asemănător putem demonstra că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\ln a} - \frac{1}{n^{\sqrt{a}-1}} \right) = \frac{1}{2}$, pentru orice $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

b) Egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma $e = \left(1 + \frac{1}{n - a_n} \right)^n$, de unde rezultă $a_n > 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

c) Mai general, dacă f este o funcție reală de două ori derivabilă și $f'(0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x f'(0)} - \frac{1}{f(x) - f(0)} \right) = \frac{f''(0)}{2[f'(0)]^2}.$$

14. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația : $\sin \frac{\pi x}{12} = \frac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Soluție : Avem evident $x - 1 \geq 0$, deci $x \geq 1$ și $\frac{\sqrt{x-1}}{2} \leq 1$, de unde $x \leq 5$. Vom studia funcția

$f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin \frac{\pi x}{12} - \frac{\sqrt{x-1}}{2}$. Funcția are derivate de orice ordin pe

intervalul $(1, 5)$ și se anulează pentru $x \in \{2, 3, 4\}$. Vom arăta că funcția f nu mai are alte zerouri pe $[1, 5]$. Se verifică simplu că 1 și 5 nu sunt zerouri pentru funcția f , deci rămâne să căutăm zerourile pe $(1, 5)$. Dacă funcția f are cel puțin patru zerouri pe intervalul $(1, 5)$, atunci, conform teoremei lui Rolle, f' are cel puțin trei zerouri, f'' are cel puțin două zerouri și f''' are cel puțin un zero. Dar

$$f'''(x) = -\left(\frac{\pi}{12}\right)^3 \cos \frac{\pi x}{12} - \frac{3}{16\sqrt{(x-1)^5}} < 0,$$

$\forall x \in (1, 5)$, contradicție. Rezultă că ecuația dată are numai soluțiile $x \in \{2, 3, 4\}$.

15. Să se determine funcțiile polinomiale cu proprietatea că

$$f(b) - f(a) = (b - a)f' \left(\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} \right), \forall a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Soluție : Dacă f este o funcție polinomială de grad cel mult 3, $f = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, cu $a_1 = 0$, atunci $f(b) - f(a) = (b - a)[a_0(a^2 + ab + b^2) + a_2]$ și $f'(x) = 3a_0x^2 + a_2$, deci

$$f' \left(\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} \right) = a_0(a^2 + ab + b^2) + a_2,$$

astfel că egalitatea din enunț este adevărată.

Reciproc, dacă egalitatea din enunț este adevărată pentru o funcție polinomială de grad $n \geq 3$,

$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}, x > 0,$$

$$f' \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) = na_0 \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} + (n-1)a_1 \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^{n-2} + \dots + a_{n-1}, x \geq 0$$

de unde, prin identificarea coeficienților, se obține $3^{n-1} = n^2$, astfel că $n = 3$. În acest caz avem și $a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} a_1$, deci $a_1 = 0$.

Rezultă că o funcție polinomială asociată unui polinom cu coeficienți reali are proprietatea respectivă dacă și numai dacă grad $f \leq 3$ și $f''(0) = 0$.

16. Să se demonstreze că dacă $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 , atunci

$$\left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Soluție : Se integrează prin părți :

$$\int_0^1 f(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = f(1) - \int_0^1 x f'(x) dx.$$

Rezultă

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{f(1) - f(0)}{2} - \int_0^1 x f'(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x \right) f'(x) dx.$$

Din inegalitatea lui *Cauchy* obținem

$$\left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 dx \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

Prima integrală din dreapta este egală cu $\frac{1}{12}$, deci se obține inegalitatea din enunț.

Observație. Există funcții pentru care are loc egalitatea, de exemplu $f(x) = x^2 - x$.

17. Să se găsească polinoamele $P \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care

$$\int_0^1 \frac{P(x)+P(-x)}{x^2+1} dx \in \mathbb{Q}.$$

Soluție : Fie $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$. Restul împărțirii lui P la $X^2 + 1$ este un polinom de grad cel mult 1

$$P = (X^2 + 1)Q + pX + q, Q \in \mathbb{Z}[X], p, q \in \mathbb{Z}.$$

Avem $P(i) + P(-i) = 2q$ și $P(X) + P(-X) = (X^2 + 1)[Q(X) + Q(-X)] + 2q$.

Integrala definită pe intervalul $[0, 1]$ a unei funcții polinomiale cu coeficienți întregi este un număr rațional. Avem și

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

care este un număr transcendent, deci irațional. Rezultă că integrala dată este un număr rațional dacă și numai dacă $q = 0$, prin urmare

$$P(i) + P(-i) = 2(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots) = 0,$$

unde suma se extinde asupra tuturor coeficienților de rang par ai lui f .

Am obținut astfel următorul rezultat : integrala dată este un număr rațional dacă și numai dacă suma coeficienților cu indicele multiplu de 4 ai polinomului este egală cu suma coeficienților cu indicele multiplu de 4 plus 2.

18. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^n + ax$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că egalitatea

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sqrt{\frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx}$$

este adevărată dacă și numai dacă $n = 2$ și $a = -1$.

Soluție : Avem

$$\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{2},$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \left(\frac{n^2 x^{2n-1}}{2n-1} + 2ax^n + a^2 x \right) \Big|_0^1 = \frac{n^2}{2n-1} + 2a + a^2.$$

Se obține

$$\frac{n-1}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \left[\frac{(n-1)^2}{2n-1} + (a+1)^2 \right]}$$

care este o egalitate de numere pozitive, deci este echivalentă cu

$$(a+1)^2 + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{(2n-1)(n+1)^2} = 0.$$

Această sumă de numere pozitive este nulă dacă și numai dacă fiecare termen este nul. Cum $n \geq 2$, se obține $n = 2$ și $a = -1$.

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Elemente de geometria triunghiului în coordonate baricentrice (egalități și inegalități în triunghi).

ROXANA MIHAELA STANCIU¹

Articolul vine ușor în completarea programei școlare din liceu și are scopul de a pune în evidență noi metode de rezolvare a problemelor de geometrie și de a lărgi orizontul matematic al elevilor. În cele ce urmează, voi enunța șase teoreme importante și voi demonstra numeroase aplicații ale acestor teoreme referitoare la unele egalități și inegalități în triunghi.

Teorema 1. Se consideră un triunghi fix ABC și notăm $BC=a, CA=b, AB=c, S=Aria(ABC)$. Atunci pentru orice $M \in E_2$ (unde, E_2 este planul euclidian) există și este unic tripletul ordonat $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1$ astfel încât

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

și reciproc, pentru orice triplet ordonat $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1$ există și este unic un punct $M \in E_2$ astfel încât

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

și în acest caz vom spune că punctul M are coordonatele baricentrice (x,y,z) în raport cu triunghiul ABC și vom nota $M(x,y,z)$. Pentru orice $X \in E_2$ avem

$$x\overrightarrow{XA} + y\overrightarrow{XB} + z\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XM}$$

(demonstrație în [1] pag. 66).

Exemple de coordonate baricentrice pentru câteva puncte remarcabile într-un triunghi:

1.1. $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$;

1.2. $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – centrul de greutate;

1.3. $I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$ – centrul cercului înscris $C(I, r)$;

1.4. $I_a\left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)}\right)$ –
centrul cercului exinscris $C(I_a, r_a)$;

1.5. $N\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right)$ – punctul lui Nagel;

¹ Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Balaș Sotter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

$$1.6. \Gamma \left(\frac{(p-b)(p-c)}{r(4R+r)}, \frac{(p-c)(p-a)}{r(4R+r)}, \frac{(p-a)(p-b)}{r(4R+r)} \right) -$$

punctul lui Gergone;

$$1.7. H(ctgBctgc, ctgCctgA, ctgActgB) - \text{ortocentrul};$$

$$1.8. O \left(\frac{R^2 \sin 2A}{2S}, \frac{R^2 \sin 2B}{2S}, \frac{R^2 \sin 2C}{2S} \right) -$$

centrul cercului circumscris $C(O, R)$;

$$1.9. L \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) -$$

punctul lui Lemoine.

Teorema 2. Puterea punctului $M(x, y, z) \in E_2$ față de cercul $C(O, R)$, circumscris triunghiului ABC este dat de relația:

$$p_c(M) = -(yza^2 + zxb^2 + xyc^2); OM^2 = R^2 - p_c(M).$$

(demonstrație în [1] pag.68).

Aplicații ale teoremei 2:

$$2.1. p_c(G) = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \text{ si,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2;$$

demonstrație: se aplică teorema 2 și 1.2.

$$2.2. p_c(I) = -2Rr, OI^2 = R^2 - 2Rr, \text{ si, } R \geq 2r;$$

demonstrație: rezultă imediat din teorema 2 și 1.3.

$$2.3. p_c(I_a) = -2Rr_a, OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a;$$

demonstrație: folosim teorema 2 și 1.4.

$$2.4. p_c(N) = -4r(R-r), ON = R-2r;$$

demonstrație: utilizăm teorema 2 și 1.5.

$$2.5. p_c(H) = -8R^2 \cos A \cos B \cos C, OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

$$\text{si, } \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}, \text{ iar}$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \text{ deoarece, } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

demonstrație: se aplică teorema 2 și 1.7.

$$2.6. p_c(\Gamma) = -r(R+r) \left(\frac{2p}{4R+r} \right);$$

demonstrație: se folosește teorema 2 și 1.6.

$$2.7. p_c(L) = -3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, OL^2 = R^2 - 3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, \text{ si,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3};$$

demonstrație: rezultă imediat din teorema 2 și 1.9.

Teorema 3.a) Pentru $M(x, y, z) \in E_2$ există relația:

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = -p_c(M)$$

b) Pentru orice $X \in E_2$ există relația:

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 = XM^2 - p_c(M), \text{ și}$$

$$xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

(demonstrație în [1] pag.69)

Aplicații ale teoremei 3 :

$$3.1. M \equiv G \Rightarrow XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \forall X \in E_2;$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3};$$

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \forall X \in E_2,$$

cu egalitate pentru $X \equiv G$.

$$3.2. M \equiv I \Rightarrow aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = 2pXI^2 + abc, \forall X \in E_2;$$

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc;$$

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \geq abc, \forall X \in E_2,$$

cu egalitate pentru $X \equiv I$.

$$3.3. M \equiv I_a \Rightarrow bXB^2 + cXC^2 + abc = aXA^2 + 2(p-a)XI_a^2, \forall X \in E_2;$$

$$X \equiv I_a \Rightarrow bI_aB^2 + cI_aC^2 + abc = aI_aA^2; bXB^2 + cXC^2 + abc \geq aXA^2$$

cu egalitate pentru $X \equiv I_a$.

3.4. Dacă $M(x, y, z) \in E_2$, atunci $\forall X \in E_2$ avem :

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leq xXA^2 + yXB^2 + zXC^2 \leq XM^2 + R^2,$$

cu egalitate în Δ tan ga, pentru $X \equiv M$

și egalitate în dreapta, pentru $M \equiv O$.

De exemplu, pentru $M \equiv I \Rightarrow$

$$abc \leq aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \leq 2p(XI^2 + R^2).$$

$$3.5. \text{Dacă, } X \equiv M \Rightarrow xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 =$$

$$= yza^2 + zxb^2 + xyc^2 = R^2 - OM^2, \text{ și,}$$

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \leq R^2, \text{ cu egalitate pentru } M \equiv O;$$

3.6. Dacă, $X \equiv A \Rightarrow MA^2 = p_c(M) + zb^2 + yc^2$, de unde, rezulta :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3p_c(M) + (y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2.$$

Teorema 4. Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$, atunci distanța între punctele M_1, M_2 este dată de relația:

$$M_1 M_2^2 = - \left[\begin{aligned} &(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)a^2 + (z_1 - z_2)(x_1 - x_2)b^2 + \\ &+ (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)c^2 \end{aligned} \right].$$

(demonstrație în [1] pag.70).

Aplicații ale teoremei 4:

Utilizând coordonatele baricentrice (vezi exemplele date) și teorema 4 obținem următoarele relații:

$$4.1. OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}; 4.2. OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) =$$

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C), \text{ de unde rezulta,}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ este, dreptunghic}$$

$$4.3. OI^2 = R^2 - 2Rr; HN = 2OI;$$

$$4.4. NI^2 = 9GI^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr \Rightarrow$$

$$p^2 + 5r^2 \geq 16Rr; 4.5. HI^2 = 4R(R + r) + 3r^2 - p^2 \leq 4R(R + r) + 3r^2;$$

$$4.6. \Gamma I^2 = r^2 \left[1 - \left(\frac{p\sqrt{3}}{4R + r} \right)^2 \right] \Rightarrow p\sqrt{3} \leq 4R + r;$$

$$4.7. LI^2 = \frac{4S^2 R(R + r)}{p^2 - r^2 - 4Rr};$$

$$4.8. G\Gamma^2 = \frac{4}{9(4R + r)^2} [p^2(4R^2 + 8Rr - 5r^2) - r(4R + r)^3] \Rightarrow$$

$$(2R - r)(2R + 5r)p^2 \geq r(4R + r)^3;$$

$$4.9. H\Gamma^2 = 4R^2 \left[1 - \frac{2p^2(2R - r)}{R(4R + r)^2} \right] \Rightarrow 2p^2(2R - r) \leq R(4R + r)^2.$$

Teorema 5. Dacă $M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}$, atunci avem:

$$\overrightarrow{OM_1} \overrightarrow{OM_2} = R^2 - \frac{1}{2} [(y_1 z_2 + y_2 z_1)a^2 + (z_1 x_2 + z_2 x_1)b^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)c^2]$$

(demonstrație în [1] pag.71.).

Aplicații ale teoremei 5:

Folosind această teoremă obținem egalități și inegalități importante printre care cele ce urmează:

$$5.1.\overrightarrow{OGOM} = R^2 - \frac{1}{6}[(y+z)a^2 + (z+x)b^2 + (x+y)c^2]$$

$$5.1.1.\overrightarrow{OGOA} = R^2 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2); OG \perp OA \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 6R^2, \text{ si } b^2 + c^2 \leq 6R^2$$

$$\Leftrightarrow m(\angle AOG) \leq 90^\circ$$

$$5.1.2.\overrightarrow{OGOI} = R^2 - \frac{1}{6}(p^2 + r^2 - 2Rr), \text{ si } 2R(3R+r) \geq p^2 + r^2 \Leftrightarrow m(\angle IOG) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$2R(3R+r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OI \perp OG;$$

$$5.1.3.\overrightarrow{OGON} = (R+r)^2 - \frac{p^2}{3}, \text{ si } p \leq \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow m(\angle NOG) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$p = \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } ON \perp OG;$$

$$5.2.\overrightarrow{OIO M} = R(R+r) - \frac{1}{2}(xbc + yca + zab);$$

$$5.2.1.\overrightarrow{OION} = R^2 + 5Rr - \frac{1}{2}(p^2 + r^2), \text{ si } 2R(R+5r) \geq p^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow m(\angle ION) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$2R(R+5r) = p^2 + r^2 \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OI \perp ON;$$

$$5.2.2.\overrightarrow{OIOA} = R^2 + Rr - \frac{1}{2}bc, \text{ si } aR \geq (b+c)r \Leftrightarrow m(\angle AOI) \leq 90^\circ, \text{ iar,}$$

$$aR = (b+c)r \Leftrightarrow a = b = c, \text{ sau, } OA \perp OI.$$

Teorema 6.

