Asupra calculului integral pentru funcţiile pare şi impare

ROXANA MIHAELA STANCIU [1]

Propoziţia 1.

Fie $c \in (0,\infty)$ şi $f:(-c,c) \to R$ o funcţie continuă. Atunci :

(1) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, \quad \forall a,b \in (-c,c)$; în particular, $\int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$, $\forall a \in (-c,c)$;

(2) f este pară dacă şi numai dacă $\int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad \forall a \in (0,c)$ (respectiv $a \in (-c,c)$);

(3) f este impară dacă şi numai dacă $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, $\forall a \in (0,c)$ (respectiv $a \in (-c,c)$);

(4) dacă în plus f este pară atunci $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad \forall a \in (-c,c)$;

(5) (i) dacă f este pară atunci $\int_{-a}^a xf(x)dx = 0$, $\forall a \in (-c,c)$;

(ii) dacă f este impară atunci $\int_{-a}^a xf(x)dx = 2\int_0^a xf(x)dx$, $\forall a \in (-c,c)$;

(iii) dacă f este arbitrară atunci $\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$, $\forall a \in (-c,c)$ şi $\int_{-a}^a xf(x^2)dx = 0$, $\forall a \in (-c,c)$.

Demonstraţie .

(1) Fie $a,b \in (-c,c)$, $a < b$ fixaţi; făcând substituţia $x = -t$, obţinem c.c.t.d.

(2) Dacă f este pară, $f(x) = f(-x)$, $\forall a \in (-c,c)$ şi deci :

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \ \forall a \in (0,c)$$

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Balaş Sotter", Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

Reciproc să presupunem că $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx, \forall a \in (0,c)$

Atunci :

$$\int_0^a (f(x) - f(-x))dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_{-a}^0 f(x)dx = 0, \forall a \in (0,c)$$

Rezultă că $f(x) - f(-x) = 0$, $\forall x \in (0,a)$. Dacă $x \in (-c,0)$ atunci $-x \in (0,c)$ şi prin urmare $f(-x) - f(-(-x)) = 0$ deci $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in (-c,c)$ adică f este pară.

(3) Dacă f este impară $f(x) + f(-x) = 0$, $\forall a \in (-c,c)$ şi deci $\forall a \in (0,c)$ avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))dx = 0,$$

Reciproc fie $a,b \in (-c,c), a < b$ fixaţi , conform ipotezei avem

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-b}^b f(x)dx = 0, \text{ dar } \int_a^b f(x)dx = \int_b^{-b} f(x)dx + \int_{-b}^{-a} f(x)dx + \int_{-a}^a f(x)dx$$

dar din (1) $\int_{-b}^{-a} f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$, rezultă că $\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$ deci $\int_a^b (f(-x) - f(x))dx = 0$, de unde $f(-x) + f(x) = 0$ $\forall x \in (-c,c)$ prin urmare f este impară.

(4) Dacă f este pară avem $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in (-c,c)$ şi deci

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \overset{(1)}{=} 2\int_0^a f(x)dx,$$

(5) (i) Dacă f este pară atunci funcţia $x \to xf(x)$ este impară şi deci $\int_{-a}^a xf(x)dx \overset{(3)}{=} 0$, $\forall a \in (-c,c)$

(ii) analog ca în (i)

(iii) rezultă imediat din (i) şi (ii) ţinând seama de faptul că funcţia $x \to f(x^2)$ (respectiv $x \to xf(x^2)$) este pară (respectiv impară).

Propoziţia 2.

O funcţie $f : R \to R$ continuă este impară dacă şi numai dacă $\forall x \in R$, $\int_{-x}^x f(t)dt = cons\tan t.$

Demonstraţie.

f fiind continuă admite primitive .Fie F o primitivă a sa, rezultă că $\int_{-x}^{x} f(t)dt = C$ dacă şi numai dacă $F(x) - F(-x) = C$, prin derivare dacă şi numai dacă $f(x) + f(-x) = 0$ adică f este impară.

Reciproc dacă f este impară $f(-x) = -f(x)$ implică $\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(-t)dt \overset{(1)}{=} \int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{-x}^{0} f(t)dt = 0$.

Asupra calculului integral pentru funcţiile pare şi impare generalizate.

Definiţie.

Funcţia $f:[a-r, a+r] \to R$ se numeşte a-pară dacă $f(a+x) = f(a-x), \forall x \in R$ cu $|x| \le r$, respectiv a-impară dacă $f(a+x) = -f(a-x), \forall x \in R$ cu $|x| \le r$.

Propoziţia II.1.

Fie $f:[x_0 - r, x_0 + r] \to R$ continuă cu proprietatea că $af(x_0 + x) + bf(x_0 - x) = c$, $\forall x$ cu $|x| \le r, a, b \in R^*$, $c \in R$, atunci:

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a+b}$, $a + b \ne 0$;

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{cr}{a} + \frac{a-b}{a} \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$

Demonstraţie.

Considerăm $\alpha, \beta : [-r, r] \to [x_0 - r, x_0 + r]$, $\alpha(t) = x_0 + t$, $\beta(t) = x_0 - t$ şi cum $f:[a-r, a+r] \to R$ este continuă putem aplica scimbarea de variabilă

(i) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(r)} f(x)dx = \int_{-r}^{r} f(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_{-r}^{r} f(x_0 + t)dt = \int_{-r}^{r} (\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t))dt =$

$= \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a} \int_{-r}^{r} f(x_0 - t)dt = \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{-r}^{r} f(\beta(t))\beta'(t)dt = \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)dx =$

$= \frac{2cr}{a} + \frac{b}{a} \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx$ .Rezultă că $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx + \frac{b}{a} \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a}$ şi deci $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \frac{2cr}{a+b}$.

(ii) $\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)dx = \int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)dx$, dar $\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)dx = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)dx = \int_{-r}^{0} f(x_0 + t)dt =$

$$=\int_{-r}^{0}(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}f(x_0-t))dt=\frac{cr}{a}-\frac{b}{a}\int_{-r}^{0}f(x_0-t)dt=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{-r}^{0}f(\beta(t))\beta'(t)dt=$$

$$=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(0)}f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0}f(x)dx,$$ rezultă că

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r}f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r}f(x)dx.$$

Propoziţia II.2.

(i) Dacă $f:[a-r,a+r]\to R$ este continuă atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r}f(x)dx=\begin{cases}2\cdot\int_{a}^{a+r}f(x)dx, \text{dacă } f \text{ este a - pară}\\ 0, \text{dacă } f \text{ este a - impară}\end{cases}$$

(ii) Produsul (câtul) a două funcţii de a-paritãţi diferite este o funcţie a-imparã şi produsul (câtul) a două funcţii de aceeaşi a-paritate este o funcţie a-parã.

Demonstraţie.

(i) Dacã f este a-parã, atunci $f(a+x)-f(a-x)=0$; deci în II.1. punând a=1, b=-1, c=0, x_0=a şi conform II.1.(ii) rezultã cã :

$$\int_{a-r}^{a+r}f(x)dx=\frac{1-(-1)}{1}\cdot\int_{a}^{a+r}f(x)dx=2\int_{a}^{a+r}f(x)dx.$$

Dacã f este a-imparã, atunci $f(a+x)+f(a-x)=0$ şi punând în II.1.(ii) a=b=1, c=0, rezultã cã $\int_{a-r}^{a+r}f(x)dx=0$

(ii) Fie f,g a-pare adică $f(a+x)=f(a-x)$, $g(a+x)=g(a-x)$ rezultă că $(f\cdot g)(a+x)=f(a+x)\cdot g(a+x)=f(a-x)\cdot g(a-x)$ şi analog $(\frac{f}{g})(a+x)=(\frac{f}{g})(a-x)$ rezultă că $f\cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ sunt a-pare, analog arătându-se şi restul.

Propoziţia II.3.

Pentru orice funcţie $f:[a-r,a+r]\to R$, există o funcţie f_1 a-pară şi o funcţie f_2 a-impară astfel încât $f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \forall x\in[a-r,a+r]$.

Demonstraţie.

Fie $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(2a-x)}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(2a-x)}{2}$ rezultă că $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Cum $f_1(a+x)=f_1(a-x)$ rezultă că f_1 este a-pară iar, cum

$f_2(a+x)+f_2(a-x)=0$ rezultă că f_2 este a-impară.

Propoziţia II.4.

Dacă $f,g:[a-r,a+r]\to R$ sunt integrabile şi f este a-pară atunci:

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx=\int_{a}^{a+r} f(x)\cdot(g(x)+g(2a-x))dx.$$

Demonstraţie.

Din II.3 rezultă că $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$, unde g_1 este a-pară şi g_2 este a-impară deci

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx=\int_{a-r}^{a+r} f(x)(g_1(x)+g_2(x))dx=\int_{a-r}^{a+r} f(x)g_1(x)dx+\int_{a-r}^{a+r} f(x)g_2(x)dx\overset{(II.2)}{=}$$

$$\overset{(II.2)}{=}2\int_{a}^{a+r} f(x)g_1(x)dx\overset{(II.3)}{=}2\int_{a}^{a+r} f(x)(g(x)+g(2a-x))dx.$$

Propoziţia II.5.

Fie $f,g:[a-rf,a+r]\to R$ integrabile şi f este a-impară.Atunci :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)dx=\int_{a}^{a+r} f(x)\cdot(g(x)-g(2a-x))dx.$$

Demonstraţie.

Se demonstrezã analog cu propoziţia II.4 utilizând II.2. şi II.3.

Bibliografie

[1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de Calcul Integral*, Ed. Univ. Bucureşti, 1995
[2] D.M. Bătineţu – Giurgiu,ş.a., *Analiză Matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004
[3] N. Stanciu - „Generalizarea unor probleme de calcul integral'' - Gazeta Matematică, seria A, nr. 4 / 2007

CÂTEVA REZULTATE DESPRE NUMERELE LUI FERMAT

CORNELIU MĂNESCU-AVRAM

Lucrare prezentată la Sesiunea de comunicări metodice şi ştiinţifice a profesorilor de matematică din Prahova, ediţia a XXXVI-a, Sinaia, 22 mai 2010

Because the F_m grow rapidly in size, a method which factors F_m may be inadequate for F_{m+1} ... Thus, the difficulty of completely factoring F_m by the fastest known method is not a monotonic function of m.

