

DE LA O PROBLEMĂ LA POLIEDRELE REGULATE

Pornind de la o problemă personală, am ajuns la concluzia că am nevoie de anumite relații între elementele poliedrelor regulate. Am căutat aceste relații pe internet, în mai multe cărți și în Gazeta matematică ediția electronică și nu m-a mulțumit ce am găsit. Doar rezultate parțiale, fără calcule complete și insuficient explicate, sau prezentate la un nivel prea ridicat.

M-am gândit (și am trecut la treabă) să încerc să calculez eu și să prezint aceste calcule precum și raționamentele necesare, în primul rând pentru că, acestea ar putea constitui un excelent exercițiu pentru cei ce doresc să-și perfecționeze tehnica de calcul, apoi pentru că se poate face o trecere în revistă a poliedrelor regulate, despre care în școală se amintește doar în treacăt.

Am considerat cunoscut aici ceea ce se găsește cu ușurință pe internet sau în diverse cărți și anume care sunt poliedrele regulate și descrierea lor.

Deși aș fi putut să prezint doar partea ce ține strict de poliedrele regulate, am considerat ca fiind foarte interesantă și problema care m-a condus aici, așa că voi începe cu ea.

Problema (Cloșca cu pui)

Enunț:

Pe sfera $S(O, R)$ se lipesc în exterior semisfere de rază d ; $d < R$, astfel ca cercul de rază d al semisferei să se afle pe sfera $S(O, R)$. Fie $k \in \mathbb{N}, k > 2$.

Să se afle numărul de semisfere de rază d ce trebuiesc lipite pe sfera $S(O, R)$ pentru ca fiecare dintre ele să fie tangentă exterior cu exact alte k semisfere (identice).

În fiecare caz să se calculeze d în funcție de R , și apoi să se calculeze aria și volumul corpului format după alipirea semisferelor pe sfera mare, considerat corp plin.

Autor: Prof. C. Telteu

Rezolvare:

Vom folosi în cele ce urmează următoarea *observație*: Fiind date două cercuri concentrice, toate coardele cercului exterior ce sunt tangente celui interior, sunt congruente.

Afirmația rămâne valabilă dacă se înlocuiesc cercurile cu sfere.

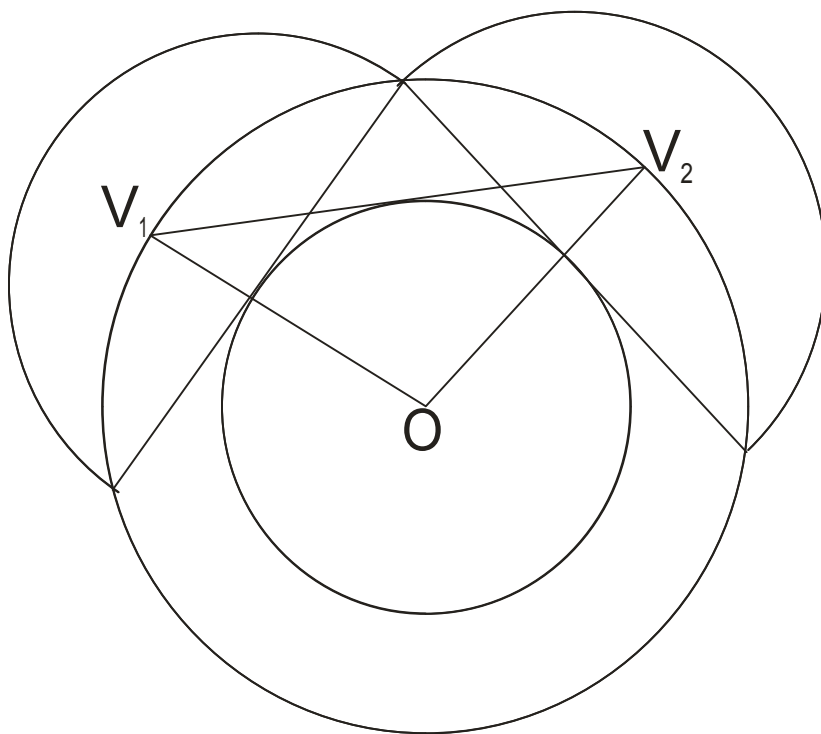


Fig.1

Considerăm doar două semisfere de rază d , tangente și lipite de sfera $S(O, R)$, și secționăm acest corp cu planul ce conține centrele lor, pe care, în figura 1. le-am notat cu V_1, V_2, O . Conform observației precedente $V_1V_2 = 2d$. Deci între vârfurile calotelor sferei $S(O, R)$ acoperite de semisfere tangente, distanța este aceeași: $2d$.

Să considerăm acum, cu cercurile mari într-un plan, o semisferă $S(Q, d)$ la care sunt tangente alte semisfere $S_1(O_1, d), S_2(O_2, d), \dots, S_k(O_k, d)$. Unind pe Q pe rând cu $O_1, O_2, \dots, O_k$ se obțin k segmente cu un capăt în Q și sunt congruente, lungimea lor fiind $2d$.

Este evident că unghiurile cu vârful în Q formate de două astfel de segmente alăturate au ca măsură cel puțin $\frac{\pi}{3}$ iar suma lor este 2π . În cazul problemei noastre, punctul Q este în afara planului din care fac parte $O_1, O_2, \dots, O_k$ și de aici concluzia că suma unghiurilor de mai sus este mai mică decât 2π (măsura unui unghi este mai mică decât măsura proiecției sale pe un plan). Deducem că unghiurile cu suma măsurilor mai mică decât 2π , fiecare fiind cel puțin de măsură $\frac{\pi}{3}$, nu pot fi decât cel mult în număr de 5. *Altfel spus, k din enunț poate fi 3; 4 sau 5.*

Considerând toate segmentele determinate de vârfurile a câte două calote acoperite de semisfere tangente, ele formează o rețea de segmente care au capetele pe sferă și verifică următoarele condiții:

- din fiecare vârf pleacă același număr de segmente ($k \in \{3, 4, 5\}$);
- unghiurile formate în orice vârf de oricare două segmente alăturate sunt congruente.

Din condițiile de mai sus reiese că ele sunt muchiile unui poliedru regulat înscris în sfera $S(O, R)$. Tipul poliedrului regulat depinde de numărul k în felul următor:

1. Cazul $k = 3$

Dacă fiecare semisferă este tangentă cu exact 3 semisfere, atunci vârfurile calotelor acoperite de ele determină:

- a) UN TETRAEDRU REGULAT. Acesta având patru vârfuri, vom avea 4 semisfere lipite pe sfera $S(O, R)$.
- b) UN CUB. Acesta are 8 vârfuri, deci vom avea 8 semisfere lipite pe sfera $S(O, R)$.
- c) UN DODECAEDRU REGULAT. Acesta are 20 vârfuri, deci vom avea 20 semisfere lipite pe sfera $S(O, R)$.

2. Cazul $k = 4$.

Dacă fiecare semisferă este tangentă cu exact 4 semisfere, atunci vârfurile calotelor acoperite de ele determină UN OCTAEDRU REGULAT. Acesta are 6 vârfuri, deci vom avea 6 semisfere lipite pe sfera $S(O, R)$.

3. Cazul $k = 5$.

Dacă fiecare semisferă este tangentă cu exact 5 semisfere, , atunci vârfurile calotelor acoperite de ele determină UN ICOSAEDRU REGULAT. Acesta are 12 vârfuri, deci vom avea 12 semisfere lipite pe sfera $S(O, R)$.

Vom lua acum pe rând fiecare poliedru regulat și calculăm muchia sa, care în toate cazurile este $2d$, în funcție de R . Pentru comoditate vom nota în calcule muchia poliedrului regulat cu x .

1.a). PENTRU TETRAEDRU REGULAT:

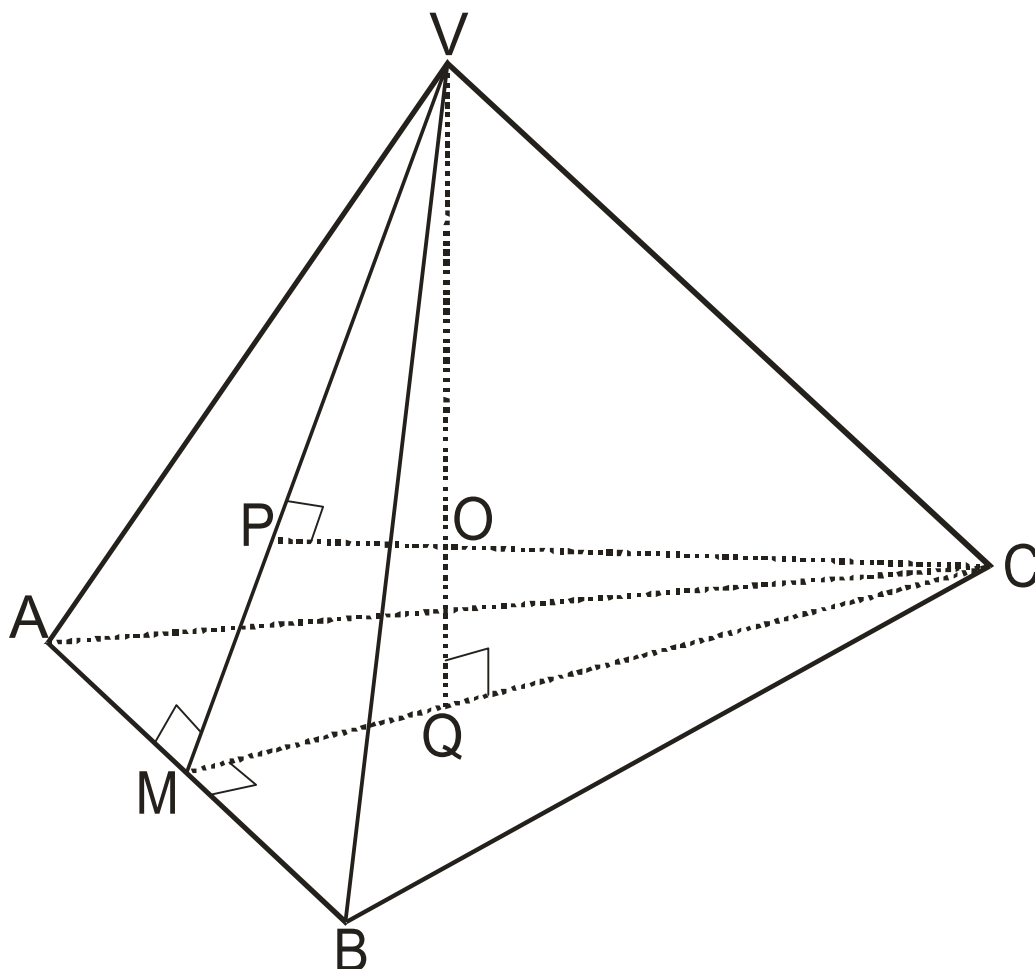


Fig.2

$$MQ = \frac{1}{3}MC = \frac{x\sqrt{3}}{6}; VQ = \sqrt{\frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{36}} = \frac{x\sqrt{6}}{3}; MP = MQ; VO = R$$

$$\triangle VQM \sim \triangle VPO \Rightarrow \frac{VO}{VM} = \frac{VP}{VQ} \Rightarrow \frac{R}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{3}}{\frac{x\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}R.$$

1.b). PENTRU CUB:

Diagonala cubului fiind diametrul sferei circumscrise,

$$x\sqrt{3} = 2R, \quad x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

1.c). PENTRU DODECAEDRU REGULAT:

Fețele lui sunt pentagoane regulate.

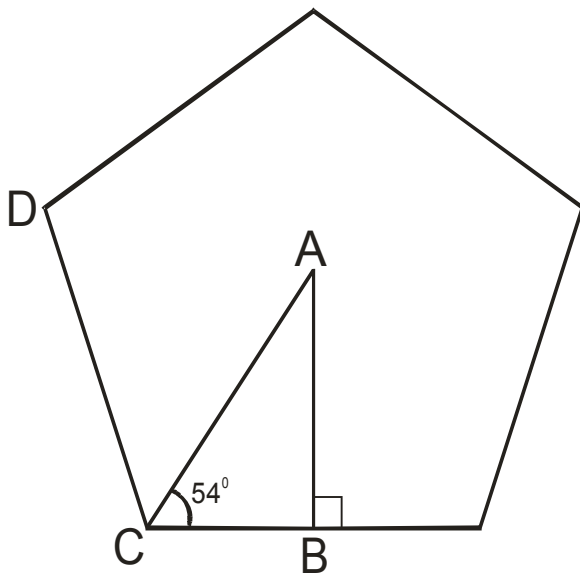


Fig.3

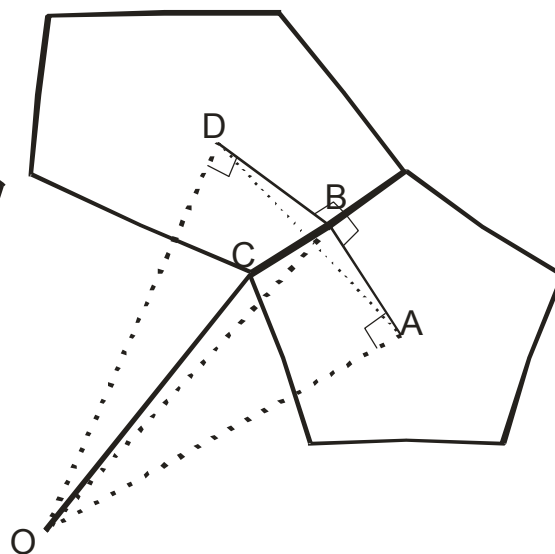


Fig.4

Măsura unghiului pentagonului regulat este de $\frac{180^0 \cdot 3}{5} = 108^0$.

$$\frac{AB}{BC} = \operatorname{tg} 54^0 \Rightarrow AB = \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} 54^0$$

Vom nota cu α măsura unghiului diedru determinat de două fețe cu o latură comună ale dodecaedrului regulat. În figura 4 unghiul plan corespunzător lui este $\sphericalangle ABD$. Tot în figura 4, OA și OD sunt perpendiculare pe cele două fețe. Cu teorema celor 3 perpendiculare deducem

că $OB \perp CB$. Din $\triangle BCO \Rightarrow BO^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$. Vom egala aceasta valoare cu valoarea lui OB

din triunghiul BOA , dar pentru asta calculăm mai întâi pe α .

Pentru acest scop avem nevoie de figura 5, unde $ABCDE$ este o față a dodecaedrului regulat, iar $AF, EG, DH \dots$ sunt laturi ale dodecaedrului regulat.

$$m(\sphericalangle FLK) = \frac{\alpha}{2}; GF = x + 2x \cos 72^0 = x(1 + 2 \cos 72^0);$$

$$LF = GF \sin 72^0 = x \sin 72^0 (1 + 2 \cos 72^0)$$

$$KF = GF \sin 54^0 = x \sin 54^0 (1 + 2 \cos 72^0) \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x \sin 54^0 (1 + 2 \cos 72^0)}{x \sin 72^0 (1 + 2 \cos 72^0)} = \frac{\sin 54^0}{\sin 72^0}$$

Avem acum nevoie de puțină trigonometrie.

$$\sin 36^0 = \cos 54^0 \Rightarrow 2 \sin 18^0 \cos 18^0 = \cos 18^0 (4 \cos^2 18^0 - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 18^0 + 2 \sin 18^0 - 1 = 0 \Rightarrow \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos 72^0$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^0.$$

$$\cos 54^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 108^0}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin 18^0}{2}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}; \cos 108^0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 54^0 = \sqrt{1 - \cos^2 54^0} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos 36^0.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{10}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$$

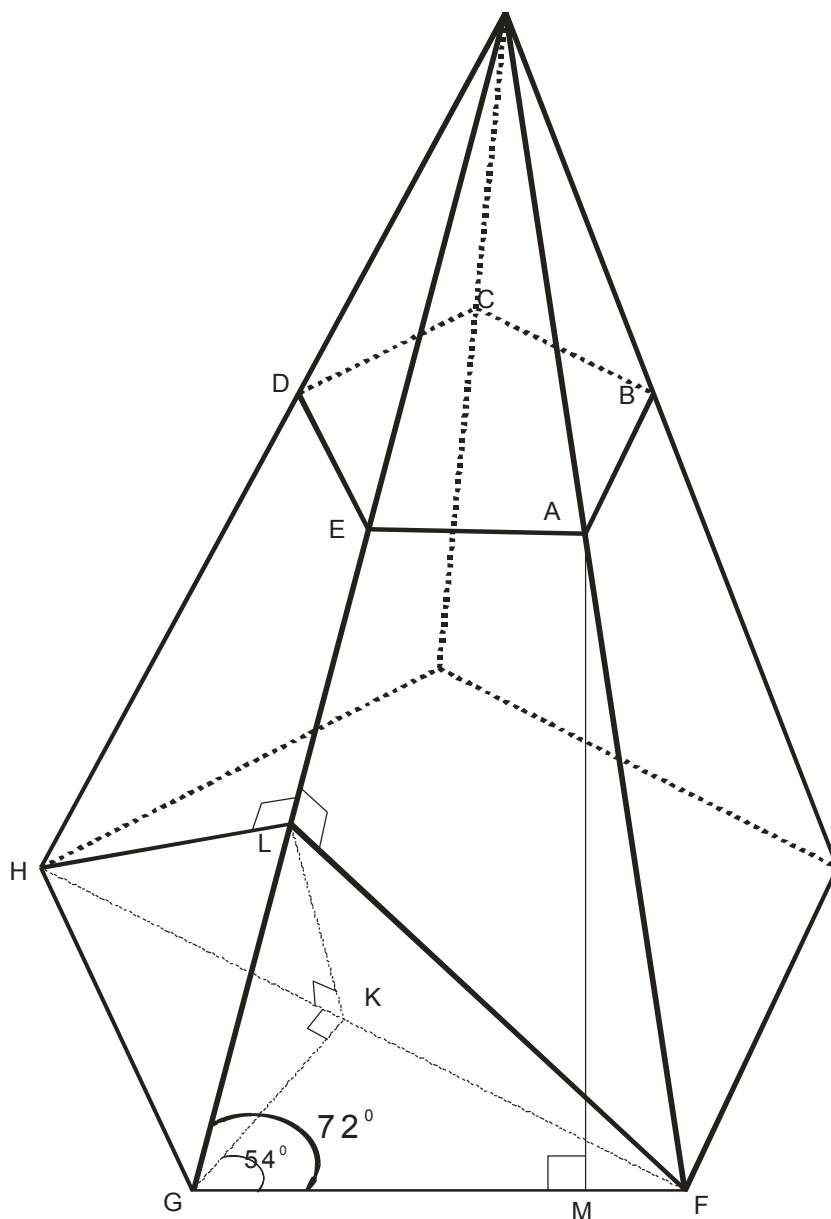


Fig.5

$$\operatorname{tg} 54^{\circ} = \frac{\sin 54^{\circ}}{\cos 54^{\circ}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Din figura 4, obținem:

$$\left. \begin{aligned} OB^2 &= R^2 - \frac{x^2}{4} \\ OB^2 &= \frac{AB^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow OB^2 = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 54^\circ}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 54^\circ}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2 \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}} \right)}{4 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \right)} \Leftrightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{30-10\sqrt{5}} \Leftrightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2 (7+3\sqrt{5})}{8} \Leftrightarrow R^2 = \frac{3x^2 (3+\sqrt{5})}{8} \Leftrightarrow R = \frac{x\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3}.$$

2. PENTRU OCTAEDRU REGULAT:

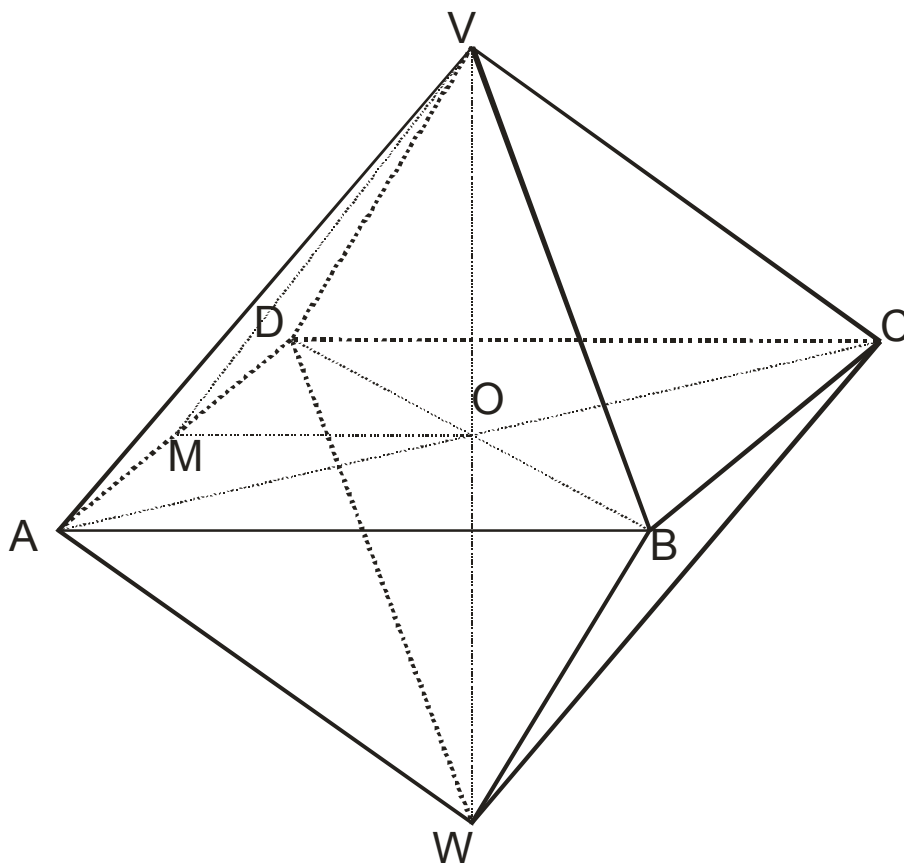


Fig.6

În fig. 6:

$$DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}; VO = \sqrt{x^2 - \frac{2x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = OW \Rightarrow R = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}.$$

3. PENTRU ICOSAEDRU REGULAT: (fig.7)

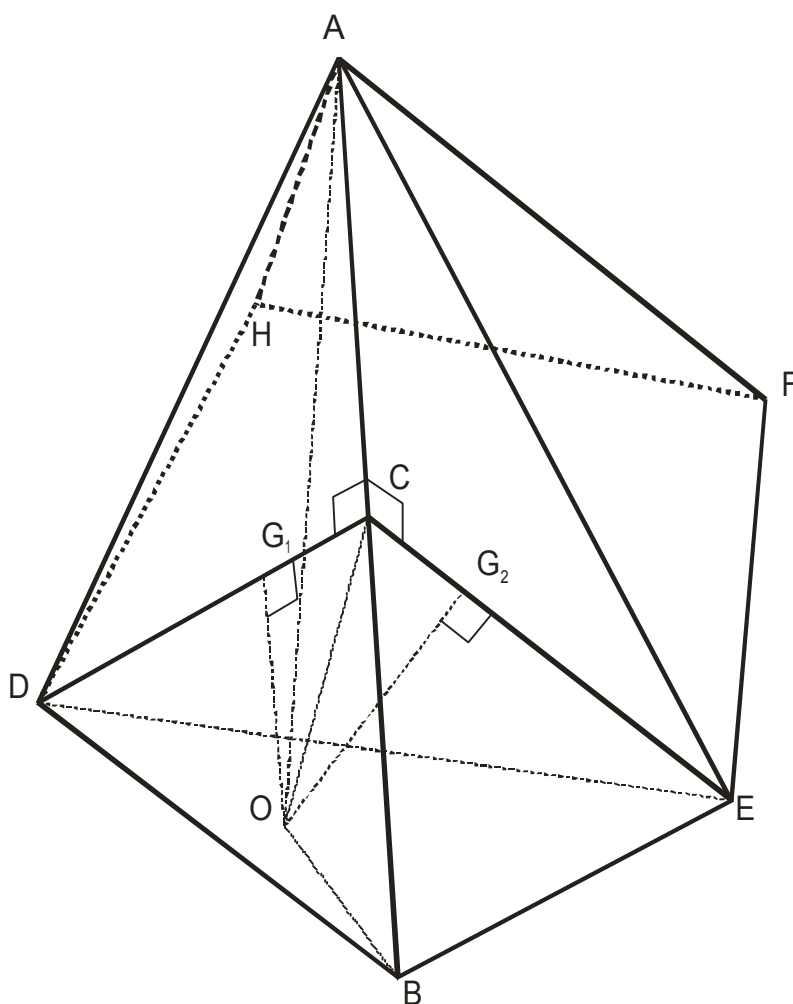


Fig.7

În figură am luat un vârf, A, al icosaedrului și fețele ce-l conțin. G_1 și G_2 sunt centrele fețelor (ABD) , respectiv (ABE) . Perpendicularele în G_1 și G_2 pe fețele (ABD) , respectiv (ABE)

fiind coplanare (sunt incluse în planul (DCE)) sunt concurente și am notat cu O intersecția lor. Evident O este centrul sferei circumscrise icosaedrului (și al sferei înscrise), și $OA = OB = \dots R$.