Dacă

$$M_k(x_k, y_k, z_k) \in E_2, k = \overline{1,2}, \text{ avem :}$$

$$a)\overrightarrow{IM_1IM_2} = -4Rr + \frac{1}{2}[(z_1+z_2)ab + (x_1+x_2)bc + (y_1+y_2)ca] -$$

$$-\frac{1}{2}[(y_1z_2+y_2z_1)a^2 + (z_1x_2+z_2x_1)b^2 + (x_1y_2+x_2y_1)c^2]$$

(demonstrație în [1], pag. 73)

$$b)\overrightarrow{GM_1GM_2} = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6}[(x_1+x_2)a^2 + (y_1+y_2)b^2 + (z_1+z_2)c^2] -$$

$$-\frac{1}{2}[(y_1z_2+y_2z_1)a^2 + (z_1x_2+z_2x_1)b^2 + (x_1y_2+x_2y_1)c^2]$$

(demonstrație în [1], pag. 74)

$$c)\overrightarrow{MM_1MM_2} = p_c(M) + \frac{1}{2}\{[y(z_1+z_2) + z(y_1+y_2) - (y_1z_2 + y_2z_1)]a^2 + \dots\}$$

(demonstrație în [1], pag. 75)

Observație. Cu ajutorul acestor relații remarcabile se pot determina, în particular, produse scalare, distanțe, egalități și inegalități utilizând puncte din mulțimea:

$$\{A, B, C, O, G, H, I, I_a, I_b, I_c, N, \Gamma, L\}$$

asociată unui triunghi ABC. **(Exercițiul!).**

Mai fac observația că particularizări și unele extinderi ale coordonatelor baricentrice sunt abordate în lucrările [2], [3] și articolele [4], [5]. Un fapt care motivează studiul coordonatelor baricentrice este legătura acestora cu calculul vectorial recent (relativ) introdus în programele școlare IX-XII.

Notă:Problemele rezolvate aici s-au vrut cât mai elegante;ele au fost alese dintre cele date la diferite concursuri sau publicate în diverse alte cărți sau reviste.

Bibliografie

- [1] .V.Nicula, Geometrie plană, Ed. Gil, 2002.
- [2].N.Teodorescu, ș.a., Culegere de probleme pentru concursurile de matematică, vol.5, S.S.M.R, București, 1977.
- [3].M.Craioveanu, I.D.Albu, Geometrie afină și euclidiană, Ed. Facla, Timișoara, 1982.
- [4] .T. Bârsan, Recreații matematice, nr. 1 / 2002;
- [5] .C. Coandă, Gazeta matematică, nr. 8 / 2005;
- [6].N.Stanciu, *Matematică gimnaziu & liceu*, Editura "Rafet", Rm. Sărat, 2007



(1175 -1240)

Din nou despre şirul lui Fibonacci

NECULAI STANCIU¹

Abstract

The purpose of the article is to describe the contributions to Mathematics made by the thirteenth century Italian, Fibonacci. Unfortunately, not much is known about Fibonacci's personal life. Representative problems solved by Fibonacci are set as challenges to the reader.

After a brief historical account of Leonardo Pisano Fibonacci, some basic results concerning the Fibonacci numbers are developed and proved, and entertaining examples are described. Connections are made between the Fibonacci numbers and the Golden Ratio, biological nature, and other combinatorics examples.

We are considering both the originality and power of his methods, and the importance of his results, we are abundantly justified in ranking Leonardo of Pisa as the

¹ Prof. , „George Emil Palade” Secondary School, Buzău, Romania;
e-mail:stanciuneculai@yahoo.com

greatest genius in the field of number theory who appeared between the time of Diophantus and Fermat.

Key words: History of Mathematics, Fibonacci's Rabbits, Fibonacci numbers and nature, Divine proportion, Golden Section in Art (Architecture, music and human body), The Fibonacci sequence, Fibonacci identities, matrix methods.

M.S.C.: 01-XX, 01AXX, 01A05, 11B39, 11B37, 11B50.

1. Istorie.

1.1. Cine a fost *Fibonacci*?

Fibonacci (1175-1240) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. S-a născut în Italia, în orașul Pisa, faimos pentru turnul său înclinat, care parcă stă să cadă.

Tatăl său, *Bonacci Pisano*, a fost ofițer vamal în orașul Bougie din Africa de Nord, astfel că *Fibonacci* a crescut în mijlocul civilizației nord-africane. A cunoscut astfel mulți negustori arabi și indieni (deoarece a făcut multe călătorii pe coastele Mediteranei) de unde a deprins știința lor aritmetică, precum și scrierea cifrelor arabe.

1.2. Cărțile lui *Fibonacci*.

În 1202 revine în Italia unde publică un tratat de aritmetică și algebră intitulat "*Incipit Liber Abacci*" (compositus a *Leonardo filius Bonacci Pisano*). În acest tratat introduce pentru prima dată în Europa sistemul de numerație arab, cifre pe care le folosim și în zilele noastre: 0, 1, 2, 3, ..., 9.

În 1220 publică "*Practica Geometriae*", un compendiu de rezultate din geometrie și trigonometrie, apoi în 1225 "*Liber Quadratorum*" în care studia calculul radicalilor cubici. Cărțile lui *Fibonacci* au cunoscut o largă răspândire așa încât timp de peste două secole au fost considerate sursele cele mai competente în domeniul numerelor.

Pentru a înțelege mai bine situația din acele vremuri trebuie să aruncăm o privire pe matematica în Europa și în Orient.

Matematică arabă

Imperiul arab, odată cu apariția Islamului (sec VII), se extinde foarte repede cuprinzând Orientul Apropiat, o parte din Asia Mică și Centrală, ajungând până la Valea Indului, nordul Africii și Peninsula Iberică. Se ridică importante centre culturale ca: Bagdad, Samarkand, Buhara, Horezm, Damasc, Cordoba, Granada, Sevilla, Toledo, după ce în prealabil fusese distruse Ispahanul, Persepolis și Alexandria.

Matematica arabă este matematica creată sub dominația arabă, nu neapărat aparținând arabilor, deoarece puțini dintre matematicienii arabi erau de origine arabă dar, au asimilat foarte repede cultura Orientului precum și cea Elenă pe care le transmit în diverse părți ale imperiului. Primul mare matematician arab a fost *Al-Horezmi* (780 – 850). Din opera sa se detașează "*Algebra*" structurată pe 4 capitole (Soluțiile ecuațiilor, Calculul dobânzilor, Geometria, Algebra testamentară). *Al-Horezmi* a fost primul matematician care a stabilit reguli pentru adunare, scădere, multiplicare și divizare cu noile numere arabe. De la el provine cuvântul *algoritm* (încercați să spuneți numele *Al-Horezmi* repede de câteva ori!). Într-un alt tratat "*Știința transpunerii și a reducerii*", specifică procesul manipulării ecuațiilor algebrice, "*al-jabr*", a ajuns la noi ca algebră.

Abu Kamil (900), născut în Egipt, este continuator a lui *Al-Horezmi*. În “*Cartea rarităților din aritmetică*” se ocupă cu rezolvarea în numere întregi a sistemelor liniare nedeterminate.

Abu Wafa (940 – 997) s-a ocupat cu geometria practică. În lucrarea sa “*Cartea perfectă*” expune bazele trigonometriei, inclusive teorema sinusurilor. De asemenea rezolvă probleme de trigonometrie sferică, utilizând cu predilecție funcția cotangentă.

Al-Hazem (1000) prin “*Cartea opticii*” este un precursor al acestei științe. Tot el formulează axioma lui *Pasch* și încearcă demonstrarea postulatului V al lui *Euclid*.

Omar Al-Khayyam (1048 – 1123), este primul matematician care expune o teorie generală a ecuațiilor de gradul III. Recent a fost descoperit un memoriu al său asupra operei lui *Euclid*. *Omar Al-Khayyam*, conducătorul Observatorului astronomic din Ispahan, s-a ocupat și cu “*patrulaterul Saccheri*” (care, de drept ar trebui numit *patrulaterul lui Omar*), apoi a dat prima formulare a *axiomei lui Arhimede*. Era vestit și ca poet.

Al-Biruni (973 – 1048), persan de origine, este cel care în 1030 introduce cercul trigonometric. Tot el calculează lungimea meridianului terestru la 41.550 km.

Nassir ed Din al Tusi (1201 – 1274), conducătorul Observatorului astronomic din Maraga, s-a ocupat cu teoria paralelelor. În “*Tratatul despre patrulaterul complet*” a făcut o expunere integrală a rezolvării triunghiurilor (plane și sferice).

Al-Kashi (1400), iranian de origine, în “*Cheia aritmeticii*” se ocupă cu formula binomului și cu extragerea de rădăcini. S-a ocupat intens și de calcule aproximative, iar în “*Tratatul despre circumferință*” din 1424, dă valoarea numărului π cu 16 zecimale exacte.

De aici, matematica și în general cultura arabă decade.

Matematica evului mediu.

Cruciadele (campanii pentru recucerirea locurilor sfinte), prilejuiesc stabilirea de legături cu cultura arabă musulmană (mai ales în Spania și Sicilia) precum și cu Bizanțul.

După ce Spania este recucerită de mauri, Toledo devine centru cultural de prestigiu. În acest moment încep traduceri din arabă. Printre primii traducători este englezul *Adelard de Bath* (1100) care, deghizat ca student mahomedan la Cordoba traduce din limba arabă “*Elementele*” lui *Euclid* și “*Algebra*” lui *Al-Horezmi*, iar din limba greacă, opera lui *Ptolemeu*. Din aceeași perioadă se remarcă și alți traducători ca: *Ioannes din Sevilla* și *Gerardo din Cremona* (1114 – 1187) care au tradus circa 80 de lucrări clasice din limba arabă. Ambii au lucrat la Toledo.

Secolele XII – XV reprezintă perioada de asimilare a matematicii antice și a celei orientale.

Leonardo da Pisa, este pe drept considerat **primul mare matematician original al Europei**. În numeroasele sale călătorii (Egipt, Siria, Grecia, Sicilia) ia contact cu cultura elenă și cea arabă.

LIBER ABACI – O CARTE REMARCABILĂ



Povestea numerelor apare în Italia în 1202, o dată cu apariția cărții *Liber Abaci*, scrisă de *Leonardo Pisano*, pe atunci în vârstă de 27 de ani. Cartea, are 15 capi tole, și sunt scrise în întregime de mână, tiparul apărând 300 de ani mai târziu. *Leonardo*, a fost inspirat să scrie cartea după o vizită la Burgia, un oraș prosper Algerian, unde tatăl său era consul de Pisa. În acest timp, *Fibonacci* a învățat secretele sistemului de numere indo-arab, pe care arabii l-au introdus în Vest în timpul cruciadelor.

Cartea a atras numeroși adepți în rândul matematicienilor din Italia, precum și din restul Europei. *Liber Abaci*, a dezvăluit oamenilor o cu totul altă lume, unde numerel e au înlocuit literele. *Fibonacci* începe cartea cu noțiuni despre identificarea numerelor, de la unități la cifra zecilor, a sutelor, a miilor etc. În ultimile capitole găsim calcule cu numere întregi și fracții, regulile proporțiilor, extrageri de rădăcini pătrate și de ordin superior, apoi se prezintă soluțiile ecuațiilor liniare și pătratice

Liber Abaci era plină cu exemple practice: calcule de contabilitate financiară, calculul profitului, schimbul de bani, conversia greutateilor, calculul împrumutului cu dobândă (interzis în acel timp în diverse locuri ale lumii).

Deși era cunoscut în anul 1000, și deși *Liber Abaci* a explicat avantajele, sistemul de numărare, indo-arab, nu a prins la scară mare până aproape în 1500 e.n. Motivele au fost, în mare parte două. Primul ține de inerția umană și rezistența la schimbare a omului, pentru că învățarea unui sistem radical nou cere timp și de faptul că biserica catolică din acea perioadă considera cifrele arabe de origine păgână. Al doilea motiv este de natură practică, deoarece era mult mai ușor să se comită fraude. Era tentantă schimbarea lui 0 în 6 sau 9, iar 1 putea fi ușor înlocuit cu 4, 6, 7, sau 9 (de atunci europenii scriu 7 cu codiță!).

Deși noile numere au apărut în Italia, Florența a emis un edict în 1229 prin care interzicea bancherilor folosirea simbolurilor “infidele”. Ca rezultat, mulți dintre cei care voiau să învețe noul sistem se deghizau în musulmani.

Originea sistemului de numere.

Putem aprecia succesul lui *Fibonacci* cu *Liber Abaci* doar dacă privim cum a evoluat societatea, din punctul de vedere al numerelor, până la el. Măsurarea și numărarea au apărut cu câteva zeci de mii de ani înaintea lui Hristos. Oamenii au înființat primele așezări pe malurile Tigrului și Eufratului, Nilului, Gangelui, Indului și Amazonului. Fluviile erau folosite pentru comerț și transport, iar aventurierii au descoperit mările și oceanele unde se vărsau apele. Călătoriile pe distanțe lungi cereau

măsurarea timpului și calcule precise. Preoții erau de obicei astronomi, iar din astronomie a venit matematica.

În 450 î.e.n., grecii au inventat un sistem numeric alfabetic, care folosea cele 24 de litere ale alfabetului grecesc și alte trei litere, care mai târziu au dispărut. Fiecare număr de la 1 la 9 avea propria literă, la fel și multiplii de 10. Alfa, însemna 1, iar “ro” reprezenta 100. Astfel, 112 se scria “ro-deca-beta”. Acest sistem se putea folosi cu greutate pentru calcule. *Abacul*, era cel mai vechi aparat de numărat din istorie.

Un occidental, matematician din Alexandria, *Diofantus*, prin 250 e.n., a sugerat un sistem de numere comparative cu sistemul de litere. Remarcabilele sale invenții au fost ignorate vreme de 1500 de ani. Până la urmă, lucrarea sa a fost recunoscută cum se cuvine și a jucat un rol important în algebra secolului al XVII-lea. Ecuațiile algebrice, de forma $ax + by = c$, se numesc “*ecuații diofantice*”.

Piesa centrală a sistemului indo-arab a fost inventarea lui “zero”, “*sunya*” la induși, “*cifr*” în arabă, “*tsfira*” în rusește – ceea ce înseamnă “număr”. Terminul provine de la “*cipher*”, ceea ce înseamnă “gol” și se referă la coloana goală de la *abac*.

1.3. Șirul lui *Fibonacci*. Numele *Fibonacci*.