Richard P. Brent

Sumar. Lucrarea prezintă unele metode de investigare a numerelor lui *Fermat* $F_m = 2^{2^m} + 1$şi arată cum pot fi factorizate direct, folosind fracţiile continue sau polinoamele cu coeficienţi întregi . Numerele F_5 şi F_6 sunt studiate în detaliu.

NUMERELE F_5 ŞI F_6

Numerele lui *Fermat* F_m sunt prime pentru $0 \leq m \leq 4$. Celelalte numere *Fermat* sunt compuse sau nu se cunoaşte natura lor. Vom prezenta în continuare câte patru demonstraţii ale faptului că numerele F_5 şi F_6 sunt compuse. Fiecare demonstraţie pune în lumină alte aspecte ale problemei.

Numărul F_5 :

I. Sunt adevărate egalităţile $641 = 2^7 \cdot 5 + 1 = 2^4 + 5^4$, deci $2^{32} + 1 = 2^{28} \cdot 2^4 + 1 =$
$= (2^7)^4(2^7 \cdot 5 + 1 - 5^4) + 1 = (2^7 \cdot 5 + 1)[2^{28} - (2^7 \cdot 5 - 1)(2^{14} \cdot 5^2 + 1)]$, aşadar F_5 se divide cu 641.

II. Numărul $F_5 = 2^{32} + 1 = (2^{16})^2 + 1^2 = 62264^2 + 20449^2$ admite două reprezentări diferite ca sumă de două pătrate. Se ştie însă [14] că un număr congruent cu 1 modulo 4 este prim dacă şi numai dacă admite o reprezentare unică sub forma unei sume de două pătrate de numere naturale, abstracţie făcând de ordinea termenilor. Rezultă că F_5 este un număr compus. Folosind aceste reprezentări, se poate determina un factor, egal cu $(62264 + 2^{2^4} \cdot 20449, F_5) = 641$.

III. Dacă $x = 2^4 + 2^3 + 1$, $y = 2^2$, $z = 2^{11} + 2^9 - 2^2$, $w = 2^8 + 2^7 + 2^4 + 2^3 + 1$, atunci $xw - yz = 1$, $xz + yw = 2^{16}$, de unde $(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = (xz + yw)^2 + (xw - yz)^2 = 2^{32} + 1$, deci F_5 este un număr compus.

IV. Fie $f = X^{32} + 1$, $g = X^9 + X^7 + 1$. Din teorema împărţirii cu rest se obţine $f = gq + r$, cu $q \in \mathbb{Z}[X]$ şi $r = -9X^8 - 9X^7 + 5X^6 - 6X^4 + 2X^3 + 7X^2 - 5X - 7$. Atunci $r(2) = -5g(2)$, deci

$2^{32} + 1 = f(2) = g(2)q(2) + r(2) = g(2)q(2) - 5g(2)$ se divide cu $g(2) = 641$.

Numărul F_6 :

I. Este adevărată descompunerea $2^{64} + 1 = (2^8a + 1)(2^8b + 1)$, unde $a = 1071$, $b = 2^{56}c - 2^{48}a^7 + 2^{40}a^6 - 2^{32}a^5 + 2^{24}a^4 - 2^{16}a^3 + 2^8a^2 - a$, $c = \frac{a^8+1}{2^8a+1}$. Vom arăta că numărul c este natural. Într-adevăr, restul împărţirii polinomului $f = [(X^3 - 1)(X^2 + 1)]^8 + 1$ la polinomul $g = X^4(X^3 - 1)(X^2 + 1) + 1$ este $r = 188X^8 - 153X^7 + 308X^6 - 437X^5 + 350X^4 - 466X^3 + 374X^2 - 298X + 239$, iar $f(4) = a^8 + 1$, $g(4) = 2^8a + 1 = p$, $r(4) = 39p$, aşadar $f(4)$ se divide cu p, deci numărul c este natural. Rezultă că numărul F_6 este compus.

II. Numărul $F_6 = 2^{64} + 1 = (2^{32})^2 + 1^2 = 4046803256^2 + 1438793759^2$ admite două reprezentări ca sumă de două pătrate de numere naturale, deci nu este un număr prim. Un factor al lui F_6 este $p = 2^8 \cdot 1071 + 1 = (4046803256 + 2^{2^5} \cdot 1438793759, F_6)$.

III. Dacă $x = 2^9 + 2^2$, $y = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1$, $u = 2^8 - 2^3 + 1$, $v = 2^{11} + 2^7 + 2^2$, atunci $-xu + yv = 2^{16}$, $xv + yu = 1071^2$, $x^2 + y^2 = 2^8 \cdot 1071 + 1 = p$ şi $2^{32} + 1071^4 = (-xu + yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$, de unde $1071^4 \equiv -2^{32} \pmod p$. Dar $2^8 \cdot 1071 \equiv -1 \pmod p$, deci $2^{32} \cdot 1071^4 \equiv 1 \pmod p$, de unde $2^{32} \cdot (-2^{32}) \equiv -2^{64} \equiv 1 \pmod p$.

IV. Fie $f = X^{32} + 1$, $g = X^9 + X^7 - X^6 - X^4 + 1$, atunci $f = gq + r$, unde $q \in \mathbb{Z}[X]$ şi $r = -7X^8 + 12X^7 - 3X^6 + X^5 - 4X^4 + 5X^3 - 3X^2 - 6X + 7$. Rezultă $r(4) = -g(4)$, deci $2^{64} + 1 = f(4) = g(4)q(4) + r(4) = g(4)q(4) - g(4)$ se divide cu $g(4) = 274177$.

Vom arăta în continuare că aceste procedee pot fi generalizate, dacă se cunoaşte un factor prim al numărului F_m, m oarecare.

METODA POLINOMIALĂ

Aceată metodă este sugerată de a patra demonstraţie, dar procedeul a fost folosit şi la prima demonstraţie a faptului că F_6 este compus.

Fie $p = 2^nk + 1$ un număr prim impar oarecare, $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar. Este evident că orice număr prim admite o astfel de reprezentare. Se ştie [14] că dacă p este divizor al lui F_m, atunci

$n \geq m + 2$ (teorema lui *Lucas*). Deducem că p admite reprezentarea $p = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_t} + 1$, unde $n_1, n_2, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_2 > \ldots > n_t \geq m + 2$.

Teorema 1. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^{2^m} + 1$, $g = X^{n_1} + X^{n_2} + \ldots + X^{n_t} + 1$ şi $r \in \mathbb{Z}[X]$ restul împărţirii lui f la g. Atunci F_m se divide cu p dacă şi numai dacă $r(2)$ se divide cu p.

DEMONSTRAŢIE : Din teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{Z}[X]$ obţinem $f = gq + r$, unde $q \in \mathbb{Z}[X]$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim al lui g este egal cu 1. Rezultă $f(2) = g(2)q(2) + r(2)$. Dar $f(2) = F_m$, $g(2) = p$, deci $F_m \equiv r(2) \pmod p$.

EXEMPLE. 1. Fie $f = X^{128} + 1$, $g = X^{55} + X^{54} + X^{52} + X^{50} - X^{45} + X^{43} + X^{41} + X^{40} - X^{34} + X^{30} - X^{27} + X^{25} + X^{24} - X^{20} + X^{16} + X^{14} + X^{10} + X^9 + 1$, $p = 2^9 \cdot 116503103764643 + 1$. Pe această cale nu putem obţine un rezultat concludent, deoarece numerele care intervin sunt prea mari.

2. Fie $f = X^{32} + 1$, $g = X^4 + 3X + 1$, $p = 2^7 \cdot 5 + 1$. Atunci $g(5) = p$ şi $\bar{r} = -300X^3 - 12X^2 + 217X + 178$, unde $\bar{r}$ se obţine prin reducerea modulo p a coeficienţilor lui r, deci $\bar{r}(5) \equiv 0 \pmod p$. Dar $5^{32} - 2^{32}$ se divide cu $5^4 + 2^4 = p$, deci $F_5 \equiv f(5) \equiv 0 \pmod p$.

3. Fie $f = X^8 + 1$, $g = X^2 - 47X + 4$, $p = 2^8 \cdot 1071 + 1$. Atunci $g(1071) = 4p$, $\bar{r} = -71294X + 134668$, deci $f(1071) \equiv \bar{r}(1071) \equiv 0 \pmod p$. Am văzut însă că de aici se obţine $F_6 \equiv 0 \pmod p$.

4. Fie $f = X^{32} + 1$, $g = X^4 + 11X^3 - 5X^2 + 9X + 1$, $p = 2^{16} \cdot 37 + 1$. Atunci $g(37) = p$, $\bar{r} = -164013X^3 - 300182X^2 - 1041991X + 1181351$, deci $f(37) \equiv \bar{r}(37) \equiv 0 \pmod p$. Vom vedea în paragraful următor că de aici rezultă $F_9 \equiv 0 \pmod p$

5. Fie $f = 4X^{170} + 1$, $g = X^7 + X^6 + 2X^5 + 1$, $p = 2^{16} \cdot 37 + 1$. Atunci $f(8) = F_9$, $g(8) = p$. Metoda nu este eficientă nici în acest caz.

DESCOMPUNEREA DIRECTĂ

Prima demonstraţie a faptului că numărul F_6 este compus poate fi extinsă la un cadru mai general.

Teorema 2. Fie $p = 2^n a + 1$ un număr prim, $n, a \in \mathbb{N}^*$, a impar şi $n = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$. Atunci F_m se divide cu p dacă şi numai dacă $F_{m-s}(a) = a^{2^{m-s}} + 1$ se divide cu p.

DEMONSTRAŢIE : Presupunem că F_m se divide cu p. Din $2^n a = 2^{2^s} a \equiv -1 \pmod p$ rezultă, prin ridicare la puterea 2^{m-s}

$$(F_m - 1)\, a^{2^{m-s}} \equiv 1 \pmod p,$$

deci $F_{m-s}(a) = a^{2^{m-s}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Dacă $F_{m-s}(a)$ se divide cu p, atunci $a^{2^{m-s}} \equiv -1 \pmod{p}$. Din $2^{2^s}a \equiv -1 \pmod{p}$ se obţine

$$1 \equiv \left(2^{2^s}a\right)^{2^{m-s}} \equiv 2^{2^m} \cdot (-1) \equiv -F_m + 1 \pmod{p},$$

deci F_m se divide cu p.

EXEMPLUL 6. Dacă $m = 9$, $n = 16$, $a = 37$, atunci $s = 4$ şi F_9 se divide cu $p = 2^{16} \cdot 37 + 1$ dacă şi numai dacă $F_5(37) = 37^{32} + 1$ se divide cu p.