$BEFHD$ este pentagon regulat $\Rightarrow m(\sphericalangle DBE) = 108^\circ$.

Din $\triangle DBE$, cu teorema cosinusului:

$$DE^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos 108^\circ = 2x^2 (1 + \sin 18^\circ) = 2x^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{x^2 (3 + \sqrt{5})}{2}.$$

Din $\triangle DCE$ cu teorema cosinusului:

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2 \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cos(\sphericalangle DCE) \Rightarrow \frac{x^2 (3 + \sqrt{5})}{2} = \frac{3x^2}{2} (1 - \cos(\sphericalangle DCE)) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos(\sphericalangle DCE) &= \frac{3 + \sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos(\sphericalangle DCE) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$\cos(\sphericalangle DCO) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\sphericalangle DCE)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{12}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos(\sphericalangle DCO) = \frac{CG_1}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{6} = \frac{\frac{x^2}{12}}{R^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2(3-\sqrt{5})} \Leftrightarrow R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(3+\sqrt{5})}{8} \Leftrightarrow R^2 = \frac{x^2(5+\sqrt{5})}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{x\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4R}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Pentru calculul ariilor și volumelor corpurilor obținute în urma adăugării(lipirii) semisferelor de raze d la sfera de rază R (corpurile obținute sunt considerate pline), vom folosi, în toate cazurile, formulele următoare:

$$A_{\text{corpului}} = A_{\text{sferii}} - n \cdot A_{\text{calotei}} + n \cdot A_{\text{semisferei}}$$

$$V_{\text{corpului}} = V_{\text{corp sferic}} + n \cdot V_a$$

Am notat cu V_a volumul adăugat sferei prin lipirea unei semisfere (mai exact volumul cuprins între sferă și semisferă); n reprezintă numărul de semisfere lipite sferei inițiale; A_{calotei} este aria unei calote acoperită de o semisferă. Amintim formulele:

$$A_{\text{calotei}} = 2\pi Rh, \left(\text{în fig.8, } h = OD = R - \sqrt{R^2 - d^2} \right); A_{\text{sferii}} = 4\pi R^2; V_{\text{corpulsferic}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

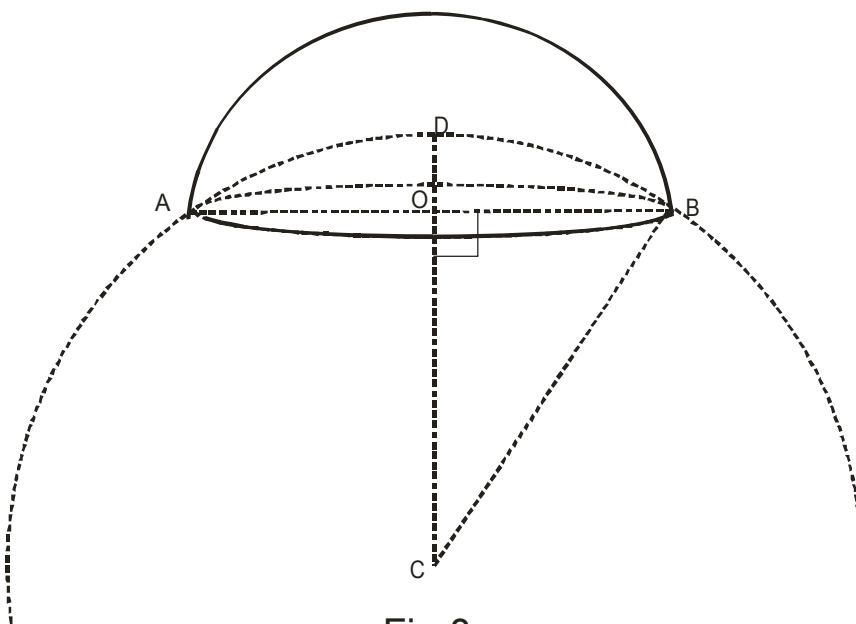


Fig.8

Mai observăm că:

$$V_a = V_{\text{semisferăplină}} - V_{\text{segment sferic}} \text{ (calota plină)}.$$

$$V_{\text{segment sferic}} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

În cazul nostru $R_1 = d, R_2 = 0$, iar h este cel de mai sus. Obținem: $V_a = \frac{2\pi d^3}{3} - \frac{\pi h^3}{6} - \frac{\pi h d^2}{2}$.

Cum, în toate cazurile, elementele necesare în aceste formule sunt calculate mai sus, putem considera problema rezolvată.

PS: Nu calculele din final reprezintă partea interesantă a problemei, ci ceea ce a trebuit calculat până a se ajunge aici.

APLICAȚII:

Relații între elementele poliedrelor regulate.

1. Vom folosi în continuare rezultatele găsite pe parcursul rezolvării problemei, pentru a determina *relațiile dintre:*

R - raza sferei circumscrise unui poliedru regulat;

r - raza sferei înscrise în poliedru regulat;

ρ - raza cercului circumscris unei fețe a poliedrului regulat.

Evident că în toate cazurile este adevărată relația: $R^2 = r^2 + \rho^2$.

Vom folosi de asemenea lungimea laturii l_n a unui poligon regulat cu n laturi (care în problema noastră a fost notată cu x) în funcție de raza ρ a cercului circumscris poligonului:

$$l_3 = \rho\sqrt{3}; \quad l_4 = \rho\sqrt{2}; \quad l_5 = \rho \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

1. Tetraedru regulat:

$l_3 = \rho\sqrt{3}$ împreună cu rezultatul din problemă $x = l_3 = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ conduce la

$$\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}R; \quad r = \frac{R}{3}.$$

2. *Cub:*

$l_4 = \rho\sqrt{2}$ împreună cu rezultatul din problemă $x = l_4 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ conduce la:

$$\rho = \frac{R\sqrt{6}}{3}; \quad r = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

3. *Octaedru regulat:*

$l_3 = \rho\sqrt{3}$ (are fețele triunghiuri echilaterale) împreună cu rezultatul din problemă $x = l_3 = R\sqrt{2}$ conduce la:

$$\rho = \frac{R\sqrt{6}}{3}; \quad r = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

4. *Dodecaedru regulat:*

$l_5 = \rho \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ (are fețele pentagoane regulate) împreună cu rezultatul din problemă

$x = l_5 = \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3}$ conduce la:

$$\rho = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}; \quad r = \frac{R\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}.$$

5. *Icosaedru regulat:*

$l_3 = \rho\sqrt{3}$ (are fețele triunghiuri echilaterale) împreună cu rezultatul din problemă

$x = l_3 = \frac{4R}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ conduce la:

$$\rho = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}; \quad r = \frac{R\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}.$$

Am mai găsit aceste rezultate, fără calcule amănunțite, (împreună cu justificarea coincidenței rezultatelor de la cub și octaedru regulat, iar apoi a celor de la dodecaedru regulat și icosaedru regulat) în cartea „Lecții de geometrie elementară și geometrie în spațiu” a lui Jacques Hadamard, Ed. Tehnică, București 1961.

2. Măsurile unghiurilor diedre a două fețe alăturate ale unui poliedru regulat:

Pentru tetraedru regulat, cub și octaedru regulat, acestea sunt ușor de calculat, iar pentru dodecaedru regulat și icosaedru regulat, apelăm la rezultatele obținute pe parcursul rezolvării problemei. Obținem pentru:

$$\text{Tetraedru regulat: } \alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,23095941734077 \text{ radiani;}$$

$$\text{Cub: } \alpha = \frac{\pi}{2} \approx 1,5707963267948966 \text{ radiani;}$$

$$\text{Octaedru regulat: } \alpha = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,910633236249 \text{ radiani;}$$

$$\text{Dodecaedrul regulat: } \alpha = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 2,0344439357957 \text{ radiani;}$$

$$\text{Icosaedrul regulat: } \alpha = \pi - \arcsin \frac{2}{3} \approx 2,4118649973628268 \text{ radiani.}$$

Se observă că măsura unghiului diedru crește o dată cu creșterea numărului de fețe ale poliedrului regulat.

Voi alcătui acum un tabel cumulativ al rezultatelor obținute, deoarece am căutat mult așa ceva și nu am găsit decât rezultate parțiale. Acesta poate fi util multora pe viitor.

În tabel am folosit următoarele notații pentru elementele poliedrului regulat:

l = latura poliedrului;

r = raza sferei înscrisă în poliedru;

ρ = raza cercului circumscris unei fețe a poligonului;

α = măsura unghiului diedru a două fețe alăturate ale poliedrului;

R = raza sferei circumscrise poliedrului.

Elemente → Poliedre ↓	l	r	ρ	α
Tetraedrul regulat	$\frac{2\sqrt{6}}{3}R$	$\frac{R}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}R$	$\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,23095941734077$
Cubul	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	$\frac{R\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5707963267948966$
Octaedrul regulat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	$\frac{R\sqrt{6}}{3}$	$\pi - \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,910633236249$
Dodecaedrul regulat	$\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{3}$	$\frac{R\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$\pi - \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 2,0344439357957$
Icosaedrul regulat	$\frac{4R}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{R\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$\pi - \arcsin \frac{2}{3} \approx 2,4118649973628268$

Bibliografie:

1. „Lecții de geometrie elementară și geometrie în spațiu” a lui Jacques Hadamard, Ed. Tehnică, București 1961;
2. Gazeta matematică ediție electronică;
3. www.didactic.ro și multe alte adrese de net.

Prof. Constantin Telteu,

COLEGIUL NAȚIONAL DE ARTE „REGINA MARIA”, Constanța

About q -Bernstein polynomials

Andreea Veşeleanu

Babes- Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Cluj - Napoca, Romania.

Due to the importance of Bernstein polynomials, many of their generalizations and related topics has been intensive research. In recent year, the q - Bernstein polynomials have attracted much interest and a great number of interest ing results have been obtained [5], [6], [8], [13], [19], [20], [16], [17], [19] .

In 1912, S. N. Bernstein published his famous paper [2] containing a constructive proof of the Weierstrass Approximation Theorem. Using the Law of Large Numbers for a sequence of Bernoulli trials he defined polynomials called in nowadays *Bernstein polynomials*. Later it was found that Bernstein polynomials possess many remarkable properties, which made them an area of intensive research. A systematic treatment of the theory of Bernstein polynomials as it was until the 90's is presented [10],[16] . New papers are constantly coming out and new applications [3] and generalizations are being discovered [13]. The aim of these generalizations is to provide appropriate tools for studying various problems of analysis, geometry, statistical inference and computer science.

The rapid development of q - calculus has led to the discovery of new generalizations of Bernstein polynomials involving q - integers. The first person how make progress in this direction was Lupaş. In 1987 he introduced [7] a q - analogue of the Bernstein operator and investigated its approximating and shape- preserving properties [1].

In 1997, Phillips [14] introduced another generalization on Bernstein polynomials based on q - integers called *q - Bernstein polynomials*. The q - Bernstein polynomials attracted a lot of interest and were studied widely by a number of authors from different perspectives. A review of the results on the q - Bernstein polynomials, along with an extensive bibliography on this subject and a collection of open problems is given in [9]. The subject remains under ample study, and there have been new papers constantly coming out [11],[24], [25] .

It has been known ([14] and references therein) that some properties of the classical Bernstein polynomials are extended to the q - Bernstein polynomials. For example, the q - Bernstein polynomials posses the end- point interpolations property, the shape- preserving properties on the case $0 < q < 1$, and representation via divided differences. Like the Bernstein polynomials, the q - Bernstein polynomials reproduce linear functions, and are degree- reducing on the set of polynomials.

On the other hand, the approximation properties of the q - Bernstein polynomials are essentially different from those of the classical ones. What is more, the cases $0 < q < 1$ and $q > 1$ are not similar to each other. This absence of similarity is caused by the fact that, for $0 < q < 1$, the q - Bernstein polynomials are positive linear operators on $C[0, 1]$, while for $q > 1$, the positivity does not hold any longer. It should be pointed out that in terms of the convergence properties, the similarity between the classical Bernstein and q - Bernstein polynomials ceases to be true even on the case $0 < q < 1$ [5], [17] . This is because, for $0 < q < 1$, the q - Bernstein polynomials, despite being positive linear operators, do not satisfy the conditions of Korovkin's Theorem. They do, however,

satisfy the conditions of Wang' s Korovkin – type theorem [18], serving as a model example for the theorem.

Due to the lack of positivity, the study of the convergence properties of the q - Bernstein polynomials in the case $q < 1$ turns out to be essentially more complicated than the one in the case $0 < q < 1$. In spite of the intensive research conducted in this area recently, the class of functions in $C[0, 1]$ uniformly approximated by their q - Bernstein polynomials when $q > 1$ is yet to be described. However, the results obtained for specific classes of functions have already revealed some new phenomena as well as interesting facts [10], [11], [20] . To some extent, the explanation for such an exotic behavior of the q - Bernstein polynomials is present in [19].

It has been proved there that basic q - Bernstein polynomials combine the fast increase magnitude with the sign oscillations on $[0, 1]$. This creates substantial hurdles in the numerical study of the q - Bernstein polynomials for $q > 1$. It is exactly this unexpected behavior of q - Bernstein polynomials with respect to convergence that makes the study of such properties interesting and challenging.

References

- [1] O. Agratini, *On certain q - analogues of the Bernstein operators*, Carpatian J. Math. 20 (1) (2008) 1- 6.
- [2] S.N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités*, Commun. Soc. Math. Charkow, 13 (1912), 1 - 2.
- [3] S. Cooper and S. Waldron, *The eigenstructure of the Bernstein operators*, J. Approx. Theory 105 (2000), 133-165.
- [4] R. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer- Verlag, 1993.
- [5] A. Il'inskii, S. Ostrovska, *Convergence of generalized Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory 116, (2002), 100 - 112.
- [6] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Chelsea, New York, 1986.
- [7] A. Lupaş, *A q - analogue of the Bernstein operators*, University of Cluj- Napoca, Seminar on numerical and statistical calculus, No. 9 (1987) 85 - 92.
- [8] S. Ostrovska, *q - Bernstein polynomials and their iterates*, J. Approx. Theory 123 (2) (2003) 232- 255.
- [9] S. Ostrovska, *The first decade of the q - Bernstein polynomials: results and perspectives*, J. of Math. Anal. Approx. Theory 2 (1) (2007) 35 -51.
- [10] S. Ostrovska, *The approximation of power function by the q - Bernstein polynomials in the case $q > 1$* , Math. Computer. 198 (1) (2008) 585 - 597.
- [11] S. Ostrovska, *q - Bernstein polynomials of the Cauchy kernel*, Appl. Math. Comput. 198 (1) (2008) 261 - 270.
- [12] S. Ostrovska, *On the approximation of analytic functions by the q - Bernstein polynomials, in the case $q > 1$* , Electron. Trans. Numer. Anal. 37 (2010) 105 - 112.
- [13] S. Petrone, *Random Bernstein polynomials*, Scand. J. Statist. 26 (1999), 373- 393.
- [14] G.M. Phillips, *Bernstein polynomials based on the q - integers*, Annals Numer. Math. 4 (1997) , 511- 518.
- [15] G.M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, CMS Books in Mathematics, vol. 14, Springer, Berlin, 2003.

- [16] V. S. Videnskii, *Bernstein polynomials*, Leningrad State Pedagogical University, Leningrad, 1990 (in Russian).
- [17] V. S. Videnskii, *On some classes of q - parametric positive operators*, Operator Theory: Adv. Appl. 158 (2005), 213-222.
- [18] H. Wang, *Korovkin- type theorem and application*, J. Approx. Theory 132 (2) (2005) 258- 264.
- [19] H. Wang, S. Ostrovska, *The norm for the q - Bernstein operators in case $q > 1$* , Math. Computer. 79 (2010) 353- 363.
- [20] Z. Wu, *The saturation of the convergence on the interval $[0, 1]$ for the q - Bernstein polynomials in the case $q > 1$* , J. Anal. Appl. 357 (1) (2009) 137- 141.

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Prof. Antohe Florin
Școala Nichita Stănescu Galați

1.1 Noțiunea de ecuație diferențială.

Prin ecuație diferențială se înțelege acea ecuație a cărei necunoscută este o funcție de una sau mai multe variabile și în care pe lângă funcția necunoscută mai participă și derivatele acesteia până la un anumit ordin.

Ordinul maxim al derivatelor participante la ecuație se numește ordinul ecuației. Dacă funcția necunoscută are o singură variabilă, ecuația diferențială se numește ordinară, iar dacă funcția necunoscută are mai multe variabile atunci ecuația se numește cu derivate parțiale.

Definiția 1. Se numește ecuație diferențială ordinară de ordinul I cu funcția necunoscută $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o ecuație de forma :

$$(1) \quad F(t, x, x') = 0, \quad t \in I, \text{ unde :}$$

$t \in I$ este variabilă independentă.

$x=x(t)$, $t \in I$ este funcția necunoscută a ecuației de mai sus.

$x' = \frac{dx}{dt}$ este derivata de ordinul I a funcției necunoscute ;

$F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție precizată.

Definiția 2 : Prin soluție pentru ecuația diferențială (1) pe intervalul $I_1 \subseteq I$, înțelegem orice funcție $x: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in C^1(I_1)$ a.î $F(t, x(t), x'(t)) = 0$, $\forall t \in I_1$.

Definiția 3: Se numește sistem diferențial ordinar cu funcțiile necunoscute $x_1, x_2, \dots, x_n: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un sistem de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul I de forma:

$$\begin{cases} x_k' = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), t \in I \subset \mathbb{R} \text{ unde:} \\ k = \overline{1, n} \end{cases}$$

$x_k' = \frac{dx_k}{dt}$, $k = \overline{1, n}$ sunt derivatele funcțiilor necunoscute în raport cu variabila $t \in I \subset \mathbb{R}$.

$f_k: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ sunt funcții precizate definite pe mulțimea deschisă Ω .

Definiția 4: Se numește ecuație diferențială ordinară de ordin n cu funcția necunoscută $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o ecuație de forma $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$, $t \in I$, unde :

$x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$, $\forall k = \overline{0, n}$ este derivata de ordin k a funcției necunoscute :

$F: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție precizată.

1.2. Metode elementare de integrare a ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I

Ecuații diferențiale în formă normală.

Considerăm ecuația diferențială ordinară de ordinul I sub forma normală :

$$x' = f(t, x), t \in I \subseteq \mathbb{R}, \text{ unde } f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o funcție}$$

dată, având în general proprietatea de continuitate pe D.

Principalele tipuri de ecuații diferențiale în formă normală care se integrează prin metode elementare sunt:

- Ecuații diferențiale cu variabile separabile
- Ecuații diferențiale omogene și ecuații reducibile la acestea
- Ecuații diferențiale liniare și ecuații reducibile la acestea
- Ecuații diferențiale cu diferențială totală exactă.

Definiție: Spunem că ecuația diferențială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ se numește ecuație cu variabile separabile, dacă:

$$f(t, x) = g(t)h(x), t \in I_1, x \in I_2.$$

Teoremă : Dacă funcțiile $g : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue astfel încât $h \neq 0$ pe I_2 , atunci problema Cauchy :

$$\begin{cases} x' = g(t) \cdot h(x), t \in I_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \text{ unde } (t_0, x_0) \in I_1 \times I_2 \text{ fixat admite}$$

soluția unică $x = x(t, t_0, x_0) : I_1' \subseteq I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definită explicit prin:

$$x(t, t_0, x_0) = H^{-1} \left(H(x_0) + \int_{t_0}^t g(s) ds \right), \forall t \in I_1'.$$

Funcția $x \rightarrow H(x) = \int_a^x \frac{du}{h(u)}$, $x \in I_2$ este o primitivă a funcției h^{-1} pe I_2 .

Demonstrație:

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = g(t)h(x), t \in I_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

În ipotezele date h^{-1} admite primitive pe I_2 . Dacă $H(x) = \int_a^x \frac{du}{h(u)}$, $x \in I_2$ și $a \in I_2$ fixat ,

este o primitivă a funcției $\frac{1}{h}$ pe intervalul de continuitate al acesteia , atunci H este derivabilă pe I_2 și $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0, \forall x \in I_2$.

Astfel H este monotonă pe I_2 , (H este continuă pe I_2 din ipoteză) ceea ce implică H inversabilă pe I_2 . Integrând apoi membrul al doilea al ecuației date , pe intervalul $[t_0; t] \subset I_1$ obținem :

$$\int_a^x \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^t g(s)ds + c, \quad \forall x \in I_2, \forall t \in I_1 \quad (t_0 \in I_1, a \in I_2 \text{ fixate}).$$

Adică : $H(x) = \int_{t_0}^t g(s)ds + c, \quad \forall x \in I_2, \forall t \in I_1$, de unde $c = H(x(t_0)) = H(x_0)$.

Obținem : $x = x(t, t_0, x_0) = H^{-1}(H(x_0) + \int_{t_0}^t g(s)ds), \quad \forall t \in I_1' \subseteq I_1$.

Definiție :

Spunem că ecuația diferențială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq R$ se numește omogenă dacă funcția f este omogenă cu gradul zero de omogenitate:

$$f(t \cdot p, x \cdot p) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in D \subset R^2, \forall p \in R^*.$$

Observație:

Dacă ecuația diferențială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq R$ este omogenă , atunci prin operații elementare ea admite forma echivalentă: $x' = g\left(\frac{x}{t}\right), t \in I_1 \subseteq R$ unde , $g: I_2 \rightarrow R$ este o funcție dată.

