

Motto:

”Ce oameni ! Ce sunt cei de-acum !
Și toți s-au dus pe același drum.
Ei și-au plinit chemarea lor
Și i-am văzut murind ușor;
N-a fost nici unul plângător
Că viața-i fum.”

”Ori buni, ori răi, tot un mormânt !
Nu-i nimeni drac și nimeni sfânt !
Credința-i val, iubirea vânt
Și viața fum !”

George Coșbuc

Metoda vectorilor proprii de ridicare la putere a matricelor

NECULAI STANCIU¹

Abstract. Square matrices can be multiplied by themselves repeatedly in the same way that ordinary numbers can. This repeated multiplication can be described as a power of the matrix. The article presents a method(*eigendecomposition of a matrix*-decompositions based on eigenvalues, also called *spectral decomposition*) for power of matrix and many applications of this method.

Keywords: matrix multiplication, eigenvalue, eigenvector.

MSC: 15-XX, 11C20, 15A24 .

Rezultatul principal.

Pentru cazul în care valorile proprii ale matricei sunt distincte, indicăm în cele ce urmează o nouă metodă pe care o vom numi, *metoda vectorilor proprii*(*metoda descompunerii spectrale sau metoda descompunerii proprii a matricei*) pentru ridicarea la putere a matricilor.

¹ Prof. , Șc.”George Emil Palade”, Buzău

Metoda vectorilor proprii de ridicare la putere a matricelor

Fie $A \in M_n(C)$ o matrice pătratică.

Definiție. Un număr $\lambda \in C$ se numește *valoare proprie* pentru matricea A , dacă există un vector nenul $V \in M_{n,1}(C)$ (matrice coloană) astfel încât $AV = \lambda V$.

Vectorul V din definiția de mai sus se numește *vector propriu* pentru matricea A corespunzător valorii proprii λ .

Noua metodă de ridicare la putere a matricilor face apel la algebra liniară și mai exact la următoarea :

Teoremă.

Dacă valorile proprii ale matricei $A \in M_n(C)$ sunt distincte atunci există o matrice V

nesingulară (numită matrice de pasaj) astfel încât $V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Demonstrație.(vezi [7])

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A , atunci :

$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \dots (A - \lambda_n I_n) = O_n$ iar matricele $(A - \lambda_i I_n)$, $i = \overline{1, n}$ au determinanții zero, deci există $V_1, V_2, \dots, V_n \in M_{n,1}(C)$, $V_1 \neq O, V_2 \neq O, \dots, V_n \neq O$ astfel încât $AV_1 = \lambda_1 V_1, AV_2 = \lambda_2 V_2, \dots, AV_n = \lambda_n V_n$.

Dacă $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1n} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \dots \\ v_{2n} \end{pmatrix}, \dots, V_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \dots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$,

arătăm că matricea $V = (V_1, V_2, \dots, V_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$ este inversabilă.

Dacă prin absurd două coloane i și j ar fi proporționale $V_i = \alpha V_j, \alpha \in C^*$, am avea:

$AV_i = \lambda_i V_i \Leftrightarrow A\alpha V_j = \lambda_i \alpha V_j \Leftrightarrow \alpha AV_j = \alpha \lambda_i V_j \Leftrightarrow \alpha \lambda_j V_j = \alpha \lambda_i V_j \Leftrightarrow \alpha(\lambda_i - \lambda_j)V_j = O_{n,1}$, deci $\lambda_i = \lambda_j$, contradicție.

Notăm $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Avem $A \cdot V = A \cdot (V_1, V_2, \dots, V_n) = (AV_1, AV_2, \dots, AV_n) = (\lambda_1 V_1, \lambda_2 V_2, \dots, \lambda_n V_n) =$

$$= (V_1, V_2, \dots, V_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = V \cdot \Lambda, \text{ deci } V^{-1} \cdot A \cdot V = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Noua metodă de calcul pentru A^n este un rezultat al teoremei de mai sus și anume:

Consecință. $A^n = V \cdot \Lambda^n \cdot V^{-1}$.

Demonstrație. Din $V^{-1} \cdot A \cdot V = \Lambda$, rezultă $A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$, și de aici :

$$A^n = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} \cdot V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} \cdot \dots \cdot V \cdot \Lambda \cdot V^{-1} = V \cdot \Lambda^n \cdot V^{-1}.$$

Observație. Matricea V , din teorema respectiv consecința de mai sus, este o matrice arbitrară deoarece are drept coloane vectorii proprii care la rândul lor sunt și ei arbitrari pentru că rezultă dintr-un sistem compatibil nedeterminat.

Aplicații.

1^o Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ și vom calcula A^n utilizând consecința de mai sus.

Calculăm valorile proprii din ecuația $\det(A - \lambda I) = 0$, unde I este matricea unitate.

În cazul nostru $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$.

Calculăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii din sistemul de ecuații

$$(A - \lambda_i I)V_i = O$$

Pentru $\lambda_1 = 3$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2v_{11} + 2v_{12} = 0 \\ v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$, de unde $v_{11} = -\alpha, v_{12} = \alpha$.

Vectorul propriu corespunzător este $V_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_2 = 6$ rezolvăm sistemul $\begin{cases} -v_{21} + 2v_{22} = 0 \\ v_{21} - 2v_{22} = 0 \end{cases}$, de unde $v_{21} = 2\beta, v_{22} = \beta$.

Vectorul propriu corespunzător este $V_2 = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$.

Prin urmare avem o infinitate de matrici $V = \begin{pmatrix} -\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Alegem matricea $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, corespunzătoare valorilor $\alpha = 1, \beta = 1$.

Se înlocuiește $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în $A^n = V \cdot \Lambda^n \cdot V^{-1}$. Se obține

$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 1 & 2(2^n - 1) \\ 2^n - 1 & 2(2^{n-1} - 1) \end{pmatrix}.$$

Remarcă. Același rezultat se obține utilizând algoritmul general prezentat în (I.1.).

2⁰ Vom calcula A^n pentru matricea de ordinul 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, folosind aceeași consecință.

Ecuția caracteristică atașată lui A este $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$, de unde

rezultă valorile proprii: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$. Fie $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix}$ vectorii

proprii corespunzători. Pentru $\lambda_1 = -2$, ecuația matricială $AV_1 = -2V_1$, este echivalentă cu

sistemul $\begin{cases} 4v_{11} + v_{12} + v_{13} = 0 \\ v_{11} - v_{13} = 0 \\ v_{11} + v_{12} + 4v_{13} = 0 \end{cases}$, de unde obținem $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Analog rezultă $V_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$ și $V_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} \\ \gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$. Alegem matricea $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -5 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

corespunzătoare valorilor $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

În continuare se înlocuiește $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -5 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ în

$A^n = V \cdot \Lambda^n \cdot V^{-1}$.