Acest fapt explică de ce unii divizori primi ai numerelor lui *Fermat* sunt şi divizori ai unor numere *Fermat* generalizate. Avem, de exemplu, următoarea

Teorema 3. Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ şi $a + b$ este impar, atunci $F_5(2^a5^b) = (2^a5^b)^{32} + 1$ se divide cu 641.

DEMONSTRAŢIE : Am văzut că $2^{32} \equiv 5^{32} \equiv -1 \pmod{641}$, deci $F_5(2^a5^b) \equiv (-1)^a(-1)^b + 1 \equiv$

$\equiv 0 \pmod{641}$.

METODA FRACŢIILOR CONTINUE

O demonstraţie simplă a faptului că numărul F_6 este compus este dată de F. Dyson [12], folosind argumente similare cu cele din prima demonstraţie pentru F_5. Dacă

$$p = 1 + 2^8 f \text{ şi } f = (2^6 - 1)(2^4 + 1), \tag{1}$$

atunci

$$2^{24} - 1 = fg, \text{ unde } g = (2^6 + 1)(2^8 - 2^4 + 1). \tag{2}$$

Căutăm o factorizare de forma

$$2^{64} + 1 = (x^2 + y^2)(z^2 + w^2), \quad 2^{32} - i = (x + iy)(z - iw), \tag{3}$$

condiţii care sunt îndeplinite dacă

$$xz + yw = 2^{32}, \quad xw - yz = 1, \quad x^2 + y^2 = p. \tag{4}$$

Pentru $z = gx$, $w = gy$, obţinem în (3) $(x + iy)g(x - iy) = gp$ şi $gp = 2^{32} + a$ este apropiat de 2^{32}, cu diferenţa $a = g - 2^8 = 15409$ calculată din (1) şi (2). Rezultă că rapoartele $\frac{z}{x}$ şi $\frac{w}{y}$ sunt apropiate de g, deci putem încerca

$$z = gx - s, \quad w = gy - t, \tag{5}$$

cu s, t numere întregi relativ mici. Atunci (3) are loc numai dacă

$$x^2 + y^2 = p, \ xs + yt = a, \ ys - xt = 1. \tag{6}$$

Din (6) rezultă

$$a^2 + 1 = pu, \ u = s^2 + t^2. \tag{7}$$

Cum întregii p şi a sunt cunoscuţi şi relativ mici, putem găsi prin încercări soluţia pentru (6) şi (7), anume $x = 516$, $y = 89$, $s = 29$, $t = 5$, $u = 866$. Soluţia pentru (6) şi (7), cu z şi w daţi de (5) furnizează o soluţie pentru (3). Factorizarea (2) pentru $2^{24} - 1$ ne conduce direct la factorizarea (3) a numărului $F_6 = 2^{64} + 1$.

Sistemul de ecuaţii (6) şi (7) poate fi rezolvat folosind o teoremă a lui *Serret* [12] despre fracţiile continue. Fie p şi a două numere întregi prime între ele, $0 < a < p$. Fracţia ordinară $\frac{p}{a}$ poate fi reprezentată ca o fracţie continuă cu câturile parţiale (a_j, $j = 1, \dots, n$) în exact două moduri, cu n par sau impar. Într-o reprezentare, ultimele două câturi sunt [c, 1], cu c număr natural. În cealaltă reprezentare, ultimele două câturi sunt înlocuite de un singur cât, anume [$c + 1$], celelalte câturi rămân neschimbate. Fracţia continuă cu n câturi corespunzătoare fracţiei ordinare $\frac{p}{a}$ se numeşte *palindromică* dacă $a_j = a_{n+1-j}$, $j = 1, \dots, n$.

Teorema 4 (**Serret**). Fracţia continuă cu n câturi parţiale corespunzătoare fracţiei ordinare $\frac{p}{a}$ este palindromică dacă şi numai dacă există un întreg u astfel încât $pu = a^2 + (-1)^n$.

Pentru demonstraţie se poate consulta [12].

Fie A o mulţime ordonată de numere naturale nenule şi $S(A)$ numărătorul fracţiei continue ale cărei câturi parţiale sunt elementele lui A. De exemplu, $S(\emptyset) = 1$, $S(a) = a$, $S(a, b) = 1 + ab$, $S(a, b, c) = a + c + abc$, etc. Dacă p este un număr prim care divide numărul $a^2 + 1$, unde $0 < a < p$ şi $a \equiv 2^{2^{m-1}} \pmod p$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^2 + 1 \equiv F_m \equiv 0 \pmod p$, deci p este divizor al numărului *Fermat* F_m. Conform teoremei lui *Serret*, fracţia continuă corespunzătoare fracţiei ordinare $\frac{p}{a}$ este palindromică

$$\frac{p}{a} = [a_1, \dots, a_k, a_k, \dots, a_1]$$

şi soluţia sistemului (6) este [12]

$p = S(a_1, \dots, a_k, a_k, \dots, a_1)$, $a = S(a_2, \dots, a_k, a_k, \dots, a_1)$,

$x = S(a_1, \dots, a_k)$, $y = S(a_1, \dots, a_{k-1})$,

$s = S(a_2, \dots, a_k)$, $t = S(a_2, \dots, a_{k-1})$. (8)

EXEMPLE. 7. Dacă $m = 5$, $p = 641$, $a = 154$, atunci $154 \equiv 2^{16} \pmod{641}$ şi $154^2 + 1 = 37 \cdot 641$, deci $F_5 = 2^{32} + 1$ se divide cu 641. Avem

$$\frac{641}{154} = 4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4}}} = [4, 6, 6, 4],$$ deci $p = S(4, 6, 6, 4) = 641$, $a = S(6, 6, 4) = 154$,

$x = S(4, 6) = 25$, $y = S(4) = 4$, $s = S(6) = 6$, $t = S(\emptyset) = 1$.

8. Dacă $m = 6$, $p = 274177$, $a = 15409$, atunci $15409 \equiv 2^{32} \pmod{274177}$ şi $15409^2 + 1 =$ $= 866 \cdot 274177$, deci $F_6 = 2^{64} + 1$ se divide cu 274177. Avem

$$\frac{274177}{15409} = [17,1,3,1,5,5,1,3,1,17],$$ deci $p = S(17,1,3,1,5,5,1,3,1,17) = 274177$, $a =$ $= S(1,3,1,5,5,1,3,1,17) = 15409$, $x = S(17,1,3,1,5) = 516$, $y = S(17,1,3,1) = 89$, $s = S(1,3,1,5) = 29$, $t = S(1,3,1) = 5$.

F. Dyson [12] observă că pentru $m = 5$ toate câturile parţiale sunt numere pare, pe când pentru $m = 6$ toate câturile parţiale sunt impare şi pune întrebarea dacă există o regulă generală sau acest fapt este întâmplător. După cum se constată din calculele prezentate în Anexă, al doilea răspuns este cel corect.

CUM GĂSIM UN FACTOR PRIM?

Orice număr prim impar p poate fi reprezentat în mod unic sub forma $p = 2^n k + 1$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar. Dacă p este un divizor al lui F_m, atunci $n \geq m + 2$ (*Lucas*, [14]). Să arătăm cum poate fi găsit divizorul 641 al lui F_5. Un divizor oarecare al lui F_5 este de forma $128k + 1$. Avem $128 \cdot 1 + 1$ se divide cu 3, $128 \cdot 2 + 1 = 257 = F_3$, se ştie însă [14] că numerele lui *Fermat* sunt prime între ele, deci F_3 nu este divizor al lui F_5, $128 \cdot 3 + 1$ se divide cu 5, $128 \cdot 4 + 1$ se divide cu 3. Rezultă că primul candidat este $128 \cdot 5 + 1 = 641$ şi am văzut că acest număr prim este într-adevăr divizor al lui F_5.

Investigarea numerelor *Fermat* mai mari se face cu ajutorul calculatorului (a se vedea bibliografia). S-au obţinut rezultate practice spectaculoase, dar ele nu au fost încă incluse într-o teorie. Se pot da însă condiţii necesare pe care trebuie să le satisfacă divizorii numerelor lui *Fermat*.

Teorema 5. Dacă $m = 4t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$ şi $p = 2^{m+2}k + 1$ este un divizor prim al lui F_m, atunci $k \geq 5$.

DEMONSTRAŢIE : Avem

$2^{4t+3} + 1 = (15 + 1)^t \cdot (9 - 1) + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$,

$2^{4t+3} \cdot 2 + 1 = 2^{4t+4} + 1$ este prim numai dacă este număr *Fermat*, dar în acest caz el nu este divizor al lui F_m, deoarece numerele *Fermat* sunt prime între ele,

$2^{4t+3} \cdot 3 + 1 = (15 + 1)^t \cdot (5 + 3) \cdot 3 + 1 \equiv 3 \cdot 3 + 1 \equiv 0 \pmod 5$,

$2^{4t+3} \cdot 4 + 1 = 2^{4t+5} + 1 = (15 + 1)^t \cdot (33 - 1) + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Evident, de aici se obţine $k \geq 5$.

Există numeroase exemple de divizori $p = 2^n \cdot 5 + 1$ ai numerelor lui *Fermat* F_m, cu $n - m = 2$, dar şi exemple în care $n - m > 2$. Teorema precedentă poate fi formulată mai general astfel :

Dacă $p = 2^n k + 1$ este un divizor prim al lui F_m şi $n \equiv 3 \pmod 4$, atunci $k \geq 5$.

Note. Descompunerea în factori a numerelor lui *Fermat* începe cu *Leonhard Euler* (F_5, 1732) şi continuă până astăzi [14], [15].

O alternativă de calcul a lui a din (7) este $a \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$. Pentru conversia fracţiilor ordinare în fracţii continue am folosit calculatorul lui Dario Alpern [16].