Teoremă: Dacă funcția $g: I_2 \rightarrow R$ este continuă pe I_2 astfel încât $g(y) \cdot y \neq 0, \forall y \in I_2$,

atunci problema Cauchy $\begin{cases} x' = g\left(\frac{x}{t}\right), t \in I_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admite soluția unică $x = x(t, t_0, x_0)$,

$t \in I_1' \subseteq I_1$ exprimată parametric prin :

$$\begin{cases} t = t(y, t_0, x_0) = t_0 \cdot e^{\int_{y_0}^y \frac{du}{g(u) \cdot u}}, (\forall) y \in I_2 \\ x = x(y, t_0, x_0) = y \cdot t(y, t_0, x_0) \end{cases}$$

Demonstrație:

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = g\left(\frac{x}{t}\right), t \in I_1, (t_0, x_0) \in I_1 \times \mathbb{R} \text{ fixat.} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Efectuând schimbarea de funcție $x \rightarrow y$, dată prin $\frac{x}{t} = y$ obținem $x' = y + ty'$ iar ecuația

$$\text{devine : } y + ty' = g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y) - y} = \frac{dt}{t}.$$

Dacă $\int_a^y \frac{du}{g(u) - u}$ este o primitivă pe I_2 pentru funcția continuă $y \rightarrow \frac{1}{g(y) - y}$ atunci ,

prin integrare membru cu membru ecuația devine :

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{g(u) - u} = \ln \frac{t}{t_0} - \ln c, \forall t \in I_1' \subseteq I_1, \forall y \in I_2.$$

Astfel : $t = t(y, c) = c \cdot t_0 \cdot e^{\int_{y_0}^y \frac{du}{g(u) - u}}$ iar pentru $t = t_0$ (respectiv $x(t_0) = x_0$) rezultă $y(t_0) = \frac{x_0}{t_0}$ și $c=1$.

În consecință avem :

$$\begin{cases} t = t(y, t_0, x_0) = t_0 \cdot e^{\int_{y_0}^y \frac{du}{g(u) - u}}, \forall y \in I_2 \\ x = x(y, t_0, x_0) = y \cdot t(y, t_0, x_0) \end{cases}$$

Observații :

Dacă $f(t, x) = g\left(\frac{at + bx + c}{a_1t + b_1x + c_1}\right)$, $(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$ atunci ecuația diferențială $x' = f(t, x)$ este reductibilă la o ecuație diferențială omogenă .

$$\text{Cazul a) } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Fie (t_1, x_1) soluția unică a sistemului algebric și neomogen :

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ a_1t + b_1x + c_1 = 0 \end{cases} \text{ cu } \Delta \neq 0 \text{ iar } \begin{cases} t \rightarrow \tau \\ x \rightarrow y \end{cases} \text{ o schimbare dublă de variabilă și de funcție în}$$

$$\text{ecuația dată, definită prin } \begin{cases} \tau = t - t_1 \\ y = x - x_1 \end{cases}.$$

$$\text{Obținem } x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{dt} \text{ adică } x' = y'. , \text{ iar ecuația dată devine } y' = g\left(\frac{a\tau + by}{a_1\tau + b_1y}\right)$$

care este o ecuație diferențială omogenă.

Cazul b) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$

Fie $x \rightarrow y$ o schimbare de funcție în ecuația dată , definite prin $at+bx=y$.

Obținem $a + bx' = y'$, iar ecuația dată devine $\frac{1}{b}(y'-a) = g\left(\frac{y+c}{\frac{b_1}{b}y+c_1}\right)$ adică $y' = h(y)$ care

este o ecuație cu variabile separabile.

Definiție: Ecuația diferențială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ se numește liniară și neomogenă dacă $f(t, x) = P(t) \cdot x + Q(t), t \in I$, unde P și Q sunt funcții precizate, în general continue pe I.

Teoremă: Dacă funcțiile $P, Q: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe I iar $t_0 \in I$ fixat atunci problema

Cauchy $\begin{cases} x' = P(t) \cdot x + Q(t), t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admite soluția unică

$x = x(t, t_0, x_0), t \in I_1 \subseteq I$ exprimată explicit prin:

$$x = x(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^t Q(s) e^{-\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} ds \right], t \in I_1.$$

Demonstrație:

Facem observația că dacă $Q(t)=0, t \in I$ atunci ecuația $x' = P(t) \cdot x$ se numește liniară și omogenă , în fapt fiind o ecuație cu variabile separabile , cu soluția generală :

$$\bar{x}(t, c) = c \cdot x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t P(s) ds}, \forall t \in I.$$

Fie $c=c(t), t \in I$ astfel încât $x(t, c(t)) = c(t) \cdot x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t P(s) ds}, t \in I$ să fie soluția generală a ecuației inițiale.

Obținem : $c'(t) \cdot x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} + c(t) \cdot x_0 \cdot P(t) e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} = P(t) \cdot c(t) \cdot x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} + Q(t)$

$$\Leftrightarrow c'(t) = \frac{1}{x_0} \cdot Q(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds} \Rightarrow c(t) - c(t_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \int_{t_0}^t Q(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} ds \quad \text{de unde}$$

$$x_0 = x(t_0) = c(t_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow c(t_0) = 1.$$

$$\text{Aşadar} \quad , \quad x = x(t, t_0, x_0) = c(t) \cdot x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} = e^{\int_{t_0}^t P(s) ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^t Q(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} ds \right],$$

$$\forall t \in I_1 \subseteq I.$$

Definiţie : Fie $P, Q, R : I \rightarrow R$ funcţii precizate. Ecuaţia diferenţială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq R$ se numeşte ecuaţie de tip Bernoulli dacă :

$$f(t, x) = P(t) \cdot x + Q(t) \cdot x^\alpha, \alpha \in R.$$

iar dacă $f(t, x) = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t)$, ecuaţia $x' = f(t, x), t \in I \subseteq R$ se numeşte de tip Riccati.

Astfel de ecuaţii diferenţiale se reduc la ecuaţii liniare.

Teoremă :

a) Dacă $P, Q : I \rightarrow R$ sunt funcţii continue pe I atunci problema Cauchy :

$$\begin{cases} x' = P(t) \cdot x + Q(t) \cdot x^\alpha, t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ admite soluţia unică: } x = x(t, t_0, x_0) = [y(t, t_0, x_0)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ unde}$$

$$y(t, t_0, x_0) = e^{(1-\alpha) \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau} \left[x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_{t_0}^t Q(s) e^{-(1-\alpha) \int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} ds \right], \forall t \in I_1 \subseteq I.$$

b) Dacă $P, Q, R : I \rightarrow R$ sunt funcţii continue pe I iar $x_1 = x_1(t), t \in I_1 \subseteq I$ este o soluţie particulară dată a ecuaţiei de tip Riccati $x' = P(t) \cdot x^2 + Q(t) \cdot x + R(t)$, atunci problema Cauchy pentru această ecuaţie, admite soluţia unică :

$$x = x(t, t_0, x_0) = x_1(t) - \frac{1}{y(t, t_0, x_0)}, \text{ unde:}$$

$$y(t, t_0, x_0) = e^{-\int_{t_0}^t [2x_1(s)P(s) + Q(s)] ds} \left[\frac{1}{x_1(t_0) - x_0} + \int_{t_0}^t P(s) e^{\int_{t_0}^s [2x_1(\tau) \cdot P(\tau) + Q(\tau)] d\tau} ds \right], t \in I_1 \subseteq I.$$

Definiţie: Ecuaţia $x' = f(t, x), t \in I \subseteq R$ se numeşte ecuaţie diferenţială cu diferenţială totală exactă, dacă $f(t, x) = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, (t, x) \in D$ astfel încât $P(t, x)dt + Q(t, x)dx$ să fie diferenţială totală exactă.

Observaţii :

a) Forma diferenţială de ordinul I $P(t, x)dt + Q(t, x)dx$ se numeşte diferenţială totală exactă pe D dacă există funcţia $V \in C^1(D)$ astfel încât:

$$dV(t, x) = P(t, x)dt + Q(t, x)dx, \forall (t, x) \in D.$$

b) Se demonstrează că $P(t, x)dt + Q(t, x)dx$ este diferențială totală exactă dacă și numai dacă $P, Q \in C^1(D)$ astfel încât $\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x), \forall (t, x) \in D$.

În acest caz, $V(t, x) = \int_{t_0}^t P(s, x_0)ds + \int_{x_0}^x Q(t, s)ds$ și se numește primitivă a formei diferențiale totale exacte.

Teoremă : Ecuația diferențială $P(t, x) \cdot dt + Q(t, x) \cdot dx = 0$ cu diferențială totală exactă admite soluția generală $x=x(t, c)$ definită implicit prin $V(t, x)=c, \forall t \in I_1 \subseteq I$, unde V este o primitivă a formei diferențiale exacte din enunț.

Demonstrație :

Deoarece pentru ecuația $P(t, x) \cdot dt + Q(t, x) \cdot dx = 0$, forma diferențială $Pdt + Qdx$ este diferențială totală exactă atunci există $V \in C^1(D)$ astfel încât:

$$V(t, x) = \int_{t_0}^t P(s, x_0)ds + \int_{x_0}^x Q(t, s)dt, \forall (t, x) \in D.$$

Ecuația inițială devine $dV(t, x) = 0$, de unde rezultă că $V(t, x)=c, t \in I_1 \subseteq I$

Alte tipuri de ecuații diferențiale elementare

În teoria ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I $F(t, x, x') = 0, t \in I \subseteq \mathbb{R}$, care nu admit forma diferențială $x' = f(t, x), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ se cunosc și alte tipuri particulare care se pot integra prin metode elementare și anume:

- Ecuații diferențiale rezolvabile în raport cu x :

$$x = f(t, x'), t \in I \subseteq \mathbb{R}$$
- Ecuații diferențiale implicite, incomplete:

$$F(t, x') = 0, t \in I \subseteq \mathbb{R} \quad \text{sau}$$

$$F(x, x') = 0, t \in I \subseteq \mathbb{R}$$
- Ecuații diferențiale ordinare de ordin superior care se integrează prin reducerea ordinului.

Definiție: Ecuația diferențială $x = f(t, x'), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ se numește ecuație de tip Lagrange, dacă $f(t, x') = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'), t \in I_1 \subseteq \mathbb{R}$ unde $\varphi, \psi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții precizate.

Observație :

O ecuație diferențială $F(t, x, x') = 0$ admite soluții singulare, dacă există funcții $x : I \rightarrow \mathbb{R}, x \in C^1(I)$ care verifică pe I ecuația dată și nu se obțin din soluția generală prin particularizarea constantei $c \in \mathbb{R}$.

Teoremă :

a) Dacă funcțiile $\varphi, \psi : I_2 \rightarrow R$ satisfac $\varphi, \psi \in C^1(I_2)$ astfel încât $p - \varphi(p) \neq 0, \forall p \in I_2$ atunci ecuația diferențială de tip Lagrange admite soluția generală $x = x(t, c), t \in I_1 \subseteq I$ exprimată parametric prin:

$$\begin{cases} t = t(p, c) = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} \left[c + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} dp \right], \forall p \in I_2 \text{ unde } c \in R \text{ oarecare.} \\ x = x(p, c) = t\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

b) Dacă $\exists p_0 \in I_2$ astfel încât $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ atunci ecuația diferențială Lagrange admite soluția singulară definită explicit :

$$x = x(t) = p_0 t + \psi(p_0), \forall t \in I.$$

Demonstrație:

a) Fie ecuația de tip Lagrange : $x = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'), t \in I \subseteq R.$

Efectuăm schimbarea de funcție $x \rightarrow p$ dată prin $x' = p$.

Ecuația devine $p = \varphi(p) + t \cdot p' \cdot \varphi'(p) + p' \psi'(p) \Leftrightarrow p - \varphi(p) = p' [t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)]$

$\Leftrightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, p \in I_2$ care este o ecuație diferențială liniară cu soluția

generală $t = t(p, c)$ exprimată explicit prin :

$$t = t(p, c) = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} \left[c + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} dp \right], \forall p \in I_2 \text{ iar}$$

$$x = x(p, c) = t \cdot \varphi(p) + \psi(p).$$

b) Dacă $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ atunci $x' = p_0 \Leftrightarrow x(t, c) = p_0 \cdot t + c$.

Dar, din ecuația inițială $x(t) = p_0 \cdot t + \psi(p_0)$.

Deducem $c = \psi(p_0)$ și $x = x(t) = p_0 \cdot t + \psi(p_0), \forall t \in I$.

Definiție.

Ecuația diferențială $x = f(t, x'), t \in I \subseteq R$ se numește ecuație de tip Clairaut, dacă $f(t, x') = t \cdot x' + \psi(x'), t \in I \subseteq R$ unde $\psi : I_2 \rightarrow R$ este o funcție precizată.

Teoremă : Dacă funcția $\psi \in C^1(I_2)$ atunci ecuația de tip Clairaut $x' = t \cdot x' + \psi(x')$ admite soluția generală $x = x(t, c) = t \cdot c + \psi(c), \forall t \in I$ și de asemenea o soluție singulară exprimată parametric prin :

$$\begin{cases} t = t(p) = -\psi'(p) \\ x = x(p) = p \cdot t(p) + \psi(p) \end{cases}, (\forall) p \in I_2.$$

Demonstrație :

Se efectuează schimbarea de funcție $x \rightarrow p$ definită prin $x' = p$ și se obține :

$$p = p + t \cdot p' + p' \psi'(p) \Leftrightarrow p' (t + \psi'(p)) = 0.$$

Cazul a) $p' = 0 \Leftrightarrow p = c \Leftrightarrow x' = c \Leftrightarrow x = x(t, c, k) = c \cdot t + k$

Din ecuația inițială deducem $k = \psi(c)$ și $x(t) = t \cdot c + \psi(c), (\forall) t \in I$.

Cazul b) $t + \psi'(p) = 0 \Rightarrow t = t(p) = -\psi'(p)$ iar $x = x(p) = p \cdot t(p) + \psi(p), (\forall) p \in I_2$

Bibliografie

1. Bendrea Constantin – Ecuații diferențiale.

Identitati ale numerelor complexe si aplicatii ale acestora in geometrie

Abstract : Articolul de mai jos , contine o serie de probleme , legate de anumite identitati ale numerelor complexe , probleme ce sunt insotite de comentarii , unele dintre ele avand interpretari geometrice remarcabile .

Acest material se adreseaza , in primul rand , elevilor de clasa a X a , dar si tuturor pasionatilor de matematica .

Voi folosi in acest material , doar proprietatile de baza , legate de conjugatul sau modulul unui numar complex , si in primul rand identitatea : $z\bar{z}=|z|^2$.

Problema 1

Aratati ca $(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ si $(\forall)z\in\mathbb{C}^*$, are loc relatia :

$$|az - b\bar{z}|^2 + |az + b\bar{z}|^2 = 2(a^2 + b^2) |z|^2 .$$

Solutie :

$$\begin{aligned} \text{Avem } |az - b\bar{z}|^2 &= (az - b\bar{z})(\overline{az - b\bar{z}}) = (az - b\bar{z})(a\bar{z} - bz) = \\ &= a^2|z|^2 + b^2|z|^2 - ab(z^2 + \bar{z}^2) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Analog } |az + b\bar{z}|^2 &= (az + b\bar{z})(\overline{az + b\bar{z}}) = (az + b\bar{z})(a\bar{z} + bz) = \\ &= a^2|z|^2 + b^2|z|^2 + ab(z^2 + \bar{z}^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Adunand relatiile (1) si (2) , se obtine relatia din enunt .

Observatia 1 :

Daca $z \in \mathbb{R}^*$, atunci $z = \bar{z}$, si identitatea devine :

$$|a - b|^2 |z|^2 + |a + b|^2 |z|^2 = 2(a^2 + b^2) |z|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a - b|^2 + |a + b|^2 = 2(a^2 + b^2) , (\forall) a, b \in \mathbb{R} \text{ (evident) } .$$

Observatia 2 :

Daca $|z| = 1$, atunci $z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ si identitatea devine :

$$\left| az - \frac{b}{z} \right|^2 + \left| az + \frac{b}{z} \right|^2 = 2(a^2 + b^2) .$$

Problema 2

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si $k \in \mathbb{R}$. Aratati ca :

$$|z_1 - kz_2|^2 + |z_2 - kz_1|^2 = (1+k^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2k(z_1 z_2 + z_2 z_1)$$

Solutie :

$$\begin{aligned} \text{Avem : } |z_1 - kz_2|^2 &= (z_1 - kz_2)(\overline{z_1 - kz_2}) = (z_1 - kz_2)(\bar{z}_1 - k\bar{z}_2) = \\ &= |z_1|^2 + k^2 |z_2|^2 - k(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog : } |z_2 - kz_1|^2 &= (z_2 - kz_1)(\overline{z_2 - kz_1}) = (z_2 - kz_1)(\bar{z}_2 - k\bar{z}_1) = \\ &= |z_2|^2 + k^2 |z_1|^2 - k(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) . \end{aligned}$$

Adunand relatiile , avem :

$$|z_1 - kz_2|^2 + |z_2 - kz_1|^2 = (1+k^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2k(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) .$$

Observatie :

Prin particularizari ale acestei identitati se pot obtine numeroase alte identitati . Invit cititorii pasionati sa construiasca alte probleme.

Problema 3

Aratati ca , oricare ar fi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, au loc identitatile :

$$1) |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 .$$

$$2) |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) .$$

Solutie :

Vom face urmatoarele notatii :

$$S_1 = |z_1 + z_2 + z_3|^2$$

$$S_2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

$$S_3 = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$$

$$S_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 .$$

Atunci :

$$S_1 = (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2)$$

Deci $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_1 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_3 z_2 = S_1 - S_4$.

$$\begin{aligned} S_2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_2 + z_3)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) + (z_3 + z_1)(\bar{z}_3 + \bar{z}_1) = \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_1 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_3 z_2) = \\ &= 2S_4 + S_1 - S_4 = S_1 + S_4. \end{aligned}$$

Astfel s-a obtinut relatia 1).

Asemanator , avem :

$$\begin{aligned} S_3 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - (z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2) = \\ &= 2S_4 - (S_1 - S_4) = 3S_4 - S_1. \end{aligned}$$

Deci $S_3 + S_1 = 3S_4$, care este exact relatia 2).

Interpretari geometrice :

Fie ΔABC cu $A(z_1)$, $B(z_2)$ si $C(z_3)$, intr-un reper cartezian XOY.

S-au notat cu z_1, z_2, z_3 , afixele punctelor A,B,C .

Sa notam cu M,N,P mijloacele laturilor BC, CA ,AB , si cu G centrul de greutate al ΔABC .

Atunci se stie ca :

$$M\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right), N\left(\frac{z_1 + z_3}{2}\right), P\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \text{ si } G\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right).$$

Atunci :

$$OM^2 = \left| \frac{z_2 + z_3}{2} \right|^2 = \frac{|z_2 + z_3|^2}{4}$$

$$ON^2 = \left| \frac{z_1 + z_3}{2} \right|^2 = \frac{|z_1 + z_3|^2}{4}$$

$$OP^2 = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 = \frac{|z_1 + z_2|^2}{4}$$

$$OG^2 = \left| \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right|^2 = \frac{|z_1 + z_2 + z_3|^2}{9}.$$

Se mai stie ca : $OA^2 = |z_1|^2$, $OB^2 = |z_2|^2$, $OC^2 = |z_3|^2$ si

$$AB = |z_1 - z_2| , BC = |z_2 - z_3| , CA = |z_1 - z_3| .$$

Atunci relatia 1) se rescrie astfel :

$$4(OM^2 + ON^2 + OP^2) = 9OG^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \quad (3)$$

Relatia 2) se rescrie :

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 + 9OG^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \quad (4)$$

Din (3) si (4) , s-ar putea deduce relatia :

$$4(OM^2 + ON^2 + OP^2) - (OA^2 + OB^2 + OC^2) = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2) , \text{ sau echivalent :}$$

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 4(OA^2 + OB^2 + OC^2 - OM^2 - ON^2 - OP^2) \quad (5) .$$

Problema 4

Aratati ca , oricare ar fi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, are loc relatia :

$$\left| z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2} \right|^2 + \left| z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2} \right|^2 + \left| z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 =$$

$$= \frac{9(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - 3|z_1 + z_2 + z_3|^2}{4}.$$

Solutie :

$$\begin{aligned} \text{Avem : } & \left| z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2} \right|^2 + \left| z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2} \right|^2 + \left| z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 = \\ & = \frac{|2z_1 - z_2 - z_3|^2}{4} + \frac{|2z_2 - z_1 - z_3|^2}{4} + \frac{|2z_3 - z_1 - z_2|^2}{4}. \end{aligned}$$

In continuare , efectuand calculele care sunt destul de laborioase , si necesita multa rabdare , si folosind notatiile din problema precedenta , obtinem relatia din enunt .

Observatie : In efectuarea calculelor s-a tinut cont de faptul ca :

$|2z_1 - z_2 - z_3|^2 = (2z_1 - z_2 - z_3)(2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3)$ si analog celelalte doua relatii.

Interpretare geometrica :

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = \frac{9(OA^2 + OB^2 + OC^2 - 3OG^2)}{4}.$$

Notatiile sunt cele din problemele precedente , iar AM , BN SI CP sunt medianele ΔABC .

Problema propusa :

Fie ε o radacina complexa a unitatii , diferita de 1 .

Atunci *oricare ar fi* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, exista $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $a+b+c=0$,

astfel incat :

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = a |z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3|^2 + b |z_1 + z_2 + z_3|^2 + c (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2).$$

Autor : Marcu Stefan Florin-profesor-grad II-Grup Scolar de Transporturi Auto-Calarasi .

NUMERE PRIME MERSENNE

DUMITRU PANȚURU¹

Numerele lui Mersenne sunt numere de forma

$$M_n = 2^n - 1, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dacă $n > 1$ este număr întreg prim și numărul M_n este prim, atunci M_n se numește număr prim Mersenne.

Calcululele necesare identificării de numere prime Mersenne sunt foarte laborioase și necesită o rețea de calculatoare dotate cu sisteme de operare foarte complexe.

Există multe situații în care dorim să știm dacă un număr Mersenne este prim.

Pentru a determina dacă un număr Mersenne este prim, se folosesc teste probabilistice de primalitate. Dacă trec mai multe teste de primalitate, numărul este foarte probabil prim, iar dacă nu trece un test, este sigur un număr compus.

I. NOȚIUNI ELEMENTARE DE ARITMETICĂ

Ultimele două cifre ale oricărui număr impar (exclus cele divizibile cu 5), sunt:

Tabelul 1

01;	11;	21;	31;	41;	51;	61;	71;	81;	91;
03;	13;	23;	33;	43;	53;	63;	73;	83;	93;
07;	17;	27;	37;	47;	57;	67;	77;	87;	97;
09;	19;	29;	39;	49;	59;	69;	79;	89;	99.