Fibonacci a rămas în memoria noastră prin șirul : 0, 1, 1, 2, 3, ... introdus în anul 1202, atunci matematicianul fiind sub numele de *Leonardo Pisano* (*Leonard din Pisa*). Mai târziu, matematicianul însuși și-a spus *Leonardus Filius Bonacii Pisanus* (*Leonard fiul lui Bonaccio Pisanul*). În secolul al XIV-lea șirul prezentat mai sus a fost denumit șirul lui *Fibonacci* prin contracția cuvintelor *filius Bonacii*. Acest șir apare pentru prima dată în cartea menționată mai sus “*Liber Abaci*” (“*Cartea despre abac*”), fiind utilizat în rezolvarea unei probleme de matematică.

1.4. Iscușința lui *Fibonacci*. Problema iepurilor. Originea șirului *Fibonacci*.

Potrivit obiceiului din acea epocă, *Fibonacci* a participat la concursuri matematice (adevărate dispute publice) pentru cea mai bună și mai rapidă soluție a unor probleme grele (ceva în genul Olimpiadelor Naționale). Iscușința de care dădea dovadă în rezolvarea problemelor cu numere uimise pe toată lumea, astfel că reputația lui *Leonardo* a ajuns până la împăratul Germaniei, *Frederik al II-lea*. La un concurs prezidat de acest împărat una din probleme date spre rezolvare a fost: “să se găsească un pătrat perfect, care să rămână pătrat perfect dacă este mărit sau micșorat cu 5”. După un timp scurt de

gândire *Fibonacci* a găsit numărul $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$. Într-adevăr: $\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ și

$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$. Nu se știe raționamentul lui *Fibonacci* dar, toate încercările,

chiar și cele mai ingenioase, de a rezolva această problemă cu ajutorul algebrei, duc în cel mai bun caz la o ecuație cu 2 necunoscute.

La un alt concurs prezidat de împărat problema propusă concurenților suna astfel: “Plecând de la o singură pereche de iepuri și știind că fiecare pereche de iepuri produce în fiecare lună o nouă pereche de iepuri, care devine productivă la vârsta de o lună, calculați câte perechi de iepuri vor fi după n luni (se consideră că iepurii nu mor în decursul respectivei perioade de n luni)”.

Soluție. Din datele problemei rezultă că numărul perechilor de iepuri din fiecare lună este un termen al șirului lui *Fibonacci*. Într-adevăr, să presupunem că la 1 ianuarie exista o

singură pereche fertilă de iepuri. Notăm cu 1 perechea respectivă .Ea corespunde numărului f_2 din șirul lui Fibonacci:

$$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1.$$

La 1 februarie, mai există o pereche pe care o notăm 1.1. Deci în acest moment sunt două perechi , ceea ce corespunde termenului:

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2.$$

La 1 martie sunt 3 perechi, două care existau în februarie și una nouă care provine de la perechea numărul 1 (se ține seama că o pereche devine fertilă după două luni). Notăm cu 1.2 această nouă pereche. Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3.$$

La 1 aprilie există 5 perechi și anume: trei perechi existente în luna martie , o pereche nouă care provine de la perechea 1 și o pereche nouă care provine de la perechea 1.1 care la 1 martie a devenit fertilă (pereche pe care o notăm cu 1.1.1). Numărul perechilor din această lună corespunde termenului:

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5.$$

Termenii din această relație se interpretează astfel:

f_4 = numărul perechilor existente în luna precedentă ;

f_3 = numărul perechilor noi (provin de la perechile existente în luna anteprecedentă).

Procedând în continuare în acest fel, vom deduce că la data de 1 decembrie numărul perechilor este dat termenul:

$$f_{13} = f_{11} + f_{12} = 89 + 144 = 233 ,$$

iar la 1 ianuarie anul următor există:

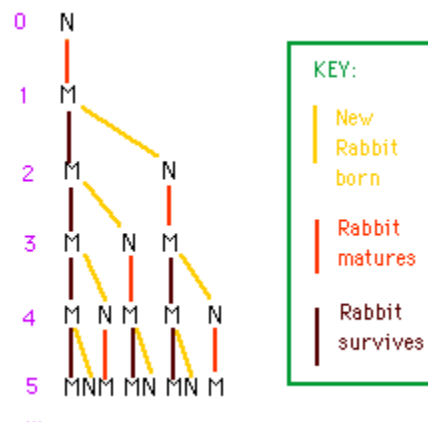
$$f_{14} = f_{12} + f_{13} = 144 + 233 = 377 \text{ perechi de iepuri.}$$

Concluzia este următoarea :

Dacă notăm cu f_n numărul de perechi de iepuri după n luni , numărul de perechi de iepuri după $n+1$ luni, notat cu f_{n+1} , va fi f_n (iepurii nu mor niciodată !), la care se adaugă iepurii nou-născuți. Dar iepurașii se nasc doar din perechi de iepuri care au cel puțin o lună, deci vor fi f_{n-1} perechi de iepuri nou-născuți.

Obținem astfel o relație de recurență:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ care generează termenii șirului lui Fibonacci.}$$



Observație. Acest șir exprimă într-un mod naiv creșterea populației de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată și sunt unul de sex masculin și unul de sex feminin.

2. Fibonacci, numărul de aur, natura și arta.

2.1. Fibonacci și “numărul de aur”

Raportul de aur este un număr irațional (1.618033...), putând fi definit în diferite moduri dar, cel mai important concept matematic asociat cu regula de aur fiind șirul lui Fibonacci. Împărțind orice număr la predecesorul său, se obține aproximativ numărul de aur. Primii care l-au folosit au fost egiptenii, majoritatea piramelor fiind construite ținând cont de numărul de aur. Grecii au fost însă cei care l-au denumit astfel, folosindu-l atât în arhitectură cât și pictură și sculptură. De altfel numărul de aur se notează cu litera grecească “fi” (φ), de la sculptorul grec *Phidias*. El a construit Parthenonul pornind de la acest raport.

Să începem cu o problemă estetică. Să considerăm un segment de dreaptă. Care este cea mai “plăcută” împărțire a unui segment în două părți? Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc “simetrie dinamică”). Dacă părțile stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u = 1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v = 0.618...$ Despre un segment partiționat astfel spunem că este împărțit în secțiunea, sau proporția sau diviziunea de aur (divină). Ideea este că lungimea u reprezintă aceeași parte din tot segmentul $(u + v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u . Cu alte cuvinte:

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v}.$$

Dacă notăm $\varphi = \frac{u}{v}$, observăm că:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \varphi, \text{ și este rădăcina pozitivă a ecuației } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

adică $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$ Dacă presupunem $u = 1$, atunci :

$$v = \frac{u}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180339887...$$

Afirmăm acum că φ este strâns legat de șirul lui Fibonacci. Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii.

Mai observăm că :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \text{ este o fracție infinită.}$$

Dacă privim fracțiile parțiale :

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8} \text{ observăm că toate rezultatele sunt rapoarte de numere Fibonacci,}$$

fapt ce motivează teorema care spune că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi. \text{În cuvinte putem spune că, pe măsură ce } n \text{ se apropie de infinit, raportul}$$

termenilor al $n+1$ -lea și al n -lea din șirul lui Fibonacci se apropie de φ .

La fel de simplu cum φ este o fracție infinită, tot așa poate fi și un radical infinit:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \text{ .Altă aplicație a numărului } \varphi \text{ apare la pentagonal regulat deoarece :}$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \varphi \text{ și } 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3 - \varphi}.$$

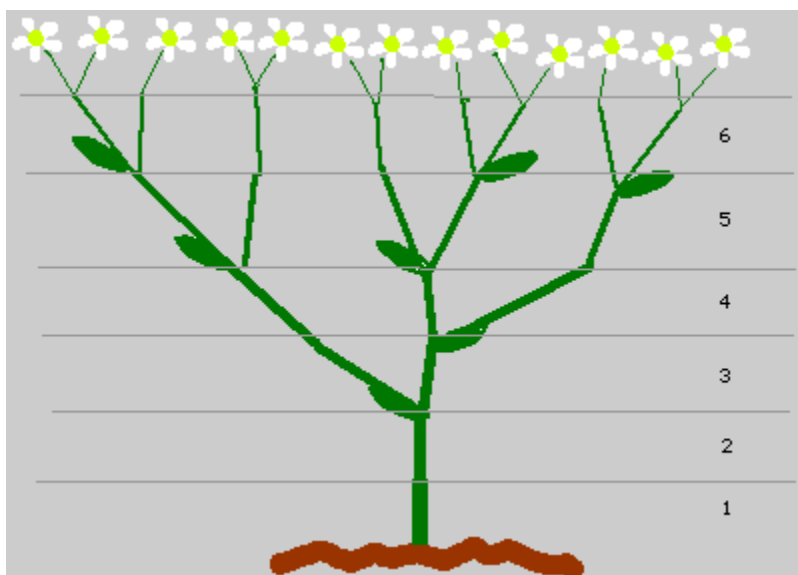
De asemenea există o legătură între dreptunghiurile de aur și șirul lui *Fibonacci* deoarece lungimea și lățimea celui de-al n -lea dreptunghi pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienții sunt întotdeauna numere *Fibonacci*. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică .Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des în natură(carcasa unui melc, colții unui elefant sau conurile de pin).Asemenea spirale sunt echiunghiulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul $(x_0, y_0) = \left(\frac{1+3\varphi}{5}, \frac{3-\varphi}{5}\right)$

taie spirala sub un unghi constant.

2.2. Fibonacci și plantele.

Plantele nu au cum să cunoască numerele lui *Fibonacci*, dar se dezvoltă în cel mai eficient mod.

a. multe plante au aranjamentul frunzelor dispus într-o secvență *Fibonacci* în jurul tulpinei;



- b.anumite conuri de pin respectă o di spunere dată de numerele lui *Fibonacci* ;
c.floarea soarelui are semintele dispuse după o secvență *Fibonacci*;



- d.inelele de pe trunchiurile palmierilor respectă numerele lui *Fibonacci*;
e.numărul petalelor florilor este, de cele mai multe ori, un număr al s ecvenței *Fibonacci*:
e.1.cala are 1 petală;
e.2.euphorbia are 2 petale;
e.3. irisul și crinul au 3 petale;
e.4.vioarelele, lalelele, trandafirul sălbatic și majoritatea florilor au 5 petale;
e.5.margaretele pot avea 21 de petale sau 34 de petale și exemplele sunt nenumărate;



e.6.florile cu un număr de petale care nu sunt în secvența *Fibonacci* sun rare și considerate speciale.

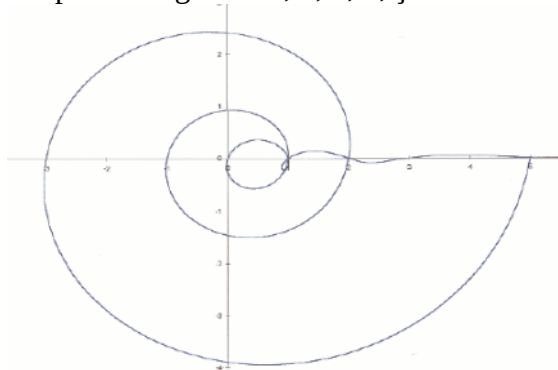
Concluzia este realizarea unui optim, a unei eficiențe maxime. Dacă se urmează secvența lui *Fibonacci*, frunzele unor plante pot fi dispuse astfel încât să ocupe un cât mai mic spațiu și să obțină cât mai mult soare.

Ideea dispunerii frunzelor în acest sens pleacă de la considerarea unghiului de aur de 222.5 grade; unghi care împărțit la întregul 360 de grade va da ca rezultat numărul irațional 0.61803398..., cunoscut ca rația șirului lui *Fibonacci*.

2.3. Cochilia melcului, furnica și *Fibonacci*

Designul cochiliei melcului urmează o spirală foarte reușită, o spirală greu de realizat cu pixul. Studiată în amănunt s-a ajuns la concluzia că această spirală urmărește dimensiunile date de secvența lui *Fibonacci*:

- pe axa pozitivă :1, 2, 5, 13, ș.a.m.d
- pe axa negativă :0, 1, 3, 8, ș.a.m.d.



Se observă că aceste 2 subșiruri combinate dau numerele lui *Fibonacci*.

Și în acest caz rațiunea și motivația pentru această dispunere este simplă : în acest fel cochilia îi crează melcului, în interior un maxim de spațiu și de siguranță.



Nautilus



Real Space vs. X-ray: Nautilus Shell

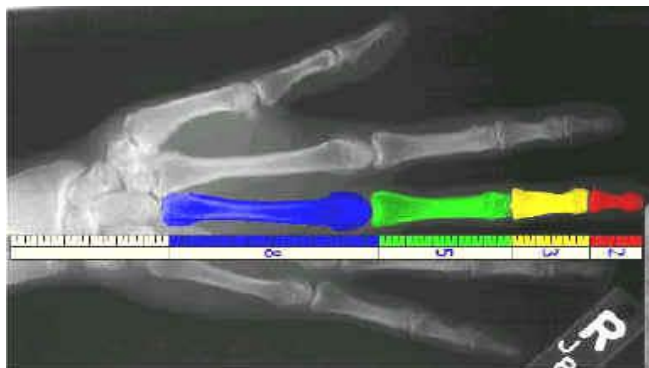
Furnica are corpul împărțit în trei segmente, după diviziunea de aur.

2.4. *Fibonacci* și corpul uman.

Fața umană este caracterizată, din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanța între ochi, dintre gură și ochi și distanța dintre nas și ochi, dimensiunea gurii. În știința esteticii se apreciază că fața este cu atât considerată mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă secvența lui *Fibonacci* mai bine.

De exemplu raportul dintre distanța de la linia surâsului (unde se unesc buzele) până la vârful nasului și de la vârful nasului până la baza sa este aproximativ raportul de aur

Mâna umană are 5 degete (număr din șirul *Fibonacci*), fiecare deget având 3 falange separate prin 2 încheieturi (numere din șirul *Fibonacci*). Dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm. În continuarea lor este un os al palmei care are 8 cm.



2.5. *Fibonacci*, numărul de aur și arta.

Dacă privim lucrările unor mari artiști, fie ei pictori, arhitecți, sculptori sau fotografi, se observă că multe dintre ele au la bază regula de aur. Conform acesteia, “pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică și cea mare același raport ca între partea mare și întreg” (*Marcus Pollio Vitruvius*, arhitect roman).

Rudolf Arnheim (psiholog, s-a ocupat de psihologia artei) dă o explicație acestui lucru astfel: “Acest raport este considerat ca deosebit de satisfăcător datorită modului în care îmbină unitatea cu varietatea dinamică. Întregul și părțile sunt perfect proporționate, astfel că întregul predomină fără să fie amenințat de o scindare, iar părțile își păstrează în același timp o anumită autonomie.” (în “*Artă și percepția vizuală*”).