ANEXĂ

Tabelul conţine cel mai mic divizor prim p al numărului F_m, $5 \leq m \leq 23$, $a \equiv 2^{2^{m-1}} \pmod p$ şi soluţia x a sistemului de ecuaţii $x^2 + y^2 = p$, $xs + yt = a$, $ys - xt = 1$. Valorile p, a, y, s, t se obţin din egalităţile (8).

m	p	x
5	$2^7 \cdot 5 + 1$	$S(4,6)$

6	$2^8 \cdot 1071 + 1$	$S(17,1,3,1,5)$
7	$2^9 \cdot 116503103764643 + 1$	$S(309,3,1,33,1,1,3,4,1,2,2,1,3,3,1,1,6,4,1,1,1,1)$
8	$2^{11} \cdot 604944512477 + 1$	$S(2,3,4,6,13,2,27,9,19,1)$
9	$2^{16} \cdot 37 + 1$	$S(2,6,1,1,4,12)$
10	$2^{12} \cdot 11131 + 1$	$S(11,2,4,1,2,1,3,1,2)$
11	$2^{13} \cdot 39 + 1$	$S(5,1,1,3,4,3)$
12	$2^{14} \cdot 7 + 1$	$S(2,21,5,1)$
13	$2^{16} \cdot 41365885 + 1$	$S(1,3,3,3,4,1,3,7,1,2,1,1,14,1,1)$
14	$2^{16} \cdot 178 \ldots 717 + 1$ [15]	$S(?)$
15	$2^{21} \cdot 579 + 1$	$S(2,10,1,1,1,6,1,1,1,23)$
16	$2^{19} \cdot 1575 + 1$	$S(2,1,1,10,2,1,10,11,1)$
17	$2^{19} \cdot 59251857 + 1$	$S(2,2,4,1,8,1,70,1,3,4,17)$
18	$2^{20} \cdot 13 + 1$	$S(8,2,1,147)$
19	$2^{21} \cdot 33629 + 1$	$S(1,4,1,1,1,2,1,2,5,1,1,4,2,1,3,2)$
20	e compus, dar nu se cunoaşte niciun factor prim [15]	
21	$2^{23} \cdot 534689 + 1$	$S(1,11,11,11,1,1,2,25,1,2,3)$
22	$2^{24} \cdot 385 \ldots 211 + 1$ [15]	$S(?)$
23	$2^{25} \cdot 5 + 1$	$S(2,1,1,3,98,1,1,3)$

Bibliografie

[1] Kraïtchik, M., *Théorie des nombres*, *vol. 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] Hardy, G. H., Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1945, 1954, 1960, 1979, MR 16,673c, MR 81i:10002.

[3] Robinson, R. M., *Factors of Fermat numbers*, Math. Tables Aids Comput. **11** (1957*a*), 21-23, MR 19,14d.

[4] Sierpiński, W., *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

[5] Chandrasekharan, K., *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968.

[6] Rouse Ball, W. W., Coxeter, H. S. M., *Mathematical recreations and essays*, Twelfth Edition, University of Toronto Press, 1974.

[7] Brent, R. P., Pollard, J. M., *Factorization of the eighth Fermat number*, Math. Comp. **36** (1988), 627-630, MR 83h:10014.

[8] Sierpiński, W., *Elementary theory of numbers, 2nd Engl. ed. revised and enlarged by A. Schinzel,* Państwowe Wydaw. Naukowe, Warszawa, 1988, MR 89f:11003.

[9] Brent, R. P., *Factorization of the eleventh Fermat number*, Abstracts. Amer. Math. Soc. **10** (1989), 176-177.

[10] Williams, H. C., *How was F_6 factored?*, Math. Comp. **61** (1993), 463-474, MR 93k:01046.

[11] Brent, R. P., *Factorization of the tenth Fermat number,* Math. Comp. **68** (1999), 429-451, MR 99e:11154.

[12] Dyson, F., *The sixth Fermat number and palindromic continued fractions,* Enseign. Math. (2) **46** (2000), 385-389.

[13] Brent, R. P., Crandall, R. E., Dilcher, K., Van Halewyn, C., *Three new factors of Fermat numbers,* Math. Comp. **69** (2000), 1297-1304, MR 2000j:11194.

[14] Křížek, M., Luca, F., Somer, L., *17 Lectures on Fermat Numbers*, Springer-Verlag, 2001.

[15] Keller, Wilfrid, *Prime Factors of Fermat Numbers*, ProthSearch.net.

[16] Alpern, D., *Continued Fractions Calculator*, www.alpertron.com.ar.

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

Principiul Inducţiei Matematice

Cojocaru Camelia
Şcoala Nr. 1 Chiraftei
Jud. Galaţi

Principiul inducţiei matematice constituie un mijloc important de demonstraţie în matematica a propoziţiilor (afirmaţiilor) ce depind de argument natural. Metoda inducţiei matematice consta în următoarele:

O propoziţie (afirmaţie) oarecare $P(n)$, ce depinde de un numar natural n, este adevarată pentru orice n natural, daca:

1. $P(1)$ este o propoziţie (afirmaţie) adevărata;
2. $P(n)$ ramane o propoziţie (afirmaţie) adevărată, cand n se majoreaza cu o unitate, adica $P(n + 1)$ este adevărată.

Aşadar, metoda inducţiei presupune doua etape:

1. Etapa de verificare: se verifică dacă propoziţia $P(1)$ este adevărată;
2. Etapa de demonstrare: se presupune ca propozitia $P(n)$ este adevărată şi se demonstrează justeţea afirmaţiei $P(n + 1)$ (n a fost majorat cu o unitate).

Nota 1. În unele cazuri metoda inductiei matematice se utilizeaza în următoarea formă:

Fie m un număr natural, $m > 1$ şi $P(n)$ o propoziţie ce depinde de n, $n \geq m$.

Dacă

1. $P(m)$ este adevărată;
2. $P(n)$ fiind o propoziţie justă implică $P(n + 1)$ adevărată pentru $n \geq m$, atunci $P(n)$ este o propoziţie adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

În continuare să ilustrăm metoda inductiei matematice prin exemple.

Exemplul 1. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,
b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$,
c) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$,
e) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
f) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$,
g) formula binomului Newton:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,\quad a,b\in\mathbf{R},$$

unde $n\in\mathbf{N}$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, 1=1, prin urmare $P(1)$ este adevarata. Presupunem ca egalitatea din enunt este adevarata, adica are loc egalitatea

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

si urmeaza să verificam daca $P(n + 1)$, adica

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

este justa. Cum (se tine seama de egalitatea din enunt)

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

se obtine

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

adica $P(n + 1)$ este afirmatie justa.

Asadar, conform principiului inductiei matematice egalitatea din enunt este justa pentru orice n natural.

Nota 2. Mentionam ca acest exemplu poate fi rezolvat si fara utilizarea inductiei matematice. Intr-adevar, suma $1 + 2 + 3 + ... + n$ reprezinta suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice cu primul termen $a_1 = 1$ si ratia $d = 1$. In baza formulei cunoscute $\left(S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right)$ se obtine

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

b) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $2\cdot 1 - 1 = 1^2$ sau 1=1, astfel $P(1)$ este justa. Presupunem justa egalitatea

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

si urmeaza sa verificam daca are loc $P(n + 1)$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

sau

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Se tine seama de egalitatea din enunt si se obtine

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Asadar $P(n + 1)$ este adevarata si, prin urmare, egalitatea din enunt este adevarata.

Nota 3. Similar exemplului precedent, se rezolva si fara a aplica metoda inductiei matematice.

c) Pentru $n = 1$ egalitatea este justa $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, 1=1. Se presupune justa egalitatea

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

si se arata ca

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata. In adevar

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] = \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6),$$

si cum $2n^2 + 7n + 6 = (2n + 3)(n + 2)$ se obtine

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

si, prin urmare, egalitatea este adevarata.

d) Pentru $n = 1$ egalitatea este justa: $1^3 = \left[\frac{1 \cdot 2}{2}\right]^2$, 1=1. Se presupune ca are loc egalitatea

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

si se arata ca are loc egalitatea

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Intr- adevăr, tinand seama de ipoteza

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

e) Propozitia $P(1)$ este justa $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$, 2=2. Se presupune ca egalitatea

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

este adevarata si se arata ca ea implica egalitatea

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Intr- adevăr

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=$$

$$=(n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Asadar, egalitatea enuntata este justa pentru orice n natural.

f) $P(1)$ este adevarata: $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$ $^1/_3=\,^1/_3$. Se presupune ca are loc $P(n)$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

si se arata ca aceasta egalitate implica egalitatea

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

In adevar, tinand seama de justetea afirmatiei $P(n)$, se obtine

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Prin urmare, egalitatea este demonstrata.

g) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $a + b = b + a$, si deci este adevarata.

Fie formula binomului Newton este justa pentru $n = k$, adica

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+b^k.$$

Atunci

$$(a+b)^k = (a+b)^k(a+b) = (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \ldots + b^k)(a+b) =$$

$$= a^{k+1} + (1 + C_k^1)a^k b + (C_k^1 + C_k^2)a^{k-1}b^2 + \ldots + (C_k^s + C_k^{s+1})a^{k-s}b^s + \ldots + b^{k+1}.$$

Tinand seama de egalitatea $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$ se obtine

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+2}^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_{k+1}^{s+1} a^{k-s}b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

Exemplul 2. Să se demonstreze inegalitățile

a) inegalitatea Bernuolli: $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $n \in \mathbf{N}$.

b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$, daca $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ si $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

c) inegalitatea Cauchy relativa la media aritmetica si geometrica

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$ unde $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$.

d) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

e) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$, $n \in \mathbf{N}$.

f) $2^n > n^3$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 10$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 1$ inegalitatea este adevărată

$$1 + \alpha \geq 1 + \alpha.$$

Se presupune ca are loc inegalitatea enuntată

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \qquad (1)$$

si se arata, ca in asa ipoteza are loc si

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

Într- adevar, cum $\alpha > -1$ implica $\alpha + 1 > 0$, multiplicand ambii membri ai inegalitatii (1) cu $(\alpha + 1)$ se obtine

$$(1 + \alpha)^n(1 + \alpha) \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha)$$

sau

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2$$

Cum $n\alpha^2 \geq 0$, rezulta

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

Asadar $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata, prin urmare, conform principiului inductiei matematice inegalitatea Bernoulli este adevarata.

b) Pentru $n = 1$, se obtine $x_1 = 1$, si, prin urmare $x_1 \geq 1$, adica $P(1)$ este o afirmatie justa. Se presupune ca $P(n)$ este adevarata, adica, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n numere pozitive, produsul carora este egal cu unu, $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, si $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

Sa aratam, ca aceasta ipoteza implica justetea urmatoarei afirmatii: daca $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ sunt $(n + 1)$ numere pozitive cu $x_1x_2\cdot...\cdot x_n\cdot x_{n+1} = 1$ atunci $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$.