Obținem $A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-2)^n + 3^{n+2} + 5}{15} & \frac{3^n - (-2)^n}{5} & \frac{2 \cdot 3^{n+1} - (-2)^n - 5}{15} \\ \frac{1 - (-2)^n}{3} & (-2)^n & \frac{(-2)^n - 1}{3} \\ \frac{(-2)^n + 3^{n+2} - 10}{15} & \frac{3^n - (-2)^n}{5} & \frac{2 \cdot 3^{n+1} - (-2)^n + 10}{15} \end{pmatrix}$.

Remarcă. Același rezultat se obține utilizând algoritmul general prezentat în (I.2.).

3⁰ Determinăm soluțiile ecuației $X^n = aI_3$ pentru $a \in \mathbb{C}^*, n \geq 2$ în cazul în care valorile proprii ale matricei X sunt distincte.

Se observă că matricea $\Lambda = V^{-1} \cdot X \cdot V$ este de asemenea o soluție pentru ecuația dată.

Într-adevăr, $\Lambda^n = V^{-1} \cdot X \cdot V \cdot V^{-1} \cdot X \cdot V \cdot \dots \cdot V^{-1} \cdot X \cdot V = V^{-1} \cdot X^n \cdot V = V^{-1} \cdot aI_2 \cdot V = aI_2$.

Rezultă că există $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ iar ecuația devine $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sunt rădăcinile de ordinul n ale lui a .

În concluzie, o parte din soluțiile ecuației $X^n = aI_3$ sunt $X = V \cdot \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & a_j & 0 \\ 0 & 0 & a_k \end{pmatrix} \cdot V^{-1}$, unde

a_i, a_j, a_k sunt soluțiile arbitrare ale ecuației $x^n = a$ iar $V \in M_3(C)$ o matrice nesingulară arbitrară.

Analog se rezolvă ecuațiile de tipul $X^n = aI_m$, unde $X \in M_m(C)$.

4^o Rezolvăm ecuația $X^n = A$, în care valorile proprii ale matricei A sunt distincte.

Presupunem de la început pentru a fixa ideile că $A \in M_3(C)$. Dacă μ_1, μ_2, μ_3 valorile proprii ale matricei X , iar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valorile proprii ale matricei A , atunci $\mu_1^n = \lambda_1, \mu_2^n = \lambda_2, \mu_3^n = \lambda_3$ cu

$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$. Întrădevăr, găsim V matricea nesingulară pentru care $V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ și

în continuare înmulțim relația $X^n = A$ cu V^{-1} la stânga și V la dreapta.

Rezultă

$$(V^{-1} \cdot A \cdot V)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

deci $\mu_1^n = \lambda_1, \mu_2^n = \lambda_2, \mu_3^n = \lambda_3$. Soluțiile sunt de forma $X = V \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot V^{-1}$, unde

$\alpha^n = \lambda_1, \beta^n = \lambda_2, \gamma^n = \lambda_3$ și $V \in M_3(C)$ o matrice nesingulară arbitrară.

Analog se rezolvă ecuația $X^n = A$ pentru $A \in M_m(C)$.

Remarcă. Pentru rezolvarea ecuațiilor de mai sus există și alte metode.

Briefing. Din cele prezentate rezultă:

Avantajul metodei.

Este cea mai rapidă metodă pentru matrici patratice cu ordin mai mare ca 2 (pentru matrici pătratice de ordinul 2 cel mai eficient este algoritmul **I.1.**). Dacă avem de exemplu o matrice de ordinul m , numărul de necunoscute pentru determinarea lui A^n este $m^2 - m$ (deoarece rezultă din m sisteme compatibile simplu nedeterminate cu m ecuații) față de m^3 câte necunoscute trebuiesc determinate pentru aflarea lui A^n din sistemul de ecuații

$$A^n = \sum_{i=1}^m \lambda_i^m A_i \text{ (vezi [6])}.$$

Dezavantajul metodei.

Se determină A^n doar în cazul în care valorile proprii ale matricei A sunt distincte

Algoritmul metodei.

Pentru determinarea elementelor matricei A^n , în cazul general $A \in M_n(C)$, se parcurg etapele:

a) se determină valorile proprii, $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ (se rezolvă ecuația $\det(A - \lambda I) = 0$, care are soluții simple);

b) se determină vectorii proprii, $V_i, i = \overline{1, m}$ (se rezolvă sistemele de ecuații $(A - \lambda_i I)V_i = O, i = \overline{1, m}$);

c) se calculează $A^n = V \cdot \Lambda^n \cdot V^{-1}$.

Osatura, ridicării la putere a unei matrice o reprezintă valorile proprii ale acesteia.

Butada, lansată (și) de articol este: Orice problemă, chiar rezolvată mai mult decât satisfăcător (vezi retrospectiva bibliografică) nu este un punct terminus.

BIBLIOGRAFIE

- [1] S. Anița, *Unele metode de ridicare la putere a matricilor de ordinul 3*, G.M. 1 / 1983.
- [2] S. Cremarencu, *În legătură cu puterile matricilor pătratice de ordinul 3*, G.M. 6 / 1982.
- [3] Gh. Ghiță, *O metodă de ridicare la putere a matricilor*, G.M. 5-6 / 2004.
- [4] L. Lupaș, A. Lupaș, *Probleme de algebră*, Editura Gil, Zalău, 2001.
- [5] M.E. Panaitopol, *Ridicarea la putere a matricilor pătratice de ordinul doi*, G.M. 3 / 1975.
- [6] C. Năstăsescu, M. Țena, *Calculul puterilor unor elemente dintr-un inel necomutativ*, G.M. 3 / 1983.
- [7] V. Pop, ș.a, *Matematică pentru grupele de performanță*, Editura Dacia Educațional, Cluj-Napoca, 2004.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz

Prof. Laura Radu

**Colegiul Tehnic de Alimentație și
Turism „Dumitru Moțoc”, Galați**

Pentru orice numere reale a_i, b_i , unde $i = \overline{1, n}$, are loc relația:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

cu egalitate dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

1). Obținerea inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwartz din inegalitatea lui Hölder

Știm că oricare ar fi numerele $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avem:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q} \quad (\text{inegalitatea lui Hölder}),$$

$$\text{sau } |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n| \leq \left(|a_1|^p + |a_2|^p + \dots + |a_n|^p \right)^{1/p} \cdot \left(|b_1|^q + |b_2|^q + \dots + |b_n|^q \right)^{1/q}.$$

Luând $p = q = 2$, avem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ și inegalitatea lui Hölder devine:

$$|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n| \leq \left(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Ridicând la puterea a doua, obținem:

$$(|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n|)^2 \leq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2) \cdot (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2),$$

dar $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n|$, rezultă

$$(|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|)^2 \leq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2) \cdot (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2) \Leftrightarrow$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

relație ce reprezintă inegalitatea Cauchy -Buniakowski-Schwartz.