Numerele prime au ultimele două cifre conform tabelului 1, iar numerele Mersenne, $2^n - 1$, au ultimele două cifre astfel:

Tabelul 2

$2^{\dots 01} - 1 = \dots 51$	$2^{\dots 03} - 1 = \dots 07$	$2^{\dots 07} - 1 = \dots 27$	$2^{\dots 09} - 1 = \dots 11$
$2^{\dots 11} - 1 = \dots 47$	$2^{\dots 13} - 1 = \dots 91$	$2^{\dots 17} - 1 = \dots 71$	$2^{\dots 19} - 1 = \dots 87$
$2^{\dots 21} - 1 = \dots 51$	$2^{\dots 23} - 1 = \dots 07$	$2^{\dots 27} - 1 = \dots 27$	$2^{\dots 29} - 1 = \dots 11$

¹ Prof. Dr. Ing. ,

e-mail: dimitru.panturu@yahoo.com

$2^{\dots 31} - 1 = \dots 47$	$2^{\dots 33} - 1 = \dots 91$	$2^{\dots 37} - 1 = \dots 71$	$2^{\dots 39} - 1 = \dots 87$
$2^{\dots 41} - 1 = \dots 51$	$2^{\dots 43} - 1 = \dots 07$	$2^{\dots 47} - 1 = \dots 27$	$2^{\dots 49} - 1 = \dots 11$
$2^{\dots 51} - 1 = \dots 47$	$2^{\dots 53} - 1 = \dots 91$	$2^{\dots 57} - 1 = \dots 71$	$2^{\dots 59} - 1 = \dots 87$
$2^{\dots 61} - 1 = \dots 51$	$2^{\dots 63} - 1 = \dots 07$	$2^{\dots 67} - 1 = \dots 27$	$2^{\dots 69} - 1 = \dots 11$
$2^{\dots 71} - 1 = \dots 47$	$2^{\dots 73} - 1 = \dots 91$	$2^{\dots 77} - 1 = \dots 71$	$2^{\dots 79} - 1 = \dots 87$
$2^{\dots 81} - 1 = \dots 51$	$2^{\dots 83} - 1 = \dots 07$	$2^{\dots 87} - 1 = \dots 27$	$2^{\dots 89} - 1 = \dots 11$
$2^{\dots 91} - 1 = \dots 47$	$2^{\dots 93} - 1 = \dots 91$	$2^{\dots 97} - 1 = \dots 71$	$2^{\dots 99} - 1 = \dots 87$

Ultimele două cifre ale pătratelor numerelor întregi sunt:

Tabelul 3

$\dots 00$	$\dots 01$	$\dots 16$	$\dots 21$	$\dots 36$	$\dots 41$	$\dots 56$	$\dots 61$	$\dots 76$	$\dots 81$	$\dots 96$
	$\dots 04$		$\dots 24$		$\dots 44$		$\dots 64$		$\dots 84$	
	$\dots 06$		$\dots 25$		$\dots 49$		$\dots 69$		$\dots 89$	
	$\dots 09$		$\dots 29$							

Variante posibile de obținere a ultimelor două cifre ale numărului $2^n - 1$, cu ajutorul ultimelor două cifre ale pătratelor numerelor întregi conform relației $x^2 - y^2$ (tabelul 4).

Tabelul 4

11:	$\dots 00 -$ $\dots 89$ $\dots 11$	$\dots 36 -$ $\dots 25$ $\dots 11$			
51:	$\dots 00 -$ $\dots 49$ $\dots 51$	$\dots 76 -$ $\dots 25$ $\dots 51$			
71:	$\dots 00 -$ $\dots 29$ $\dots 71$	$\dots 96 -$ $\dots 25$ $\dots 71$			
91:	$\dots 00 -$ $\dots 09$ $\dots 91$	$\dots 16 -$ $\dots 25$ $\dots 91$			
07:	$\dots 16 -$ $\dots 09$ $\dots 07$	$\dots 36 -$ $\dots 29$ $\dots 07$	$\dots 56 -$ $\dots 49$ $\dots 07$	$\dots 76 -$ $\dots 69$ $\dots 07$	$\dots 96 -$ $\dots 89$ $\dots 07$
27:	$\dots 36 -$ $\dots 09$ $\dots 27$	$\dots 56 -$ $\dots 29$ $\dots 27$	$\dots 76 -$ $\dots 49$ $\dots 27$	$\dots 96 -$ $\dots 69$ $\dots 27$	$\dots 16 -$ $\dots 89$ $\dots 27$

$$\begin{array}{ccccc}
 47: & \dots 16 - & \dots 36 - & \dots 56 - & \dots 76 - & \dots 96 - \\
 & \frac{\dots 69}{\dots 47} & \frac{\dots 89}{\dots 47} & \frac{\dots 09}{\dots 47} & \frac{\dots 29}{\dots 47} & \frac{\dots 49}{\dots 47} \\
 87: & \dots 16 - & \dots 36 - & \dots 56 - & \dots 76 - & \dots 96 - \\
 & \frac{\dots 29}{\dots 87} & \frac{\dots 49}{\dots 87} & \frac{\dots 69}{\dots 87} & \frac{\dots 89}{\dots 87} & \frac{\dots 09}{\dots 87}
 \end{array}$$

II. ELEMENTE DE TEORIA NUMERELOR

Dacă " n " este număr prim, atunci oricare divizor natural al numărului M_n este de forma $2K_0n+1$, unde K_0 este un număr întreg ≥ 0 (sau $2K+1$).

Numărul M_n este divizor al numărului M_n , și se poate scrie $M_n = 2K+1$.

Teoremă: Orice număr prim impar este diferența pătratelor a două numere naturale și aceasta în mod unic.

S-a demonstrat că dacă un număr impar are descompunere unică într-o diferență de pătrate a două numere întregi, atunci el este un număr prim. [W. Sierpinski, A section of problems in the theory of numbers, Pergamon Pres. Oxford. London. New York. Paris. PWN – Polish Scientific publications, Worszaw, 1964].

III. DESCOMPUNEREA UNUI NUMĂR MERSENNE (NUMĂR PRIM) ÎNTR-O DIFERENȚĂ A DOUĂ PĂTRATE

Se dau numerele Mersenne $2^n - 1$ și $2^{m+1} - 1$, unde $n, m+1$ sunt numere prime.

Se aleg corespunzător numerele prime $n, m+1$, astfel încât $a = m+n$ să fie număr prim. Rezultă relația:

$$2^a - 1 = 2^m(2^n - 2) + 2^{m+1} - 1$$

Numerele $2^a - 1, 2^n - 1, 2^{m+1} - 1$, sunt numere Mersenne, unde a, n și $m+1$ sunt numere prime.

Conform capitolului II se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 2^n - 1 &= 2K_1 + 1 & 2^n - 2 &= 2K_1 \\
 2^{m+1} - 1 &= 2K_2 + 1 & 2^{m+1} &= 2K_2 + 2 \\
 2^a - 1 &= 2^m[2K_1] + 2K_2 + 1 = 2^{m+1} \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 1 = \\
 &= (2 \cdot K_2 + 2) \cdot K_1 + 2K_2 + 1 = 2K_1K_2 + 2K_1 + 2K_2 + 1 \\
 2^a - 1 &= 2K_1K_2 + 2K_1 + 2K_2 + 1
 \end{aligned}$$

Relația poate lua forma:

$$\begin{aligned}
 2^a - 1 &= \left\{ (K_1 K_2)^2 - (K_1 K_2)^2 + K_1^2 - K_1^2 + K_2^2 - K_2^2 + 2K_1^2 K_2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2K_1^2 K_2 + 2K_1 K_2^2 - 2K_1 K_2^2 + 2K_1 K_2 - 2K_1 K_2 \right\} + 2K_1 K_2 + 2K_1 + 2K_2 + 1 = \\
 &= [K_1 K_2 + K_1 + K_2 + 1]^2 - [K_1 K_2 + K_1 + K_2]^2 \\
 &\text{sau} \\
 2^a - 1 &= \left[\frac{2K_1 K_2 + 2K_1 + 2K_2 + 1 + 1}{2} \right]^2 - \left[\frac{2K_1 K_2 + 2K_1 + 2K_2 + 1 - 1}{2} \right]^2 = \\
 &= \left[\frac{(2^a - 1) + 1}{2} \right]^2 - \left[\frac{(2^a - 1) - 1}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

Concluzie:

Orice număr Mersenne, unde „a” este număr prim, se descompune într-o diferență de pătrate a două numere întregi (descompunere de bază – primară).

Dacă numărul $2^a - 1$ admite încă o descompunere într-o diferență de pătrate a două numere întregi, atunci numărul nu este prim Mersenne.

Numărul $2^a - 1$, a – număr prim, poate lua și forma

$$2^a - 1 = 2 \cdot 2^{a-1} - 1 = (2^{a-1})^2 - (2^{a-1})^2 + 2 \cdot 2^{a-1} - 1 = (2^{a-1})^2 - (2^{a-1})^2 - (2^{a-1} - 1)^2$$

echivalent cu

$$2^a - 1 = [K_1 K_2 + K_1 + K_2 + 1]^2 - [K_1 K_2 + K_1 + K_2]^2$$

ce permit descompunerea primară $x^2 - y^2$.

IV. METODA DE CALCUL

Se aleg numere prime n și $m+1$ astfel încât numărul $a = m + n$ să fie prim. Se calculează ultimele cifre (în general ultimele zece cifre) ale numărului $2^a - 1$.

Se calculează descompunerea într-o diferență de pătrate a două numere întregi, cu relația

$$2^a - 1 = [K_1 K_2 + K_1 + K_2 + 1]^2 - [K_1 K_2 + K_1 + K_2]^2$$

(descompunerea de bază primară)

Ultimele cifre ale numărului $2^a - 1$ trebuie să coincidă și în aceeași ordine cu cifrele calculate din relația $\left[K_1 K_2 + K_1 + K_2 + 1\right]^2 - \left[K_1 K_2 + K_1 + K_2\right]^2$ (În caz că există diferențe calculul se reface total).

Se notează ultimele două cifre ale numerelor $\left[K_1 K_2 + K_1 + K_2 + 1\right]^2 = x^2$ și $\left[K_1 K_2 + K_1 + K_2\right]^2 = y^2$.

Diferența $x^2 - y^2$ reprezintă ultimele două cifre ale numărului $2^a - 1$.

Corespunzător tabelului 3, ultimele două cifre ale numărului $2^a - 1$ îi corespund două sau cinci variante $x^2 - y^2$ (inclusiv varianta calculată – primară).

Verificare fiecărei variante (exclusiv varianta primară) se desfășoară astfel:

1. ultimele două cifre ale numărului $2^a - 1$ îi corespunde varianta $x_1^2 - y_1^2$ (x_1^2 și y_1^2 fiind ultimele două cifre ale pătratelor unor numere întregi);

2. ultimele trei cifre ale numărului $2^a - 1$ îi corespunde varianta $x_2^2 - y_2^2$ (x_2^2 și y_2^2 fiind ultimele trei cifre ale pătratelor unor numere întregi, unde ultimele două cifre ale numerelor x_2^2 și y_2^2 trebuie să fie același ca la punctul 1);

3. ultimele patru cifre ale numărului $2^a - 1$ îi corespunde varianta $x_3^2 - y_3^2$ (x_3^2 și y_3^2 fiind ultimele patru cifre ale pătratelor unor numere întregi; unde ultimele trei cifre să fie aceleași ca la punctul 2);

4. operația se repetă de un număr ales arbitrar și cifrele numerelor x_i , y_i se conservă, iar atunci există a doua variantă $x^2 - y^2 = 2^a - 1$, iar numărul $2^a - 1$ nu este prim impar.

Dacă pe parcursul calculelor nu se mai respectă relația $x_i^2 - y_i^2$ corespunzător ultimelor $(i - 1)$ cifre ale numărului $2^a - 1$, varianta analizată nu poate avea loc.

Varianta calculată – primară, este unică și numărul $2^a - 1$ este prim Mersenne.

Analizând variantele posibile de obținere a ultimelor două cifre ale numărului $2^a - 1$ cu ajutorul ultimelor două cifre ale pătratelor numerelor întregi conform tabelului 4 se pot trage următoarele concluzii:

a. Numerele Mersenne de forma $2^a - 1 = \dots 11$; $2^a - 1 = \dots 51$; $2^a - 1 = \dots 71$; $2^a - 1 = \dots 91$ pot realiza una sau două variante $x^2 - y^2$.

Numerele prime Mersenne care se încadrează în una din cele două forme și admite numai o variantă $x^2 - y^2$ sunt declarate numere rapid prime Mersenne.

Vor fi analizate numerele Mersenne de forma $2^a - 1 = \dots 11$; $2^a - 1 = \dots 71$, care realizează minim trei grupe de cifre formează numere prime, începând cu ultimele două cifre 11 și 71. Acestea sunt numere rapid prime Mersenne.

b. Numerele Mersenne de forma $2^a - 1 = \dots 07$; $2^a - 1 = \dots 27$; $2^a - 1 = \dots 47$; $2^a - 1 = \dots 87$ pot realiza maxim 5 variante $x^2 - y^2$.

Numerele prime Mersenne care se încadrează în una din aceste forme și admite numai o variantă $x^2 - y^2$ sunt declarate numere lent prime Mersenne.

Calculul numerelor lent prime Mersenne conform variantei b impun un volum mare de lucru.

Notă:

Dacă ultimele două cifre, ultimele trei cifre, ultimele patru cifre etc. ale numărului $2^a - 1$ sunt numere prime, aceasta are descompunere unică într-o diferență de pătrate a două numere întregi, iar numărul este prim Mersenne.

EXEMPLE

A. $2^{\dots 29} - 1$

Toate numerele Mersenne de forma

$$2^{xxx00529} - 1; 2^{xxx03529} - 1; 2^{xxx08529} - 1; 2^{xxx05529} - 1;$$

$$2^{xxx50529} - 1; 2^{xxx53529} - 1; 2^{xxx58529} - 1; 2^{xxx55529} - 1$$

realizează următoarele grupuri de cifre ce formează numere prime:

11 – prim;

911 – prim;

30911 – prim.

Numere prime

$$- 2^{600529} - 1 = \dots 676630911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 30911 – prim; 630911 – prim.

$$- 2^{3529} - 1 = \dots 4481190911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 90911 – prim.

$$- 2^{2000005529} - 1 = \dots 7352230911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 30911 – prim.

$$- 2^{2000008529} - 1 = \dots 5658790911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 90911 – prim.

$$- 2^{450529} - 1 = \dots 1438630911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 30911 – prim; 630911 – prim.

$$- 2^{330055529} - 1 = \dots 0728230911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 30911 – prim.

$$- 2^{153529} - 1 = \dots 1089190911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 90911 – prim.

$$- 2^{330058529} - 1 = \dots 9034790911$$

unde: 11 – prim; 911 – prim; 90911 – prim.

Alte numere rapid prime Mersenne de forma A:

$$2^{355529} - 1; \quad 2^{600529} - 1; \quad 2^{208529} - 1; \quad 2^{205529} - 1;$$

$$2^{153529} - 1; \quad 2^{108529} - 1; \quad 2^{105529} - 1; \quad 2^{103529} - 1;$$

$$2^{67005529} - 1; \quad 2^{67305529} - 1; \quad 2^{67408529} - 1; \quad 2^{67503529} - 1;$$

$$2^{330003529} - 1; \quad 2^{330108529} - 1; \quad 2^{400003529} - 1; \quad 2^{500058529} - 1;$$

$$2^{999958529} - 1; \quad 2^{2000003529} - 1; \quad 2^{3100008529} - 1; \quad 2^{3100005529} - 1;$$

$$2^{3510003529} - 1; \quad 2^{3520000529} - 1; \quad 2^{3540003529} - 1; \quad 2^{3550000529} - 1;$$

$$2^{3580003529} - 1; \quad 2^{3620000529} - 1; \quad 2^{3730000529} - 1; \quad 2^{3760000529} - 1;$$

$$2^{3780000529} - 1; \quad 2^{3810000529} - 1; \quad 2^{3820003529} - 1; \quad 2^{3850000529} - 1;$$

$$2^{3850003529} - 1; \quad 2^{3870000529} - 1; \quad 2^{3800000529} - 1; \quad 2^{3800003529} - 1;$$

$$2^{3800205529} - 1; \quad 2^{3800205529} - 1; \quad 2^{4000003529} - 1; \quad 2^{4999905529} - 1;$$

$$2^{2008529} - 1; \quad 2^{2053529} - 1; \quad 2^{3003529} - 1; \quad 2^{3058529} - 1;$$

$$2^{3108529} - 1; \quad 2^{3153529} - 1; \quad 2^{3253529} - 1; \quad 2^{3255529} - 1;$$

$$2^{3258529} - 1; \quad 2^{3300529} - 1; \quad 2^{3355529} - 1; \quad 2^{3403529} - 1;$$

$2^{3405529} - 1;$	$2^{3505529} - 1;$	$2^{3508529} - 1;$	$2^{4003529} - 1;$
$2^{4200529} - 1;$	$2^{4303529} - 1;$	$2^{4803529} - 1;$	$2^{4900529} - 1;$
$2^{4905529} - 1;$	$2^{10003529} - 1;$	$2^{10153529} - 1;$	$2^{15253529} - 1;$
$2^{15055529} - 1;$	$2^{15105529} - 1;$	$2^{15400529} - 1;$	$2^{15450529} - 1;$
$2^{15508529} - 1;$	$2^{15553529} - 1;$	$2^{15903529} - 1;$	$2^{16005529} - 1;$
$2^{16705529} - 1;$	$2^{16708529} - 1;$	$2^{32508529} - 1;$	$2^{32658529} - 1;$
$2^{32700529} - 1;$	$2^{32905529} - 1;$	$2^{32908529} - 1;$	$2^{33153529} - 1;$
$2^{33208529} - 1;$	$2^{33300529} - 1;$	$2^{33753529} - 1;$	$2^{33853529} - 1;$
$2^{34000529} - 1;$	$2^{34005529} - 1;$	$2^{34008529} - 1;$	$2^{37000529} - 1;$
$2^{37003529} - 1;$	$2^{37108529} - 1;$	$2^{37003529} - 1;$	$2^{39003529} - 1;$
$2^{3529} - 1$			

B. $2^{\dots 49} - 1$

Toate numerele Mersenne de forma $2^{xxx449} - 1$ și $2^{xxx949} - 1$ realizează următoarele grupuri de cifre ce formează numere prime:

11 – prim; 911 – prim; 0911 – prim; etc.

11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; etc.

Numere rapid prime Mersenne

- $2^{449} - 1 = \dots 3257229311$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 29311 – prim.

- $2^{2040449} - 1 = \dots 6278029311$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 29311 – prim.

- $2^{1449} - 1 = \dots 395679311$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{122449} - 1 = \dots 3798669311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{3449} - 1 = \dots 2955789311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{84449} - 1 = \dots 3216909311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 09311 – prim.

$$- 2^{1000005449} - 1 = \dots 8754829311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 29311 – prim.

$$- 2^{6449} - 1 = \dots 5454349311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{17449} - 1 = \dots 5149069311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{38449} - 1 = \dots 7438989311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{89449} - 1 = \dots 2714509311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 09311 – prim.

$$- 2^{1949} - 1 = \dots 6506509311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 09311 – prim.

$$- 2^{72949} - 1 = \dots 2972429311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 29311 – prim.

$$- 2^{63949} - 1 = \dots 0676749311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{34949} - 1 = \dots 7590669311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{45949} - 1 = \dots 7685389311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{66949} - 1 = \dots 9975309311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 09311 – prim.

$$- 2^{367949} - 1 = \dots 7330829311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim; 29311 – prim.

$$- 2^{28949} - 1 = \dots 7793549311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

$$- 2^{19949} - 1 = \dots 5097869311$$

unde: 11 – prim; 311 – prim; 9311 – prim.

Alte numere rapid prime Mersenne de forma B:

$2^{449} - 1$	$2^{3449} - 1$	$2^{5449} - 1$	$2^{83449} - 1$
$2^{123449} - 1$	$2^{153449} - 1$	$2^{213449} - 1$	$2^{593449} - 1$
$2^{633449} - 1$	$2^{893449} - 1$	$2^{833449} - 1$	$2^{843449} - 1$
$2^{893449} - 1$	$2^{903449} - 1$	$2^{923449} - 1$	$2^{983449} - 1$
$2^{33375449} - 1$	$2^{3555449} - 1$	$2^{3575449} - 1$	$2^{3615449} - 1$
$2^{4185449} - 1$	$2^{4415449} - 1$	$2^{3650003449} - 1$	$2^{3630003449} - 1$
$2^{500673449} - 1$	$2^{500363449} - 1$	$2^{3005449} - 1$	$2^{67673449} - 1$
$2^{136949} - 1$	$2^{9000036949} - 1$	$2^{4000017949} - 1$	$2^{999981949} - 1$
$2^{67789949} - 1$	$2^{66955949} - 1$	$2^{66624949} - 1$	$2^{66600949} - 1$
$2^{66604949} - 1$	$2^{66606949} - 1$	$2^{66607949} - 1$	$2^{330184949} - 1$

$$C. 2^{\dots 77} - 1$$

Toate numerele Mersenne de forma $2^{xxx0677} - 1$; $2^{xxx1677} - 1$; $2^{xxx3677} - 1$; $2^{xxx4677} - 1$; $2^{xxx5677} - 1$; $2^{xxx6677} - 1$; $2^{xxx8677} - 1$ și $2^{xxx9677} - 1$

realizează următoarele grupe de cifre ce formează numere prime:

71 – prim; 271 – prim; 0271 – prim; 10271 – prim; 30271 – prim; 70271 – prim; 90271 – prim; etc.

Numere rapid prime Mersenne

$$- 2^{677} - 1 = \dots 9683510271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 10271 – prim; 510271 – prim.

$$- 2^{8000001677} - 1 = \dots 4904630271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 30271 – prim.

$$- 2^{3677} - 1 = \dots 0946870271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 70271 – prim; 870271 – prim.

$$- 2^{4000044677} - 1 = \dots 8612790271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 90271 – prim; 790271 – prim.

$$- 2^{6000005677} - 1 = \dots 7789110271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 10271 – prim.

$$- 2^{3006677} - 1 = \dots 2370230271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 30271 – prim; 230271 – prim.

$$- 2^{8677} - 1 = \dots 7052470271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 70271 – prim.

$$- 2^{9677} - 1 = \dots 387590271$$

unde: 71 – prim; 271 – prim; 90271 – prim.

Alte numere rapid prime Mersenne de forma C:

$2^{4000020677} - 1$	$2^{4000040677} - 1$	$2^{8000021677} - 1$	$2^{9000021677} - 1$
$2^{8000001677} - 1$	$2^{9000023677} - 1$	$2^{6000023677} - 1$	$2^{134677} - 1$
$2^{4000044677} - 1$	$2^{5000024677} - 1$	$2^{525677} - 1$	$2^{185677} - 1$
$2^{6000005677} - 1$	$2^{4000025677} - 1$	$2^{5000015677} - 1$	$2^{3786677} - 1$
$2^{3686677} - 1$	$2^{176677} - 1$	$2^{3776677} - 1$	$2^{4536677} - 1$
$2^{4416677} - 1$	$2^{3716677} - 1$	$2^{4026677} - 1$	$2^{15836677} - 1$
$2^{15096677} - 1$	$2^{4476677} - 1$	$2^{15716677} - 1$	$2^{33156677} - 1$
$2^{16106677} - 1$	$2^{15456677} - 1$	$2^{32886677} - 1$	$2^{37136677} - 1$
$2^{33266677} - 1$	$2^{26006677} - 1$	$2^{33936677} - 1$	$2^{33656677} - 1$
$2^{177677} - 1$	$2^{197677} - 1$	$2^{4207677} - 1$	$2^{6000017677} - 1$
$2^{8000027677} - 1$	$2^{168677} - 1$	$2^{188677} - 1$	$2^{5000018677} - 1$
$2^{4000028677} - 1$	$2^{6000018677} - 1$	$2^{9000029677} - 1$	$2^{9000039677} - 1$

PARABOLA

Prof. Laura Radu

Colegiul Tehnic de Alimentație și Turism „Dumitru Moțoc”, Galați

1). Definiție

Se numește parabolă locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat (focar) și o dreaptă dată (directoare).