Se disting urmatoarele doua cazuri:

1) $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1} = 1$ si atunci suma lor este $(n + 1)$, inegalitatea fiind justa,

2) cel putin un numar este diferit de unu, fie mai mare ca unu. Atunci, dat fiind $x_1x_2\cdot ... \cdot x_n\cdot x_{n+1} = 1$, rezultă ca există cel puțin încă un număr diferit de unu, mai exact, mai mic decât unu. Fie $x_{n+1} > 1$ si $x_n < 1$. Consideram n numere pozitive

$$x_1,x_2,...,x_{n-1},(x_n\cdot x_{n+1}).$$

Produsul lor este egal cu unu, iar conform ipotezei

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_nx_{n+1} \geq n.$$

Ultima inegalitate se scrie astfel

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_nx_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1}$$

sau

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_nx_{n+1}.$$

Cum

$$n + x_n + x_{n+1} - x_nx_{n+1} = n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - 1 + x_n =$$
$$= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - (1 - x_n) = n + 1 + (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) \geq n + 1$$

deoarece

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0,$$

rezulta

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq n+1,$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata. Inegalitatea este demonstrata.

Nota 4. Se observa, ca semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

c) Fie $x_1,x_2,...,x_n$ numere pozitive arbitrare. Se considera n numere

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}},\ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}.$$

Cum aceste numere sunt pozitive si produsul lor este egal cu unu

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}\cdot\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}} = \frac{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n} = 1$$

conform inegalitatii b) demonstrate anterior rezulta

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}} \geq n,$$

de unde rezulta

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Nota 5. Semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

d) $P(1)$ este o afirmatie justa: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Se presupune ca $P(n)$ este o afirmatie adevarata:

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$$

si se arata ca $P(n + 1)$ are loc. In adevar

$$\sin^{2(n+1)}\alpha + \cos^{2(n+1)}\alpha = \sin^{2n}\alpha\cdot\sin^2\alpha + \cos^{2n}\alpha\cdot\cos^2\alpha < \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$$

(se tine seama ca daca $\sin^2\alpha \le 1$ atunci $\cos^2\alpha < 1$ si reciproc daca $\cos^2\alpha \le 1$ atunci $\sin^2\alpha < 1$). Asadar, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n} \le 1$ si semnul egalitatii se atinge doar pentru $n = 1$.

e) Pentru $n = 1$ afirmatia este justa: $\frac{1}{1!} < \frac{5-2}{2\cdot 1}$, $1 < {}^3/_2$.

Se presupune ca $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$, si urmeaza de a demonstra ca

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

Cum

$$(n+1)! > n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{2}{2n(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{(5n+3)\cdot n - (5n-2)(n+1)}{2(n+1)n} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)} - \frac{5n-2}{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)},$$

se tine seama de $P(n)$ si se obtine

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

f) Se tine seama de nota 1 si se verifica $P(10)$: $2^{10} > 10^3$, $1024 > 1000$, asadar pentru $n = 10$ inegalitatea este justa. Se presupune ca $2^n > n^3$ $(n > 10)$ si trebuie de demonstrat $P(n + 1)$, adica $2^{n+1} > (n + 1)^3$.

Cum pentru $n > 10$ avem $2 > \left(\frac{1}{n}\right)^3$ sau $2 > 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ rezulta

$$2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{sau} \quad n^3 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Se tine seama de ipoteza $(2^n > n^3)$ si se obtine

$$2^{n+1} = 2^n\cdot 2 = 2^n + 2^n > n^3 + n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Asadar conform principiului inductiei pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 10$ avem $2^n > n^3$.

Exemplul 3. Sa se demonstreze ca pentru orice $n \in \mathbf{N}$

a) $n(2n^2 - 3n + 1)$ se divide cu 6,
b) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ se divide cu 11.

Rezolvare. a) $P(1)$ este o propozitie adevarata (0 se divide cu 6). Fie $P(n)$ are loc, adica $n(2n^2 - 3n + 1) = n(n - 1)(2n - 1)$ se divide cu 6. Se arata, ca are loc $P(n + 1)$ adica $(n + 1)n(2n + 1)$ se divide cu 6. In adevar, cum

$$n(n + 1)(2n + 1) = n(n - 1 + 2)(2n - 1 + 2) = (n(n - 1) + 2n)(2n - 1 + 2) =$$
$$= n(n - 1)(2n - 1) + 2n(n - 1) + 2n(2n + 1) = n(n - 1)(2n - 1) + 2n\cdot 3n =$$
$$= n(n - 1)(2n - 1) + 6n^2$$

si cum atat $n(n - 1)(2n - 1)$ cat si $6n^2$ se divid cu 6, rezulta ca si suma lor, adica $n(n + 1)(2n + 1)$ se divide cu 6.

Aşadar $P(n + 1)$ este o afirmație justa, si $n(2n^2 - 3n + 1)$ se divide cu 6 pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

b) Se verifica $P(1)$: $6^0 + 3^2 + 3^0 = 11$, prin urmare $P(1)$ este justa. Urmeaza sa se arate, ca daca $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ se divide cu 11 ($P(n)$), atunci $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ de asemenea se divide cu 11 ($P(n + 1)$). In adevar, cum

$$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 6^{2n-2+2} + 3^{n+1+1} + 3^{n-1+1} =$$
$$= 6^2\cdot 6^{2n-2} + 3\cdot 3^{n+1} + 3\cdot 3^{n-1} = 3\cdot(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) + 33\cdot 6^{2n-2}$$

si atat $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, cat si $33\cdot 6^{2n-2}$ se divid cu 11, rezulta ca si suma lor, adica $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ se divide cu 11.

Bibliografie:

Matematica, Manual pentru clasa a X-a, C. Năstăsescu, C. Niță, S. Popa.

Legătura dintre măsurile Radon şi Borel pe R

Prof. Mărinică Nicoleta Daniela

Şcoala cu cls. I-VIII Greceşti, jud. Dolj

Vom folosi Teorema de reprezentare Riesz pentru a arăta că orice măsură Borel pozitivă, finită local pe R este o măsură Radon (implicaţ ia inversă reiese din definiţie)

Lemă.

Dacă μ ***este o măsură Radon*** σ***-finită şi*** $E \in B_\sigma$ ***atunci pentru*** $\forall\, \varepsilon > 0$ ***(*** $\exists$***) o mulţime deschisă U şi o mulţime închisă F astfel încât*** $F \subseteq E \subseteq U$ ***şi*** $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$***.***

Demonstraţie.

Cum μ este σ-finită există mulţimile distincte $E_K \in B_\sigma$ cu $\mu(E_K) < \infty$ astfel încât $E = \cup E_K$. Cum μ este regulară exterior există mulţimile deschise $U_K \supseteq E_K$ astfel încât $\mu(U_K \backslash E_K) < 2^{-k-1}\varepsilon$. Atunci $U = \cup U_K$ este deschisă, $U \supseteq E$ şi

$$\mu(U \backslash E) \le \sum_k \mu(U_K \backslash E_K) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum $E^C = R \backslash E$ este o mulţime Borel putem aplica acel aşi argument pentru E^C pentru a găsi o mulţime deschisă $V \supseteq E^C$ cu $\mu(V \backslash E^C) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Deci, $F = V^C$ este închisă, $F \subseteq E$ şi $\mu(E \backslash F) = \mu(V \backslash E^C) \le \frac{\varepsilon}{2}$. În concluzie,

$$\mu(U \backslash F) \le \mu(U \backslash E) + \mu(E \backslash F) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Acum, putem completa caracterizarea noastră cu măsurile Radon pe axa reală.

Teoremă.

Clasa măsurilor Radon pe R coincide cu c lasa măsurilor pozitive local finite pe R.

Demonstraţie.

Din definiţie, dacă ν este măsură Radon atunci este o măsură Borel pozitivă, finită local.

Reciproc, presupunem că ν este o măsură Borel pozitivă, local finită.

Vom arăta că ν este regulară şi deci este o măsură Radon. Cum $C_C(R) \subseteq L^1(\nu)$ putem defini <f, ν > = $\int f \, d\nu$ pentru f $\in C_C(R)$ şi astfel se defineşte o funcţională liniară pozitivă pe $C_C(R)$.

Teorema de reprezentare Riesz implică faptul că există o măsură Radon μ astfel încât <f, μ > = <f, ν > pentru f $\in C_C(R)$.

Presupunem că U este orice submulţime deschisă a lui R . Atunci putem scrie U= $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ unde fiecare K_j este compact .

Susţinem că $\exists$ $f_n \in C_C(R)$ cu $0 \le f_n \le 1$ şi supp(f_n) $\subseteq$ U astfel încât $f_n = 1$ pe $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ şi pe $\bigcup_{j=1}^{n-1}$ supp(f_n).

Pentru a demonstra aceasta vom face inducţie.

Pentru n=1 există o funcţie $f_1 \in C_C(R)$ ce satisface $0 \le f_1 \le 1$, supp(f_1) $\subseteq$ U şi $f_1 = 1$ pe K_1.

Presupunem că $f_1, f_2 \ldots f_n$ au fost construite astfel încât să satisfacă proprietăţile cerute. Atunci cum

$$F = (\bigcup_{j=1}^{n+1} K_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} \text{supp}(f_j))$$

este o submulţime compactă a lui U putem spune că $f_{n+1} \in C_C(R)$ astfel încât $0 \le f_{n+1}{}_1 \le 1$, $\text{supp}(f_{n+1}) \subseteq U$ şi $f_{n+1} = 1$ pe F. Aceasta completează inducţia.

Din definiţie, şirul $\{f_n\}_{n\in N}$ este şir monoton crescător de funcţii şi $f_n \to \chi_U$ punctual.Din Teorema de convergenţă monotonă aplicată lui μ şi ν avem

$$\mu(U) = \int \chi_U d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\nu = \int \chi_U \, d\nu$$

Deci, μ şi ν sunt egale pe toate mulţimile deschise.

Fie acum E orice mulţime Borel şi alegem $\varepsilon > 0$. Atunci, din lemă rezultă că $\exists$ un deschis U şi o mulţime închisă F astfel încât $F \subseteq E \subseteq U$ şi $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$.

Cum $U \backslash F$ este deschisă, μ şi ν îi asignează aceeaşi măsură, deci avem $\nu(U \backslash F) < \varepsilon$ de asemenea. Mai mult

$$\nu(U) = \nu(U \backslash F) + \nu(F) \le \varepsilon + \nu(E)$$

Deci, $\nu(E) = \inf\{\nu(U) : U \supseteq E, U \text{ deschis}\}$ deci ν este regulară exterior pe $\forall$ mulţime Borel.