2). Demonstrația inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwartz prin inducție matematică

Considerăm propoziția

$$P(n): (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \forall n \geq 1.$$

Verificăm $P(1): (a_1b_1)^2 \leq a_1^2 \cdot b_1^2$ adevărat $\Rightarrow P(1)$ adevărată

$$P(2): (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)$$

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$$

$$2a_1b_1a_2b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0 \text{ adevărat} \Rightarrow P(2) \text{ adevărată}$$

Presupunem că $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$P(k): (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) \text{ adevărată}$$

$$P(k+1): (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{k+1}b_{k+1})^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k+1}^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{k+1}^2)$$

$$\begin{aligned} & (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \dots + a_kb_k) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \leq \\ & \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + \\ & + b_{k+1}^2(a_1^2 + \dots + a_k^2) + a_{k+1}^2(b_1^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \end{aligned}$$

Folosind $P(k)$, obținem:

$$2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \dots + a_kb_k) \leq b_{k+1}^2(a_1^2 + \dots + a_k^2) + a_{k+1}^2(b_1^2 + \dots + b_k^2) \Rightarrow$$

$$(a_1b_{k+1} - a_{k+1}b_1)^2 + (a_2b_{k+1} - a_{k+1}b_2)^2 + \dots + (a_kb_{k+1} - a_{k+1}b_k)^2 \geq 0 \text{ adevărat} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(k+1)$ adevărată.

În concluzie propoziția $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \geq 1$, n număr natural.

3). Obținerea inegalității Cauchy -Buniakowski-Schwartz cu ajutorul funcției de gradul al II-lea

Considerăm funcțiile $f_k: R \rightarrow R$, $f_k(x) = (a_kx + b_k)^2$, $k = \overline{1, n}$.

$$f_k(x) = a_k^2x^2 + 2a_kb_kx + b_k^2$$

Evident, $f_k(x) \geq 0 \forall x \in R$ și de aici rezultă că $\Delta_k \leq 0$.

Definim funcția $f: R \rightarrow R_+$, $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k^2x^2 + 2\sum_{k=1}^n a_kb_kx + \sum_{k=1}^n b_k^2$. Deoarece f este sumă de

funcții pozitive, atunci și funcția f este pozitivă și avem:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \Rightarrow$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Câteva aplicații ale inegalității Cauchy -Buniakowski-Schwartz (C-B-S)

1). Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive astfel încât $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$.

Să se arate că $8xyz \leq 1$.

(G.M. 5/2007, O.B.M.J. 2006-proba de baraj)

Soluție : Putem aplica C-B-S pentru fiecare fracție din egalitatea dată, astfel :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x \right) \left(2 + 2 + \frac{1}{x} \right) \geq (1+1+1)^2 \Rightarrow$$

$$(1+x) \left(4 + \frac{1}{x} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{9} \left(4 + \frac{1}{x} \right).$$

În mod analog scriem celelalte fracții și însumând relațiile, obținem:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \leq \frac{1}{9} \left(4 + \frac{1}{x} + 4 + \frac{1}{y} + 4 + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow$$

$$2 \leq \frac{1}{9} \left(12 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 \Rightarrow xy + yz + zx \geq 6xyz. \quad (1)$$

În relația din ipoteză eliminăm numitorii și avem :

$$1 + 2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 2(1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz) \Rightarrow$$

$$1 = xy + yz + zx + 2xyz \Rightarrow$$

$$xy + yz + zx = 1 - 2xyz.$$

Ținând cont de relația (1), obținem :

$$1 - 2xyz \geq 6xyz \Rightarrow 8xyz \leq 1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2). Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$, să se arate că:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

Soluție: Aplicăm inegalitatea C-B-S:

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \right) [(b+c) + (a+c) + (a+b)] \geq (a+b+c)^2$$

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \right) (2a+2b+2c) \geq (a+b+c)^2$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Dar $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \Rightarrow a+b+c \geq 1$,

obținem în final că $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}$.

3). Arătați că oricare ar fi numerele reale strict pozitive x,y,z are loc relația:

$$\frac{x^3 y}{xz^3 + y^2 z^2} + \frac{y^3 z}{yx^3 + z^2 x^2} + \frac{z^3 x}{zy^3 + x^2 y^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Soluție: Amplificăm prima fracție cu xy, a doua cu yz și a treia cu zx în vederea aplicării inegalității C-B-S:

$$\frac{x^4 y^2}{x^2 yz^3 + xy^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 yz^3} + \frac{z^4 x^2}{xy^3 z^2 + x^3 y^2 z} \geq \frac{3}{2}.$$

Aplicăm inegalitatea lui C-B-S :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^4 y^2}{x^2 yz^3 + xy^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 yz^3} + \frac{z^4 x^2}{xy^3 z^2 + x^3 y^2 z} \right) \cdot [(x^2 yz^3 + xy^3 z^2) + (x^3 y^2 z + x^2 yz^3) + (xy^3 z^2 + x^3 y^2 z)] \geq \\ & \geq (x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2 \Rightarrow \\ & \frac{x^4 y^2}{x^2 yz^3 + xy^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 yz^3} + \frac{z^4 x^2}{xy^3 z^2 + x^3 y^2 z} \geq \frac{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2}{xyz(xz^2 + y^2 z + x^2 y + xz^2 + y^2 z + x^2 y)} \Rightarrow \\ & \frac{x^4 y^2}{x^2 yz^3 + xy^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 yz^3} + \frac{z^4 x^2}{xy^3 z^2 + x^3 y^2 z} \geq \frac{(x^2 y + y^2 z + z^2 x)^2}{2xyz(xz^2 + y^2 z + x^2 y)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{x^4 y^2}{x^2 y z^3 + x y^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 y z^3} + \frac{z^4 x^2}{x y^3 z^2 + x^3 y^2 z} \geq \frac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{2xyz} \geq \frac{3\sqrt[3]{x^3 y^3 z^3}}{2xyz} = \frac{3}{2}, \text{ rezultat}$$

obținut în urma aplicării inegalității mediilor: $m_a \geq m_g$.

$$\text{Deci } \frac{x^4 y^2}{x^2 y z^3 + x y^3 z^2} + \frac{y^4 z^2}{x^3 y^2 z + x^2 y z^3} + \frac{z^4 x^2}{x y^3 z^2 + x^3 y^2 z} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^3 y}{x z^3 + y^2 z^2} + \frac{y^3 z}{y x^3 + z^2 x^2} + \frac{z^3 x}{z y^3 + x^2 y^2} \geq \frac{3}{2}.$$

4). Să se arate că :

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2},$$

unde $a_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$.