În pictură a fost folosit mai ales în Renaștere, probabil cea mai discutată utilizare a acestuia fiind în tabloul lui *Leonardo da Vinci*, “*Mona Lisa*”. Capul, ca și restul corpului e compus utilizând raportul divin, cum îi spunea *da Vinci*. În prima jumătate a secolului trecut pictorul *Piet Mondrian* utilizează în picturile sale “dreptunghiul de aur”, având raportul laturilor aproximativ 1.618... De fapt, lucrările sale sunt alcătuite numai din asemenea dreptunghiuri. Acest dreptunghi este considerat cea mai armonioasă formă geometrică. Cu toate acestea, rareori este folosit pentru cadre. Dacă se împarte fiecare latură a cadrului fotografic în 8 părți egale (număr din șirul *Fibonacci*) și se unesc punctele de pe laturile opuse corespunzătoare diviziunilor 3 și 5 (numere din șirul *Fibonacci*) se obțin așa numitele linii forte ale cadrului. Punctele aflate la intersecția liniilor se numesc puncte forte. Practic se pot împărți laturile în trei părți egale, rezultatul este aproximativ același. Se presupune că subiectul amplasat pe aceste linii sau în aceste puncte determină o împărțire armonioasă a imaginii astfel încât ea nu este nici simetrică, nici plictisitoare, nici prea dezechilibrată. De exemplu, două fotografii de *Robert Doisneau*, “*L’accordioniste*”, 1951 și “*The cellist*”, 1957 și fotografia “*Poplar Trees*” a lui *Minor White* în care toate liniile converg spre un punct forte. *Ansel Adams* se împotriva regulilor, canoanelor. El spunea “așa zi se reguli de fotocompoziție sunt invalide, irelevante și imateriale; nu există reguli de compoziție în fotografie, există doar fotografii bune. Cei mai mulți fotografi încalcă regulile fotocompoziției”. Cu toate acestea și în

imaginile lui se observă diviziunea de aur(vezi fotografia “Aspens”, 1958).Asta înseamnă că deși nu era de accord cu regulile le cunoștea foarte bine.Dacă fotografia are valoare cu subiectul în centru, atunci încălcați regula diviziunii de aur!Subiectul trebuie să fie în armonie cu celelalte elemente din cadru.Dacă astfel se verifică și diviziunea de aur, este perfect!Toate acestea arată importanța acestui număr, astfel că toți marii fotografi au ținut și țin cont de el în conceperea unei fotografii.

Până și în muzică apare acest raport, se presupune că *Bach* sau *Beethoven* au ținut cont de el în compozițiile lor.

Atunci când scrieți, duceți instinctiv linia din mijloc a literii E(la fel și cu A, F, B, R,...)

aproximativ la $\frac{2}{3}$ de bază (aproximativ raportul de aur).

Concluzie. Numerele lui *Fibonacci* sunt considerate a fi, de fapt, sistemul de numărare al naturii, un mod de măsurare al Divinității, o legătură între matematică și artă.

3. Unele rezultate referitoare la șirul lui Fibonacci

Consultând bibliografia enumerată am selectat următoarele rezultate:

Numerele lui *Fibonacci* f_n sunt date de următoarea recurență :

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n, n \geq 1.$$

Teorema 1. Dacă $x^2 = x + 1$, atunci avem :

$$x^n = f_n x + f_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție după n .

Pentru $n = 2$ relația este trivială .Presupunem că $\forall n > 2$ avem $x^{n-1} = f_{n-1}x + f_{n-2}$.

Atunci

$$x^n = x^{n-1} \cdot x = (f_{n-1}x + f_{n-2})x = f_{n-1}(x+1) + f_{n-2}x = (f_{n-1} + f_{n-2})x + f_{n-1} = f_n x + f_{n-1}. \square$$

Teorema 2.(Formula lui Binet).Termenul al n -lea din șirul lui *Fibonacci* este dat de:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), n \geq 0.$$

Demonstrație.Rădăcinile ecuației $x^2 = x + 1$ sunt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Din Teorema 1., avem $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$ și $(1-\varphi)^n = (1-\varphi) f_n + f_{n-1}$.

În continuare $\varphi^n - (1-\varphi)^n = \sqrt{5} f_n$, de unde rezultă formula lui *Binet*. $\square$

Teorema 3. $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$.

Demonstrație. Avem relațiile:

$$f_1 = f_3 - f_2, f_2 = f_4 - f_3, f_3 = f_5 - f_4, \dots, f_n = f_{n+2} - f_{n+1}, \text{ care prin adunare dau}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1. \square$$

Teorema 4. $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$.

Demonstrație. Observăm că:

$f_1 = f_2 - f_0, f_3 = f_4 - f_2, f_5 = f_6 - f_4, \dots, f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$. Adunăm relațiile și obținem identitatea dorită. $\square$

Teorema 5. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Demonstrație. Avem $f_{n-1}f_n = (f_{n+1} - f_n)(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}f_n - f_n^2 + f_{n+1}f_{n-1} - f_nf_{n-1}$.

Atunci, obținem relațiile $f_{n+1}f_n - f_nf_{n-1} = f_n^2$, care prin adunare pentru $n = 1, 2, 3, \dots$, dau relația finală. $\square$

Teorema 6. (Identitatea lui Cassini). $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$.

Demonstrație. Observăm că :

$$f_{n-1}f_n - f_n^2 = (f_n - f_{n-2})(f_n + f_{n-1}) - f_n^2 = -f_{n-2}f_n - f_{n-1}(f_{n-2} - f_n) = -(f_{n-2}f_n - f_{n-1}^2)$$

Dacă notăm $u_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2$, obținem $u_n = -u_{n-1}$ și mai departe $u_n = (-1)^{n-1}u_1$.

Din cele de mai sus avem $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n-1}(f_0f_2 - f_1^2) = (-1)^n$. $\square$

Teorema 7. (Cesàro). $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$.

Demonstrație. Utilizăm formula lui Binet, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \varphi^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (1-\varphi)^k \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} ((1+2\varphi)^n - (1+2(1-\varphi))^n).$$

Cum $\varphi^2 = \varphi + 1$, obținem $1+2\varphi = \varphi^3$ și similar $1+2(1-\varphi) = (1-\varphi)^3$.

Atunci, rezultă $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\varphi)^{3n} + (1-\varphi)^{3n}) = \varphi_{3n}$. $\square$

Teorema 8. (Vorobyov) Dacă $s \geq 1, t \geq 0$ sunt întregi atunci:

$$f_{s+t} = f_{s-1}f_t + f_s f_{t+1}.$$

Demonstrație. Fixăm pe t și demonstrăm prin inducție după s . Pentru $s = 1$ se obține

$f_{t+1} = f_0f_t + f_1f_{t+1}$, care este adevărată (trivial). Presupunem că $s > 1$ și că

$f_{s-k+t} = f_{s-k-1}f_t + f_{s-k}f_{t+1}$ pentru orice k care satisfac $1 \leq k \leq s-1$.

Avem $f_{s+t} = f_{s+t-1} + f_{s+t-2}$ (din recurența Fibonacci)

$$= f_{s-1+t} + f_{s-2+t} \quad (\text{trivial})$$

$$= f_{s-2}f_t + f_{s-1}f_{t+1} + f_{s-3}f_t + f_{s-2}f_{t+1} \quad (\text{din presupunerea făcută})$$

$$= f_t(f_{s-2} + f_{s-3}) + f_{t+1}(f_{s-1} + f_{s-2}) \quad (\text{prin rearanjarea termenilor})$$

$$= f_t f_{s-1} + f_{t+1} f_s \quad (\text{din recurența Fibonacci}). \square$$

Observația 1. J.R. Sylvester indică o metodă elegantă care furnizează identități pentru termenii șirului (f_n) . Mai precis, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și se constată că

avem $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, n = 1, 2, \dots$. Plecând de la această observație și utilizând egalitățile

$A^{n+m} = A^n \cdot A^m$, $n, m = 1, 2, \dots$ și $\det(A^n) = [\det(A)]^n$, rezultă relația din teorema 6. și de asemenea relația din teorema 8.

Posibilitățile de a obține identități, folosind ideea de mai sus sunt multiple. Astfel, observăm că $A^n = f_n A + f_{n-1} I$ (cu I am notat matricea unitate), iar pentru $n = 2$, obținem: $A^2 = A + I$. De asemenea avem $A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$. Enunțate fiind aceste proprietăți ale matricei A , se observă că puterile acesteia verifică recurențe de tip *Fibonacci*. Deoarece $A \cdot I = I \cdot A = A$, putem aplica formula binomului lui *Newton* pentru A și I , apoi identificând relațiile obținute pe componente se obțin diferite identități. Prezentăm mai jos, fără demonstrație, câteva identități obținute prin metoda expusă mai sus:

$$(1) f_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k ; (2) f_{2n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k+l} ; (3) f_l = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{2n-k+l} ;$$

$$(4) f_{l+n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{2n-2k+l} ; (5) f_{3n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_{k+l} \text{ (teorema lui Cesàro generalizată);}$$

$$(6) 2^n f_{n+l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-3k+l} ; (7) f_l = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} (-1)^k f_{3n-2k+l} ;$$

$$(8) f_{nm} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f_n^{m-k} f_{n-1}^k f_{m-k} .$$

Pentru studenți propun demonstrarea următoarelor identități:

$$(9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1 ; (10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n+1} f_{n+2}} = 1 ; (11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}} = 4 - \varphi ;$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \frac{\pi}{4} ; (13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\varphi^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} ; (14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+r}}{f_n} = \varphi^r .$$

Observația 2. Unii autori, au obținut identități cu termenii șirului lui *Fibonacci* cu ajutorul determinanților. Astfel, dacă considerăm șirul lui *Fibonacci* : 1, 2, 3, 5, ... se

$$\text{observă că } f_n = D_{n-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ este deci dat de un determinant de}$$

ordinul $n - 1$.

Dacă considerăm determinantul de ordinul n , $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ pe care îl dezvoltăm după elementele primei linii ne dă :

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm și ultimul termen obținem

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Procedăm ca mai sus și deducem :

$$D_{n-1} = 2D_{n-2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dacă adunăm membru cu membru ultime

două egalități obținem : $D_n + D_{n-1} = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 2D_{n-2} \Leftrightarrow D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$,
relație de recurență analoagă cu cea din șirul lui *Fibonacci* $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.

Teorema 9. $f_n | f_{nk}$, $\forall n, k \in N^*$.

Demonstrație. Prin inducție după $k \in N^*$ și orice $n \in N^*$.

Pentru $k=1 \Rightarrow f_n = f_{n-1} \Rightarrow f_n | f_n$ (adevărată).

Presupunem $f_n | f_{nk}$ și demonstrăm că $f_n | f_{n(k+1)}$.

Întradevăr, ținând seama de teorema 8. avem: $f_{n(k+1)} = f_{nk+n} = f_{nk+1}f_n + f_{nk}f_{n-1}$, $\forall n \in N^*$

și deoarece $f_n | f_n$ și $f_n | f_{nk}$ rezultă $f_n | f_{n(k+1)}$. $\square$

Teorema 10. $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k \pmod{f_n^2}$, $\forall k, n \in N^*$.

Demonstrație. Se arată tot prin inducție după $k \in N^*$. Pentru $k=1$ relația este evidentă. Pentru $k=2$ ținem seama de teoremele precedente și avem ;

$f_{2n-1} = f_n f_{n-1} + f_{n-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^2 \pmod{f_n^2}$, $\forall n \in N^*$. Fie $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k \pmod{f_n^2}$. Avem deci că : $f_{(k+1)n-1} = f_{kn-1+n} = f_{kn} f_{n-1} + f_{kn-1} f_n \equiv f_{kn-1} f_{n-1} \equiv f_{n-1}^k f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{k+1} \pmod{f_n^2}$ și deci conform principiului inducției complete relația este demonstrată. $\square$

Teorema 11. $f_{kn-1} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{f_n^2}, \forall n \in N^*.$

Demonstrație. Relația se demonstrează tot prin inducție completă. Pentru $k=1$ obținem $f_{n-2} \equiv f_{n-2} \pmod{f_n^2}$ ceea ce este evident. Presupunem că $f_{kn-2} \equiv (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{f_n^2}$ și să demonstrăm că $f_{(k+1)n-2} \equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \pmod{f_n^2}$. Întradevăr, avem:

$$\begin{aligned} f_{(k+1)n-2} &= f_{kn-2+n} = f_{kn-1} f_n + f_{kn-2} f_{n-1} \equiv f_{kn-1} f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k (f_n - f_{n-2}) \equiv \\ &\equiv f_{kn-1} f_n + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv (f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k) f_n + (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \equiv \\ &\equiv (-1)^{k+2} f_{n-2}^{k+1} \pmod{f_n^2}. \end{aligned}$$

Am folosit mai sus că $f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k$ se divide cu $f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$.

Rezultă conform principiului inducției complete că teorema este demonstrată. $\square$

Teorema 12. $f_n^2 \mid f_{nf_n}, \forall n \in N^*.$

Demonstrație. Notăm

$$f_n = k. \text{ Avem: } f_{nf_n} = f_{nk} = f_{nk-1} + f_{nk-2} \equiv f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \pmod{k^2}.$$

Totodată avem:

$$f_{n-1} = f_n - f_{n-2} \quad \text{și} \quad \text{deci}$$

$$f_{n-1}^k = (f_n - f_{n-2})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i f_n^{k-i} f_{n-2}^i \equiv (-1)^k f_{n-2}^k \pmod{k^2}.$$

Deci, $f_{n-1}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv (-1)^k f_{n-2}^k + (-1)^{k+1} f_{n-2}^k \equiv 0 \pmod{k^2}$, ceea ce demonstrează teorema. $\square$

Teorema 13. $f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m}, \forall m \in N \text{ și } \forall n \in N^*.$

Demonstrație. Pentru $m=1$ afirmația este echivalentă cu teorema 12. Presupunem afirmația adevărată pentru m și o demonstrăm pentru $m+1$. Vom arăta că

$$f_n^{m+1} \mid f_{nf_n^m} \Rightarrow f_n^{m+2} \mid f_{nf_n^{m+1}}. \text{ Notăm și atunci avem:}$$

$$\begin{aligned} f_{uf_n} &= f_{uf_{n-1}} + f_{uf_{n-2}} \equiv f_{u-1}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \pmod{u^2} \equiv (f_u - f_{u-2})^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \pmod{u^2} \equiv \\ &\equiv (-1)^{f_n} f_{u-2}^{f_n} + (-1)^{f_n+1} f_{u-2}^{f_n} \equiv 0 \pmod{f_n^{m+1}}. \text{ Am folosit mai sus că din } f_n^m \mid u \text{ și } \\ &f_n^m \mid u^2 \Rightarrow f_n^{m+1} \mid f_u. \square \end{aligned}$$

Teorema 14. Orice două numere *Fibonacci* consecutive sunt relative prime.