De asemenea, avem

$$\nu(E) = \nu(E \backslash F) + \nu(F) \le \varepsilon + \nu(F).$$

Deşi F nu trebuie neapărat să fie compactă, dacă definim $F_K = F \cap [-K, K]$ atunci F_K este compactă şi $\nu(F_K) \to \nu(F)$. Dacă $\nu(E) < \infty$ atunci există un k astfel încât $\nu(F_K) \ge \nu(F) - \varepsilon$ şi, deci, $\nu(F_K) \ge \nu(E) - 2\varepsilon$ .Dacă $\nu(E) = \infty$ atunci $\nu(F) = \infty$ de asemenea şi deci $\nu(F_K) \to \infty$. În orice caz, concluzionăm că $\nu(E) = \sup\{\nu(K), K \subseteq E, K \text{ compact}\}$, deci ν este interior regulată pe orice mulţime Borel.

Deci ν este regulată şi, deci, este o măsură Radon. De fapt, prin unicitatea afirmaţiilor din Teorema de reprezentare Riesz avem de fapt $\nu = \mu$.

Corolar.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) ν ***este o măsură Borel pozitivă, local finită pe R***

b) ν ***este o măsură Borel pozitivă, regulată, local finită pe R***

c) ν ***este o măsură Radon pe R***

Următoarele afirmaţii sunt de asemenea echivalente:

a') ν ***este o măsură Borel, pozitivă, mărginită pe R***

b') ν ***este o măsură Borel, pozitivă, regulată, mărginită pe R***

c') ν ***este o măsură Radon mărginită pe R .***

Bibliografie:

- G. Folland, Real Analysis, Wiley,1999
- P.Kessler, M.Rosiu, Introducere in teoria masurii, Ed. Universitaria, Craiova, 2002
- P.Halmos, Measure Theory, D.Van Nostrand comp.Inc.,Princeton, N.J.1950
- W.Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill Book Co.,New York,1964

ASPECTE DIN VIAŢA S.S.M.R ŞI ISTORIA O.I.M

NECULAI STANCIU[1]

În această lucrare ne propunem să scoatem în relief pricipalele momente din istoria SSMR şi personalitatea profesorului *Ion N. Ionescu – Bizeţ*, ctitor al Societăţii Gazeta Matematică.
Considerăm că în acest mod ne aducem contribuţia la aniversarea a 100 de ani de la înfiinţarea SSMR.
În anul :

1909. La şedinţa redactorilor Gazetei Matematice ce a avut loc la via prof. Ion N. Ionescu de la Valea Călugărească s-a hotărât constituirea Societăţii Gazeta Matematică.
Se declară înfiinţată Societatea Gazeta Matematică.
Se anunţă pe pagina a doua nr.1 anul XV al Gazetei Matematice membrii societăţii Gazeta Matematică, cu o notă explicativă – Membrii Societăţii trec la elaborarea statutului pe baza căruia Societatea Gazeta Matematică să devină o persoană juridică.

1910. Adunarea Deputaţilor votează(61 bile albe, 3 negre) legea privind recunoaşterea Societăţii Gazeta Matematică
Senatul votează (45 bile albe, 1 bilă neagră) legea şi statutul Societăţii Gazeta Matematică. Cu această ocazie *Spiru Haret* a avut o scurtă intervenţie.
Regele Carol I promulgă legea privind recunoaşterea Societăţii Gazeta Matematică prin Decretul Regal nr. 3798 .

1920. Redactorul fondator *N. Nicolescu* face propunerea de colectare a unui fond pentru construirea Casei Gazeta Matematică donând 500 lei.

1923. *Traian Lalescu* propune directorului Căilor Ferate *T. Constantinescu*, cedarea unei parcele dintr-un loc din apropierea Gării de Nord pentru construirea Casei Gazeta Matematică.
Consiliul de Miniştri şi Adunările Corpurilor Legiuitoare au validat propunerea iar prin Decretul Regal nr. 3714 din 20 iulie publicat în M.O. nr. 95/31.07.1923, Societatea Gazeta Matematică devine proprietar al terenului.

1929. Societatea Gazeta Matematică organizează la Cluj la iniţiativa lui *Petre Sergescu* primul Congres al Matematicienilor Români.

1932. Societatea Gazeta Matematică organizează la Turnu Severin tot la iniţiativa lui *Petre Sergescu* al II-lea Congres al Matematicienilor Români.

1945. Al III-lea Congres al Matematicienilor Români ţinut la Bucureşti, este dedicat jubileului Gazetei Matematice.

1949. Prin unificarea Societăţii Gazeta Matematică cu Societatea Română de Ştiinţe ia naştere Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România ca re moşteneşte

[1] Vicepreşedinte S.S.M.R - Filiala Rîmnicu Sărat
Prof., Şcoala cu clasele I-VIII ''George Emil Palade'' , Buzău

pe baza unui nou statut patrimoniul celor două societăţi. Preşedintele acestei noi societăţi este *Acad. Gr. C. Moisil* până în 1973.Între anii 1973 – 1995 preşedinte este *Acad. Nicolae Teodorescu.*Între anii 1995-2004 preşedinte este *Acad. Petre Mocanu*.Între 2004-2008 preşedinte este *prof. univ. Dr. Dorin Popescu* şi între 2008- până în prezent preşedinte este *prof.univ.dr. Radu Gologan*

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România organizează Olimpiada Naţională de Matematică cu sprijinul financiar al statului.

1950. Statul preia abuziv şi prin violenţă fără titlu sau vreo altă formalitate, imobilele Societăţii Gazeta Matematică respectiv Casa Societăţii Gazeta Matematică din Calea Griviţei nr. 144 şi casa de citire Ion N. Ionescu din S tr. Răsuri nr. 25.

1956. Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România organizează al V - lea Congres al Matematicienilor Români unde se propune organizarea unei Olimpiade Internaţionale de Matematică.

1959. România organizează prima Olimpiadă Internaţională de Matematică(OIM) – competiţie anuală de matematică la care participă elevi din diferite ţări(atunci au fost prezente 7 ţări).

Matematica este domeniul în care tinerii români s-au remarcat constant pe plan internaţional.De la lansarea OIM, în 1959, singurul participant care a reuşit o lucrare perfectă(realizarea punctajului maxim – 42 puncte) la fiecare dintre cele trei ediţii(1995,1996,1997) la care a luat parte este un român, *Ciprian Manolescu. Ciprian Manolescu* este absolvent summa cum laudae în matematică la Harvard, iar în 2004 şi-a încheiat doctoratul la aceeaşi universitate. Acum este Associate Professor la renumita universitate americană UCLA.

Trei medalii de aur, chiar dacă nu adjudecate cu scor maxim, le-au revenit, de-a lungul timpului, altor trei liceeni români: *Mihai Manea(1999,2000,2001), Ştefan Laurenţiu Horneţ(1997,1998,1999) şi Teodor Bănică(1989, 1990, 1991).*

Alţi români care au obţinut puntaje maxime sunt: *Daniel Tătaru*(1984,1985), *Adrian Vasiu*(1987,1988), *Nicuşor Dan* (1987,1988), *Andrei Moroianu*(1987,1989), *Mugurel Barcău*(1987), *Liviu Suciu*(1987), *Sergiu Moroianu*(1991), *Dragoş Nicolae Oprea*(1995) şi *Ovidiu Savin*(1995).

În afară de cei menţionaţi mai sus medalii de aur au mai obţinut: *Dan Voiculescu(1966,1967), Ana Caraiani(2002,2003), Adrian Ioan Zahariuc(2005,2006), Adrian Bogdan Ungureanu(2005,2006), Victor Nistor(1978,1979), Constantin Chişcanu(1995,1996), Geffry Barad(1992,1993), Andrei Neguţ(2004), Florin Belgun(1990), Radu Horia Mihăescu(1998), Andrei Dan Ionescu(1991), Louis Funar(1984), Marius Beceanu(1999), Adrian Ocneanu(1974), Şerban Nacu(1992), Dragoş Ioan Michnea(2005), Gabriel Kreindler(2005), Livia Alexandra Ilie(2007), Cezar Gheorghe(1960), Adrian Cordunenu(1996), Barbu Rudolf Berceanu(1968), Mugurel Barcău(1987), Radu Negulescu(1985), Bogdan Enescu(1978), László Zsidó(1963), Ştefan Radu Niculescu(1996), Virgil Petrea(1992), Basarab Nicolescu(1959), Martin Mirca(1972), Flaviu Iepure(1998), Nicolae Beli(1986), Răzvan Gelca(1985), Marius Dabija(1986), Eduard Gabriel Băzăvan(2006), Elena Mădălina Perşu(2009)*şi *Omer Cerrahoglu(2009).*

Doar doi participanţi la OIM au patru medalii de aur:germanul *Christian Reiher*(2000,2001,2002,2003) şi americanul *Reid Barton*(1998,1999,2000,2001).

O altă performanţa neegalată până acum la OIM o realizează echipajul american în anul 1994. Toţi cei şase reprezentanţi obţin punctajul maxim. Antrenorul echipei olimpice de matematică a Statelor Unite, la Olimpiada Internaţională de Matematică din 1994, de la Hong Kong a fost profesorul român *Titu Andreescu*.

În ceea ce priveşte ţara organizatoare a OIM, România ocupă primul loc(1959, 1960, 1969, 1978, 1999).

Cea mai importantă distincţie din lumea matematicii - Medalia Fields, fiind cunoscută ca un fel de Premiu Nobel pentru matematică, recompe nsează realizările majore din matematică. Spre deosebire de Premiul Nobel, care se acordă anual, Medalia Fields este atribuită la fiecare 4 ani, în cadrul unui congres internaţional de matematică. De menţionat că medaliaţii Fields trebuie să aibă o vârstă mai mică de 40 de ani.Printre aceştia sunt şi următorii cinci olimpici internaţionali:

Grigorig Margulis - medaliat cu argint pentru U.S.S.R în 1962.A primit Medalia Fields în 1978.

Vladimir Drinfel'd - medaliat cu aur pentru U.S.S.R în 1969. A primit Medalia Fields în 1990.

Jean-Christof Yoccoz - medaliat cu aur pentru Franţa în 1974. A primit Medalia Fields în 1994.