Soluție: Conform inegalității C-B-S avem:

$$\left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) (a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)) \geq$$

$$\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)} \quad (1)$$

Știind că $m_g \leq m_a$, rezultă:

$$a_1 a_2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}, \quad a_1 a_3 \leq \frac{a_1^2 + a_3^2}{2}, \quad a_2 a_3 \leq \frac{a_2^2 + a_3^2}{2}, \quad \dots, \quad a_n a_2 \leq \frac{a_n^2 + a_2^2}{2}$$

$$a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_{n-1}(a_n + a_1) + a_n(a_1 + a_2) =$$

$$= a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n + a_{n-1} a_1 + a_n a_1 + a_n a_2 \leq$$

$$\leq \frac{4a_1^2 + 4a_2^2 + \dots + 4a_n^2}{2} = 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)} \geq \frac{1}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$$

și ținând cont de relația (1) deducem că :

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} .$$

5). Arătați că dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

O.M.- etapa județeană, Galați, 5 martie 2005

Soluție: Membrul stâng al relației date se poate scrie:

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} = \frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{c}{b^2} + \frac{a}{b^2} .$$

Folosind inegalitatea C-B-S obținem:

$$\left(\frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{c}{b^2} + \frac{a}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{c}{b^2} + \frac{a}{b^2} \geq \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

6). Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

Demonstrați că : $a_1\sqrt{\frac{a_1}{1}} + a_2\sqrt{\frac{a_2}{3}} + \dots + a_n\sqrt{\frac{a_n}{2n-1}} \geq \sqrt{n}$.

Soluție: Prelucrăm membrul stâng al inegalității amplificând fiecare fracție cu numărătorul ei:

$$a_1\sqrt{\frac{a_1}{1}} + a_2\sqrt{\frac{a_2}{3}} + \dots + a_n\sqrt{\frac{a_n}{2n-1}} = \frac{a_1^2}{\sqrt{1a_1}} + \frac{a_2^2}{\sqrt{3a_2}} + \dots + \frac{a_n^2}{\sqrt{(2n-1)a_n}} . \quad (1)$$

Aplicând inegalitatea C-B-S, obținem:

$$\left(\frac{a_1^2}{\sqrt{1a_1}} + \frac{a_2^2}{\sqrt{3a_2}} + \dots + \frac{a_n^2}{\sqrt{(2n-1)a_n}}\right)(\sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n}) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{\sqrt{1a_1}} + \frac{a_2^2}{\sqrt{3a_2}} + \dots + \frac{a_n^2}{\sqrt{(2n-1)a_n}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n}} \quad (2)$$

$$(\sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n})^2 = (\sqrt{a_1} + \sqrt{3}\sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{2n-1}\sqrt{a_n})^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+3+\dots+(2n-1)) (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \\
&= n^2 (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n^3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n} \leq n\sqrt{n} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n}} \geq \frac{1}{n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Înmulțim relația cu n^2 și obținem:

$$\frac{n^2}{\sqrt{a_1} + \sqrt{3a_2} + \dots + \sqrt{(2n-1)a_n}} \geq \frac{n^2}{n\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Ținând cont de relațiile (1) și (2) obținem :

$$\frac{a_1^2}{\sqrt{1a_1}} + \frac{a_2^2}{\sqrt{3a_2}} + \dots + \frac{a_n^2}{\sqrt{(2n-1)a_n}} \geq \sqrt{n} \Rightarrow a_1\sqrt{\frac{a_1}{1}} + a_2\sqrt{\frac{a_2}{3}} + \dots + a_n\sqrt{\frac{a_n}{2n-1}} \geq \sqrt{n},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Bibliografie :

- 1).Crînganu J., „Predarea matematicii pentru elevi de performanță ”-curs master
- 2).Gazeta Matematică nr.5/2007
- 3).www.math.md

Studiu privind metoda analizei în rezolvarea problemelor de geometrie

Prof. Antohe Florin Mihai

Școala Nichita Stănescu Galați

1. Metoda analizei în rezolvarea problemelor de calcul

Analiza în rezolvarea unei probleme de calcul se aplică astfel: se pleacă de la întrebarea problemei, deci de la necunoscut spre cunoscut. Se formulează o problemă în așa fel încât răspunsul ei să fie același ca și la problema propusă. Datele problemei formulate pot fi cunoscute, iar altele necunoscute. Cu alte cuvinte se formulează o a doua problemă, a cărei întrebare trebuie să fie în așa fel pusă încât prin rezolvarea ei să ducă la găsirea valorilor mărimilor necunoscute din problema formulată.

Se poate întâmpla ca și în a doua problemă formulată unele date să nu fie cunoscute; atunci se formulează o a treia problemă a cărei întrebare trebuie să ducă la găsirea datelor necunoscute din problema a II-a, și așa mai departe.

Acest proces se repetă până când se ajunge la o problemă ale cărei date sunt cunoscute. Din acest moment operațiile se desfășoară pe calea sintezei.

Exemplu. Se dau două cercuri tangente exterioare, unul cu raza de 15 cm și celălalt cu raza de 5 cm. Se cere să se afle aria suprafeței cuprinsă între cele două cercuri și tangentele exterioare comune celor două cercuri, știind că ele formează un unghi de măsură 60° .

Rezolvare. Fie O și O_1 centrele celor două cercuri tangente exterioare. AC și AC_1 cele două tangente exterioare comune, duse din punctul A , unghiul $\angle CAC_1$ având măsura de 60° .

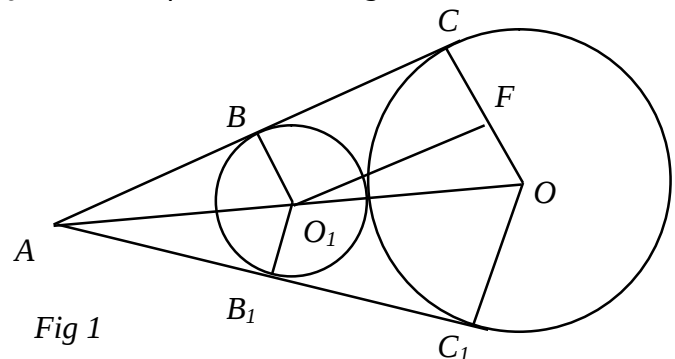


Fig 1

- a) Se aplică metoda analizei. În rezolvarea acestei probleme, plecăm de la ceea ce se cere și anume, găsirea ariei cuprinse între cele două cercuri și tangentele comune exterioare (fig 1).