Prin definiție, dacă F este punctul dat, numit focarul parabolei, KL este dreapta dată, denumită directoarea parabolei, M este un punct oarecare al parabolei, iar MN este perpendiculara coborâtă din punctul M pe dreapta KL (Fig. 1), trebuie să avem:

$$MF = MN.$$

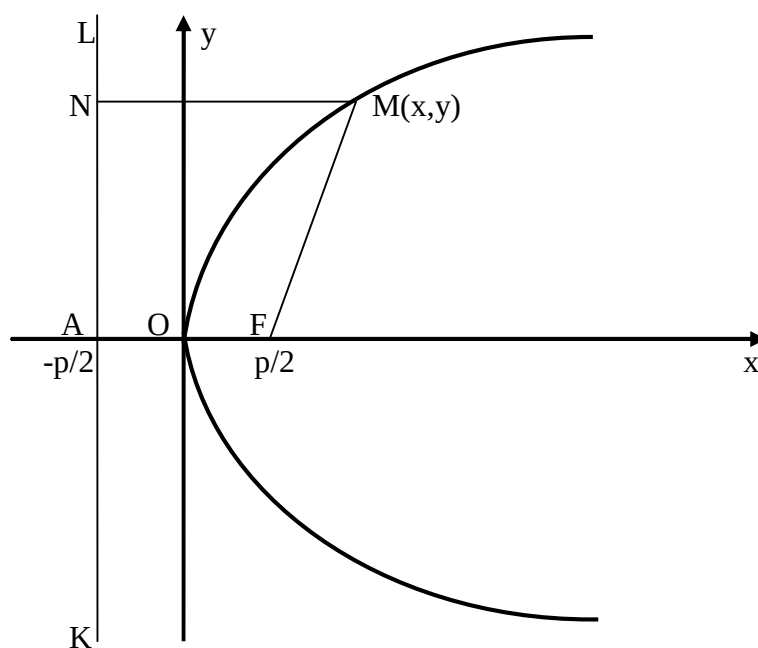


Fig. 1

2). Ecuația parabolei

Luăm ca axă Ox dreapta care trece prin focarul F și este perpendiculară pe directoarea KL , iar ca origine a coordonatelor luăm punctul O care este și mijlocul distanței de la focarul F la directoarea KL . Lungimea AF o notăm cu p ,

$$AF = p.$$

Dacă axele au fost astfel alese, atunci focarul F are coordonatele $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, punctul M are coordonatele (x, y) și punctul N are coordonatele $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

$$\text{Avem : } MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Deoarece $MF = MN$ rezultă că :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

De aici obținem:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Reducând pe x^2 și $\frac{p^2}{4}$ și trecând termenul $-px$ în membrul al doilea al egalității, obținem ecuația canonică a parabolei :

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Numărul p se numește parametrul parabolei. Distanța dintre punctul M și focarul F se numește raza vectoare a punctului M . Notând această rază vectoare cu r , obținem :

$$r = x + \frac{p}{2},$$

deoarece $r = MF$, iar $MF = MN = x + \frac{p}{2}$.

3). Studierea formei parabolei pe baza ecuației ei

a). Din ecuația parabolei (1) avem:

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

Deoarece pentru p a fost luat un număr pozitiv, valorile lui y pot fi reale numai în cazul când $x \geq 0$. Dacă $x = 0$, rezultă că $y = \pm\sqrt{2p \cdot 0} = 0$. Originea axelor de coordonate $O(0,0)$ este pe parabolă și formează vârful acesteia.

Ecuația raportată la vârful parabolei este :

$$y^2 = 2px.$$

Fiecărei valori a lui x în intervalul $(0, +\infty)$ îi corespund două puncte ale parabolei, aflate în ambele părți ale axei Ox , la distanțe egale cu valoarea absolută a lui y , deoarece fiecărei valori a lui x în acest interval îi corespund două valori ale lui y , egale în valoare absolută și de semn contrar.

Parabola este o curbă simetrică față de axa Ox . Axa Ox se numește în acest caz axa parabolei.

Când x crește de la 0 la $+\infty$, valorile lui y cresc în valoare absolută de la 0 la $+\infty$. Parabola este o curbă deschisă infinită; pe parabolă există un punct al cărui abscisă și ordonată sunt oricât de mari ca valoare absolută.

b). Distanța de la vârful parabolei O la focarul F este $OF = \frac{p}{2}$ și se numește distanța focală a parabolei. Directoarea parabolei este perpendiculară pe axă. Ecuația directoarei parabolei este :

$$x = -\frac{p}{2}.$$

c). Dacă în ecuația $y^2 = 2px$ avem $p < 0$, atunci valorile ordonatelor punctelor parabolei sunt reale numai când abscisele sunt negative. În acest caz, parabola este așezată la stânga axei Oy , iar directoarea ei se află la dreapta axei Oy (Fig. 2).

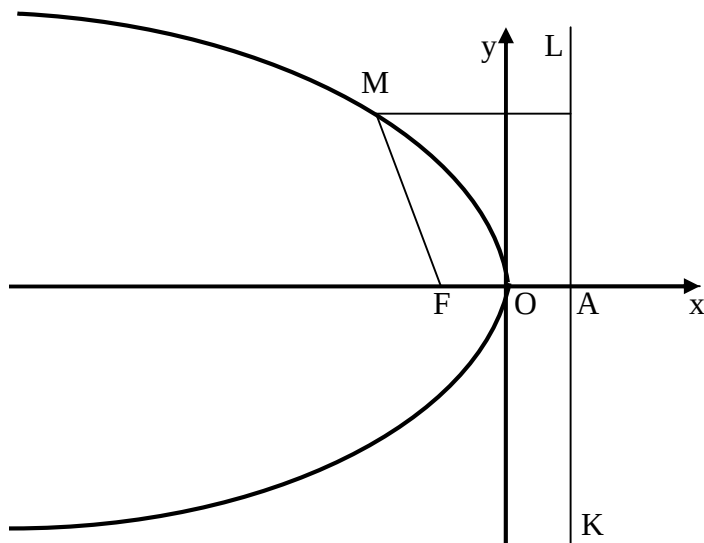
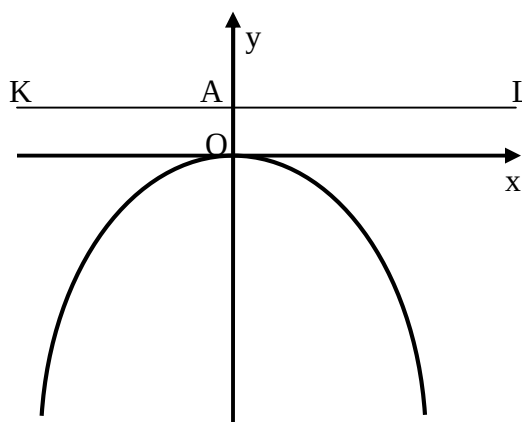
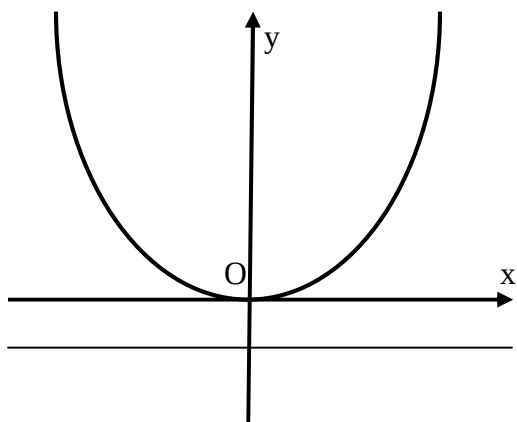


Fig. 2

d). Dacă în ecuația parabolei inversăm între ele coordonatele curente x și y , obținem :

$$x^2 = 2py. \quad (2)$$

Axa de simetrie a acestei parabole este axa Oy . În cazul când $p > 0$, parabola se află deasupra axei Ox (Fig. 3), iar când $p < 0$, ea se află sub axa Ox (Fig. 4).



K

A

L

Fig. 3

Fig. 4

Se observă că axa de simetrie a parabolei este axa de coordonate de același fel cu coordonata curentă care intră în ecuația parabolei numai la puterea întâi.

e). Din ecuația $x^2 = 2py$ rezultă că $y = \frac{1}{2p}x^2$. Punând $\frac{1}{2p} = a$, obținem $y = ax^2$, ecuația parabolei cunoscută din algebră.

f). Observăm că parabola nu are centru de simetrie.

4). Construcția parabolei

a). Construcția prin mișcare continuă

Se dă parametrul p al parabolei.

Ducem două drepte perpendiculare: KL ca directoare și axa Ox , axa parabolei.

Construim focarul F , luând cu ajutorul compasului pe axa Ox de la directoarea KL distanța AF , egală cu p .

Luăm o riglă și o aplicăm pe directoare, mai luăm echerul și îl alăturăm cu cateta mică la riglă.

În vârful unghiului ascuțit B opus catetei mici a echerului fixăm un fir, iar celălalt capăt al firului îl fixăm în focarul F .

Lungimea firului BF trebuie să fie egală cu cateta mare a echerului.

Întinzând firul cu vârful creionului așa cum se arată în Fig. 5, descriem o curbă, observând ca tot timpul, cât creionul se mișcă pe hârtie, firul să fie întins, vârful creionului să fie rezemat de echer, iar echerul alipit de riglă.

Fiecare punct M al acestei curbe aparține parabolei, deoarece $MN = MF$.

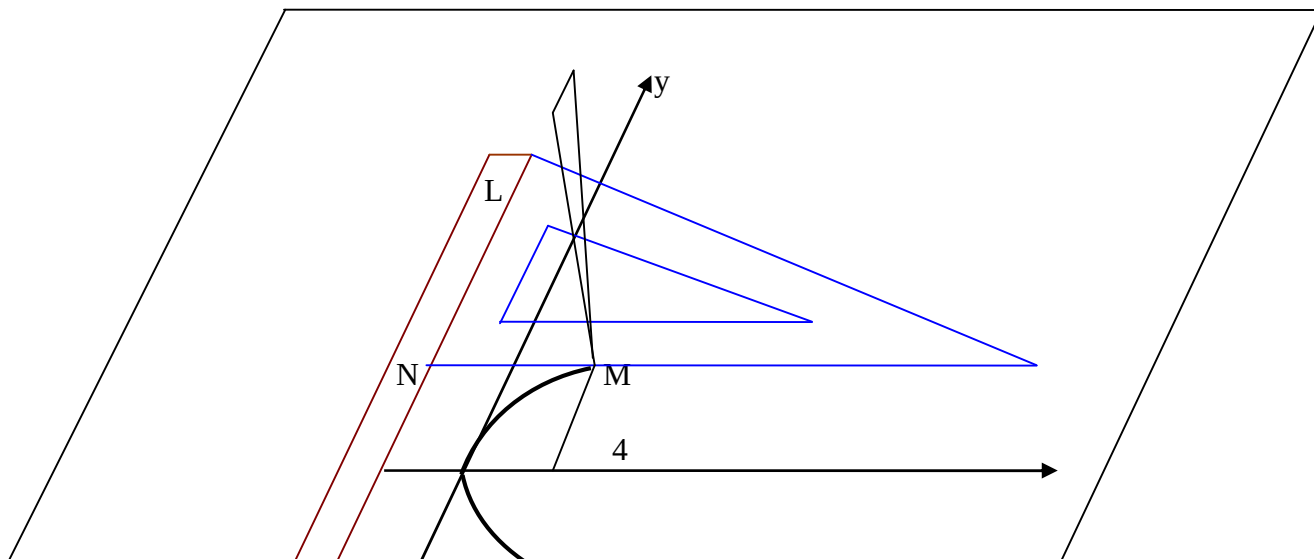




Fig. 5

b). Construcția prin puncte

Din faptul că distanța de la orice punct al parabolei la directoare este egală cu raza vectorie r , iar $r = x + \frac{p}{2}$, rezultă și procedeul de construcție al punctelor parabolei.

Construind ca și în cazul anterior directoarea, axa, focarul și vârful parabolei, ducem apoi dreapta P_1Q_1 paralelă cu directoarea și care intersectează axa Ox în C_1 .

Apoi cu o rază egală cu distanța AC_1 descriem din focarul F două mici arce de cerc, unul deasupra axei Ox iar celalalt dedesubt, astfel încât ele să intersecteze paralela P_1Q_1 .

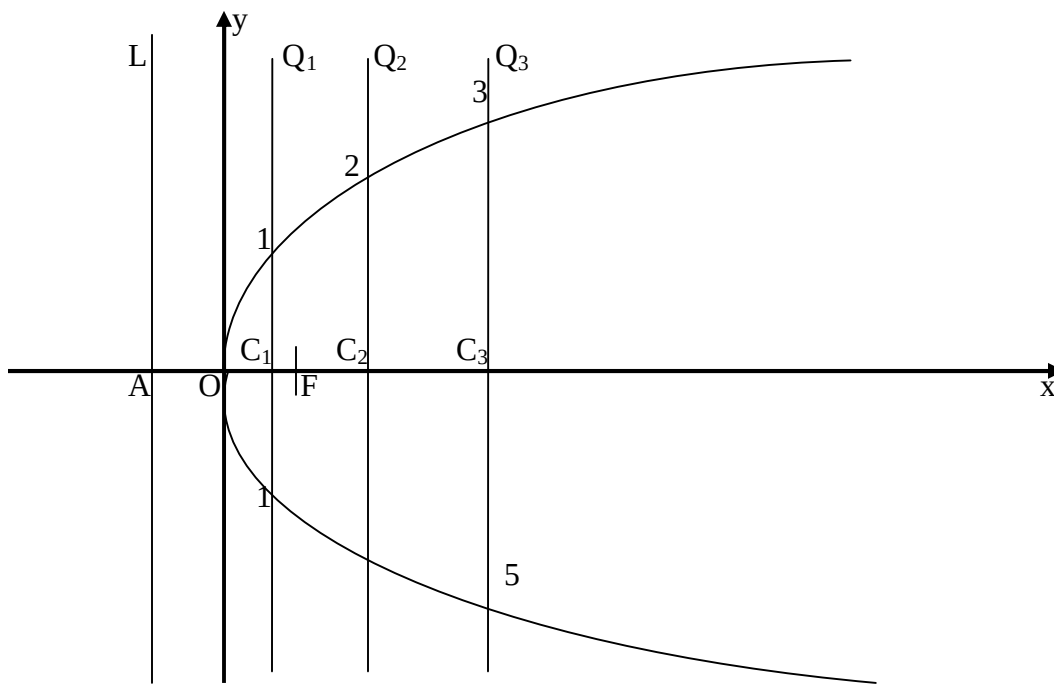
Punctele de intersecție notate cu cifra 1 aparțin parabolei, deoarece pentru fiecare din ele

$$r = AC_1 = \frac{p}{2} + x .$$

Ducând cât mai multe drepte $P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$, paralele cu directoarea KL și repetând de fiecare dată aceeași operație de construcție a punctelor, ca și dreapta P_1Q_1 , vom obține de fiecare dată câte două puncte ale parabolei, notate pe figură cu cifrele 2, 3,

Observăm că la această construcție punctele $C_1, C_2, C_3, \dots$ trebuie să fie cu atât mai apropiate între ele, cu cât se află mai aproape de vârful O și pot fi mai rare pe măsură ce ne îndepărtăm de vârful O , de-a lungul axei.

După ce am găsit un număr suficient de puncte, trasăm o linie curbă care trece prin aceste puncte și care este parabola căutată.



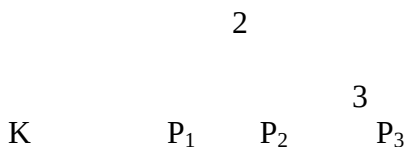


Fig. 6

5). Ecuatia parabolei in cazul deplasării paralele a axelor de coordonate

a). Fie vârful parabolei în punctul $O'(a,b)$, iar axa parabolei paralelă cu axa Oy (Fig. 7) . Considerăm sistemul de coordonate $x'O'y'$, a cărui origine coincide cu vârful parabolei $O'(a,b)$, axa $O'y' \parallel Oy$ este și axa parabolei, axa $O'x' \parallel Ox$. În sistemul de coordonate $x'O'y'$, ecuația parabolei este:

$$x'^2 = 2py' ,$$

iar în sistemul xOy ecuația parabolei este:

$$(x - a)^2 = 2p(y - b) \quad (3)$$

deoarece pentru fiecare punct M al parabolei avem:

$$x' = x - a , y' = y - b .$$

Dacă vârful parabolei este $O'(a,b)$, iar axa parabolei este $O'x'$ paralelă cu axa Ox , ecuația parabolei $y'^2 = 2px'$, după transformare, este următoarea:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \quad (4)$$

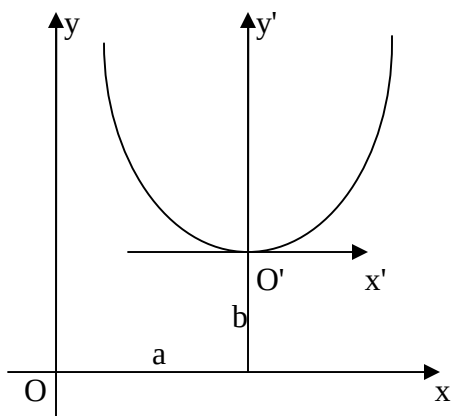


Fig. 7

b). Rezolvăm ecuația (3) în raport cu y :

$$y = \frac{1}{2p}(x-a)^2 + b,$$

sau

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{a}{p}x + \frac{a^2}{2p} + b.$$

Punând $\frac{1}{2p} = A$, $-\frac{a}{p} = B$, $\frac{a^2}{2p} + b = C$, obținem

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad (5)$$

adică parabola $(x-a)^2 = 2p(y-b)$ este reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

c). Ecuația de gradul al doilea în raport cu coordonatele x și y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

reprezintă o parabolă având axa paralelă cu axa Oy dacă nu conține al doilea și al treilea termen, sau paralelă cu axa Ox dacă nu conține al doilea și primul termen.

Această condiție este necesară. Întrădevăr, parabola a cărei axă este paralelă cu Oy se exprimă prin ecuația (5) care se poate scrie:

$$Ax^2 + Bx - y + C = 0,$$

adică prin ecuația generală de gradul al doilea în raport cu coordonatele x și y , în care lipsesc termenul al doilea și al treilea.

Această condiție este suficientă. Întrădevăr, împărțind ecuația

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la A , avem:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

și aducând câtul obținut la forma:

$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A},$$

completăm apoi $x^2 + \frac{D}{A}x$ pentru a obține pătratul unui binom :

$$x^2 + 2x\frac{D}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2},$$

și prelucrând cei doi membri ai ecuației

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2},$$

apoi

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right),$$

obținem o ecuație care reprezintă o parabolă a cărei axă este paralelă cu Oy și al cărei vârf are coordonatele :

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = \frac{D^2 - 4AF}{4AE},$$

iar parametrul $p = -\frac{E}{2A}$.

6). Exemple de rezolvare a problemelor

- * Să se găsească ecuația parabolei cu vârful în originea axelor de coordonate, cunoscând coordonatele focarului $(-2, 0)$.

Rezolvare: Prin ipoteză, focarul parabolei se află pe axa Ox , iar vârful în originea coordonatelor, de aceea ecuația parabolei are forma :

$$y^2 = 2px.$$

Distanța focală a parabolei $OF = \frac{p}{2} = -2$. De aici $2p = -8$, iar ecuația

căutată a parabolei va fi : $y^2 = -8x$.

- * Să se găsească ecuația parabolei cunoscând directoarea $y = -3$ și coordonatele focarului $(4, 1)$.

Rezolvare : Prin ipoteză, directoarea este paralelă cu axa Ox , de aceea axa parabolei este paralelă cu axa Oy , iar ecuația ei este $x = 4$. Punctul de intersecție al directoarei cu axa parabolei este $A(4, -3)$. Parametrul p reprezintă distanța dintre $A(4, -3)$ și $F(4, 1)$ și se calculează astfel: $p = 1 - (-3) = 4$.

Vârful $O(a, b)$ este mijlocul segmentului AF , deci avem $a = \frac{4+4}{2} = 4$ și

$$b = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Ecuația acestei parabole are forma : $(x - a)^2 = 2p(y - b)$. Introducând aici valorile găsite pentru a, b și p , obținem $(x - 4)^2 = 8(y + 1)$ sau $x^2 - 8x - 8y + 8 = 0$.

- * Să se determine coordonatele vârfului și mărimea parametrului parabolei a carei ecuație este $y^2 + 5x - 6y + 14 = 0$.

Rezolvare : Deplasăm originea coordonatelor în vârful parabolei, $O'(a, b)$, fără a schimba direcția axelor, și notăm sistemul obținut prin $x'O'y'$. Știind că $x' = x - a$ și $y' = y - b$, rezultă că $x = x' + a$ și $y = y' + b$. Înlocuind în această ecuație expresiile pentru x și y prin x' și y' , obținem ecuația parabolei raportată la vârf,

$$(y' + b)^2 + 5(x' + a) - 6(y' + b) + 14 = 0$$

sau

$$y'^2 + 2by' + b^2 + 5x' + 5a - 6y' - 6b + 14 = 0$$

sau

$$y'^2 + 5x' + (2b - 6)y' + (5a - 6b + b^2 + 14) = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația parabolei raportată la vârful O' este :

$$y'^2 = 2px' , \text{ sau } y'^2 - 2px' = 0. \quad (2)$$

Pentru ca ecuațiile (1) și (2) să fie identice, trebuie ca : $2b-6=0$,

$5a-6b+b^2+14=0$ și $-2p=5$. De aici găsim că : $b=3$, $a=-1$ și $p = -\frac{5}{2}$.

Prin urmare, parabola are vârful $O'(-1, 3)$ și parametrul $p = -\frac{5}{2}$.

Bibliografie:

1. Suvorov I. F. , *Curs de matematici superioare* , Ed. Tehnica, 1955 .
2. Udriste C. , *Matematica. Geometrie analitica*, Ed. Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1989 .

Motto:

‘Din zei de-am fi scoboari,
C-o moarte tot suntem datori!
Totuna e dac-ai murit
Fău ori moșințit;
Dar nu-i totuna leu șmori
Ori câine-năut.”

Versuri din poezia DECEBAL CĂTRE POPOR

de

George Coșbuc

PREDA MIHĂILESCU (UN MATEMATICIAN GENIAL)

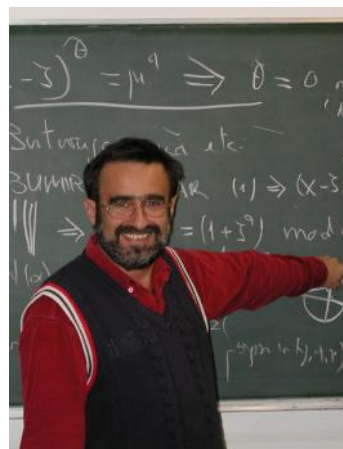
NECULAI STANCIU¹

Eugène Charles Catalan



Vs.

Preda Mihăilescu



¹ Prof. , Șc.”George Emil Palade”, Buzău

Eugène Charles Catalan .S-a născut în Bruges (acum oraș Belgian) la data de 30 mai 1814 și a decedat în orașul belgian Liège la data de 14 februarie 1894. Studiază matematica în Paris la École Polytechnique avându-i ca profesori favoriți pe *Joseph Liouville*(1809 – 1882) și pe *Jacques Charles François Sturm*(1803 – 1855). Obține doctoratul în matematică în 1841. Studentul său preferat a fost *Ernesto Cesàro*(1859 – 1906) cu care a corespondat pe tot parcursul vieții(a trimis între 1890 -1894, 52 de scrisori și a primit de la *Cesàro* 7 răspunsuri).