Richard Borcherds - medaliat cu argint pentru UK în 1977. A primit Medalia Fields în 1998.

Timothy Gowers - medaliat cu aur pentru UK în 1981. A primit Medalia Fields în 1998.

La ultimul *Congres Internaţional de Matematică*, organizat în Spania, la Madrid, în 2006, un alt olimpic internaţional, *Grigorij Perelman*, a fost invitat să ridice *Medalia Fields.* Talentat la matematică, urmează c ursurile unui prestigios liceu leningrădean renumit pentru specializarea sa în fizică şi matematică. Rezultatele sale nu se lasă aşteptate şi, în 1982, devine membru al lotului sovietic pentru Olimpiada Internaţională de Matematică şi obtine medalia de aur cu scorul maxim posibil: 42 de puncte. A refuzat Medalia Fields(2006) şi premiul de 1.000.000 de dolari oferit de *Clay Mathematics Institute*, pentru rezolvarea *Conjecturei Poincaré*, una din cele şapte probleme ale mileniului. La Princeton, unde olimpicul nostru internaţional *Daniel Tătaru*, a efectuat studiile postdoctorale, lucrează englezul *Andrew Wiles(a demonstrat marea teoremă a lui Fermat* - după 357 de ani de la enunţare*)* şi a lucrat începînd din 1993 şi rusul *Grigori Perelman* .

Sperăm, că la *Congresul Internaţional de Matematică* din 2010, care va avea loc în *India*, în oraşul *Hyderabad*, printre medaliaţii Fields să fie şi un matematician român.

În încheiere felicităm echipa României participantă la a 50 -a ediţie a OIM(la care au participat un număr record de ţări – 104) pentru rezultatul obţinut.

Aceasta a fost formată din:

următorii concurenţi

- *Elena Mădălina Perşu*(vârsta-18 ani)-argint 2007, argint 2008, **aur 2009**;
- *Andrei Deneanu*(vârsta-19 ani)-**argint 2009;**
- *Francisc Bozdan*(vârsta-19 ani)-**argint 2009**;
- *Tudor Pădurariu*(vârsta-17 ani)-**bronz 2009**;
- *Marius Tiba*(vârsta-16 ani)- **bronz 2009**;
- *Omer Cerrahoglu*(vârsta-14 ani)-**aur 2009**;

şi însoţitori

- *Prof.univ.dr. Radu Gologan* (Leader);
- *Prof. Mihai Bălună* (Deputy leader);
- *Prof. Dan Schwarz* (Observer A);
- *Prof. Cristian Alexandrescu* (Observer B).

1964. Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România se transformă se transformă în Societatea de Ştiinţe Matematice.

1978. Societatea de Ştiinţe Matematice organizează a XX-a Olimpiadă Internaţională de Matematică.

1995. Societatea de Ştiinţe Matematice organizează sărbătoarea Centenarului Gazetei Matematice.Cu acest prilej Societatea de Ştiinţe Matematice capătă denumirea de Societatea de Ştiinţe Matematice din România(SSMR) pe care o are şi astăzi.

Se cuvine ca după prezentarea acestor momente din viaţa SSMR să evocăm în continuare personalitatea *prof. Ion N. Ionescu – Bizeţ*, rolul şi contribuţia sa la înfiinţarea Societăţii Gazeta Matematică.

ION N. IONESCU
STÂLP AL GAZETEI MATEMATICE
(140 de ani de la naştere)

Origini. În cătunul Stoienoaia, comuna Creaţa-Leşile, judeţul Ilfov s-a născut la 22 noiembrie/4 decembrie 1870 cel de al doilea fiu al lui *Nicolae şi Maria –Atina Ionescu*.Acesta a fost botezat cu numele de *Ion.* Tatal, *Nicolae*, era administratorul moşiei Stoienoaia; mama, *Maria-Atina*, nascuta *Diamandescu*, era casnică, o femeie recunoscuta pentru hărnicia ei.După Ion, familia a mai avut încă trei copii.Deoarece au rămas orfani de mici, cei cinci fraţi au crescut cu mari greutăţi.

Studii. A urmat şcoala primară, liceul Comercial(ca bursier) şi în anul 1889 a reuşit primul la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti.Obţine diploma de inginer cu nota 18,42(nota maximă, fiind în acele timpuri, egală cu 20) în anul 1894 şi tot în acel an este numit inginer asistent la Direcţia Generală a Căilor Ferate. Ca student se întreţinea din meditaţii la matematică. Atunci el a observat slaba pregătire la matematică a elevilor de liceu şi a colegilor săi de la facultate.

Ctitor.Înfiinţarea Gazetei Matematice. Aceasta l-a determinat sa înfiinţeze Gazeta Matematică, împreuna cu *Victor Balaban, Vasile Cristescu, Mihail Roco, Ion G. Zotta, Emanoil Davidescu, Mauriciu Kinbaum, Nicolae Nicolescu, Tancred Constantinescu* şi *Andrei Ioachimescu*.În septembrie al aceluiaşi an, *Ion Ionescu* participase, ca supraveghetor, la proba scrisă şi concluzia a fost aceeaşi – slaba pregătire la matematică.În ziua de 4 Octombrie 1894 s-a luat o decizie: *„…să căutăm zece persoane care să vrea să dea sumele necesare pentru apariţia revistei în primul an, iar toate veniturile acelui an să se capitalizeze, pentru a se garanta publicarea în anii*

următori, când unul sau mai mulţi din cei zece nu ar voi să mai dea sumele necesare… dacă nu s-ar găsi alţii cari să-i înlocuiască", îşi va aminti *Ion Ionescu* mai târziu. Primul număr al gazetei apare la 15 sept. 1895 şi sunt publicate patru articole din care două semnate de *Ion Ionescu,* şi 13 probleme - şase semnate de *Ion Ionescu.*
Ion Ionescu a fost timp de 44 de ani redactor activ la Gazeta Matematică.

Începutul Carierei didactice. În 1897 a început cariera didactică ca profesor de matematică la Şcoala de Telegrafie din Bucureşti. În anul 1898 a fost numit su plinitor la Catedra de mecanică aplicată la stabilitatea construcţiilor şi rezistenţa materialelor de la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. În anul 1901 revista Gazeta Matematică inaugurează colecţia Biblioteca Gazetei Matematice cu publicarea volumului „*Culegere de probleme de aritmetică, algebră, geometrie şi trigonometrie* ", autori *I. Ionescu, A. Ioachimescu, Gh. Ţiţeica, V. Cristescu*, care va cunoaşte mai multe ediţii. Apar Concursurile *Gazetei* . Cele din 1902 şi 1904 au fost prin corespondenţă, fiind premiaţi cei cu activitate deosebită de rezolvitori. Primul premiu este obţinut de elevul *Ovidiu Ţino,* viitor colaborator şi important membru al redacţiei. În 1903 a fost numit profesor de lucrări grafice.

Moment dificil în viaţa gazetei. În1904 - un profesor de matematici, membru al *Redacţiei*, a propus, desfiinţarea *Gazetei,* împărţirea între redactori a capitalului strâns şi a cărţilor din bibliotecă! Declaraţia de desfiinţare a fost semnată de o parte dintre redactori, în marea majoritate a cazurilor semnăturile lor obţinându-se pe căi necurate(prin rea credinţă). Cei care nu au semnat declaraţia de desfiinţare au lansat o contradeclaraţie. Răspunsurile scrise ale redactorilor s-au păstrat. De exemplu: *„Am dat cât am putut, dau cât pot şi voi da cât voi putea din timpul şi activitatea mea pentru Gazeta noastră"* (*A. Davidoglu, A.G. Ioachimescu, Gh. Ţiţeica*); *„…Declar că chiar dacă s-ar dizolva actuala formaţiune pentru publicarea Gazetei Matematice, voi face totul ce mi-ar sta în putinţă pentru ca, fără nici o întârziere, să se înjghebeze o alta"* (*Ion Ionescu*).

Înfiinţarea Societăţii. În 31 august 1909, la o şedinţă a redacţiei ţinută la Valea Călugărească (la via lui *Ion Ionescu),* s-a decis înfiinţarea *Societăţii Gazeta Matematică*. Pe numărul din septembrie al revistei apare anunţul: „Cu începere de la 1 septembrie 1909 *Redacţia Gazetei Matematice* a fost transformată în *Societate* .

Implicarea la Concursul gazetei. Începând cu anul 1905 Concursul Gazetei se ţine simultan în mai multe centre din ţară. *Ion Ionescu*, delegat pentru Bârlad, îşi aduce aminte că, ajungând la liceul unde trebuia să se ţină concursul, a găsit sala goală. Este anunţat, că elevii nu se vor putea prezenta la concurs deoarece în acea zi directorul programase o serbare şcolară. *Ion Ionescu* afirmă: „ *Am delegaţie de la Gazeta Matematică să stau patru ore în această sală şi voi sta, chiar dacă nu vine nici un candidat*".Apoi concursul s-a ţinut .Din anul 1909, concursul se va ţine la Bucureşti iar cererile de înscriere se trimiteau direct lui *Ion Ionescu*.

Perioada Primului Război Mondial. În 1914, devine profesor titular la Catedra de poduri, ca urmaş al lui *Anghel Saligny*, la care a predat până la pensionare.În timpul razboiului romano-bulgar (1913-1914) a fost mobilizat la Calea Ferata cu gradul de locotenent. Pentru mişcările de trupe a pus în funcţiune feriboturi improvizate. Apreciat pentru activitatea ireproşabilă în cadrul armatei, a fost avansat la gradul de căpitan în rezervă şi decorat cu Ordinul Barbaţie şi Credinţă gr. 1.

Mathematical Society, din Anglia, l-a ales în 1914 printre membrii săi.În perioada Primului Razboi Mondial (1916-1918) era o personalitate consacrată ca om de ştiinţă, inginer şi profesor. A fost mobilizat la Marele Cartier General, de unde a coordonat reabilitarea căilor ferate şi podurilor distruse de inamic. Dupa demobilizare şi -a reluat activităţile de profesor universitar, de producţie şi cercetare.

Ascensiunea didactică şi nu numai. În1919 a obţinut gradul de inginer inspector general, cel mai înalt grad ingineresc. În acelaşi an a fost ales membru în Consiliul Superior. A deţinut funcţii importante în Consiliul permanent al instrucţiunii publice, la Comisia centrală pentru despăgubiri de război şi la Primăria Capitalei. A desfăşurat o bogată activitate pentru organizarea profesională a inginerilor români, ca membru al Societăţii Politehnice din anul 1899, fiind 13 ani secretar, 9 ani vicepreşedinte şi preşedinte ales între 1932-1934, decan al Colegiului Inginerilor (1938-1941). Din 1919 a fost membru corespondent al Academiei Române.