Examinând figura, observăm că jumătatea ariei care se cere este egală cu aria trapezului $OCBO_1$ din care se scade aria sectorului circular COE și a sectorului circular EO_1B . Deci:

$$\sigma = 2[\sigma[OCBO_1] - (\sigma[COE] + \sigma[EO_1B])]$$

Din analiza acestei egalități observăm că nu putem calcula direct pe σ pentru că nu se cunoaște aria trapezului și ariile sectoarelor de cerc, deci atenția noastră trebuie să se îndrepte spre calculul acestor mărimi. Am redus problema dată la găsirea ariei trapezului și a sectoarelor de cerc.

- b) Pentru calculul ariei trapezului $OCBO_1$ sunt necesare lungimile bazelor și a înălțimii. Având lungimile bazelor $\|OC\| = 15$ și $\|O_1B\| = 5$, este necesar să calculăm înălțimea trapezului. Rezultă că aflarea ariei trapezului se reduce la aflarea înălțimii acestuia.
- c) Ducând din O , o paralelă la tangenta comună BC , se formează triunghiul dreptunghic OFO , din care calculăm lungimea segmentului O_1F , care este și înălțimea trapezului $OCBO_1$. Avem:

$$\|O_1F\|^2 = \|O_1O\|^2 - \|OF\|^2$$

$$\|O_1F\|^2 = 20^2 - 10^2 = 300$$

$$\|O_1F\| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

În concluzie, bazele și înălțimea trapezului fiind cunoscute putem calcula aria trapezului.

$$\sigma[OCBO_1] = \frac{(15 + 5) \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}.$$

- d) Calculăm aria sectorului circular COE , aplicând formula care ne dă aria și obținem:

$$\sigma[sect OCE] = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

Din cele două mărimi care se repetă să calculăm aria sectorului; una este cunoscută $R = 15$, însă nu cunoaștem pe n . Rezultă că problema care se referă la calculul ariei sectorului circular COE se reduce la calculul măsurii unghiului la centru COE .

Ținând seama că unghiul $\sphericalangle CAC_1$ are măsura de 60° , rezultă că $m(\sphericalangle CAO_1) = 30^\circ$ și deci $m(\sphericalangle CAO) = 60^\circ$, adică $n = 60^\circ$. deci:

$$\sigma[sect OCE] = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi \cdot 75}{2}.$$

- e) Pentru a calcula aria sectorului O_1EB , procedăm în mod asemănător și avem:

$$\sigma[\text{sect } O_1EB] = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n_1}{360}.$$

Pentru a putea continua calculele sunt necesare r și n_1 . Pe r îl cunoaștem din enunțul problemei date fiind egală cu 5, însă nu cunoaștem pe n_1 ; măsura unghiului $\sphericalangle BO_1E$. Deci problema calculului ariei sectorului O_1EB se reduce la calculul măsurii unghiului $\sphericalangle BO_1E$.

Avem: $\sphericalangle COA \equiv \sphericalangle BO_1A$ ca unghiuri corespondente, deci $m(\sphericalangle BO_1A) = 60^\circ$. Unghiul $\sphericalangle EO_1B$ este suplementul unghiului $\sphericalangle BO_1A$, de unde $m(\sphericalangle EO_1B) = 120^\circ$. Cu acest rezultat putem calcula aria sectorului circular EO_1B .

$$\sigma[\text{sect } O_1EB] = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi \cdot 25}{3}.$$

Înlocuind în egalitatea (1) mărimile necunoscute din membrul al doilea prin valorile lor aflate pe parcurs și făcând calculele indicate obținem aria cerută de problema dată:

$$\sigma = \frac{25}{3} (24\sqrt{3} - 11)\pi$$

2. Metoda analizei în rezolvarea problemelor de demonstrație

La rezolvarea unei probleme de demonstrație prin analiză se pornește de la concluzia B și se caută o propoziție C care s-o implice pe B. Căutăm o altă propoziție D prin care s-o deducem pe C, apoi o propoziție E din care s-o deducem pe D și așa mai departe, până când reușim să găsim o propoziție A prin care să putem deduce propoziția precedentă.

Practic se procedează astfel:

- a) se presupune că propoziția de demonstrat este adevărată;
- b) se pune următoarea întrebare: de unde reiese imediat concluzia teoremei? Răspunsul la această întrebare duce la formularea unei propoziții mai puțin necunoscută decât cea dată de teoremă. Să numim această propoziție, de exemplu C.
- c) O întrebare asemănătoare se pune și pentru propoziția C. De unde reiese imediat concluzia propoziției C. Răspunsul la această întrebare duce la formularea unei noi propoziții mai puțin necunoscută decât C. Să numim această propoziție, de exemplu D.
- d) Acest procedeu se repetă până când se obține o propoziție cunoscută, stabilită mai înainte.

e) O dată ajuns la acest adevăr, raționamentul decurge mai departe după metoda sintezei.

După felul cum se aplică metoda analizei, se poate vedea clar că fiecare etapă nu se desfășoară prin încercări, ci este o legătură între propozițiile precedente, așadar raționamentele sunt motivate.

Exemplu. *Produsul lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egal cu produsul lungimilor diametrului cercului circumscris prin lungimea înălțimii corespunzătoare laturii a treia.*

Demonstrație. Fie ABC triunghiul înscris în cercul $C(O, r)$. (BD) înălțimea dusă din vârful B pe latura (AC) și (BE) diametrul dus prin vârful B . Trebuie să arătăm că:

$$\|AB\| \|BC\| = \|BE\| \|BD\|.$$

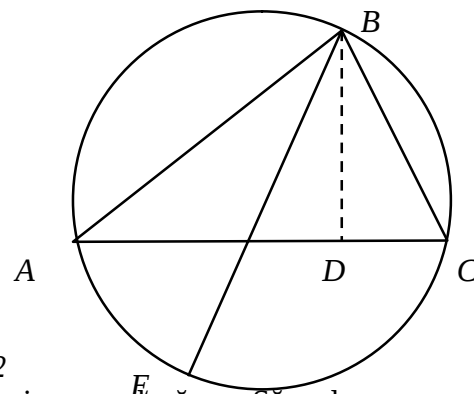


Fig 2

a) Presupunem că cele afirmate de teoremă în concluzie sunt adevărate. Să vedem ce consecințe decurg din acestea. Din relația:

$$\|AB\| \|BC\| = \|BE\| \|BD\| \quad (1)$$

rezultă imediat egalitatea de rapoarte:

$$\frac{\|AB\|}{\|BE\|} = \frac{\|BD\|}{\|BC\|} \quad (2)$$

b) Examinând proporția de la punctul precedent, observăm că segmentele care o formează sunt laturi ale triunghiurilor ABE și BDC . Pentru a avea proporția de mai sus ar fi suficient ca triunghiurile ABE și BDC să fie asemenea, adică:

$$\triangle ABE \sim \triangle BCD \quad (3)$$

c) Propoziția pe care o exprimă (3) este un adevăr pe care îl putem pune imediat în evidență, triunghiurile menționate fiind triunghiuri dreptunghice având câte un unghi ascuțit congruent.