Demonstrație. Fie $d = (f_n, f_{n+1})$. Avem $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ de unde rezultă $d \mid f_{n-1}$. Atunci $d \mid (f_n - f_{n-1}) = f_{n-2}$. Repetând procedeul se deduce că $d \mid f_1$, deci $d=1$. $\square$

Altfel: din teorema 6., $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. Rezultă $d \mid (-1)^n$, i.e., $d=1$. $\square$

Teorema 15. $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}.$

Demonstrație. Notăm $a = (m, n), b = (f_m, f_n), c = f_{(m,n)}$. Vom arăta că $c \mid b$ și $b \mid c$.

Deoarece $a \mid m$ și $a \mid n$, conform teoremei 9. avem: $f_a \mid f_m$ și $f_a \mid f_n$. Deci $f_a \mid (f_m, f_n)$, i.e., $c \mid b$.

Acum, din Teorema *Bachet-Bezout*, există numerele întregi x, y astfel încât $xm + yn = a$. Se observă că x și y nu pot fi ambele negative, deoarece a ar fi negativ. Cum $a|n$ și $a|m$, avem $a \leq n, a \leq m$. De asemenea, x și y nu pot fi simultan pozitive, deoarece am avea $a = xm + yn \geq m + n$, contradicție. Atunci, x și y au semne diferite și, fără a restrânge generalitatea presupunem că $x \leq 0, y > 0$.

Observăm că :

$$f_{yn} = f_{a-xm} = f_{a-1} f_{-xm} + f_a f_{-xm+1} \text{ (am utilizat teorema 8.)}$$

Cum $n|yn$ și $m|(-xm)$, din teorema 9. rezultă că $f_n | f_{yn}$ și $f_m | f_{-xm}$. Acestea implică că $(f_m, f_n) | f_{yn}$ și $(f_m, f_n) | f_{-xm}$. Din cele de mai sus avem că $(f_m, f_n) | f_a f_{-xm+1}$.

Dacă $(f_m, f_n) | f_{-xm+1}$, cum $(f_m, f_n) | f_{-xm}$ rezultă că (f_m, f_n) ar divide două numere *Fibonacci* consecutive, contradicție (conform teoremei 14) în cazul în care $(f_m, f_n) > 1$.

Cazul $(f_m, f_n) = 1$ este trivial. Rezultă că $(f_m, f_n) | f_a$, ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

Teorema 16. Dacă $p \neq 5$ este un număr prim impar, atunci $p | f_{p-1}$ sau $p | f_{p+1}$.

Demonstrație.

Lema 1. $\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}, 1 \leq n \leq p-1$.

Demonstrație. $(p-1)(p-2)\dots(p-n) \equiv (-1)(-2)\dots(-n) \equiv (-1)^n n! \pmod{p}$, de aici concluzia. $\square$

Lema 2. $\binom{p+1}{n} \equiv 0 \pmod{p}, 2 \leq n \leq p-1$.

Demonstrație. $(p+1)(p)(p-1)\dots(p-n-2) \equiv (1)(0)(-1)\dots(-n) \equiv 0 \pmod{p}$, ceea ce demonstrează lema. $\square$

Din teorema 2. avem:

$$f_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\binom{n}{1} + 5 \binom{n}{3} + 5^2 \binom{n}{5} + \dots + 5^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \right).$$

Din lema 1.,

$$2^{p-2} f_{p-1} \equiv p-1 - (5 + 5^2 + \dots + 5^{\frac{p-3}{2}}) \equiv -\frac{5^{\frac{p-1}{2}} - 1}{4} \pmod{p}.$$

Din lema 2.,

$$2^p f_{p+1} \equiv p+1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv (5^{\frac{p-1}{2}} + 1) \pmod{p}.$$

Din cele două relații de mai sus obținem:

$$2^{2p} f_{p-1} f_{p+1} \equiv -(5^{p-1} - 1) \pmod{p}.$$

Din mica teoremă a lui *Fermat*, $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, pentru $p \neq 5$ și teorema este demonstrată. $\square$

Notă. Punctul de plecare al acestui articol l-a constituit răspunsul dat de dl. prof. dr. *Ioan Tomescu* (Membru Corespondent al Academiei), Secretarului General al S.S.M.R din România dl. prof. *Mircea Trifu*, în Gazeta Matematică nr.12 / 2007, la întrebarea :

M.T.: “Mai sunt dispuși tinerii de astăzi să învețe matematica?”

I.T.: “Dacă vom ști să prezentăm această știință ca pe o frumoasă provocare a spiritului mereu născocitor, este posibil ca tinerii să ajungă să înțeleagă frumusețea și profunzimea unui raționament matematic. Și mai trebuie ca profesorii să fie capabili să prezinte elevilor impactul matematicii asupra întregii dezvoltări științifice contemporane, conexiunile dintre matematică și informatică și aplicațiile acestora, de exemplu, în criptografie, în studiul genomului uman, în comerțul electronic.”

Bibliografie

- [1] *** Gazeta Matematică, 1895 – 2007 .
- [2] Fauvel, J., & van Maanen, J., *History in Mathematics Education*, Boston, 2000.
- [3] Finch, S.R., *Mathematical Constants*, Cambridge University, 2003.
- [4] Knot, R., *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, se poate consulta gratuit pe Internet la adresa <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knot/Fibonacci/fib.html>
- [5] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 1, Editura Enciclopedică Română, București, 1974.
- [6] Mihăileanu, N., *Istoria Matematicii*, vol. 2, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
- [7] Vorobyov, N.N., *The Fibonacci Numbers*, The University of Chicago, 1966.
- [8] Santos, D.A., *Number Theory for Mathematical Contests*, Boston, 2007.
- [9] Sylvester, J.R., *Fibonacci properties by matrix methods*, The Mathematical Gazette, vol. 63 (1979), nr. 425, pp. 188 – 191.
- [10] Weisstein, E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Washington, D.C., 2003.
- [11] Stanciu, N., *Despre șirul lui Fibonacci*, Gazeta Matematică – seria A, nr. 3/2008, pag.150.

MULTIFUNCȚII K2M. EXEMPLE

de Adriana (Pelea) Brândăș

1. Noțiuni fundamentale

1.1 Definiții

O mulțime nevidă E se numește *spațiu vectorial real* dacă pe E sunt definite două operații algebrice:

- una internă $(x, y) \rightarrow x + y$, numită *adunare*;
- una externă $(\beta, x) \rightarrow \beta x$, numită *înmulțire cu scalari*.

Operații care satisfac următoarele proprietăți:

1. $(E, +)$ este grup comutativ (sau abelian);
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\forall) \alpha \in \mathbf{R}$ și $(\forall) x \in E$;
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ și $(\forall) x \in E$;
4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\forall) \alpha \in \mathbf{R}$ și $(\forall) x \in E$;
5. $1x = x$, $(\forall) x \in E$, $1 \in \mathbf{R}$.

Elementele unui spațiu vectorial se numesc *vectori* sau *puncte*.

Fie $n+1$ vectori $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ dintr-un spațiu vectorial real. Ei se numesc *liniar independenți* dacă pentru orice numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ cu proprietatea:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{are loc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Fie $n+1$ vectori $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ dintr-un spațiu vectorial real. Ei se numesc *afin independenți* dacă pentru oricare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ numere reale cu proprietățile:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0 \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{are loc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Dacă E este un spațiu vectorial, o funcție, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, care asociază pentru două elemente ale spațiului un număr real, se numește *produs scalar* pentru spațiul vectorial E dacă satisface condițiile:

- 1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, pentru oricare $x, y \in V$.
- 2) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$, pentru oricare $x, x', y \in V$.
- 3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, pentru oricare $x \in V$ și oricare $\alpha \in \mathbf{R}$.

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$, atunci $\langle x, x \rangle = 0$ dacă și numai dacă $x=0$, oricare ar fi $x \in V$.

Un spațiu vectorial pe care s-a definit un astfel de produs scalar se numește *spațiu vectorial euclidian*.

Fie $X \neq \emptyset$ o mulțime abstractă. O *topologie* pe X este o familie de părți ale lui X , $\mathfrak{T}$, cu proprietățile:

(i) dacă $A, B \in \mathfrak{T}$ atunci $A \cap B \in \mathfrak{T}$.

(ii) dacă $A_i \in \mathfrak{T}$ atunci $\cup A_i \in \mathfrak{T}$, unde $i \in I$.

(iii) $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$

$(X, \mathfrak{T})$ se numește *spațiu topologic*.

Fie X un spațiu topologic. O familie $\mathfrak{R}$ de submulțimi ale lui X se numește *acoperire* a lui X dacă $\cup \mathfrak{R} = X$.

O acoperire $\mathfrak{R}$ a lui X se numește *deschisă* dacă fiecare mulțime $R \in \mathfrak{R}$ este o mulțime deschisă.

O acoperire $\mathfrak{R}$ a lui X se numește *local finită* dacă fiecare $x \in X$ are o vecinătate care intersectează doar un număr finit de mulțimi $R \in \mathfrak{R}$.

Fie $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{R}'$ două acoperiri ale lui X . Spunem că $\mathfrak{R}'$ este o *subacoperire* a lui $\mathfrak{R}$ dacă $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$.

O acoperire $\mathfrak{R}'$ este *mai fină* decât $\mathfrak{R}$ dacă pentru orice $R' \in \mathfrak{R}'$ există $R \in \mathfrak{R}$ astfel încât $R' \subset R$.

Un spațiu topologic X se numește *compact* dacă din orice acoperire deschisă a sa se extrage o subacoperire finită.

Un spațiu topologic X se numește *separat (Hausdorff)* dacă pentru orice x și y din X , $x \neq y$ există o vecinătate V a lui x și o vecinătate U a lui y astfel încât $U \cap V = \emptyset$.

Un spațiu topologic X se numește *paracompact* dacă este separat (Hausdorff) și pentru orice acoperire deschisă $\mathfrak{R}$ a lui X există o acoperire deschisă local finită a lui X mai fină decât $\mathfrak{R}$.

Diametrul unei mulțimi Y în spațiul real n -dimensional este notat și definit astfel:

$$\delta(Y) = \{\|x - y\| : x, y \in R^n\}.$$

Un element x al lui X se numește *punct fix* pentru o aplicație $f : X \rightarrow X$ dacă $f(x) = x$.

Fie X o mulțime convexă într-un spațiu vectorial real. O funcție $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ se numește *cvasiconvexă* dacă $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ mulțimea $\{x \in X : f(x) < \lambda\}$ este convexă. Funcția f se numește *cvasiconcavă* dacă $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ mulțimea $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ este convexă.

1.2 Simplexe și baricentre

Propoziția 1.2.1 Vectorii $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ sunt afin independenți dacă și numai dacă vectorii $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{n+1} - v_1$ sunt liniar independenți.

Consecința 1.2.2 Numărul maxim de vectori afin independenți în spațiu euclidian $\mathbf{R}^n$ este $n+1$.

Fiind dați $n+1$ vectori afin independenți din spațiul vectorial real E , mulțimea notată și definită :

$$[v_1 v_2 \dots v_{n+1}] = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

se numește *simplex n-dimensional* sau *n-simplex*, iar $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ se numesc *vârfurile simplexului*.

Simplexul n-dimensional $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ este învelitoarea convexă a vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ deci:

$$[v_1 v_2 \dots v_{n+1}] = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}.$$

Cel mai simplu exemplu de simplex este *simplexul standard n-dimensional* $\Delta = [e_1 e_2 \dots e_{n+1}]$, unde $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ sunt vectori din $\mathbf{R}^{n+1}$ $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Propoziția 1.2.3 Orice punct x al unui simplex $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ se scrie în mod unic sub forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Pentru orice x din simplexul $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ se asociază un singur sistem de scalari nenegativi

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \text{ cu } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \text{ pentru care } x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i.$$

Scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ astfel definiți și notați uneori cu $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ se numesc *coordonatele baricentrice* ale lui x în simplexul $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$.

Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un n-simplex $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ și $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$. Punctele $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n+1}}$ sunt afin independente deci există simplexul k-dimensional $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n+1}}]$ numit *față k-dimensională* sau *k-față*. Fețele 0-dimensionale sunt cele $n+1$ vârfuri ale simplexului S .

Observație 1.2.1 Un punct $x \in S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ aparține unei k-fețe $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n+1}}]$ a lui S dacă și numai dacă pentru scrierea lui x

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

avem $\lambda_i(x) = 0$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$.

Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un n-simplex punctul notat și definit cu

$$b(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_i$$

se numește *baricentrul* lui S . Baricentrul $b(S)$ aparține simplexului S și nu aparține nici unei fețe k-dimensionale ale lui S , unde $k \leq n-1$.

Propoziția 1.2.4 Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un n-simplex și $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \subset \tau_{n+1} = S$ un șir ascendent de $n+1$ fețe distincte ale lui S . Atunci baricentrele $b(\tau_1), b(\tau_2), \dots, b(\tau_{n+1})$ ale acestor fețe sunt afin independente.

Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un n -simplex și $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}$ un șir de $n+1$ fețe distincte ale lui S $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \subset \tau_{n+1}$. Deoarece baricentrele acestor fețe sunt afin independente (conform Propoziției 1.2.4) se poate vorbi despre un simplex n -dimensional format din baricentrele acestor fețe $[b(\tau_1) b(\tau_2) \dots b(\tau_{n+1})]$. Familia $\mathfrak{B}_1(S)$ formată din toate aceste simplexe

$$\mathfrak{B}_1(S) = \{ [b(\tau_1) b(\tau_2) \dots b(\tau_{n+1})] : \tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \subset \tau_{n+1} \text{ fețe distincte} \}$$

se numește *diviziune baricentrică de ordinul 1* a lui S .

Propoziția 1.2.5 Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un simplex. Atunci S este egal cu diviziunea sa baricentrică de ordinul 1, adică $S = \mathfrak{B}_1(S)$.

Diviziunile baricentrice de orice ordin se definesc prin inducție matematică admitând că s-au definit diviziunile baricentrice $\mathfrak{B}_1(S), \dots, \mathfrak{B}_l(S)$, cu $l \geq 1$, ale unui simplex n -dimensional S . Pentru fiecare simplex $B \in \mathfrak{B}_l(S)$ se formează diviziunea baricentrică $\mathfrak{B}_1(B)$ de ordinul 1 a lui B iar familia de n -simplexe:

$$\mathfrak{B}_{l+1}(S) = \cup \{ \mathfrak{B}_1(B) : B \in \mathfrak{B}_l(S) \}$$

se numește *diviziune baricentrică de ordinul $l+1$* a lui S . Convenim ca familia $\mathfrak{B}_0(S) = \{S\}$ să fie numită diviziune baricentrică de ordinul $l=0$ a lui S .

Propoziția 1.2.6 Diametrul unui simplex n -dimensional $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ este egal cu diametrul mulțimii formate din vârfurile acelui simplex $\delta(S) = \delta(\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\})$.

Dacă $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ este un simplex, $\mathfrak{B}_l(S)$ diviziunea baricentrică a lui S de ordinul l compusă din simplexele $B_1, B_2, \dots, B_m$. Prin *norma diviziunii* se înțelege numărul definit și notat astfel:

$$\|\beta_l(S)\| = \sup \{ \delta(B_k) : 1 \leq k \leq m \}.$$

Propoziția 1.2.7 Dacă S este un n -simplex în spațiul real n -dimensional atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_l(S)\| = 0$.