Performanţe la Gazetă şi Politehnică. Din 1921, *Ion Ionescu* se dedică învăţămîntului de la Politehnică, profesor de bază al acestei instituţii şi Gazetei Matematice (adevărat stîlp al acesteia), revistă care, datorită celor patru stâlpi, apărea lunar, cu regularitate încă din 1895. La această publicaţie, *Ion Ionescu* a propus nu mai puţin de 626 de probleme(aproximativ 10 % din totalul problemelor originale p ropuse spre rezolvare). A fost pasionat în special de aritmetică, şi a publicat 77 de articole şi 145 de note matematice, referitoare la diferite ramuri ale matematicii, la care trebuie să adăugăm o serie de lucrări de specialitate, privind ştiinţa inginer ului: calculul podurilor metalice sau de beton simplu sau armat, statica construcţiilor, istoria tehnicii româneşti şi mondiale etc, multe apărute în „Buletinul Societăţii Politehnice din România", cea mai importantă revistă tehnică din trecut de la noi. S-a ocupat în mod special de primele lucrări didactice de matematică apărute la noi în ţară, de istoria învăţămîntului tehnic de la noi etc.A fost preocupat de pedagogia şi didactica teoretică, astfel că a publicat mai multe articole privind metodele de predare a ştiinţelor matematice şi a altor materii pentru învăţământul liceal şi universitar. De asemenea a fost un adept al îmbinării teoriei cu practica - a efectuat sondaje de opinie printre profesorii şi elevii de liceu şi a împletit activitatea didactică cu cea inginerească şi de cercetare ştiinţifică in domeniul matematic.Ca cercetator al istoriei ştiinţei şi tehnicii româneşti a scris şi publicat peste 250 de lucrări, totalizând 4000 de pagini. Cartea de referinta pentru activitatea asociaţiilor inginereşti o constituie Istoria Societăţii Politehnice – de la înfiinţare până la inaugurarea localului propriu, 1881-1927, tradusă şi în limba franceză în 1931.

Tot o lucrare de referinţă o constituie Istoricul învăţământului de ingineri, apărută în Editura Cartea Romanească, 1932.

Indubitabil, *Ion Ionescu* este unul din ctitorii învăţămîntului tehnic superior în ţara noastră şi un mare însufleţitor - înviorator al matematicii . *Fondul Anghel Saligny* are o istorie aparte. Fiind o perioadă ca suplinitor a lui *Anghel Saligny* la catedra de poduri, *Ion Ionescu* a refuzat în mai multe rânduri să primească bani pentru această muncă(aproximativ 13750 lei) *„…întrucât legea cumulului nu permite ca cineva să aibă o funcţiune şi două catedre şi ceea ce nu este permis a se face pe faţă nu este bine să se facă în mod oricât de bine deghizat…”* Astfel că propune Societăţii, înfiinţarea *Fondului Anghel Saligny* pentru tipărirea de cărţi de matematici aplicate sau cu cuprins tehnic.

Construcţii de excepţie. Ca profesor la Şcoala politehnică din Bucureşti, a condus lucrările de construcţie a numeroase poduri, printre care podul peste Borcea

(prima porţiune a podului peste Dunăre), podul de la Bobolia pe Valea Prahovei, podul metalic curb de cale ferată şi şosea peste bazinul de la Giurgiu (1905 - 1906), a elaborat proiectul pentru Şantierul naval de la Turnu-Severin, etc. Este autorul unui studiu de deviere spre Prut a apelor Siretului în vederea construcţiei unei centrale hidorelectrice şi a transformării Prutului într-un canal navigabil între Galaţi şi Iaşi. A executat harta hidrografică a bazinului Dunării. În 1900, la Giurgiu se impunea realizarea unui pod peste canalul Sf. Gheorghe, care să lege portul situat pe malul Dunarii cu celelate regiuni printr-o legătură dublă: şosea - cale ferată. Condiţiile locale(geomorfologice şi geotehnice) făceau realizrea imposibilă.Soluţia excepţională a fost gasită de *Ion Ionescu-Bizeţ*, care a prezentat-o academicianului *Anghel Saligny*. Aşa s-a construit şi a fost dat în folosinţă primul pod în unghi pe plan orizontal din lume, în 1905, invidiat şi admirat de constructorii din Europa şi America. Acest pod este folosit şi în prezent, după o utilizare de peste o sută de ani şi poarta numele de Podul Bizeţ.

Testamentul. A încetat din viaţă la 17 septembrie 1946. Este momentul aici să amintim despre o moştenire testamentară, donaţie a lui *Ion Ionescu*. Testamentul său se stipulează că *„…Averea mea se compune din casele mele din Bucureşti, Str. Răsuri nr.* 25, *pe care le-am cumpărat…în* 1938. *Aceste case le las în plină proprietate şi fără nici o sarcină, Societăţii Gazeta Matematică, cu dorinţa expresă de a se înfiinţa în ele o sală de lectură ştiinţifică pentru elevii liceelor din Bucureşti…“* Se precizează clar care camere din casă vor fi afectate pentru lectură, în testament se continuă: *„Actualul dormitor cu dependinţele casei…le las unui membru al Gazetei Matematice, care să se oblige a îngriji de sala de lectură …“*. *„Casa de citire Ion Ionescu“* a funcţionat până în 1950, când, în acelaşi fel ca şi localul din Calea Griviţei, trece în proprietatea statului. În 1997 *Societatea* reuşeşte să obţină casa înapoi, dar deteriorată şi cu tot cu chiriaşi(care stau şi acum în ea).

Bizeţ.Conştiinciozitate şi severitate intrate în legendă. Acest paragraf, este scris din vorbă-n vorbă, cum spune românul.Mai exact, *M.I*., un profesor pensionar, de la Buzău, a avut un unchi, care, a fost student al lui *Ion Ionescu(Bizeţ).* De fiecare dată când se întâlneau, acesta din urmă , povestea despre profesorul ideal, pe care l-a întâlnit o singură dată în viaţă, profesorul *Bizeţ* - care l-a marcat pe întreaga sa existenţă.La primul curs ţinut, le recomada studenţilor săi să poarte *’’ghete de brunél cu bizeţ pe catafalc!…de asemenea uniformele la nasturi şi la gulere obligatoriu cu bizeţ!’’* , de aici şi supranumele : *Ion Ionescu-Bizeţ.*

La lucrările practice, pentru a elimina copiatul, lega studenţii(printr-o metodă ingenioasă inventată de el) de planşetă.Nu tolera absenţele de la cursuri şi seminarii fie chiar şi motivate.Odată, mai mulţi studenţi l-au rugat să facă un necrolog, pentru un coleg al lor eminent la matematică, dar care având o bursă la Sorbona, nu s-a ţinut de treabă şi s-a îmbolnăvit grav după care în cele din urmă a decedat. *Ion Ionescu-Bizeţ* a refuzat categoric ’’…nu scriu necrologuri pentru golani!’’ şi nici măcar nu a învoit pe respectivii studenţi să meargă la înmormântarea colegului lor.Unchiul, i-a mai povestit profesorului buzoian, că, Bizeţ, era extrem de exigent, iar pentru a putea lua examenul de prima dată, studentul trebuia să fie foarte bine pregătit “…la acea vreme se dădeau note până la 20 şi mi-aduc aminte că mi-a dat nota 15 la examen, o notă mare ţinând seama de exigenţa sa ca professor…”, încheie profesorul *M.I.* legenda despre, *Ion Ionescu-Bizeţ*.

Concluzie. Alături de *Gheorghe Lazăr, Gheorghe Asachi, Ion Heliade Rădulescu, Spiru Haret, Petrache Poenaru şi Gheorghe Duca*, a fost unul dintre ctitorii

învăţământului tehnic românesc.Alături de *Vasile Cristescu, Andrei Ioachimescu şi Gheorghe Ţiţeica* a format "Stâlpii Gazetei Matematice".
Crezul său:
„Ajungînd profesor . . . eram hotărît: sau fac ce trebuie, sau plec. Principiile care m-au călăuzit se pot rezuma în trei:
1. *Profesorul este răspunzător de timpul pe care elevii îl pierd în şcoală la cursurile şi lucrările pe care le fac.*
2. *Al doilea principiu călăuzitor a fost de a face ca elevii să iasă din şcoală cu încredere deplină în ei înşişi că sînt în stare să facă faţă cerinţelor practicii; să aibă încredere în puterea lor de a concepe şi proiecta lucrări tehnice.*
3. *Un al treilea principiu călăuzitor a fost seriozitatea în îndeplinirea datoriilor .. ."* demonstrează odată în plus că *Ion Ionescu* a fost un OM de aleasă ţinută spirituală.

Remarcă.În 27 august 1945, la Adunarea Generală a Societăţii Gazeta Matematică, ţinută la Casa Gazetei Matematice, *Ion Ionescu* a împlinit dorinţa lui Gheorghe Ţiţeica, "…ca cel puţin unul din fondatorii gazetei să fie prezent la semicentenar."*Ion Ionescu* a făcut atunci o urare asemănătoare celor prezenţi în respectiva sală, care, de asemeni a fost dusă spre împlinire de profesorul, *N.N. Mihăileanu*, la centenarul gazetei.Astfel, prin inducţie matematică, se verifică veşnicia gazetei.

BIBLIOGRAFIE

[1]. St.George Andonie, *Istoria Matematicii în România*, vol.I, Ed. Ştiinţifică, 1965.
[2]. Florin Diac, *Monografia S.S.M.R.*, Bucureşti, 1998, Colecţia Biblioteca S.S.M.R.
[3]. M.Trifu, *Fenomenul Gazeta Matematică la 110 ani* , G.M. 9 / 2005 (Număr jubiliar).
[4]. ***, Gazeta Matematică, *1895-1935, Istorie-învăţăminte*(Volum jubiliar)
[5]. ***, Gazeta Matematică, *1895-1945* (Volum jubiliar), Biblioteca Gazetei Matematice, 1945.
[6]. ***, Gazeta Matematică, nr. 9/1995(Număr jubiliar).
***Colecţia Gazeta Matematică – 1895 / 2009
http://www.gazetamatematica.net/
http://www.imo-official.org/