$\angle DCB \equiv \angle AEB$ ambele având ca măsură jumătate din măsura aceluiași arc AMB .

d) Pentru a stabili relația din concluzie, se face un raționament pe cale inversă (4), (3), (2), (1) și teorema este demonstrată.

O SUMA generatoare de alte sume

de Nicodim A. Negrea

Sotiei mele, Mia

Desenam un dreptunghi de lungime $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ si latime b_{n+1} , pe care insemnam $b_1, b_2, \dots, b_n$, apoi calculam aria suprafetei dreptunghiului, in doua moduri :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(\sum_{j=1}^{j=i} a_j \right) (b_{i+1} - b_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) b_{n+1} .$$

Aceasta este o suma generatoare .

Suma (1) poate fi utilizata pentru calculul multor sume.

Vom ilustra aceasta pentru calcularea sumei puterilor esamenea a primelor n numere naturale nenule.

Notam:

$$(2) \quad S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k .$$

Din (2) , obținem:

$$(3) \quad S_0(n) = n .$$

Înlocuind în (1) , pe a_i cu 1 , pe b_i cu i , obținem:

$$S_1(n) + S_1(n) = n(n+1) , \text{ de unde:}$$

$$(4) \quad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n .$$

Înlocuind în (1) , pe a_i cu 1 , pe b_i cu i^k și ținând seama de

$$(i+1)^k = \sum_{r=0}^{r=k} \binom{k}{r} i^r , \text{ obținem:}$$

$$S_k(n) + \sum_{i=1}^{i=n} i \left(\sum_{r=0}^{r=k} \binom{k}{r} i^r - i^k \right) = n(n+1)^k =$$

$$S_k(n) + \sum_{r=0}^{r=k-1} \binom{k}{r} \sum_{i=1}^{i=n} i^{r+1} = S_k(n) + \sum_{r=0}^{r=k-1} \binom{k}{r} S_{r+1}(n) ,$$

de unde obținem:

$$(5') \quad (k+1)S_k(n) = n(n+1)^k - \sum_{r=0}^{r=k-2} \binom{k}{r} S_{r+1}(n) .$$

Înlocuind în (1) , pe a_i cu 1 , pe b_i cu $(i-1)^k$ și ținând seama de

$$(i-1)^k = \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} i^r , \text{ obținem:}$$

$$S_k(n) - n^k + \sum_{i=1}^{i=n} i \left(i^k - \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} i^r \right) = n \cdot n^k$$

$$= S_k(n) - n^k - \sum_{r=0}^{r=k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_{r+1}(n) ;$$

$$(5'') \quad (k+1)S_k(n) = n^k(n+1) + \sum_{r=0}^{r=k-2} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_{r+1}(n) .$$

Adunând membru cu membru cele din (5') și (5'') , obținem:

$$(5) \quad 2(k+1)S_k(n) = n(n+1)^k + (n+1)n^k - 2 \sum_{i=1}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} \binom{k}{2i+1} S_{k-2i}(n) .$$

Din (5') , pentru $k=2$, obținem:

$$3S_2(n) = n^3 + 2n^2 + n - \frac{n^2+n}{2} , \text{ de unde:}$$

$$(6) \quad S_2(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Pentru calculul lui $S_k(n)$, $k \geq 3$, se poate folosi numai una dintre relatiile (1) sau (5') (sau (5)).

Vom obtine si alte relatii, folosind „integrarea”.

Prin inductie dupa k , din (3), (4), (6) si (5') (sau (5)), rezulta pe rand:

$$(7) \quad \text{Exista } P_{k+1}, P_{k+1} \in Q[X], \text{ grad } P_{k+1} = k + 1, \text{ pentru fiecare } k \in N, \text{ astfel incat:}$$

$$(7.0) \quad P_{k+1}(X) = \sum_{i=0}^{k+1} c_{k,k+1-i} X^{k+1-i}, k \in N;$$

$$(7.1') \quad P_{k+1}(n) = S_k(n) = \sum_{i=0}^{k+1} c_{k,k+1-i} n^{k+1-i}, \text{ oricare ar fi } n, n \in N^*, \text{ unde } k \in N;$$

$$(7.1'') \quad P_{k+1}(0) = 0 \text{ (} P_{k+1} \text{ nu are termen liber), } c_{k,0} = 0, k \in N.$$

$$(7.1) \quad P_{k+1}(n) = S_k(n) = \sum_{i=0}^{k+1} c_{k,k+1-i} n^{k+1-i}, \text{ oricare ar fi } n, n \in N^*, \text{ unde } k \in N;$$

$$(7.2') \quad P_{k+1}(1) = 1 \text{ (suma coeficientilor lui } P_{k+1} \text{ este 1), } k \in N;$$

$$(7.2) \quad \sum_{i=0}^{k+1} c_{k,k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} c_{k,k+1-i} = 1;$$

$$(7.3') \quad P_{k+1}(-1) = 0 \text{ (suma coeficientilor termenilor de grad par ai lui } P_{k+1} = \text{ suma coeficientilor termenilor de grad impar ai lui } P_{k+1} = \frac{1}{2}), k \in N^* ;$$

$$(7.3) \quad \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} c_{k,k+1-2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{k,k-2i} = \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } k, k \in N^* ;$$

$$(7.4) \quad P_{k+1}'(x) - c_{k,1} = k P_k(x), \text{ oricare ar fi } x, x \in R;$$

$$(P_{k+1}' \text{ inseamna derivata lui } P_{k+1});$$

$$(7.5') \quad P_{k+1}(x) = k \int_0^x P_k(t) dt + c_{k,1} x, \quad x \in R; k \in N.$$

Definim *peratorul liniar* I , numit “operator de integrare”, astfel:

$$(I) \quad IS_k(n) = I \sum_{i=0}^k c_{k,k+1-i} n^{k+1-i} = \sum_{i=0}^k c_{k,k+1-i} \cdot I n^{k+1-i} = \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,k+1-i}}{k+2-i} n^{k+2-i}.$$

Din (7.1), (7.5') si (I), deducem :

$$(7.5) \quad S_k(n) = kIS_{k-1}(n) + c_{k,1}n \quad \text{si suma coeficientilor de grad impar ai lui } S_k(n) \text{ este } \frac{1}{2}.$$

$$(7.5.1) \quad S_1(n) = 1.IS_0(n) + c_{1,1}n = In + c_{1,1}n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n;$$