2. Multifuncții K2M

2.1 Multifuncții

Fie X și Y două mulțimi. O *multifuncție* $T: X \rightarrow Y$ este o funcție definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea părților lui Y . Pentru orice x , element al lui X , mulțimea Tx care se numește valoarea multifuncției T pe punctul x .

Noțiunile care caracterizează o multifuncție sunt:

- 1) *Domeniul efectiv*, notat cu $\text{Dom } T = \{x \in X, Tx \neq \emptyset\}$.
- 2) *Graficul lui T* , notat cu $\text{graf } T = \{(x, y) : y \in Tx\}$.
- 3) *Imaginea unei mulțimi $X' \subset X$ prin multifuncția T* , notată cu $T(X') = \cup \{Tx : x \in X'\}$.

4) *Imaginea multifuncției* T , notată cu $\text{Im } T = T(X)$.

5) *Contraimagea inferioară a unei mulțimi* $Y' \subset Y$ *prin* T , notată cu

$$T^{-1} = \{x \in X: T x \cap Y' \neq \emptyset\}.$$

6) *Contraimagea superioară a unei mulțimi* $Y' \subset Y$ *prin* T , notată cu

$$T^{+1} = \{x \in X: T x \subset Y'\}.$$

7) *Inversa multifuncției* T , notată $T^{-1}: Y \multimap X$ și definită astfel

$$T^{-1}y = \{x \in X: y \in T x\}. \text{ Mulțimile } T^{-1}y \text{ se numesc } \textit{fibrele} \text{ multifuncției } T.$$

8) *Duala multifuncției* T , notată $T^*: Y \multimap X$ definită prin $T^*y = \{x \in X: T x \subset Y'\}$. Mulțimile T^*y se numesc *cofibrele* multifuncției T .

O multifuncție $T: X \multimap Y$ este cu valori nevide, conexe, deschise, compacte, etc., dacă pentru orice element x al mulțimii X , mulțimea Tx este o mulțime nevidă, conexă, deschisă, compactă, etc.

O multifuncție $T: X \multimap Y$ este cu fibre conexe, deschise, compacte, etc., dacă pentru orice element x al mulțimii X , mulțimea $T^{-1}y$ este o mulțime conexă, deschisă, compactă, etc.

Se numește *politop* învelitoarea convexă a unui număr finit de puncte dintr-un spațiu vectorial.

O funcție continuă $f: X \rightarrow Y$ se numește *selecție continuă* pentru o multifuncție $T: X \multimap Y$ dacă $f(x) \in Tx$ pentru fiecare $x \in X$.

Propoziția 2.1.1 *Fie* X *un spațiu paracompact și* Y *o mulțime nevidă, convexă într-un spațiu vectorial topologic Hausdorff. Dacă* $T: X \multimap Y$ *este o multifuncție valori nevide, conexe și cu fibrele* $T^{-1}y$ *deschise, atunci* T *admite o selecție continuă* f . *Dacă* X *un spațiu compact Hausdorff atunci există un politop* $P \subset Y$ *astfel ca* $f(P) \subset P$.

Dacă Y este un spațiu topologic vom spune că o multifuncție $T: X \multimap Y$ este *compactă* dacă $T(X)$ este inclusă într-o submulțime compactă a lui Y (altfel spus, dacă $\overline{T(X)}$ este o submulțime compactă a lui Y). Dacă X și Y sunt spații topologice vom spune că o multifuncție $T: X \multimap Y$ este *închisă* dacă graficul său este o submulțime închisă a lui $X \times Y$.

Fie X, Y, Z trei mulțimi și $T: X \multimap Y$, $S: Y \multimap Z$ două multifuncții. Multifuncția notată $S \circ T: X \multimap Z$ definită prin

$$(S \circ T)x = S(Tx), x \in X$$

se numește *compunerea* lui S cu T .

Un punct $x \in X$ se numește *punct fix* pentru o multifuncție $T: X \multimap Y$ dacă $x \in Tx$. Un punct $x \in X$ se numește *punct de coincidență* pentru două multifuncții $T, S: X \multimap Y$ dacă $Tx \cap Sx \neq \emptyset$.

2.2 Multifuncții semicontinue superior

Fie X și Y două spații topologice. O multifuncție $T : X \multimap Y$ este *semicontinuă superior* într-un punct $x_0 \in X$ dacă pentru orice mulțime deschisă $G \subset Y$ astfel încât $Tx_0 \subset G$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $Tx \subset G$, $\forall x \in V$.

T se numește *semicontinuă superior* (pe X) dacă este semicontinuă superior în fiecare punct $x \in X$.

Observație: Dacă $x_0 \in X$ și $Tx_0 = \emptyset$ atunci T este semicontinuă superior în x_0 dacă și numai dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $T(V) = \emptyset$.

Propoziția 2.2.1: Fie X și Y două spații topologice și $T : X \multimap Y$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) T este semicontinuă superior.
- (ii) $\forall G \subset Y$ deschisă, $T^{+1}(G)$ este deschisă.
- (iii) $\forall F \subset Y$ închisă, $T^{-1}(F)$ este închisă.

Propoziția 2.2.2: Fie X, Y, Z spații topologice și $T : X \multimap Y$, $S : Y \multimap Z$ două multifuncții semicontinue superior. Atunci $S \circ T$ este o multifuncție semicontinuă superior. În particular dacă $s : Y \rightarrow Z$ este o funcție continuă, atunci $s \circ T$ este o multifuncție semicontinuă superior.

Demonstrație: Trebuie să demonstrăm că pentru orice mulțime $C \subset Z$ are loc

$$(S \circ T)^{+1}(C) = T^{+1}(S^{+1}(C)).$$

Avem succesiv

$$x \in (S \circ T)^{+1}(C) \Leftrightarrow \forall y \in Tx, Sy \subset C \Leftrightarrow Tx \subset S^{+1}(C) \Leftrightarrow$$

$$x \in T^{+1}(S^{+1}(C)). \blacksquare$$

Propoziția 2.2.3: Fie X, Y două spații topologice Hausdorff compacte și $T : X \multimap Y$ o multifuncție cu valori închise. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) T este semicontinuă superior
- (ii) graf T este mulțime închisă în $X \times Y$
- (iii) Dacă $(x_i), (y_i)$ sunt două șiruri generalizate în X , respectiv în Y , din $x_i \rightarrow x$, $y_i \in Tx_i$, $y_i \rightarrow y$ rezultă $y \in Tx$.

Strâns legate de conceptul de multifuncție semicontinuă superior sunt noțiunile de multifuncție demicontinuă superior, respectiv multifuncție hemicontinuă superior.

Fie E un spațiu vectorial topologic Hausdorff real, E' dualul său algebrico-topologic (adică spațiul vectorial al tuturor funcționalelor $w: E \rightarrow \mathbf{R}$ liniare și continue) și X un spațiu topologic. Spunem că o multifuncție $T: X \multimap E$ este *demicontinuă superior* dacă $\forall x_0 \in X$, $w \in E'$ și $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $TX_0 \subset \{x \in X : w(x) < \lambda\} \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $T(V) \subset \{x \in X : w(x) < \lambda\}$.

În ipotezele de mai sus, spunem că o multifuncție $T: X \multimap E$ este *hemicontinuă superior* dacă pentru fiecare $w \in E'$ și $\lambda \in \mathbf{R}$, mulțimea $\left\{x \in X : \sup_{u \in Tx} w(u) < \lambda\right\}$ este deschisă în X .

Observație: Este evident că orice multifuncție semicontinuă superior este demicontinuă superior.

Propoziția 1.4.4: Fie X un spațiu topologic, E un spațiu vectorial topologic Hausdorff real și $T: X \multimap E$ o multifuncție cu valori nevide. Dacă T este demicontinuă superior atunci T este hemicontinuă superior.

Observație: Dacă T este o multifuncție cu valori compacte, conceptele de hemicontinuitate superioară și cel de demicontinuitate superioară coincid. Vom arăta că în anumite condiții, conceptele de semicontinuitate superioară, demicontinuitate superioară și hemicontinuitate superioară coincid.

Propoziția 1.4.5: Fie X un spațiu topologic, Y o submulțime nevidă compactă a unui spațiu local convex Hausdorff real E și $T: X \multimap Y$ o multifuncție cu valori nevide convexe. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) T este semicontinuă superior.
- (ii) T este demicontinuă superior.
- (iii) T este hemicontinuă superior.

2.3 Teorema lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

În acest paragraf vom da teorema Knaster – Kuratowski – Mazurkiewicz sau lema celor trei polonezi. Această teoremă este echivalentă cu lema lui Sperner și teorema de punct fix a lui Brouwer.

O remarcabilă teoremă de punct fix este obținută de Brouwer în anul 1910 și publicată în anul 1912. Demonstrația lui Brouwer folosea tehnica aproximării simpliciale și noțiuni de teoria gradului topologic. Într-o scrisoare datată 4 ianuarie 1910 Brouwer comunică lui Hadamard rezultatul său, fără demonstrație. Hadamard prezintă acest rezultat cu numele „Teorema de punct fix a lui Brouwer” și dă o altă demonstrație.

Lema lui Sperner este publicată în anul 1928. Sperner o aplica pentru obținerea unor teoreme de invarianță a dimensiunii și a domeniilor.

Knaster sesizează legătura dintre lema lui Sperner și teorema de punct fix a lui Brouwer. Mazurkewicz dă o demonstrație teoremei lui Brouwer, demonstrație corectată de Kuratowski. În 1929 este publicată teorema lui Knaster – Kuratowski – Mazurkewicz cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de teorema K2M sau *lema celor trei polonezi*. Această teoremă apare ca o consecință a lemei lui Sperner, dar pe de altă parte dă o demonstrație mai simplă teoremei de punct fix a lui Brouwer.

Teorema Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz - teorema K2M: Fie $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ un simplex în spațiul $\mathbf{R}^n$ și $\{F_i : 1 \leq i \leq n+1\}$ o familie de $n+1$ submulțimi închise ale lui S . Dacă incluziunea

$$[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}] \subset \bigcup \{F_{i_j} : 1 \leq j \leq k\}$$

are loc pentru fiecare față $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}]$ a lui S , atunci $\bigcap \{F_i : 1 \leq i \leq n+1\} \neq \emptyset$.

2.4 Multifuncții K2M

Motivați de teorema lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, Dugundji și Granas introduc noțiunea de multifuncție K2M, iar Granas și Lassonde pe cea de multifuncție tare K2M.

Definiție: Fie X o mulțime într-un spațiu vectorial și D o submulțime nevidă a lui X . O multifuncție $T : D \rightarrow X$ se numește:

- (i) multifuncție K2M dacă $\forall A \subset D$, finită și nevidă avem

$$\text{conv}A \subset T(A);$$

- (ii) multifuncție tare K2M dacă

$$x \in Tx, \forall x \in D$$

și

$$T^*y = D \setminus T^{-1}y \text{ este mulțime convexă (eventual vidă), } \forall y \in X.$$

Teoria K2M, concept introdus de S.Park este studiul multifuncțiilor K2M și ale aplicațiilor acestora.

Propoziția 2.4.1: Dacă D este o submulțime convexă a lui X și $T : D \rightarrow X$ este o multifuncție tare K2M, atunci T este o multifuncție K2M.

Demonstrație: Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset D$ și $y_0 \in \text{conv}A$. Avem de arătat că $y_0 \in \bigcup \{Tx_i : 1 \leq i \leq n\}$. Deoarece $y_0 \in Ty_0$ deducem că $y_0 \notin T^*y_0$ și deci $\text{conv}A$ nu este

inclusă în T^*y_0 . Întrucât mulțimea T^*y_0 este convexă, cel puțin un punct $x_i \in A$ nu aparține lui T^*y_0 , adică $y_0 \in Tx_i$. ■

Vom da în continuare câteva exemple de multifuncții K^2M . Exemplele 2 și 3 sunt cazuri particulare ale exemplului 4. În primele 5 exemple domeniul de definiție este convex, deci este suficient să arătăm că multifuncția este tare K^2M . Nu se va întâmpla la fel și în exemplul 6.

Exemplul 1: Fie E un spațiu vectorial, D o submulțime convexă a lui E și $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cvasiconvexă. Atunci multifuncția $T : D \rightarrow E$ definită prin

$$Tx = \{y \in D : f(y) \leq f(x)\} \quad x \in D,$$

este tare convexă; într-adevăr $x \in Tx$, $\forall x \in D$ și deoarece f este cvasiconvexă se obține ușor că $T^*y = \{x \in D : f(x) < f(y)\}$

este mulțime convexă.

Exemplul 2: Fie E un spațiu vectorial și D o submulțime convexă a lui E . Fie $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ o funcțională biliniară și $l : E \rightarrow \mathbf{R}$ o funcțională liniară. Atunci multifuncția $T : D \rightarrow D$ definită prin

$$Tx = \{y \in D : \varphi(y, y - x) \leq l(y - x)\}, \quad x \in D$$

este tare K^2M ; într-adevăr $x \in Tx$ și cofibrele lui T

$$T^*y = \{x \in D : \varphi(y, y - x) > l(y - x)\}$$

sunt mulțimi convexe.

Exemplul 3: Fie $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu prehilbertian, D o submulțime convexă a lui H și $f : D \rightarrow H$ o funcție oarecare. Atunci multifuncția $T : D \rightarrow H$ definită prin

$$Tx = \{y \in H : \langle f(y), y - x \rangle \leq 0\}, \quad x \in D,$$

este tare K^2M ; într-adevăr $x \in Tx$ și cofibrele

$$T^*y = \{x \in D : \langle f(y), y - x \rangle > 0\}$$

sunt mulțimi convexe.

Exemplul 4: Fie D o submulțime convexă a unui spațiu vectorial E , $\alpha \in \mathbf{R}$ și $\varphi : D \times D \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

$$(a) \varphi(x, x) \leq \alpha, \forall x \in D$$

(b) Funcția $\varphi(\cdot, y) : D \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $\varphi(\cdot, y)(x) = \varphi(x, y)$ este cvasiconcavă pe D , $\forall y \in D$.

Atunci multifuncția $T : D \rightarrow D$ definită prin:

$$Tx = \{y \in D : \varphi(x, y) \leq \alpha\}, \quad x \in D,$$

este tare K^2M . Într-adevăr, din (a) rezultă că $x \in Tx$, $\forall x \in D$, iar din (b) deducem că cofibrele

$$T^*y = \{x \in D : \varphi(x, y) > \alpha\}$$

sunt mulțimi convexe.