Predă Mihăilescu .S-a născut în București (23 mai 1955).În 1973 a părăsit România și s - a stabilit în Elveția.Studiază matematica și informatica la Universitatea Eidgenössische Technische Hochschule din Zürich. Obține doctoratul în 1997 cu lucrarea *Cyclotomy of Rings and Primality Testing*, scrisă sub îndrumarea matematicienilor *Erwin Engeler*(1930-)și *Hendrik Lenstra*(1949-).Pentru o perioadă, a fost cercetător la Universitatea din Paderborn, Germania. Din 2005 este profesor la Universitatea *Georg August* din Göttingen.

”Dacă o luăm băbește, în vara lui 1999 am aflat de conjectura lui *Catalan* și m-am dumirit - printr-un prim rezultat parțial, care a făcut un oarecare impact - că mă poate interesa. În toamna lui 2001 o terminasem, deci doi ani. ”

Predă Mihăilescu

(din interviul luat pentru Evenimentul Zilei
de *Dan Arsenie* la data de 16 decembrie 2009)

Teoremă.

Ecuția

$$x^u - y^v = 1, \quad (1)$$

are în mulțimea numerelor naturale soluția unică $(x, y; u, v) = (3, 2; 2, 3)$.

Ecuția din teoremă a fost demonstrată în cazul special $x = 3, y = 2$, de către *Gersonides*², în anul 1343. Aproximativ cu 100 de ani înainte de *Catalan*, *Leonhard Euler* (1707-1783) rezolvă ecuația diofantică

$$x^3 - y^2 = \pm 1 \quad (x > 0, y > 0) \quad (2)$$

Ecuția (2) a fost recent rezolvată și cu ajutorul metodelor de teorie algebrică a numerelor.În 1844, *August Leopold Crelle*(1780–1855), editorul *Crelle's Journal* , prestigioasa revistă (apare în limbile germană-engleză-franceză) cunoscută astăzi ca *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (în engleză: *Journal for Pure and Applied Mathematics*), primește de la *Catalan* o scrisoare “...I beg you, sir, to please announce in your journal the following theorem that I believe true although I have not yet succeeded in completely proving it; perhaps others will be more successful. Two consecutive whole numbers, other than 8 and 9, cannot be consecutive powers; otherwise

² *Rabbi Levi Ben Gershon*(1288—1344) - astronom spaniol de origine evrească

said, the equation $x^m - y^n = 1$ in which the unknowns are positive integers only admits a single solution...”.Editorul publică nota în [1] devenind o faimoasă conjectură.Fiind o provocare pentru matematicieni, au început să apară rezultate interesante pentru anumite cazuri particulare.Mai întâi s-a observat că ecuația este echivalentă cu

$$x^p - y^q = 1 \quad (x > 0, y > 0), \text{ iar } p \text{ și } q \text{ sunt numere prime} \quad (3)$$

Cazul $q = 2$, a fost rezolvat de către matematicianul V.A. Lebesgue în 1850([7]).

După peste 100 de ani, în 1964, Chao Ko(1910-2002), rezolvă cazul $p = 2$ ([2]).

De aici înainte ecuația de rezolvat se consideră

$$x^p - y^q = 1 \quad (xy \neq 0, \text{ iar } p \text{ și } q \text{ numere prime impare}) \quad (4)$$

J.W.S Cassels(1922-)consideră ecuația (4) de forma

$$(x-1)\frac{x^p-1}{x-1} = y^q \quad (5)$$

și observă că cel mai mare divizor comun ai celor doi factori din membrul stâng poate fi 1 (cazul I) sau p (cazul II).În 1960 ([3]), demonstrează faptul că ecuația (4) nu are soluții în cazul I (deoarece sistemul $x-1 = a^q, \frac{x^p-1}{x-1} = b^q, y = ab$ nu are soluție).

În continuare se studiază numărul soluțiilor (x, y) pentru p și q fixați.Se merge pe o idee a lui Alan Baker(1939-) ³ de aproximare a logaritmilor și Robert Tijdeman(1943-) în [11] demonstrează că ecuația (4) are cel mult un număr finit de soluții(pentru $p < 7 \cdot 10^{11}$ și $q < 7 \cdot 10^{16}$, când $p < q$).Avem deci de la Tijdeman margini superioare pentru p și q . S-au căutat mai departe condiții noi pentru p și q și s-au găsit și margini inferioare ([6]).Se arată că $p, q > 10^6$, apoi $p, q > 3 \cdot 10^8$ și în [8] se determină $\max(p, q) \approx 8 \cdot 10^{16}$ respectiv $\min(p, q) > 10^7$ (pentru determinarea marginilor inferioare s-a utilizat condițiile Wieferich⁴).În [9], Preda Mihăilescu, demonstrează că congruențele Wieferich⁵ au loc fără condiții de clasă.Crucial pentru demonstrația finală, care folosește rezultate din teoria grupurilor Galois și a corpurilor ciclotomice ([10]) a fost estimarea $|x| > q^p$ ([4] și [5]).Scrisoarea trimisă de Catalan primește un răspuns de la Mihăilescu și în *Journal für die reine und angewandte Mathematic* (Crelles Journal) în 2004 (volume 2004, Issue 572, pages 167-195).Schița demonstrației se poate găsi liber pe internet la adresa [12].

³ primește medalia Fields în 1970 la vârsta de 31 de ani

⁴ $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q^2}; q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$

⁵ Arthur Josef Alwin Wieferich (1884-1954) –matematician german

Remarcă. În 2010 Preda Mihăilescu așteaptă finalizarea procesului de revizie a demonstrației conjecturei Leopoldt ⁶([15],[16]) al cărei schiță de demonstrație (încă nevalidată) se găsește gratuit la adresa [17] respectiv cu explicații la adresa [18].

Și nu se va opri aici:

” ...lucrez la o teorie care în matematica va prinde foarte bine, va fi utilă și binevenită. Este în curs de verificare și specialiștii își iau timp să o înțeleagă. Dacă lucrurile sunt cum le văd eu, se va produce o profundă și așteptată simplificare, care pe specialiști îi va bucura cu siguranță. Dar mai multe voi putea împărtăși peste un an.”

Preda Mihăilescu

(din interviul luat pentru Evenimentul Zilei de Dan Arsenie la data de 16 decembrie 2009)

BIBLIOGRAFIE⁷

- [1] E. Catalan, *Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur*, J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 192.
- [2] Chao Ko, *On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1, xy \neq 0$* , Sci. Sinica (Notes) **14**(1964), 457-460.
- [3] J.W.S. Cassels, *On the equation $a^x - b^y = 1$, II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **56** (1960), 97-103.
- [4] S. Hyvärinen, *Über das Catalansche Problem*, Ann. Univ. Turku, Ser. A I no. 79 (1964), 8 pp.
- [5] S. Hyvärinen, *Über die Gleichung $ax^n - by^n = z$ und das Catalansche Problem*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A no. 355(1964), 50 pp.

⁶ Heinrich-Wolfgang Leopoldt (1927-) -matematician german

⁷ Pentru detalii mai complete se poate studia și bibliografia din [13], respectiv [14]

[13] T. Metsänkylä, *Catalan's conjecture: another old diophantine problem solved*, Bulletin of the American Mathematical Society **41** (1): 43-57.
<http://www.ams.org/bull/2004-41-01/S0273-0979-03-00993-5/S0273-0979-03-00993-5.pdf>.

[14] Y. F. Bilu, *Catalan's conjecture (after Mihăilescu)*, Sémin. Bourbaki, 55ème année, nr. 909 (2002/03), 24 pp.

- [6] K. Inkeri, *On Catalan's conjecture*, J. Number Theory **34** (1990), 142-152.
- [7] V.A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$* , Nouv. Ann. Math. **9** (1850), 178-181.
- [8] M. Mignotte, *Catalan's equation just before 2000*, Number Theory (Turku, 1999), de Gruyter, Berlin, 2001, pp. 247-254
- [9] P. Mihăilescu, *A class number free criterion for Catalan's conjecture*, J. Number Theory **99** (2003), 225-231.
- [10] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, preprint (September 2, 2002), submitted.
- [11] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. **29** (1976), 197-209.
- [12] <http://www.dpmms.cam.ac.uk/Seminars/Kuwait/abstracts/L30.pdf>
- [15] <http://londonnumbertheory.wordpress.com/2009/11/08/leopoldts-conjecture/>
- [16] http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0905/0905.1274v3.pdf
- [17] <http://londonnumbertheory.files.wordpress.com/2009/11/mihailescu.pdf>
- [18] <http://londonnumbertheory.files.wordpress.com/2009/12/mihailescu2.pdf>
- [19] N. Stanciu, *Retrospectiva unei conjecturi rezolvate*, GMB, No. 2 / 2010. pag. 57-60.
- [20] N. Stanciu, *A history of a solved conjecture*, Mathematical Reflections, Issue 3, 2010.

TEOREMA LUI CEVA

Prof. Alexandru Elena-Marcela
Scoala cu clasele I-VIII Bogata, Baia

Se consideră un triunghi ABC și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente atunci:

$$(*) \quad \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demonstrație:

Fie $\{P\} = AA' \cap BB' \cap CC'$.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul $AA'B$ și punctele coliniare C, P, C' .

Rezultă: $\frac{CB}{CA'} \cdot \frac{PA'}{PA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$

Aplicăm apoi teorema lui Menelaus pentru triunghiul $AA'C$ și punctele coliniare

B, P, B' . Rezultă: $\frac{BA'}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{PA}{PA'} = 1.$

Înmulțind ultimele două relații se obține $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$

(Vectorial): A, B, C necoliniare și C', A', B' astfel încât $\overrightarrow{AC'} = \alpha \overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{BA'} = \beta \overrightarrow{A'C}$ și $\overrightarrow{CB'} = \gamma \overrightarrow{B'A}$.

Să se arate că AA' , BB' și CC' sunt concurente dacă și numai dacă $\alpha\beta\gamma = 1$.

Demonstrație:

Orice $O \notin (ABC)$, C', P, C să arătăm că sunt coliniare.

$\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC}$ coplanare, unde $\{P\} = BB' \cap AA'$.

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'} = \alpha \overrightarrow{C'O} + \alpha \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{1+\alpha} \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{1+\beta} \overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{1+\beta} \overrightarrow{OC}$$

În triunghiul $AA'C$ aplicăm teorema lui Menelaus și $\Rightarrow$

$$\frac{AP}{PA'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1, \quad \frac{CB'}{B'A} = \gamma$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \beta \Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{\beta}{\beta+1};$$

$$\frac{AP}{PA'} \cdot \frac{\beta}{\beta+1} \cdot \gamma = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PA'} = \frac{\beta+1}{\beta\gamma};$$

$$a = \frac{AP}{AA'} = \frac{\beta+1}{\beta+\beta\gamma+1} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\beta+1}{\beta+1+\beta\gamma} \cdot \overrightarrow{AA'}$$

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{AO} + a\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{OP} = (1-a)\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{1+\beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\beta+1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\beta\gamma+\beta+1}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}\overrightarrow{OC}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\beta+1} & \frac{1}{\beta+1} & 0 \\ \frac{1}{\beta\gamma+\beta+1} & \frac{\alpha}{\alpha+1} & 0 \\ \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma - 1 = 0, \text{ adică } \alpha\beta\gamma = 1$$

Reciproca teoremei lui Ceva. Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

atunci dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente.

Demonstrație:

Fie $\{P\} = BB' \cap CC'$ și fie $\{A''\} = PA \cap BC$.

Se aplică teorema lui Ceva pentru triunghiul ABC și dreptele concurente AA'' , BB' și CC' .

$$\text{Rezultă: } \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1;$$

Din ultima egalitate și din relația dată în enunț se obține:

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}. \text{ Deoarece } A' \text{ și } A'' \text{ sunt puncte interioare segmentului } (BC) \text{ se obține}$$

$$A' = A''.$$

Observație: Reciproca teoremei lui Ceva este adevărată și în cazul în care unul din punctele A' , B' , C' se găsește pe o latură a triunghiului de exemplu A' aparține lui (BC) , iar celelalte două puncte B' aparține dreptei AC , C' aparține dreptei AB și verifică condiția BB' nu este paralel cu CC' .

Forma trigonometrică a relației lui Ceva.

Fie triunghiul ABC și fie cevienele AA_1, BB_1, CC_1 concurente în M.
 ($A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)$). Se notează $\alpha = m(\angle MAB)$, $\beta = m(\angle MBC)$ și $\gamma = m(\angle MCA)$.

Din teorema sinusurilor în triunghiul AMB rezultă:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{\sin \alpha}{\sin(B-\beta)}. \text{ Analog } \frac{MA}{MC} = \frac{\sin \gamma}{\sin(A-\alpha)} \text{ și } \frac{MC}{MB} = \frac{\sin \beta}{\sin(C-\gamma)}.$$

Prin înmulțirea lor se obține:

$$(*) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin(A-\alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(C-\gamma)} = 1 \quad (\text{relația lui Ceva}).$$

Reciproc, fie $A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)$ astfel încât să fie satisfăcută relația (*), unde $\alpha = m(\angle A_1AB)$, $\beta = m(\angle B_1BC)$ și $\gamma = m(\angle C_1CA)$.

Se demonstrează că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Se presupune că unghiul ACB este ascuțit. Fie M punctul de intersecție a cevienelor AA_1, BB_1 și fie γ' măsura unghiului ACM. Se va demonstra că $\gamma' = \gamma$.

Deoarece cevienele AM, BM, CM sunt concurente rezultă relația:

$$(*)' \quad \frac{\sin \alpha}{\sin(A-\alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin(C-\gamma')} = 1.$$

$$\text{Din } (*) \text{ și } (*)' \text{ se obține: } \frac{\sin \gamma}{\sin(C-\gamma)} = \frac{\sin \gamma'}{\sin(C-\gamma')}$$

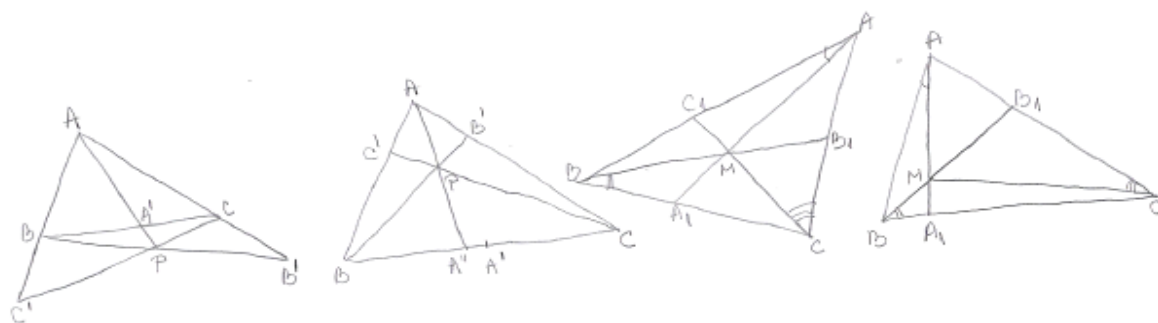
Se notează valoarea acestui raport cu t. Deoarece unghiul ACB este unghi ascuțit este suficient să se demonstreze că ecuația $\frac{\sin x}{\sin(C-x)} = t$ are soluție unică $\gamma < C$.

Cum această ecuație are obligatoriu soluția γ' rezultă $\gamma' = \gamma$. Deci problema s-a redus la a arăta că ecuația are soluție în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$. Pentru aceasta se efectuează calculele necesare și se obține:

$$t \sin C \cos x - (t \cos C + 1) \sin x = 0$$

Rezultă: $\tan x = \frac{t \sin C}{t \cos C + 1}$. Dar $\frac{t \sin C}{t \cos C + 1} \in (0, \infty)$, deci ecuația considerată are soluție unică

ce aparține intervalului $(0, \frac{\pi}{2})$ și cum γ' era de asemenea soluție cu această proprietate rezultă $\gamma' = \gamma$, deci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.



GENERALIZAREA UNEI PROBLEME

ROXANA MIHAELA STANCIU¹

Motto: “Aritmetica și Geometria dispun de resurse bogate de dezvoltare a capacității copilului de a se mira, de a se întreba, de a imagina răspunsuri, de a tatona diferite căi de rezolvare, de a stabili punți de legătură cu înțelegerea naturii, a limbajului, a istoriei și geografiei. Dar totul trebuie să se bazeze pe dezvoltarea propriei sale curiozități, în așa fel încât el să accepte ca unică răsplată bucuria, plăcerea de a înțelege, prin pași mărunți, câte ceva din lumea care îl înconjoară și de a se înțelege pe sine. La întrebarea pe care o auzim mereu, din partea unor elevi, dar și din partea unor părinți sau educatori: De ce matematică pentru copii care nu -și propun să devină matematicieni? le răspundem: Pentru că matematica este un mod de gândire cu valoare universală și pentru că ea prilejuiește bucurii spirituale la care orice ființă umană ar trebui să aibă acces. În măsura în care adolescenții vor învăța să se, bucure de frumusețile matematicii, ale științei, ale artei și literaturii și vor simți nevoia de a le frecventa, ei nu vor mai suferi de plictiseală iar tentația unor activități derizorii, uneori antisociale, va scădea”

Academician, Solomon Marcus

În [1] este propusă de către prof. Neculai Stanciu, următoarea problemă:

O.VI.211. a) Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon oarecare (convex sau neconvex) cu 5 laturi.

Să se arate că $S \leq 2P$.

b) Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon convex cu 6 laturi.

Să se arate că $S \geq \frac{3P}{2}$.

Generalizarea acestei probleme (vezi [2]) aparține marelui matematician **Tiberiu Popoviciu**. Tiberiu Popoviciu (n. 16 februarie 1906, Arad - d. 29 decembrie 1975, București) a fost un matematician, membru titular al Academiei Române. A absolvit cursurile Facultății de Științe din București, cu un doctorat susținut la Paris (1933), apoi cadru didactic la universitățile din Cernăuți, București și Iași. În 1946 este numit profesor la Universitatea din Cluj (catedra de analiză matematică), întemeind aici – în 1957 – Institutul de calcul al Academiei Române (filiala Cluj), fiind totodată decan între 1950 -

¹ Prof., Liceul cu Program Sportiv “Iolanda Balaș Sotter”, Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

1953. Prin stăruințele lui, în 1959 se va relua publicarea revistei „Mathematica”. În anul 1948 a fost ales membru corespondent al Academiei, iar din 1963 devine membru titular.

Generalizare. Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon de n laturi.

$$\text{Să se arate că } S \leq \begin{cases} \frac{n^2 - 8}{8} \cdot P, & \text{pentru } n = \text{par} \\ \frac{n^2 - 9}{8} \cdot P, & \text{pentru } n = \text{impar} \end{cases}.$$

Să se arate că dacă poligonul este convex avem și:

$$S \geq \frac{n-3}{2} \cdot P.$$

Această problemă a fost propusă de Tiberiu Popoviciu în G.M., Vol. XXXIX, pag. 288 cu Nr. 4357, în anul 1933. Remarcabil este faptul că această problemă a fost nerezolvată timp de zece ani, soluția fiind dată de autorul ei în anul 1943. Numai Redacția R.M.T. poate ști dacă problema **O.VI.211.** a avut rezolvitori.

În continuare, vom particulariza generalizarea de mai sus pentru un poligon convex cu numărul de laturi impar (Aplicația 1.), respectiv pentru un poligon oarecare cu un număr par de laturi (Aplicația 2.).

Aplicația 1. Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon convex cu 5 laturi.

Să se arate că $S \geq P$.

Soluție. Notăm cu A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 vârfurile poligonului. Poligonul are 5 diagonale:

$A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5$ și A_3A_5 . Se știe (sau se verifică ușor) că suma diagonalelor unui patrulater convex $ABCD$ este cel puțin egală cu suma a două laturi opuse,

$$AC + BD \geq AB + CD$$

și pentru ca să avem egalitate este necesar ca punctele A, B, C, D să fie pe o dreaptă. Luăm acum câte două diagonale consecutive și obținem patrulatere convexe pentru care avem relațiile:

$$A_1A_3 + A_2A_4 \geq A_1A_2 + A_3A_4, \quad A_1A_4 + A_2A_5 \geq A_1A_2 + A_4A_5, \quad A_3A_5 + A_4A_1 \geq A_3A_4 + A_5A_1, \\ A_1A_3 + A_2A_5 \geq A_2A_3 + A_1A_5, \quad A_3A_5 + A_2A_4 \geq A_2A_3 + A_4A_5$$

de unde deducem, adunând membru cu membru

$2S \geq 2P$ care demonstrează relația din enunț. Condiția să avem egalitate este ca 3 vârfuri ale poligonului să fie confundate într-un punct al segmentului determinat de celelalte două vârfuri.

Aplicația 2. Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon oarecare (convex sau neconvex) cu 6 laturi.

$$\text{Să se arate că } S \leq \frac{7P}{2}.$$

Soluție. Notăm cu $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ vârfurile poligonului. Poligonul are 9 diagonale:

$A_1A_3, A_1A_5, A_2A_4, A_2A_6, A_3A_5, A_4A_6$, și A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 . Să ne reamintim acum proprietatea bine cunoscută că o latură a unui poligon este cel mult egală cu suma celorlalte laturi, egalitatea având loc dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pe latura considerată (și nu pe prelungirile acestei laturi). În cazul nostru o diagonală subîntinde două sau trei laturi consecutive.

Vom nota cu:

$$S_1 = A_1A_3 + A_1A_5 + A_2A_4 + A_2A_6 + A_3A_5 + A_4A_6 \text{ și } S_2 = A_1A_4 + A_2A_5 + A_3A_6.$$

Cu proprietatea de mai sus obținem:

$$\begin{cases} A_1A_3 \leq A_1A_2 + A_2A_3 \\ A_1A_5 \leq A_5A_6 + A_6A_1 \\ A_2A_4 \leq A_2A_3 + A_3A_4 \\ A_2A_6 \leq A_6A_1 + A_1A_2 \\ A_3A_5 \leq A_3A_4 + A_4A_5 \\ A_4A_6 \leq A_4A_5 + A_5A_6 \end{cases}; \text{ de unde rezultă prin adunare (1) } S_1 \leq 2P;$$

Analog se obțin:

$$\begin{cases} A_1A_4 \leq A_1A_6 + A_6A_5 + A_5A_4 \\ A_1A_4 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \\ A_2A_5 \leq A_2A_1 + A_1A_6 + A_6A_5 \\ A_2A_5 \leq A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 \\ A_3A_6 \leq A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 \\ A_3A_6 \leq A_3A_2 + A_2A_1 + A_1A_6 \end{cases}$$

Care adunate membru cu membru dau $2S_2 \leq 3P \Leftrightarrow (2)S_2 \leq \frac{3P}{2}$; Prin adunarea relațiilor

(1) și (2) ținând cont că $S = S_1 + S_2$ se obține relația de demonstrate, cu egalitate ca, în afară de permutare circulară și de sens, punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ să fie pe o dreaptă în ordinea crescătoare a indecilor iar primele 3 puncte precum și ultimile 3 puncte să fie confundate.

O problemă analoagă, referitoare la limitele inferioare ale lui S în funcție de P , a fost propusă de Ioan B. Florescu, în G.M. 7 / 1942, cu Nr. 5766 (vezi [2]).