$c_{1,1} = \frac{1}{2}$, deoarece : suma coeficientilor termenilor de grad impar este $\frac{1}{2}$;

$$(7.5.2) \quad S_2(n) = 2.IS_1(n) + c_{2,1}n = 2.\left(\frac{1}{2.3}n^3 + \frac{1}{2.2}n^2\right) + c_{2,1}n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + c_{2,1}n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \text{ deoarece } \frac{1}{3} + c_{2,1} = \frac{1}{2}.$$

Prin inductie dupa k , tinand seama de (7.5) si (7.3), mai obtinem:

$$(7.6.1') \quad c_{k,k} = \frac{1}{2}, \text{ oricare ar fi } k \in N^*;$$

$$(7.6.1) \quad c_{k,k-2i} = 0, \text{ oricare ar fi } i, i \in N^*, i \leq \frac{k}{2}.$$

Tinand seama de (7.6.1) si (7.5), apoi de (7.6.1') si (7.3), obtinem:

$$(7.7) \quad S_k(n) = k(k-1).I^2S_{k-2}(n) + c_{k,\alpha(k)}n^{\alpha(k)}, \text{ unde}$$

$$I^2 = II,$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k \text{ par}, k \geq 4, \\ 2, & \text{pentru } k \text{ impar}, k \geq 3 \end{cases} \text{ si}$$

suma coeficientilor de grad par/impar este $\frac{1}{2}$, pentru fiecare $k, k \in N, k \geq 3$;

$$(7.5') \quad S_k(n) = kIS_{k-1}(n), \text{ numai pentru } k \text{ impar}, k \geq 3.$$

Calculam:

$$\begin{aligned}
S_3(n) &= 3. IS_2(n) + c_{4,1}n = 3. I \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right) = \\
3. \left(\frac{1}{3.4}n^4 + \frac{1}{2.3}n^3 + \frac{1}{6.2}n^2 \right) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{sau} \\
S_3(n) &= 3.2. I^2 S_1(n) + c_{3,2}n^2 = 3.2. I^2 \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) + c_{3,2}n^2 = \\
3.2 \left(\frac{1}{2.3.4}n^4 + \frac{1}{2.2.3}n^3 \right) + c_{3,2}n^2 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 ; \\
S_4(n) &= 4. IS_3(n) + c_{4,1}n = 4. \left(\frac{1}{4.5}n^5 + \frac{1}{2.4}n^4 + \frac{1}{4.3}n^3 \right) + c_{4,1}n = \\
\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right)n &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n ; \\
S_5(n) &= 5. \left(\frac{1}{5.6}n^6 + \frac{1}{2.5}n^5 + \frac{1}{3.4}n^4 - \frac{1}{30.2}n^2 \right) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 ; \\
S_6(n) &= 6. \left(\frac{1}{6.7}n^7 + \frac{1}{2.6}n^6 + \frac{5}{12.5}n^5 - \frac{1}{12.3}n^3 \right) + c_{6,1}n = \\
\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)n &= \\
\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n & \quad ; \quad \text{sau} \\
S_6(n) &= 6.5. \left(\frac{1}{5.6.7}n^7 + \frac{1}{2.5.6}n^6 + \frac{1}{3.4.5}n^5 - \frac{1}{30.2.3}n^3 \right) + c_{6,1}n \quad \text{etc} .
\end{aligned}$$

Pentru calcularea lui $S_k(n)$ se poate folosi numai una din relatiile

(7.5) (sau (7.5') ,numai pentru k impar) sau (7.7) .

Va invitam sa comparati "*viteza de calcul*" de aici cu cea din [2] si sa calculati $S_k(n)$ pentru $k \in \{13; 14\}$,in toate modurile prezentate aici si in [2] , apoi sa folositi (1) pentru altfel de sume!

BIBLIOGRAFIE

[1] (28) Nicodim Negrea—Liceul Teoretic *Traian*, Deva, jud. Hunedoara—
„Calcul de sume” ,in GAZETA MATEMATICA Seria A , Anul XXVII (CVI),
Nr.3/2009, p.266, lucrare prezentata la *Prima sesiune de comunicari si
referate metodico – stiintifice organizata de S.S.M.R* cu ocazia
Scolii de vara Busteni, 2009

[2] *Profesor emerit* Gh.N.Rizescu, Operatorii Σ (suma) si Π (produs) in
invatamantul matematic preuniversitar, Editura SCORPION 7, 1997 ,
Bucuresti , Romania

Nicodim A. Negrea ,pensioner,profesor de matematica ,
Liceul Teoretic *Traian*, str. Titu Maiorescu , nr.30 , Deva, Judetul Hunedoara,
e-mail: negreaanic@yahoo.com

Progresii aritmetice si geometrice (de la simplu la complex)

Prof. Cojocaru Camelia
Școala Nr. 1 Chiraftei, Jud. Galați

Progresia aritmetica.

Definitia 1. Sirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se numeste progresie aritmetica, daca exista un numar real d , numit ratia progresia, astfel incat

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad (1)$$

adica daca fiecare termen al sirului (incepand cu al doilea) este egal cu precedentul plus unul si acelasi numar (ratia).

Elementul a_n se numeste termen general al progresiei sau termen de rang n .

Exp 1. Sa se verifice daca sirurile ce urmeaza formeaza o progresie aritmetica

$$\text{a) } a_n = 2n - 1, \quad \text{b) } 3, 6, 9, \dots, 3k, \dots \quad \text{c) } a_n = \frac{1}{n}.$$

Rezolvare. a) Cum diferenta $a_{n+1} - a_n$ reprezinta un numar constant

$$a_{n+1} - a_n = 2(n + 1) - 1 - (2n - 1) = 2$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$, rezulta ca sirul dat de termenul general $a_n = 2n - 1$ reprezinta o progresie aritmetica cu ratia 2, si anume

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$$

b) Similar exemplului a) se obtine

$$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) - 3n = 3, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

si prin urmare sirul dat formeaza o progresie aritmetica cu ratia 3.

c) Se scriu primii trei termeni ai sirului $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$ si se observa ca $a_2 - a_1 = -1/2 \neq a_3 - a_2 = -1/6$, adica sirul dat nu formeaza o progresie aritmetica.

Altfel, se considera diferenta $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n}$ si se observa ca ea depinde de n (nu este un numar constant) si prin urmare sirul dat nu este o progresie aritmetica.

Proprietati ale progresiei aritmetice

Demonstratiile proprietatilor ce urmeaza, pot fi gasite, de exemplu, in [[1](#)].

P1. Termenul general al progresiei aritmetice se poate determina prin formula

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (2)$$

unde a_1 - primul termen al progresiei, d - ratia ei.