Exemplul 5: Fie D o submulțime convexă a unui spațiu vectorial E , $p : E \rightarrow \mathbf{R}$ o seminormă și $f : D \rightarrow E$ o funcție arbitrară. Atunci multifuncția $T : D \rightarrow D$ definită prin

$$Tx = \{y \in D : p(f(y) - y) \leq p(f(y) - x)\}, \quad x \in D,$$

este tare K^2M . Pentru a demonstra această afirmație este suficient să arătăm că dacă

$$x_1, x_2 \in T^*y = \{x \in D : p(f(y) - x) < p(f(y) - y)\}$$

și $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, atunci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in T^*y$. Ținând cont de relațiile $p(f(y) - x_i) < p(f(y) - y)$, $i = 1, 2$ vom avea

$$\begin{aligned} p(f(y) - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) &\leq \lambda_1 p(f(y) - x_1) + \lambda_2 p(f(y) - x_2) \leq \\ &\leq \lambda_1 p(f(y) - y) + \lambda_2 p(f(y) - y) = p(f(y) - y). \end{aligned}$$

Exemplul 6: Fie Y o submulțime convexă a unui spațiu vectorial E , $D \subset Y$ o mulțime arbitrară și $\varphi : D \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

$$(a) \quad \varphi(x, y) + \varphi(y, x) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in D \times D.$$

$$(b) \quad \text{Funcția } \varphi(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbf{R}, \quad \varphi(x, \cdot)(y) = \varphi(x, y) \text{ este convexă pe } Y, \quad \forall x \in D.$$

Atunci multifuncția $T : D \rightarrow Y$ definită prin

$$Tx = \{y \in Y : \varphi(x, y) \leq 0\} \quad x \in D,$$

este K^2M .

Pentru a demonstra această afirmație fie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset D$ și fie $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ și $\lambda_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Din (a) rezultă că

$$\varphi(x_i, x_j) + \varphi(x_j, x_i) \leq 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Înmulțind relația de mai sus cu λ_i și însumând după i găsim

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_j, x_i) \leq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

De aici și din (b) rezultă

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_j) + \varphi(x_j, y_0) \leq 0.$$

Folosind încă o dată convexitatea funcției $\varphi(x, \cdot)$ deducem că

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, y_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(x_j, y_0) \leq 0.$$

Rezultă că pentru cel puțin un punct x_i are loc $\varphi(x_i, y_0) \leq 0$. Aceasta înseamnă că $y_0 \in \bigcup \{Tx_i : 1 \leq i \leq n+1\}$ deci T este o multifuncție K2M.

Propoziția 2.4.2: Fie X o mulțime convexă într-un spațiu vectorial topologic, D o submulțime nevidă finită a lui X și A o familie de submulțimi nevide ale lui D . Dacă $G : D \rightarrow X$ este o multifuncție cu valori deschise în X care satisface condiția

$$\text{conv}A \subset G(A), \forall A \in \mathcal{A},$$

atunci există o multifuncție $F : D \rightarrow X$ cu valori închise în X cu proprietățile:

- (i) $Fx \subset Gx, \forall x \in D$;
- (ii) $\text{conv}A \subset F(A), \forall A \in \mathcal{A}$.

Demonstrație: Pentru fiecare $y \in G(D)$ fie

$$(2.1) \quad H_y = \bigcap \{Gx : y \in Gx\}.$$

H_y este o mulțime deschisă în X și $y \in H_y$. Deoarece spațiile vectoriale topologice sunt spații regulate, există o mulțime U_y , deschisă în X , astfel încât

$$(2.2) \quad y \in U_y \subset \overline{U_y} \subset H_y.$$

Evident, $\forall A \in \mathcal{A}$ avem $G(A) \subset \bigcup \{U_y : y \in G(A)\}$.

De aici și din (ii) rezultă că familia $\{U_y : y \in G(A)\}$ este o acoperire deschisă a mulțimii $\text{conv}A$. Cum $\text{conv}A$ este compactă, există o submulțime finită V_A a lui $G(A)$ astfel încât

$$(2.3) \quad \text{conv}A \subset \bigcup \{U_y : y \in V_A\}.$$

Punem $V = \bigcup \{V_A : A \in \mathcal{A}\}$. Definim multifuncția $F : D \multimap X$ prin

$$Fx = \bigcup \{\bar{U} : y \in V, U_y \subset Gx\}, \quad x \in D.$$

Pentru fiecare $x \in D$, Fx este o mulțime închisă în X . Dacă $Fx = \emptyset$, atunci (i) are loc în mod trivial. În caz contrar, $\forall y \in V$ cu $U_y \subset Gx$, din (2.1) și (2.2) rezultă $\bar{U}_y \subset H_y \subset Gx$, deci $Fx \subset Gx$.

Rămâne să arătăm că F satisface și (ii). Fie $A \in \mathcal{A}$ și $z \in \text{conv}A$. Din (2.3) rezultă că $\exists y \in V_A$ astfel ca $z \in U_y$. Deoarece $y \in Gx$, pentru un $x \in A$ rezultă că $U_y \subset H_y \subset Gx$ și prin urmare $z \in Gx \subset G(A)$. Deci $\text{conv}A \subset G(A)$. ■

Consecința 2.4.3: Fie X o submulțime convexă a unui spațiu vectorial topologic și D o submulțime nevidă, finită a sa. Dacă $G : D \multimap X$ este multifuncție K2M cu valori deschise în X , atunci există o multifuncție K2M cu valori închise în X , $F : D \multimap X$ astfel încât $Fx \subset Gx$, $\forall x \in D$.

Consecința 2.4.4: Fie X o submulțime convexă a unui spațiu vectorial topologic și D o submulțime nevidă, finită a sa. Dacă $F : D \multimap X$ este o multifuncție cu valori închise în X pentru care $\text{conv}D \cap \bigcap \{Fx : x \in D\} = \emptyset$,

atunci există o multifuncție $G : D \multimap X$ cu valori deschise în X cu proprietățile:

- (i) $Fx \subset Gx, \forall x \in D$.
- (ii) $\text{conv}D \cap \bigcap \{Gx : x \in D\} = \emptyset$.

Demonstrație: Considerăm multifuncția $G_1 : D \multimap \text{conv}D$ definită prin $G_1x = \text{conv}D \setminus Fx$, $x \in D$.

Din ipoteză se obține imediat că G_1 ia valori deschise în $\text{conv}D$ și $\text{conv}D = G_1(D)$. În baza Propoziției 2.2.2 (pentru $X = \text{conv}D$ și $\mathcal{A} = \{D\}$) există o multifuncție $F_1 : D \multimap \text{conv}D$ cu valori închise în $\text{conv}D$, cu următoarele proprietăți:

$$(2.4) \quad F_1x \subset G_1x, \forall x \in D$$

$$(2.5) \quad \text{conv}D = F_1(D).$$

Deoarece $\text{conv}D$ este mulțime compactă, mulțimile F_1x sunt închise și în X . O multifuncție care satisface condițiile impuse este $G : D \multimap X$, definită prin

$$Gx = Y \setminus F_1x, \quad x \in D.$$

Într-adevăr, din (2.4) rezultă (i), iar (2.5) implică (ii). ■

Observație: Condiția ca mulțimea D să fie finită este esențială în Propoziția 2.4.2 și în Consecințele 2.4.3 și 2.4.4. Dacă ea este o mulțime infinită, cum avem în exemplul următor, Consecința 2.4.3 și implicit Propoziția 2.4.2 nu mai sunt adevărate.

Fie D o mulțime care nu se reduce la un punct, convexă și compactă într-un spațiu vectorial topologic și fie $s : D \rightarrow D$ o bijecție, astfel încât $s(x) \neq x$, $\forall x \in D$. Considerăm multifuncția $G : D \multimap D$ definită prin

$$Gx = D \setminus \{s(x)\}, \quad x \in D.$$

Se constată imediat că G este o multifuncție K2M cu valori deschise în D și că $\bigcap \{Gx : x \in D\} = \emptyset$.

Să presupunem că există o multifuncție K2M, $F : D \multimap D$ cu valori închise în D , astfel încât $Fx \subset Gx$, $\forall x \in D$. Deoarece D este mulțime compactă valorile Fx sunt compacte. Știm $\bigcap \{Fx : x \in D\} \neq \emptyset$ de unde se ajunge la contradicția $\bigcap \{Gx : x \in D\} \neq \emptyset$.

O noțiune mai generală decât cea de multifuncție K2M este cea de multifuncție GK2M.

Definiție: Fie X o mulțime într-un spațiu vectorial și D o mulțime nevidă. O multifuncție $T : D \multimap X$, vom spune că este GK2M ("generalized K2M") dacă $\forall A \subset D$ o mulțime nevidă finită, $\exists \sigma : A \rightarrow X$ o funcție astfel încât

$$\text{conv} \sigma(B) \subset T(B), \quad \forall \emptyset \neq B \subset A.$$

Această definiție a fost introdusă de Chang și Zhang. Aceeași noțiune, dar cu altă denumire, apare cu un an mai devreme în lucrarea a lui Kassay și Kolumban.

Observație: În general, funcțiile σ din definiția precedentă nu sunt injective. Este clar că orice funcție K2M este GK2M (reciproca acestei afirmații nu este întotdeauna adevărată).

3. Bibliografie

- [1] **M. Balaj**, *Introducere în teoria K2M*, Editura Universității din Oradea, 2002

- [2] **G. Kassay, I. Kolumbán,** *On the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz and Ky Fans's theoreme*, Babeş-Bolyai Univ, Res. Seminars Preprint 7(1990), 87-100.

O metodă de calcul al primitivelor

de Marian Teler, Profesor Costești, Județul Argeș
și Marin Ionescu, Profesor Pitești, Județul Argeș

În manualul de analiză matematică pentru clasa a XII-a, capitolul „Integrarea prin părți”, sunt propuse o serie de exerciții care necesită aplicarea de două sau mai multe ori a formulei de integrare prin părți.

Văzând rezultatele, observăm că la anumite tipuri de funcții se obțin anumite tipuri de primitive.

Propunem în continuare rezolvarea unor probleme de calcul al primitivelor prin metoda coeficienților nedeterminați.

1. Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = P(x)e^x, P \in R[X]$.

Există o primitivă $F : R \rightarrow R, f(x) = Q(x)e^x$, unde $Q \in R[X], \text{grad}(Q) = \text{grad}(P)$

Din relația $F' = f$, obținem $Q' + Q = P$

Exemple:

- 1.a. Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = (x^3 - x + 1)e^x$. Să se determine $a, b, c \in R$ astfel încât funcția $F : R \rightarrow R, F(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)e^x$ să fie o primitivă a funcției f .

Soluție:

Din $Q' + Q = P$, rezultă $x^3 + (a+3)x^2 + (b+2a)x + b + c = x^3 - x + 1, (\forall)x \in R$

Identificând coeficienții, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a+3=0 \\ b+2a=-1 \\ b+c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=-3 \\ b=5 \\ c=-4 \end{cases} \text{ și } F(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)e^x$$

- 1.b. Generalizare:

Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = (x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)e^x, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$.

Să se determine $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$, astfel încât funcția

$F : R \rightarrow R, F(x) = (x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n)e^x$ să fie o primitivă a funcției f .

Soluție:

Luând $b_0 = 1$, din $Q' + Q = P$, obținem $b_k = a_k - (n-k+1)b_{k-1}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = x^n \ln^k x, n, k \in N^*$. Să se determine $b_1, b_2, \dots, b_k \in R$, astfel încât

funcția $F : (0, \infty) \rightarrow R, F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln^k x + b_1 \ln^{k-1} x + \dots + b_k)$ să fie o primitivă a funcției f .

Soluție:

Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in (0, \infty)$, obținem (considerând $b_0 = 1$),

$$b_i = \frac{k-i+1}{n+1}, i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Exemplu: Fie $f : (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = x^3 \ln^2 x$. Să se determine $a, b \in R$ astfel încât

funcția $F : (0, \infty) \rightarrow R, F(x) = \frac{x^4}{4} (\ln^2 x + a \ln x + b)$ să fie o primitivă a funcției f .

Din $F'(x) = f(x), (\forall)x \in (0, \infty)$, obținem $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{8}, F(x) = \frac{x^4}{4} \left(\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right)$

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a \sin x + b \cos x)e^x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (m \sin x + n \cos x)e^x$

Soluție:

$$\text{Din } F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ obținem: } \begin{cases} m - n = a \\ m + n = b \end{cases}, \begin{cases} m = \frac{a+b}{2} \\ n = \frac{-a+b}{2} \end{cases}$$

Exemplu:

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\sin x - \cos x)e^x$.

Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (m \sin x + n \cos x)e^x$ să fie o primitivă a funcției f .

Soluție: Avem $a = 1, b = -1$, rezultă $m = 0, n = -1$, $F(x) = (-\cos x)e^x$

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = P(x) \sin x + Q(x) \cos x$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

Există $R, S \in \mathbb{R}[X]$, $\max(\text{grad} R, \text{grad} S) \leq \max(\text{grad} P, \text{grad} Q)$, astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = R(x) \sin x + S(x) \cos x$ să fie o primitivă a funcției f .

$$\text{Soluție: Din } F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ obținem: } \begin{cases} R' - S = P \\ R + S' = Q \end{cases}$$

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x + 1) \sin x$. Să se determine $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c) \sin x + (mx^2 + nx + p) \cos x$ să fie o primitivă a funcției f .

$$\text{Soluție: Din } F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ obținem: } \begin{cases} m = 1 \\ b + 2m = 0 \\ b - p = 1 \\ a = 0 \\ 2a - n = 1 \\ c + n = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ m = -1 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = (2x - 1) \sin x + (-x^2 + x + 1) \cos x$$

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x [P(x) \sin x + Q(x) \cos x]$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Există $R, S \in \mathbb{R}[X]$, $\max(\text{grad} R, \text{grad} S) \leq \max(\text{grad} P, \text{grad} Q)$, astfel încât

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^x [R(x) \sin x + S(x) \cos x]$ să fie o primitivă a funcției f .

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x \sin x$. Să se determine $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^x [(ax + b) \sin x + (mx + n) \cos x]$ să fie o primitivă a funcției f .

$$\text{Soluție: Din } F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ obținem: } \begin{cases} a - m = 1 \\ a + m = 0 \\ b + n + m = 0 \\ b - n + a = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^x [x \sin x + (-x + 1) \cos x]$$

6. Fie $f : I \rightarrow R, f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{m \sin x + n \cos x}, a, b, m, n \in R$, iar I un interval de numere reale astfel

încât $a \sin x + b \cos x \neq 0, (\forall)x \in I$. Există $\alpha, \beta \in R$ astfel încât $f(x) = \alpha + \beta \frac{u'(x)}{u(x)}$, unde

$u(x) = m \sin x + n \cos x$. Atunci, funcția $F : I \rightarrow R, F(x) = \alpha x + \beta \ln|u(x)|$ este o primitivă a funcției f .