Fie P perimetrul și S suma diagonalelor unui poligon oarecare cu n laturi. Să se demonstreze relațiile:

$$S \geq \begin{cases} \frac{n-3}{4} \cdot P, \text{ pentru } n = \text{impar} \\ \frac{n-4}{4} \cdot P, \text{ pentru } n = \text{par} \end{cases}$$

Să se determine în particular, poligoanele corespunzătoare egalităților.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Problema **O.VI.211.**, *Revista de Matematică din Timișoara*, nr. 4 / 2008, pag. 45
- [2] Neculai Stanciu, *Generalizarea problemei O.VI.211. din RMT nr. 4 / 2008 - RMT - 3/2009*
- [3] *Gazeta matematică 1895 – 2007* (ediția electronică)

INEGALITATEA CEBÎȘEV-VARIANTA INTEGRALĂ

Prof. RÎCU ILEANA

Grup Școlar Agricol, Roșiorii de Vede, Teleorman

Materialul prezintă teorema Cebîșev -varianta integrală utilă în demonstrarea unor inegalități integrale urmată de câteva aplicații ale acesteia.

Teorema (Cebîșev)

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că :

a) Dacă f și g au aceeași monotonie, atunci :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$

b) Dacă f și g sunt monotone de sens diferit, atunci :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right).$$

Demonstrație

Se poate considera că f și g sunt monoton crescătoare. Din monotonia lui f și g se deduce $(f(x)-f(y)) \cdot (g(x)-g(y)) \geq 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, de unde

$$f(x) \cdot g(x) + f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x) \geq 0$$

Integrăm în funcție de x pe $[a, b]$ și se obține :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx - g(y) \int_a^b f(x) dx - f(y) \int_a^b g(x) dx + (b-a) f(y) \cdot g(y) \geq 0, \forall y \in [a, b]$$

Integrăm în funcție de x pe $[a, b]$ și se obține, notând $y \rightarrow x$:

$$(b-a) \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx + (b-a) \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Și astfel avem } \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \geq (b-a) \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$

APLICAȚIA 1. Să se arate că: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{1+2^{\sin x}} dx < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Probleme de analiză matematică - Virgil Nicula -
Editura ALL EDUCAȚIONAL - București 2002

Soluție:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos x}}{1+2^{-\sin x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{1+2^{\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \left(\frac{1}{1+2^{-\sin x}} + \frac{1}{1+2^{\sin x}} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \left(\frac{2^{\sin x}}{1+2^{\sin x}} + \frac{1}{1+2^{\sin x}} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \left(\frac{2^{\sin x} + 1}{1+2^{\sin x}} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx \end{aligned} \quad (1)$$

Aplicăm **ineg. Cebîșev** (avem funcția radical de ordin par strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), deci

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi}{2} (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} (1-0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Am găsit: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

APLICAȚIA 2. Fie $I(a) = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x^2 + x + a} dx, a > 0$.

a) Să se arate că: $I(1) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right)$

b) Să se calculeze $I(2)$

(Concursul „Alexandru Cojocaru”-Roman)

Soluție:

a) Alegem funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \arctg x$ (este strict crescătoare pe $[0,1]$) și

$g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ este strict descrescătoare pe $[0,1]$ (pentru că

$g'(x) < 0, \forall x \in [0,1]$). Aplicăm **ineg. Cebîșev**:

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \arctg x \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \geq \int_0^1 \arctg x dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \cdot \frac{\pi \sqrt{3}}{9}$$

Să calculăm cele două integrale de mai sus:

$$\int_0^1 \arctg x dx = \int_0^1 x' \cdot \arctg x dx = (x \cdot \arctg x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \arctg 1 - 0 - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctg \sqrt{3} - \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

APLICATIA 3. Să se demonstreze: $\frac{\pi}{4}(1-e^{-1}) < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx} dx \frac{1}{4} < \ln 2 + \frac{\pi}{8}$

Probleme de analiză matematică - Virgil Nicula-
Editura ALL EDUCAȚIONAL - București 2002

Soluție:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx} \cdot 1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx} \cdot \frac{1+tg^2x}{1+tg^2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tgx} \cdot \frac{(tgx)'}{1+tg^2x} dx = \int_0^1 e^{-x} \cdot \frac{x'}{1+x^2} dx = \int_0^1 e^{-x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Avem funcțiile e^{-x} și $\frac{1}{1+x^2}$ care sunt pozitive și strict descrescătoare pe $[0,1]$ (**aplicăm**

ineg. Cebîșev):

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx &\geq \int_0^1 e^{-x} dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= -(e^{-x}) \Big|_0^1 \cdot (\arctg x) \Big|_0^1 = -(e^{-1}-1)(\arctg 1 - \arctg 0) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (1)$$

Pe de altă parte avem: se știe că $e^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tgx} \geq 1+tgx, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\frac{1}{e^{tgx}} \leq \frac{1}{1+tgx} \Leftrightarrow e^{-tgx} \leq \frac{1}{1+tgx} \text{ prin integrare avem:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^{tgx}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+tgx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 \quad (2)$$

Să demonstrăm (2): notăm cu $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ și cu $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$$I+J = \int 1 dx = x + C$$

$$I-J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln |\sin x + \cos x| \quad \text{Prin însumare obținem}$$

$$2I = x + \ln |\sin x + \cos x| + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) + C \quad \text{deci}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \left| \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right| - \ln |\sin 0 + \cos 0| \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

APLICATIA 4. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție crescătoare .Să se arate că :

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Olimpiade și concursuri școlare - clasele 9-12

Coordonatori: Dan Brânzei, Marin Chirciu

Editura TIPARG-2006

Soluție: Funcția f fiind crescătoare prin ipoteza și funcția de gradul întâi x fiind crescătoare $\mathbf{R}$, deci și pe $[a, b]$, conform **inegalității Cebisev**, avem:

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) dx &\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \cdot \int_a^b f(x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{a+b}{2} \cdot \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

APLICATIA 5. Sa se demonstreze:

$$\int_a^b \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx \geq \frac{1}{a^2(b-a)} \operatorname{arctg}^2 \frac{b-a}{b+a}$$

Probleme de analiză matematică - Virgil Nicula-

Editura ALL EDUCAȚIONAL - București 2002

Soluție:

Conform **inegalității Cebîșev** avem:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \int_a^b \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} dx \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \frac{1}{x^2 + a^2} dx \right)^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_a^b \right]^2 = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{a^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} 1 \right)^2 = \frac{1}{a^2(b-a)} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{b}{a} - 1}{1 + \frac{b}{a}} \right)^2 = \frac{1}{a^2(b-a)} \operatorname{arctg}^2 \frac{b-a}{b+a} \end{aligned}$$

Am folosit identitatea: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \forall x, y \in \mathbf{R}$

APLICATIA 6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă .Să se arate că oricare ar fi $a > 0$, are

$$\text{loc: } \int_{-a}^a x f(f(x)) dx \geq 0$$

Olimpiade și concursuri școlare -clasele 9-122

Coordonatori: Dan Brânzei, Marin Chirciu

Editura TIPARG-2006

Soluție: Din f monotonă rezultă că $f \circ f$ este o funcție crescătoare .Din **inegalitatea lui Cebîșev** vom avea:

$$(a - (-a)) \int_{-a}^a x f(f(x)) dx \geq \int_{-a}^a f(f(x)) dx \cdot \int_{-a}^a x dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a x f(f(x)) dx \geq \frac{1}{2a} \left(\int_{-a}^a f(f(x)) dx \right) \cdot \left(\int_{-a}^a x dx \right) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

APLICATIA 7. Dacă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[0, 1]$ și există

$a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $(a+b)f(1) = bf(0)$, atunci există relația:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \left[\frac{1}{3} + \frac{b(a+b)}{a^2} \right] \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

În particular, dacă $f(0) + f(1) = 0$, atunci avem: $\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

Probleme de analiză matematică -Virgil Nicula-

Editura ALL EDUCAȚIONAL -București 2002

Soluție: Din relația

$$\int_0^1 (ax + b) \cdot f'(x) dx = \left((ax + b) f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 a \cdot f(x) dx =$$

$$= (a + b) \cdot f(1) - b \cdot f(0) - a \int_0^1 f(x) dx = b \cdot f(0) - b \cdot f(0) - a \int_0^1 f(x) dx =$$

$$= -a \cdot \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{a} \cdot \int_0^1 (ax + b) f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 = \frac{1}{a^2} \left(\int_0^1 (ax+b) f'(x) dx \right)^2 \leq (cf\ ineg\ Cebisev) \leq \frac{1}{a^2} \int_0^1 (ax+b)^2 \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3a^3} \left[(a+b)^3 - b^3 \right] \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \left[\frac{1}{3} + \frac{(a+b)b}{a^2} \right] \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

Pentru $a = -2b$ (adică $f(0)+f(1)=0$, deoarece $b \neq 0$), rezultă inegalitatea a doua.
q.e.d.

APLICAȚIA 8

Arătați ca $\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2} dx \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \frac{3\sqrt{3}}{e}$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală, Brașov, februarie 2010-Clasa a XII-a

Soluție: În demonstrație vom folosi inegalitatea Cebîsev pentru funcții de monotonii diferite $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2} dx \leq \int_0^1 \ln(1+2x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+3x^2} dx = \left(\frac{3}{2} \ln 3 - 1 \right) \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{3}{2} \ln 3 - \ln e \right) \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (\ln 3^3 - \ln e^2) \frac{\pi}{3\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{3^3}{e^2} \right) \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \sqrt{\frac{3^3}{e^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

NUMEREELE COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

Corneliu Mănescu-Avram

Există o literatură vastă consacrată acestui subiect , iar părerile sunt împărțite : “tradiționaliștii” pledează pentru păstrarea nealterată a farmecului geometriei sintetice, pe când “reformiștii” scot în evidență legăturile cu alte domenii ale matematicii. Oricum ar fi, este cert că metoda este eficientă, aducând o anumită standardizare prin generalitatea ei. Fără a o fetișiza (numerele complexe apar destul de târziu în procesul educativ), trebuie să recunoaștem că ea a fost, din păcate, oarecum marginalizată la noi. Nota de față își propune să umple acest gol, aducând în discuție câteva probleme selectate ca antrenament pentru pregătirea concursurilor ^[6] și trei teoreme clasice ^[7] . Alte probleme, inclusiv nerezolvate, pot fi găsite în ^[5] . Primele referințe bibliografice contin și suportul teoretic necesar.

Cercul circumscris triunghiului de bază din problemă este cercul unitate, dacă nu se specifică altfel, ceea ce simplifică mult calculele. La unele probleme este mai avantajoasă considerarea cercului înscris drept cerc unitate. Punctele și afixele lor vor fi notate, de regu lă, cu aceeași literă. Alte detalii vor fi date pe parcurs.

PROBLEME

1. (OM Iug., 1990) Fie O și H centrul cercului circumscris respectiv ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$. Fie Q simetricul lui H față de O . Fie T_1, T_2, T_3 respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCQ, \triangle CAQ, \triangle ABQ$. Să se demonstreze că $AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}OA$.
- 2, Se consideră triunghiul ABC și cercul său circumscris S . Simetricile cercului față de dreptele AB, BC, CA sunt cercurile S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} . Să se demonstreze că aceste trei cercuri au un punct comun și să se identifice acest punct.
3. (OM St. Petersburg, 2000) Dreapta T este tangentă la cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC în punctul B . Fie K proiecția ortocentrului triunghiului ABC pe dreapta T . Fie L mijlocul laturii AC . Să se arate că triunghiul BKL este isoscel.
4. (TST Iug., 1992) Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC pătratele $BCDE, CAFG$ și $ABHI$. Fie $GCDQ$ și $EBHP$ paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul APQ este isoscel și că $m(\angle PAQ) = \frac{\pi}{2}$.
5. (Neuberg) Într-un triunghi în care una din înălțimi este tangentă cercului circumscris, centrul cercului celor nouă puncte se află pe latura opusă vârfului din care pleacă acea înălțime.

6. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, P, Q simetricele punctului C față de dreptele AB și AD respectiv. Să se demonstreze că dreapta PQ trece prin ortocentrul triunghiului ABD .
7. Fie $W_1W_2W_3$ un triunghi, S cercul său circumscris și A_1, A_2, A_3 mijloacele laturilor $[W_2W_3]$, $[W_3W_1]$, $[W_1W_2]$ respectiv. Prin punctul A_i se duce o perpendiculară pe tangenta în W_i la S . Să se demonstreze că aceste perpendiculare sunt concurente și să se identifice punctul de concurență.
8. (OMP 2006) Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC . Se iau punctele D, E, F pe cercul circumscris triunghiului ABC astfel încât $AD \parallel BE \parallel CF$. Punctele S, T și U sunt respectiv simetricele punctelor D, E, F față de dreptele BC, CA și AB . Să se demonstreze că S, T, U, H sunt conciclice.
9. Într-un triunghi, patrulaterul având trei vârfuri în mijloacele laturilor, iar al patrulea un picior de înălțime este trapez isoscel.
10. (Barisien) Fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate și H ortocentrul triunghiului oarecare ABC . Să se demonstreze egalitatea :

$$IH^2 + 2OI^2 = 3(GI^2 + 2OG^2).$$

SOLUȚII

1. Luăm ca origine centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC și ca unitate raza lui. Notăm cu literele mici corespunzătoare afixe (coordonatele complexe) ale punctelor respective. Afixele vârfurilor A, B, C ale triunghiului sunt $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$, afixul ortocentrului H al triunghiului ABC este ^[1] $h = a + b + c$, afixul mijlocului unui segment este media aritmetică a afixelor extremităților segmentului, afixul centrului de greutate al unui triunghi este media aritmetică a afixelor vârfurilor triunghiului, deci $q = -h$, $3t_1 = b + c + q = -a$. Rezultă $3AT_1 = 3|t_1 - a| = |3t_1 - 3a| = |-4a| = 4 = 4OA$.

Datorită (din cauza?!) simetriei, celelalte egalități se obțin prin schimbare de notație, așadar

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}OA.$$

2. Se ia originea sistemului de coordonate în centrul O al cercului S circumscris triunghiului ABC și ca unitate lungimea OA a razei acestui cerc. Vârfurile triunghiului sunt deci $A(a), B(b), C(c)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$. Ecuația cercului S este $z\bar{z} = 1$. Pentru a determina ecuațiile cercurilor simetrice lui S față de laturile trunghiului este suficient să aflăm afixele centrelor acestor cercuri, deoarece prin simetrie lungimile se păstrează, deci razele acestor cercuri sunt egale cu 1.

Ecuția generală a dreptei în complex este ^[1] $\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + a = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, piciorul perpendiculararei din punctul de afix z_0 pe această dreaptă are afixul $z_1 = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - a}{2\alpha}$, deci simetricul punctului de afix z_0 față de această dreaptă are afixul $z_2 = 2z_1 - z_0 = \frac{-\bar{\alpha} \bar{z}_0 - a}{\alpha}$.

Dreapta BC are ecuația ^[1] $z + bc\bar{z} = b + c$, proiecția punctului $O(0)$ pe această dreaptă este mijlocul laturii $[BC]$, cu afixul $\frac{b+c}{2}$, deci simetricul O_1 al punctului O față de această dreaptă are afixul $o_1 = b + c$. Ecuția cercului S_{BC} este deci $[z - b - c] = 1$ și ortocentrul $H(h)$ al triunghiului ABC , $h = a + b + c$, aparține acestui cerc, deoarece $|h - b - c| = |a| = 1$. La fel se demonstrează că punctul H se află pe cercurile S_{AB} și S_{CA} .

Notă. Aceasta este configurația *Țițeica*: dacă se dau cercurile S_{AB} , S_{BC} și S_{CA} , cu razele de aceeași lungime R și punctul H comun, atunci cercul circumscris triunghiului ABC are raza de lungime R , iar punctul H este ortocentrul triunghiului ABC (*problema piesei de 5 lei*).

3. Cercul circumscris triunghiului ABC este cercul unitate, ecuația tangentei T la acest cerc în punctul B este ^[1] $b\bar{z} + \bar{b}z = 2$, proiecția K a ortocentrului $H(h)$, $h = a + b + c$, al triunghiului ABC pe dreapta T are afixul $k = \frac{\bar{b}h - b\bar{h} + 2}{2\bar{b}} = \frac{(a+c)(ac - b^2) + 2abc}{2ac}$. Mijlocul L al laturii AC are afixul $l = \frac{a+c}{2}$, deci $BL = |b - l| = \frac{|2b - a - c|}{2}$, $KL = |k - l| = \left| \frac{2abc - b^2(a+c)}{2ac} \right| = \frac{|2ac - ab - bc|}{2} = \frac{|2b - a - c|}{2}$. Rezultă $BL = KL$, deci triunghiul BKL este isoscel.

4. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Rotația de centru $M(m)$ și unghi $\arg \lambda$ este definită prin $z' = m + \lambda(z - m)$. Se notează cu j afixul punctului I și se obține:

$$\begin{aligned} d - c &= i(b - c), & e - b &= -i(c - b), \\ f - a &= i(c - a), & g - c &= -i(a - c), \\ h - b &= i(a - b), & j - a &= -i(b - a). \end{aligned}$$

Un patrulater este paralelogram dacă și numai dacă mijloacele diagonalelor lui coincid, deci

$$q = d + g - c = c + i(b - a), \quad p = e + h - b = b + i(a - c).$$

Rezultă $AP = |p - a| = |c - a + i(b - a)|$, $AQ = |q - a| = |b - a + i(a - c)| = |-i|AP = AP$, deci triunghiul APQ este isoscel. Avem și $\frac{q-a}{p-a} = i$, deci $m(\angle PAQ) = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

5. Fie ABC triunghiul considerat, înscris în cercul unitate $z\bar{z} = 1$, deci $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $|a| = |b| = |c| = 1$. Latura BC are ecuația $z + bc\bar{z} = b + c$, înălțimea din A are ecuația $z - a = bc(\bar{z} - \bar{a})$, centrul cercului *Euler* are afixul $e = \frac{a+b+c}{2}$ și aparține laturii BC dacă și numai dacă $e + bc\bar{e} = b + c$, condiție echivalentă cu $a^2 + bc = 0$. Să arătăm că această ultimă condiție este echivalentă cu condiția din enunț. Într-adevăr, tangenta în A la cercul circumscris are ecuația $z + a^2\bar{z} = 2a$ și ea coincide cu înălțimea din A dacă și numai dacă $a^2 = -bc$.

6. Se ia raza cercului circumscris patrulaterului ca unitate și originea în centrul acestui cerc, deci afixele vârfurilor patrulaterului sunt $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, ortocentrul h al triunghiului ABD are afixul $h = a + b + d$, dreptele AB și AD au respectiv ecuațiile

$$z + ab\bar{z} = a + b, \quad z + ad\bar{z} = a + d,$$

afixele punctelor P și Q sunt

$$p = a + b - ab\bar{c}, \quad q = a + d - ad\bar{c},$$

iar punctele H, P, Q sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} h & \bar{h} & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Scădem prima linie din liniile a doua și a treia și arătăm că numărul $m = \frac{p-h}{q-h} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$ este real, adică $m = \bar{m}$, ceea ce se verifică simplu. Determinantul este nul (liniile a doua și a treia sunt proporționale), deci punctele H, P, Q sunt coliniare.

7. Luăm ca unitate cercul S , deci afixele vârfurilor triunghiului sunt w_1, w_2, w_3 , $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$, iar ecuația cercului S este $z\bar{z} = 1$. Avem și $2a_1 = w_2 + w_3$, $2a_2 = w_3 + w_1$, $2a_3 = w_1 + w_2$. Tangenta în W_i la S are ecuația $\bar{w}_i z + w_i \bar{z} = 2$, perpendiculara prin A_1 pe această tangentă are ecuația $z - a_1 = \frac{w_1}{w_1} (\bar{z} - \bar{a}_1)$, deci

$$z - w_1^2 \bar{z} = \frac{(w_2 + w_3)(w_2 w_3 - w_1^2)}{2w_2 w_3}.$$

Se verifică simplu că această dreaptă trece prin centrul cercului *Euler* al triunghiului $W_1W_2W_3$, al cărui afix este ^[1] $e = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{2}$. Datorită simetriei, rezultă că și celelalte două drepte trec prin acest punct.

8. Avem $h = a + b + c$. Coeficientul unghiular al dreptei AD este egal cu ad , deci dreptele AD , BE , CF sunt paralele dacă și numai dacă $ad = be = cf = m$, unde $m \in \mathbb{C}$, $|m| = 1$. Ecuația dreptei BC este $z + bc\bar{z} = b + c$, deci simetricul S al punctului D față de dreapta BC are afixul $s = b + c - bc\bar{d} = b + c - \frac{abc}{m}$. Similar avem $t = c + a - \frac{abc}{m}$, $u = a + b - \frac{abc}{m}$. Punctele S , T , U , H sunt conciclice dacă și numai dacă biraportul lor $(s\ t\ u\ h)$ este real. Avem

$$(s\ t\ u\ h) = \frac{u-s}{u-t} \cdot \frac{h-t}{h-s} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{m+ac}{m+bc}$$

și se verifică simplu egalitatea $\overline{(s\ t\ u\ h)} = (s\ t\ u\ h)$, având în vedere egalitățile $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = m\bar{m} = 1$.

9. Triunghiul ABC este înscris în cercul unitate $z\bar{z} = 1$, deci dacă afixele vârfurilor sunt a, b, c , atunci mijloacele laturilor au respective afixe $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, segmentele care le unesc sunt linii mijlocii în triunghi, deci sunt paralele cu laturile triunghiului. Rămâne deci să arătăm că distanța dintre piciorul înălțimii din A , al cărui afix este $\frac{a+b+c-\bar{a}bc}{2}$ și mijlocul laturii AB , de exemplu, este egală cu jumătate din lungimea laturii AB , adică

$$\left| \frac{a+b+c-\bar{a}bc}{2} - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|a-b|}{2},$$

ceea ce se verifică simplu.

10. Pentru a evita ambiguitatea radicalilor de ordin 2, al căror semn este nedeterminat în complex, luăm cercul circumscris drept cerc unitate și a^2, b^2, c^2 afixele vârfurilor triunghiului. Celelalte puncte au atunci afixe ^[3]:

$$o = 0, \quad i = -ab - bc - ca, \quad h = a^2 + b^2 + c^2, \quad g = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Expresiile sunt simetrice, deci pot fi exprimate în funcție de polinoamele simetrice fundamentale

$$u = a + b + c, \quad v = ab + bc + ac, \quad w = abc. \quad \text{Avem } i = -v, \quad h = u^2 - 2v, \quad g = \frac{u^2 - 2v}{3}, \quad \bar{u} = \frac{v}{w}, \quad \bar{v} =$$

$= \frac{u}{w}, \bar{t} = -\frac{u}{w}, \bar{h} = \frac{v^2}{w^2} - \frac{2u}{w} = \frac{v^2 - 2uw}{w^2}, \bar{g} = \frac{v^2 - 2uw}{3w^2}$. Avem de demonstrat astfel identitatea

$$3(|u^2 - v|^2 + 2|v|^2) = |u^2 + v|^2 + 2|u^2 - 2v|^2. \quad (*)$$

Folosim egalitatea $|z|^2 = z\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, înlocuim cu expresiile de mai sus, eliminăm numitorii și reducem termenii asemenea. Membrul stâng este

$$3[(u^2 - v)(v^2 - uw) + 2uvw] = 3(u^2v^2 - v^3 - u^3w + 3uvw),$$

iar membrul drept este

$$(u^2 + v)(v^2 + uw) + 2(u^2 - 2v)(v^2 - 2uw) = 3(u^2v^2 - v^3 - u^3w + 3uvw).$$

Am obținut aceeași expresie, deci identitatea (*) este adevărată.