Exemplu: Fie $f : I \rightarrow R, f(x) = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}, I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Obținem: $f(x) = 2 + \frac{u'(x)}{u(x)}, u(x) = \sin x - \cos x$ și $F : I \rightarrow R, F(x) = 2x + \ln|\sin x - \cos x|$

Observații:

- Exemplele rezolvate fac parte din exercițiile propuse în manualele alternative de Analiză matematică pentru clasa a XII-a, capitolul „Integrarea prin părți”, sau au fost propuse la concursuri școlare și în Gazeta matematică,
- Cititorul poate să aplice metoda expusă și la alte exemple și poate obține și generalizări, ca de exemplu pentru $f : (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = x^\alpha \ln^k x, \alpha \in R - \{-1\}, k \in N^*$ sau $f : R \rightarrow R, f(x) = (a \sin \alpha x + b \cos \alpha x)e^{\beta x}, a, b, \alpha, \beta \in R$
- Se pot elabora programe pe calculator pentru rezolvarea unor probleme de calcul al primitivelor, ca de exemplu:

1.b. Generalizare:

.Fie $f : R \rightarrow R, f(x) = (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)e^x, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$. Să se determine

$b_1, b_2, \dots, b_n \in R$, astfel încât funcția $F : R \rightarrow R, F(x) = (x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n)e^x$ să fie o primitivă a funcției f .

2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = x^n \ln^k x, n, k \in N^*$. Să se determine $b_1, b_2, \dots, b_k \in R$, astfel

încât funcția $F : (0, \infty) \rightarrow R, F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln^k x + b_1 \ln^{k-1} x + \dots + b_k)$ să fie o primitivă a funcției f .

Obținem următoarele programe Pascal pentru determinarea coeficienților :

$b_1, b_2, \dots, b_n, (1.b),$

Program Primitive;

uses crt;

var n,i:integer;

a,b:array[0..100] of integer;

begin

ClrScr;

write('n=');read(n);

for i:=1 to n do

begin

write('a[',i,']=');read(a[i]);

end.

b[0]:=0;

for i:=1 to n do

begin

b[i]:=a[i]-(n-i+1)*b[i-1];

write('b[',i,']= ',b[i], ' ');

end;

readln;readln;

$b_1, b_2, \dots, b_k, (2.)$

Program Primitive;

uses crt;

var n,k,i:integer;

b:array[0..100] of real;

begin

ClrScr;

write('n=');read(n); write('k=');read(k);

b[0]:=1

for i:=1 to k do

begin

b[i]:=-(k-i+1)*b[i-1]/(n+1);

write('b[',i,']= ',b[i], ' ');

end;

readln;readln;

end.

end.

- Se pot calcula primitive utilizând softul interactiv Maple.

Exemple:

1. **Int(x^2-4*x+3,x)=int(x^2-4*x+3,x);**

$$\int x^2 - 4x + 3 \, dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

2. **Int((x^3*ln(x)^2,x))=collect((int(x^3*ln(x)^2,x),x));**

$$\int x^3 \ln(x)^2 \, dx = \left(\frac{1}{4} \ln(x)^2 - \frac{1}{8} \ln(x) + \frac{1}{32} \right) x^4$$

3. **Int((x^2-x+1)*sin(x),x)=collect(int((x^2-x+1)*sin(x),x),cos(x));**

$$\int (x^2 - x + 1) \sin(x) \, dx = (-x^2 + 1 + x) \cos(x) + 2 \sin(x) x - \sin(x)$$

4. **Int(x*ln(x),x)=collect(int(x*ln(x),x),x);**

$$\int x \ln(x) \, dx = \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \right) x^2$$

5. **Int(sin(x)^3*cos(x)^2,x)=int(sin(x)^3*cos(x)^2,x);**

$$\int \sin(x)^3 \cos(x)^2 \, dx = -\frac{1}{5} \sin(x)^2 \cos(x)^3 - \frac{2}{15} \cos(x)^3$$

Bibliografie:

1. Analiză matematică pentru clasa a XII-a, Manuale alternative,
2. Gazeta matematică, Ediția electronică,
3. Analiză matematică cu MAPLE, Lică Dionis, București, 2003,
4. <http://mateinfo.ro/>

Ce este matematica lui Vedas ?

Bulgăr Delia Valentina - Liceul Teoretic "Traian Vuia" Făget, Timiș

Matematica lui Vedas se ocupă cu metode de calcul aritmetic care au fost formulate cu multe secole în urmă de către adepții Indiei. Metodele au fost uitate datorită neglijenței generației ce a urmat. Însă în urma efortului depus de câțiva cercetători, matematica cu aceste metode deosebite a fost adusă la glorie.

Pionerul care a contribuit la refacerea matematicii lui Vedic a fost:

Jagadguru Swami Sri Bharati Krsna Tirthaji .

La începutul secolului al XII –lea , când era un interes foarte mare în textul Sanskrit, în Europa, Bharati Krsna a expus câteva formule “ridicole” extrase din “Ganita Sutra” – care însemna matematică . Matematicienii pe vremea aceea nu au găsit nici o logică și de aceea au spus că Matematica lui Vedic este o prostie. Bharati Krsna care era un învățător al matematicii lui Vedic, istoric și filozof, a studiat textul și după o perioadă îndelungată de investigare a putut sa reconstituie Matematica lui Vedic în întregime.

Atât cercetătorii de la NASA, cât și cei de la MICROSOFT , au fructificat aceste metode în vederea formării unei inteligențe artificiale sau a unor programe complexe.

În continuare voi prezenta câteva exemple din matematica lui Vedas:

❖ ÎNMULȚIREA

✓ I. Înmulțirea a două numere formate dintr-o cifră:

Exemplu: $8 \times 7 = 56$

Se face scaderea:

- Baza este 10
- $10 - 8$ rezultatul este 2,
- $10 - 7$ rezultatul este 3,

Apoi $8 - 3 = 7 - 2 = 5$ (cifra zecilor),

iar $2 \times 3 = 6$ (cifra unitatilor)

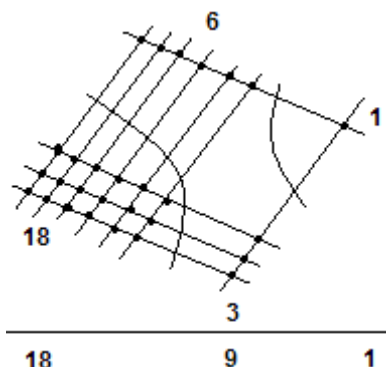
$$\begin{array}{r} 8 \ 2 \\ \times 7 \\ \hline 5 \ 6 \end{array}$$

✓ Înmulțirea a două numere formate din două cifre:

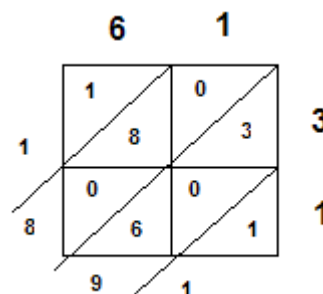
➤ Exemplul 1: $61 \times 31 = 189$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 31 \\ \hline 61 \\ 183 \\ \hline 1891 \end{array}$$

Metoda I



Metoda II



Metoda III

Metoda I: $XY \times TZ = (X \times T) [(X \times Z) + (T \times Y)] (Y \times Z)$

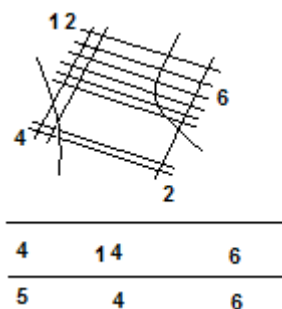
Se i-a produsul cifrelor zecilor, obținând prima grupă din rezultat, apoi suma produselor cifrelor de pe diagonală, obținând a 2-a grupă din rezultat, apoi produsul cifrelor unităților, obținând ultima grupă.

În cazul în care grupa a doua este formată din două cifre, se păstrează cifra unităților, iar cifra zecilor se adună la prima grupă.

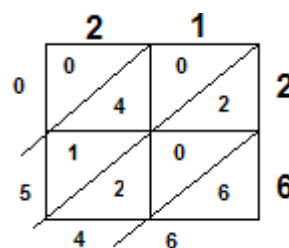
➤ Exemplul 2: $21 \times 26 = 546$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 26 \\ \hline 126 \\ 420 \\ \hline 546 \end{array}$$

Metoda I



Metoda II

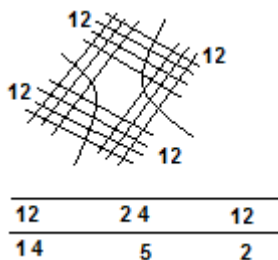
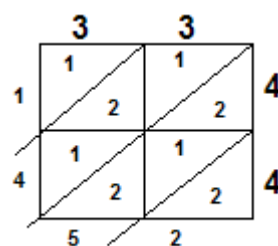


Metoda III

Metoda I: Analog și în cazul în care grupele 2 și 3 sunt formate din două cifre atunci se păstrează cifra unităților adunând cifra zecilor la grupa din față

➤ Exemplul 3 : $33 \times 44 = 1452$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \\ | \quad \times \quad | \\ \hline 4 \quad 4 \times \\ \hline 12 \quad 24 \quad 12 \\ \hline \end{array} = 1452$$

Metoda I**Metoda II****Metoda III****Observație:**

- Înmulțirea numerelor utilizând **metoda II**:

Pentru fiecare număr se consideră un grup de drepte paralele indicând cifra zecilor, respectiv cea a unităților. Punctele de intersecție ale dreptelor vor indica rezultatul, astfel:

- cifra unităților este dată de numărul de puncte din intersecția dreptelor ce arată unitățile;
- cifra zecilor este dată de numărul de puncte din intersecția zecilor cu unitățile;
- cifra sutelor este dată de intersecția dreptelor ce indică zecile.

- Înmulțirea numerelor utilizând **metoda III**:

-Se consideră un tabel cu un număr de linii egal cu numărul de cifre al primului factor al produsului, iar numărul de coloane egal cu numărul de cifre al celui de-al doilea factor.

-Fiecare pătrățel se completează cu produsul numerelor de pe linie și coloană, separând cifra unităților de cea a zecilor prin diagonala pătrățelului

- La final se adună rezultatele obținute dintre diagonalele pătrățelurilor, începând de la colțul din dreapta jos al tabelului, iar cifrele obținute în ordinea vertical-orizontală dau rezultatul final.

-În cazul în care suma obținută dintre diagonalele pătrățelurilor este formată din două cifre se păstrează cifra unităților, iar cifra zecilor se adună la numărul ce indică ordinul superior al rezultatului.

- Exemplu: $123 \times 37 = 4551$

	1	2	3	
0	0	0	0	3
	3	6	9	
3	0	1	2	7
	7	4	1	
+	1	4	15	1
+				

Rezultatul final: 4 5 5 1

- ✓ **Înmulțirea a două numere formate din două cifre, a căror cifră a zecilor este aceeași i, iar suma cifrelor unităților este 10**

➤ Exemplul 1 : $32 * 38 = 1216$

$$\begin{array}{r}
 32 \times 38 = 1216 \\
 \begin{array}{l}
 \text{Arcuri albastre: } 2 \times 8 = 16 \text{ (de la 2 la 6)} \\
 \text{Arcuri albastre: } 3 \times 4 = 12 \text{ (de la 3 la 12)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Metoda I

$$\begin{array}{r}
 24 \quad 16 \\
 \begin{array}{r}
 9 \quad 6 \\
 9 \quad 30 \quad 16 \\
 \hline
 12 \quad 1 \quad 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Metoda II

$$XY * XZ = [X*(X+1)] (Y*Z)$$

➤ Exemplul 2: $43*47 = 2021$

$$\begin{array}{r}
 43 \times 47 = 2021 \\
 \begin{array}{l}
 \text{Arcuri albastre: } 3 \times 7 = 21 \text{ (de la 3 la 21)} \\
 \text{Arcuri albastre: } 4 \times 5 = 20 \text{ (de la 4 la 20)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Metoda I

$$\begin{array}{r}
 28 \quad 21 \\
 \begin{array}{r}
 16 \quad 12 \\
 16 \quad 40 \quad 21 \\
 \hline
 20 \quad 2 \quad 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Metoda II

Metoda 1: se i-a produsul dintre cifra zecilor și consecutivul ei, obținându-se primele două cifre ale rezultatului, apoi produsul dintre cifrele unităților, rezultând ultimile două cifre ale rezultatului.

▪ Aplicații :

- $43 * 47 =$
- $24 * 26 =$

- $62 * 68 =$
- $17 * 13 =$
- $59 * 51 =$
- $77 * 73 =$

✓ **IV. Înmulțirea a două numere formate din trei cifre a căror cifră a sutelor este aceeași iar suma numerelor formate din ultimele două cifre este 100:**

$$XYR * XZP = [X*(X+1)]*10 (YR*ZP)$$

➤ Exemplul 1: $292*208 = 60\ 736$

Se procedează astfel:

- $2*3 = 6$ (consecutivul lui 2 este 3, 6 se înmulțește cu 10 și este prima grupă a rezultatului)
- $92*8 = 736$ (este ultima grupă a rezultatului)

➤ Exemplul 2 : $848*852 = 722\ 496$

Se procedează astfel:

$$\begin{aligned} 848 * 852 &= [(8 * 9)*10] [48 * 52] \\ &= [720] [2496] \text{ (cifra miilor este adunată la prima grupă)} \\ &= 722\ 496 \end{aligned}$$

▪ Aplicații:

- $834 * 866 =$
- $257 * 243 =$
- $576 * 524 =$
- $321 * 379 =$
- $274 * 226 =$

✓ **V. Înmulțirea a două numere formate din trei cifre, mai mici decât 200:**

➤ Exemplu: $103*104 = 10712$

Se i-a primul număr și se adună cu numărul format din ultimele două cifre al celui din al doilea număr, rezultând prima grupă, apoi se înmulțesc numerele formate din ultimele două cifre ale ambelor numere, obținându-se ultima grupă

✓ **VI. Înmulțirea cu 9, 99, 999, ...**

➤ Exemplu: $999 \cdot 343 = 342657$

$$999 \cdot XYZ = (XYZ-1) (9-X) (9-Y) [9-(Z-1)]$$

Din numărul care se înmulțește cu 999 se scade 1, obținându-se prima grupă din rezultat, apoi din 9 se scade fiecare cifră a numărului din prima grupă (excepție face ultima cifră, care este cu 1 mai mare).

✓ **VII. Înmulțirea cu 11 a unui număr format din două cifre:**

➤ Exemplu: $21 \cdot 11 = 231$

$$XY \cdot 11 = X (X+Y) Y$$

Pentru un număr format din două cifre înmulțirea cu 11 se face în felul următor: se păstrează cifra zecilor (care devine cifra sutelor, în cazul nostru 2), ultima cifră a numărului se păstrează la grupa unităților (în cazul nostru 1), iar cifra zecilor se obține din suma cifrelor numărului.

Bibliografie:

- 1) Vedic Mathematics –autor- Sri Bharati Krisna Tirthaji, Vasudeva Sharana Agrawala
- 2) Vedic Mathematics for Schools –autor- James T. Glover
- 3) Speed Mathematics Using the Vedic System –autor- Vali Nasser
- 4) Vedic Mathematics Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas (broșura)
-autor- V. S. Agarwala