Bibliografie

- [1] Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, București, 1968
- [2] Dincă, M., Chiriță, M., Numere complexe în matematica de liceu, ALL EDUCATIONAL, 1996
- [3] Liang-shin Hahn, Complex Numbers and Geometry, The Mathematical Association of America, 1994
- [4] Complex Numbers and Geometry, [www.cut-the-knot.org/ ... /ComplexNumbersGeometry](http://www.cut-the-knot.org/.../ComplexNumbersGeometry)
- [5] Radovanović, Marko, Complex Numbers in Geometry, www.imomath.com
- [6] Peng Shi, Bashing Geometry with Complex Numbers, web.mit.edu/yufeiz/www/wc08/peng_pset.pdf
- [7] Mihăilescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

INEGALITATEA LUI WIRTINGER

de CANTEMIR ILIESCU¹⁾

Articolul de față prezintă o demonstrație a inegalității lui Wirtinger folosind noțiuni elementare de Calculul Variațiilor. Autorul a particularizat anumite proprietăți mai generale, pentru ca articolul să fie accesibil și elevilor de clasa a 12 -a.

1. Rezultate de bază.*1.1. Ecuații diferențiale liniare, omogene de ordinul al doilea.*

Sunt ecuațiile de forma

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Să observăm că dacă y_1, y_2 sunt soluții ale ecuației (1), atunci $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ este soluție. Cu substituția $y = e^{\int v(x) dx}$ ecuația (1) devine $v' = -v^2 - av - b$ (ecuație Ricatti) și dacă $v(x) = r$, obținem $r^2 + a \cdot r + b = 0$ (ecuația caracteristică).

(i) Dacă soluțiile $r_{1,2}$ sunt numere reale distincte atunci $y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$, unde C_1, C_2 constante reale.

(ii) Dacă $r_1 = r_2 = r$, $y = C_1 \cdot e^{rx} + C_2 \cdot x \cdot e^{rx} = (C_1 + x \cdot C_2) \cdot e^{rx}$.

(iii) Dacă $r_{1,2} = \lambda \pm i \cdot \mu$ sunt numere complexe, atunci cu $v(x) = \lambda - \mu \cdot \operatorname{tg}(\mu x + C)$ avem

$$y = e^{\int v(x) dx} = e^{\lambda x + \ln \cos(\mu x + C) + C'} = \widetilde{C} e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x + C) = e^{\lambda x} \cdot (C_1 \cdot \cos \mu x + C_2 \cdot \sin \mu x).$$

Observație (formulele lui Euler²⁾). Interesant de văzut că pentru ecuația $y'' + y = 0$, cu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, obținem pe de o parte cu (iii) $y = \sin x$, iar pe de altă

parte cu (i) $y = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, de unde $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Dacă schimbăm condițiile, adică $y(0) = 1$ și $y'(0) = 0$ obținem $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Din cele două relații prin

¹⁾ Profesor, Colegiul Tehnic Dimitrie Dima.

²⁾ *Leonhard Euler* (n. 15 aprilie 1707, Basel, Elveția - d. 18 septembrie 1783, Sankt Petersburg, Rusia) a fost un matematician și fizician elvețian. Leonhard Euler este considerat a fi fost forța dominantă a matematicii secolului al 18-lea și unul dintre cei mai remarcabili matematicieni și savanți multilaterali ai omenirii. Alături de influența considerabilă pe care a exercitat-o asupra matematicii și matematizării științelor stau atât calitatea și profunzimea, cât și prolificitatea extraordinară a scrierilor sale, opera sa exhaustivă (dacă ar fi publicată vreodată) putând cu ușurință umple 70 - 80 de volume de dimensiuni standard.

adunare, respectiv scădere rezultă $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ și $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Pentru $x = \pi$ se obține $e^{i\pi} = -1$.

1.2. Lema fundamentală a calculului variațiilor.

Lemă (*Lagrange*²⁾). Dacă $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta \in C^2([a, b])$, cu $\eta(a) = \eta(b) = 0$, satisface condiția $\int_a^b \varphi(x) \cdot \eta(x) dx = 0$, atunci $\varphi(x) = 0$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că $\varphi \neq 0$, deci există $\xi \in (a, b)$ astfel încât $\varphi(\xi) \neq 0$ sau fără a restrânge generalitatea $\varphi(\xi) > 0$. Cum φ este continuă există $G = (\xi_0, \xi_1)$ o vecinătate a lui ξ astfel încât $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in G$.

Construim $\eta(x) = \begin{cases} (x - \xi_0)^4 \cdot (x - \xi_1)^4, & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases}$. Se observă că $\eta \in C^2([a, b])$, $\eta(\xi_0) = \eta(\xi_1) = 0$, deci suntem în condițiile din enunțul lemei și atunci $0 = \int_a^b \varphi(x) \cdot \eta(x) dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(x) \cdot \eta(x) dx > 0$ (deoarece $\eta(x) > 0$, $\forall x \in G$), contradicție.

2. Inegalitatea lui Wirtinger³⁾.

Să se arate că

$$\int_a^b [y'(x)]^2 dx \geq \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2 \cdot \int_a^b y^2(x) dx,$$

pentru orice funcție $y \in C^2([a, b])$ cu proprietatea $y(a) = y(b) = 0$.

Demonstrație. Considerăm integrala

²⁾ *Joseph-Louis Lagrange* (în italiană *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; n. 25 ianuarie 1736 la Torino - d. 10 aprilie 1813 la Paris) a fost un matematician și astronom italian, care a adus numeroase contribuții în matematică și mecanică, fiind considerat cel mai mare matematician al secolului al 18-lea. La 19 ani obține un post la catedra de matematică la Școala Regală de Artilerie din Torino. Tot aici și -a publicat primele sale lucrări din domeniul ecuațiilor diferențiale și calculului variațional.

³⁾ *Wilhelm Wirtinger* (15 iulie 1865 – 15 ianuarie 1945) matematician austriac. S-a născut în orașul Ybbs an der Donau și a studiat la Universitatea din Viena unde a obținut doctoratul în 1887. Wirtinger a fost influențat de Felix Klein cu care a studiat la Universitatea din Berlin și la Universitatea din Göttingen.

$$J[y] = \int_a^b \left[(y')^2 - k \cdot y^2 \right] dx, \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (2)$$

(care poartă numele de *funcțională*), unde $y \in C^2([a, b])$ și am notat $k = \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2$.

Căutăm curbele care minimizează funcționala (2). Presupunem că y realizează minimul funcționalei (2). Fie $\eta \in C^2([a, b])$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Construim $\bar{y} = y + \varepsilon \cdot \eta$ și presupunem $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât $\bar{y}$ să se afle într-o vecinătate a funcției y și notăm

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= J[\bar{y}] = J[y + \varepsilon \cdot \eta] = \int_a^b \left[(y' + \varepsilon \cdot \eta')^2 - k \cdot (y + \varepsilon \cdot \eta)^2 \right] dx = \\ &= \varepsilon^2 \int_a^b (-k \cdot \eta^2) dx + 2\varepsilon \int_a^b [y' \cdot \eta' - k \cdot y \cdot \eta] dx + \int_a^b \left[(y')^2 - k y^2 \right] dx. \end{aligned}$$

$\Phi(\varepsilon)$ admite minim pentru $\varepsilon = 0$, deci $\Phi'(0) = \left. \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$. Derivând Φ în raport cu ε

obținem $\frac{d\Phi}{d\varepsilon} = 2\varepsilon \int_a^b (-k \cdot \eta^2) dx + 2 \int_a^b (y' \cdot \eta' - k \cdot y \cdot \eta) dx$, deci

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \left. \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 2 \int_a^b (y' \cdot \eta' - k \cdot y \cdot \eta) dx \stackrel{\text{integrare prin parti}}{=} \\ &= 2y' \cdot \eta \Big|_a^b - 2 \int_a^b (y'' + k \cdot y) \cdot \eta dx \stackrel{\eta(a)=\eta(b)=0}{=} -2 \int_a^b (y'' + k \cdot y) \cdot \eta dx. \end{aligned}$$

Din $\Phi'(0) = 0$, rezultă $\int_a^b (y'' + k \cdot y) \cdot \eta dx = 0$ și din lema lui Lagrange obținem ecuația diferențială $y'' + k \cdot y = 0$ cu ecuația caracteristică $r^2 + k = 0$, de unde $r_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$, deci curbele care minimizează funcționala (1) sunt de forma:

$$y = C_1 \cos \sqrt{k}x + C_2 \sin \sqrt{k}x.$$

Din condițiile $y(a) = y(b) = 0$ obținem sistemul

$$\begin{cases} C_1 \cos \sqrt{k}a + C_2 \sin \sqrt{k}a = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{k}b + C_2 \sin \sqrt{k}b = 0 \end{cases}.$$

Determinantul matricei sistemului este

$$\cos \sqrt{k}a \sin \sqrt{k}b - \sin \sqrt{k}a \cos \sqrt{k}b = \sin \left[\sqrt{k}(b-a) \right] = \sin \left[\frac{\pi}{b-a}(b-a) \right] = 0.$$

Dacă $\cos \sqrt{k}a = 0$, atunci $\frac{a}{b-a} = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, adică $\frac{b}{a} = \frac{2k+3}{2k+1}$, deci $\frac{b}{b-a} = \frac{2k+3}{2}$, de unde $\cos \sqrt{k}b = 0$. Cum implică $C_2 = 0$, avem $y_0 = C_1 \cos \sqrt{k}x$.

y_0 minim al funcționalei $J[y]$, atunci rezultă $J[y] \geq J[y_0] = 0$. Într-adevăr

$$\begin{aligned} J[y_0] &= \int_a^b \left(k C_1^2 \sin^2 \sqrt{k}x - k C_1^2 \cos^2 \sqrt{k}x \right) dx = -k C_1^2 \int_a^b \cos 2\sqrt{k}x dx = \\ &= -k C_1^2 \frac{1}{2\sqrt{k}} 2 \sin \sqrt{k}x \cos \sqrt{k}x \Big|_a^b = 0. \end{aligned}$$

Dacă $\cos \sqrt{k}a \neq 0$, notăm $C_2 = C$ și $C_1 = -C \frac{\sin \sqrt{k}a}{\cos \sqrt{k}a}$, deci

$$y_0 = \frac{C}{\cos \sqrt{k}a} \sin \left[\sqrt{k}(x-a) \right] = \tilde{C} \sin \left[\sqrt{k}(x-a) \right].$$

$$J[y_0] = k \tilde{C}^2 \int_a^b \cos \left[2\sqrt{k}(x-a) \right] dx = k \tilde{C}^2 \frac{1}{2\sqrt{k}} \sin \left[2\sqrt{k}(x-a) \right] \Big|_a^b = 0.$$

$$\text{În concluzie, } J[y] = \int_a^b \left[(y')^2 - k \cdot y^2 \right] dx \geq J[y_0] = 0.$$

Observație. Demonstrația dată provine din demonstrația teoremei lui Euler, o teoremă mai generală, în care se folosește regula lui Leibniz (integrală) (vezi http://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule), regula de derivare a unei funcții compuse cu mai multe variabile:

Dacă $y(x)$ este o curbă ce realizează o valoare extremă a funcționalei

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad \text{atunci are loc ecuația}$$

$$\text{diferențială } \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Bibliografie

- [1] Elsgolts, L.E., *Differential Eqations and the calculus of variations*, Mir Publisher, Moscow, 1970.
- [2] Brunt, Bruce van, *The calculus of variation*, Springer, 2004.
- [3] Krasnov, M.L., Makarenko, G.I., Kiselev, A.I., *Problems and exercises in the calculus of variations*, Mir Publishers, Moscow, 1975.

Lotfi Asker Zadeh - părintele matematicii fuzzy

Introducere

Matematica fuzzy a prins contur în a doua jumătate a secolului XX, după publicarea de către Lotfi A. Zadeh a primului articol de matematică fuzzy, în 1965. Acest articol a generat multe cercetări și implicit a dus la fondarea unor ramuri noi în matematică. Matematica fuzzy poate fi privită ca o paralelă a matematicii clasice sau ca o prelungire firească a acesteia, dar în majoritatea situațiilor este considerată o matematică nouă și foarte modernă. În matematica fuzzy găsim modele demne de urmat atât în țara noastră, cum ar fi: Gal G. Sorin și Ban I. Adrian (profesori la Universitatea din Oradea, la catedra de Matematică), dar și în străinătate: Lotfi A. Zadeh, De Luca, Edyta Mrokwa și mulți alții.

În acest studiu m-am oprit asupra bibliografie și cercetărilor științifice ale lui Lotfi A. Zadeh, deoarece el este considerat "părintele matematicii fuzzy". Prin activitatea sa de pionerat a deschis noi orizonturi în matematică și nu numai. Rezultatele care s-au obținut, mai ales în ultimii ani, pornindu-se de la teoria fuzzy, sunt uluitoare.

Matematica fuzzy, ale cărei baze au fost puse totuși recent, este foarte răspândită în lumea cercetătorilor. În momentul de față 15 reviste de matematică au în titlul lor noțiunea de "fuzzy" și în jur de 15000 de articole au fost publicate pe această temă. În Japonia 2000 de oameni de știință sunt implicați în studiul matematicii fuzzy. Prin acești oameni de știință Japonia au proiectat rapid incorporarea logicii fuzzy în designul echipamentelor electronice și electrocasnice. Aceste produse au fost vândute de firme ca Panasonic sau Quasar, numai între anii 1991-1992 s-au vândut echipamente care aveau încorporată tehnologia fuzzy de peste un milion de dolari. Conceptul este mai popular în pronunție japoneză decât în cea americană, cu toate că în japoneză termenul sună mai mult "fudgy" decât "fuzzy".

Creșterea interesului pentru aspectele teoretice ale numerelor fuzzy manifestat în ultimii ani este în legătură cu necesitatea de a modela expresiile lingvistice ("multe", "câteva", "cel puțin", și altele) și apare în diferite arii științifice datorat judecății umane sau reprezentării finite a numerelor în calculator. Numerele fuzzy sunt o uneltă care se folosește cu succes în arii științifice ca: problemele de decizie, științe sociale, teoria controlului, ect. Potențialul numerelor fuzzy este cunoscut și recunoscut în aplicații. Practic, rezultatele obținute de numerele fuzzy sunt mai bune decât cele obținute prin metode clasice. Studiul este direcționat spre: operații asupra numerelor fuzzy și proprietăți, reprezentări ale numerelor fuzzy, ordonarea numerelor fuzzy, măsuri de fuzzificare, redefinirea numerelor fuzzy, aproximarea numerelor fuzzy.

Evoluție în plan științific

Lotfi Asker Zadeh este matematician și informatician de renume mondial. El este profesor de informatică la Universitatea din California, la Berkeley.

El s-a născut în 4 februarie 1921, la Baku, în Azerbaijan cu numele Lotfi Aliaskerzadeh (sau Askar Zadeh), având o mamă, fiziciană, de naționalitate rusă și un tată azerbaijian, jurnalist în Iran. Zadeh a crescut în Iran până la vârsta de 10 ani, și a studiat la Liceul Alborz. După liceu a dat examene de admitere la universitate și a fost al doilea pe țară, apoi a urmat cursurile la Universitatea Tehran, în inginerie electrică.

În timpul celui de al doilea război mondial, în anul 1944, s-a mutat în Statele Unite ale Americii. În 1946 și-a luat Masteratul la Institutul de Tehnologie, din Massachusetts, iar în 1949 și-a dat Doctoratul în Columbia și a început să predea teoria sistemelor. El a lucrat la Berkeley încă din 1959. Lotfi A. Zadeh a lucrat la Universitatea California din 1963 până în 1968. Până în anul 1965 Zadeh și-a centrat cercetarea spre teoria sistemelor și analiza problemelor de decizie, în teoria controlului. În 1965 a publicat cercetările despre matematica fuzzy cu detalii despre teoria mulțimilor fuzzy. Dar de atunci aria sa de cercetare se îndreaptă spre teoria mulțimilor fuzzy și aplicațiile ei în inteligența artificială, lingvistică, logică, teoria controlului sau rețele neuronale. În 1973 a publicat „Teoria logicii fuzzy”. În prezent cercetările sale sunt îndreptate spre logica fuzzy, calculul cu cuvinte și mai nou dezvoltarea calculului de precizie și percepere a limbajului natural.

Dr. Zadeh a construit o matematică cu multe aplicații practice. Pentru rezultatele remarcabile obținute Zadeh a fost recompensat cu diverse premii, cum ar fi: Premiul Honda, acordat de Fundația Honda (1989), Citația Berkley, din partea Universității California (1991). În 1992 Zadeh a fost recompensat de IEEE cu Medalia Richard Hamming "Pentru contribuțiile în informatică, incluzând conceptualizarea mulțimilor fuzzy". În 1993, Dr. Zadeh a primit Medalia Rufus Oldenburger de la Societatea Americană de Inginerie Mecanică "Pentru contribuțiile în teoria sistemelor, teoria controlului, în teoria mulțimilor fuzzy și aplicațiile în inteligență artificială, lingvistică, rețele și sisteme neuronale." El a fost deasemenea recompensat cu Premiul Grigore Moisil pentru cercetări fundamentale, și cu distincția "Cea mai bună apariție" acordată de Conferința Second International de teorie și tehnologie fuzzy. În 1995, Dr. Zadeh a primit Medalia de onoare de la IEEE "Pentru pionierat în dezvoltarea logicii fuzzy și a multiplelor sale aplicații." În 1996, Dr. Zadeh a fost recompensat cu Premiul Okawa "Pentru contribuțiile în informatică prin dezvoltarea logicii fuzzy și a aplicațiilor sale". În 1997, Dr. Zadeh a primit Medalia B. Bolzano Medal de la Academia de Științe a Republicii Cehe "Pentru cercetările din matematica fuzzy". În 1998, Dr. Zadeh a primit Medalia Edward Feigenbaum de la Societatea Internațională de Sisteme Inteligente. În 2000, a primit Medalia Mileniului de la IEEE; un premiu pentru pionerat în sisteme fuzzy, dar și multe medalii sau premii care să răsplătească și să recunoască contribuțiile matematicii fuzzy în multe ramuri ale științei. În 2001, a primit Premiul ACM 2000 Allen Newell contribuțiile la dezvoltarea inteligenței artificiale prin dezvoltarea logicii fuzzy.

Dr. Zadeh ține doctorate în: Universitatea Paul-Sabatier, Toulouse, Franța; Universitatea State din New York, Binghamton, NY; Universitatea Dortmund, Germania; Universitatea din Oviedo, Spania; Universitatea din Granada, Spania; Universitatea Lakehead, Canada; Universitatea din Louisville; Universitatea Baku, Azerbaijan; Universitatea Silesian Technical, Gliwice, Polonia; Universitatea din Toronto, Canada; Universitatea din Ostrava, Republica Cehă; Universitatea Central Florida, Orlando; Universitatea din Hamburg, Germania; Universitatea din Paris, Franța.

Dr. Zadeh este autorul a două sute de articole a câtorva editoriale și a 15 jurnale. El este membru în: Advisory Board, Fuzzy Initiative, North Rhine-Westfalia, Germania; Advisory Board, Fuzzy Logic Research Center, Universitatea Texas A&M, College Station, Texas; Comitetul Advisory, Centrul de educație și cercetare în sisteme fuzzy și inteligență artificială, Iași, România; Institutul internațional pentru studiul sistemelor; Societatea internațională de rețele neuronale; este președinte de onoare Asociației biomedicale a sistemelor fuzzy din Japonia și este membru în Asociația spaniolă pentru tehnologie și logică fuzzy.

Studiul principalelor rezultate

"Fuzzy Sets"

În acest articol "Fuzzy sets" Zadeh a definit mulțimea fuzzy. Fiecare mulțime fuzzy este caracterizată de o funcție caracteristică care să atașeze fiecărui punct al mulțimii un număr real din intervalul $[0,1]$. Elementul neutru este caracterizată de noțiunea de mulțime fuzzy vidă. Tot aici, ca o paralelă la matematica standard, este definită complementara unei mulțimi fuzzy și noțiunea de submulțime. Deoarece definirea unor elemente nu are sens dacă cu ele nu se poate opera, Zadeh a introdus operațiile cu care se lucrează asupra mulțimilor fuzzy. Aestea sunt reuniunea și intersecția. Reuniunea a două mulțimi fuzzy este văzută ca fiind maximul dintre funcțiile caracteristice corespunzătoare celor două mulțimi. Pentru maxim se poate folosi și operatorul logic de disjuncție or. Intersecția dintre două mulțimi fuzzy a fost definită ca fiind minimul dintre funcțiile caracteristice ale mulțimilor fuzzy. Zadeh a dat și o interpretare geometrică acestor două operații. Pe lângă operațiile logice pe care le-am prezentat mai sus, Zadeh a introdus operațiile algebrice asupra mulțimilor fuzzy. Aceste operații sunt: produsul algebric, suma algebrică și diferența absolută. Produsul algebric dinre două mulțimi este definit ca fiind produsul dintre funcțiile caracteristice corespunzătoare celor două mulțimi fuzzy. Au fost introduse suma și diferența absolută a două mulțimi fuzzy. Toate aceste rezultate sunt demonstrate riguros matematic

"Fuzzy logic"

Un alt rezultat care a fost un punct de pornire pentru cercetările din anii următori a fost articolul "Fuzzy logic and approximate reasonings", publicat în 1975.

Din acest articol, Zadeh pornind de la noțiunile binecunoscute din logica matematică introduce noțiunile matematice elementare pentru a defini logica fuzzy. Această ramură a matematicii este derivată din teoria mulțimilor fuzzy. Această matematică a fost creată cu rolul de a aproxima mai degrabă decât de a deduce niște rezultate din logica matematică clasică.

Logica fuzzy poate fi văzută ca o aplicație a teoriei mulțimilor fuzzy în lumea reală, fiind rezultatul unor probleme complexe. Deseori este confundată cu teoria probabilităților. Este foarte interesant de urmărit modul în care a fost introdusă aceasta ramură matematică. Logica fuzzy este denumită "logica imprecisă" și nu pentru că logica fuzzy ar fi mai puțin precisă decât logica matematică. Logica fuzzy lucrează cu metode matematice, organizate și este înrudită cu concepte imprecise, iar cel mai interesat este că în cazul logicii fuzzy există posibilitatea aplicării rezultatelor în viața de zi cu zi. Logica fuzzy din 1975 și până azi are un alt fel de exprimare a impreciziei. Lotfi Zadeh a argumentat că este diferită de teoria probabilității, dar nu o înlocuiește. Logica fuzzy se aplica cu succes în probleme de inteligență artificială. Probabil că în viitorul apropiat scalaritatea și complexitatea sistemelor fuzzy va depinde tot mai mult de implementările din teoria logicii fuzzy.

Logica fuzzy ne dă posibilitatea de a reprezenta și de a raționa cu cunoștințe comune, formulate în limbaj natural, motiv pentru care și-au găsit aplicabilitate în multe domenii. Logica fuzzy este valoroasă pentru aplicațiile în controlul automat, unde este extrem de dificil, iar uneori chiar imposibil de rezolvat un sistem de control tradițional. Modul în care termeni și reguli imprecise se pot prelucra cu ajutorul calculatorului în limbaj aproape natural, dau acestei ramuri a științei o mare deschidere și o creștere exponențială.

Aplicații ale logicii fuzzy

Și pentru ca am discutat despre faptul că logica fuzzy se aplică cu succes în problemele reale să amintim câteva aplicații. Teoria logicii fuzzy dă rezultate extraordinare în: procesarea imaginii digitale, jocuri video care folosesc inteligența artificială, programe pentru mașini de spălat și alte aparate casnice, microprocesoare, etc.

Prof. Adriana Brândaș

Liceul Teoretic „Mihai Veliciu”, Chișineu-Criș, jud. Arad