P2. (Proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice). Termenul de rang n este media aritmetica a termenilor echidistanti de el:

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n, \quad k = 1, \overline{n-1} \quad (3)$$

Obs. Din proprietatea [P2](#) rezulta ca conditia necesara si suficienta ca

a) trei numere a, b, c (in ordinea data) sa formeze o progresie aritmetica este

$$2b = a + c, \quad (4)$$

b) trei numere a, b, c (fara precizarea consecutivitatii) sa formeze o progresie aritmetica este

$$(2b - a - c)(2c - a - b)(2a - b - c) = 0. \quad (5)$$

P3. Daca $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este o progresie aritmetica si $k + n = m + p$ ($k, n, m, p \in \mathbf{N}$), atunci

$$a_k + a_n = a_m + a_p. \quad (6)$$

P4. Formula sumei S_n primilor n termeni ai progresiei aritmetice:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad (7)$$

sau tinand seama de (2)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \quad (8)$$

Definitia 2. Progresia aritmetica este un sir crescator (descrescator), daca si numai daca ratia ei este un numar pozitiv (negativ). Daca ratia progresiei este zero avem un sir constant.

In continuare sa analizam cateva exemple.

Exp 2. Sa se determine progresia aritmetica, daca $a_3 = 2$ si $a_5 = -2$.

Rezolvare. Se aplica formula termenului general al progresiei aritmetice si se obtine sistemul

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d, \\ a_5 = a_1 + 4d, \end{cases}$$

sau, tinand seama de conditiile problemei obtinem

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 2, \\ a_1 + 4d = -2, \end{cases}$$

de unde se obtine primul termen al progresiei $a_1 = 6$ si ratia progresiei $d = -2$.

Exp 3. Sa se determine numarul x , astfel ca numerele $a - x, x, b$ (a, b fiind date), luate in aceasta ordine sa formeze o progresie aritmetica.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice si se obtine ecuatia liniara

$$2x = a - x + b,$$

cu solutia $x = \frac{a+b}{3}$.

Exp 4. Sa se determine progresia aritmetica, suma primilor n termeni ai careia se exprima prin formula

$$S_n = 3n^2 + 6n \quad (n \geq 1).$$

Rezolvare. Cum suma primilor $(n - 1)$ termeni este

$$S_{n-1} = 3(n - 1)^2 + 6(n - 1) = 3n^2 - 3, \quad (n \geq 2)$$

si cum $S_n - S_{n-1} = a_n$, rezulta

$$a_n = 3n^2 + 6n - 3n^2 + 3 = 6n + 3.$$

Substituind in formula termenului general, consecutiv $n = 1, 2, 3, \dots$ se obtine $a_1 = 9, a_2 = 15, a_3 = 21, \dots$

Exp 5. Sa se determine suma primilor nouasprezece termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, a_3, \dots$, daca

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

Rezolvare. Se observa ca $4 + 16 = 8 + 12$ si, prin urmare, (a se v edea (6)) $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12}$. Se tine seama ca suma acestor termeni este 224, si se obtine $a_4 + a_{16} = 112$.

Cum (a se vedea (7)) $S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19$ si $a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = 112$ ($1 + 19 = 4 + 16$), rezulta

$$S_{19} = \frac{112}{2} \cdot 19 = 1054.$$

Exp 6. Pentru ce valori ale parametrului a exista asa valori ale variabilei x astfel incat numerele

$$5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad a/2, \quad 25^x + 25^{-x}$$

sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare. Conform proprietatii caracteristice a progresiei aritmetice, se obtine ecuatia

$$a = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}.$$

Se observa ca pentru $a \leq 0$ ecuatia nu are solutii (membrul din dreapta, ca suma de termeni pozitivi, este un numar pozitiv).

Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ecuatia se scrie

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} + 5 \left(5^x + \frac{1}{5^x} \right) = a.$$

Se noteaza $5^x + \frac{1}{5^x} = t$, $t \geq 2$ (suma a doua marimi pozitive inverse), atunci

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} = \left(5^x + \frac{1}{5^x} \right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

si ecuatia devine

$$t^2 + 5t - (a + 2) = 0.$$

Cel putin o radacina a acestei ecuatiei urmeaza a fi mai mare ca doi (ecuatia data are doua radacini reale distincte, deoarece pentru $a > 0$, $-(a+2) < 0$ si coeficientul de pe langa t^2 , $1 > 0$), pentru ce este suficient ca sa se verifice sistemul

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} < 2, \\ f(2) \leq 0, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} -\frac{5}{2} < 2, \\ 4 + 10 - (a + 2) \leq 0, \end{cases} \text{ de unde } a \geq 12.$$

Exp 7. Sa se determine suma tuturor numerelor pare de trei cifre, divizibile la 3.

Rezolvare. Primul numar par de trei cifre, divizibil la 3 este 102. Cum numarul par, divizibil la 3 se divide si la 6, se obtine progresia

$$102, 108, 114, \dots, 996,$$

cu $a_1 = 102$, $d = 6$ si ultimul termen $a_x = 996$ ($x \in \mathbf{N}$).

Se tine seama ca $a_x = a_1 + (x - 1)d$ sau

$$102 + (x - 1) \cdot 6 = 996,$$

de unde, numarul tuturor numerelor pare de trei cifre divizibile prin trei, $x = 150$. Astfel, utilizand formula (7) se obtine

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 74850.$$

Exp 8. Fie S_n , S_m si S_p suma primilor n , respectiv m si p , termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, a_3, \dots$. Sa se arate ca

$$\frac{S_n}{n}(m-p) + \frac{S_m}{m}(p-n) + \frac{S_p}{p}(n-m) = 0. \quad (9)$$

Rezolvare. Se tine seama de formula (8) si egalitatea (9) devine

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}(m-p) + \frac{2a_1 + (m-1)d}{2}(p-n) + \frac{2a_1 + (p-1)d}{2}(n-m) = 0$$

sau

$$2a_1[m-p+p-n+n-m] + [(n-1)(m-p) + (m-1)(p-n) + (p-1)(n-m)]d = 0.$$

Cum

$$\begin{aligned} (n-1)(m-p) + (m-1)(p-n) + (p-1)(n-m) &= \\ &= nm - np - m + p + mp - mn - p + n + pn - pm - n + m = 0 \end{aligned}$$

se obtine

$$2a_1 \cdot 0 + 0 \cdot d = 0, \text{ adica } 0 = 0,$$

si prin urmare, egalitatea este demonstrata.

Exp 9. Sa se determine numerele, ce sunt termeni comuni ai progresiilor aritmetice 2, 5, 8, ..., 332 si 7, 12, 17, ..., 157.

Rezolvare. Fie b este termenul de rang n in prima progresie si, prin urmare, $b = 2 + (n-1) \cdot 3$ si in acelasi timp, este termenul de rang m in a doua progresie, adica $b = 7 + (m-1) \cdot 5$. Asadar se obtine ecuatia

$$2 + (n-1) \cdot 3 = 7 + (m-1) \cdot 5,$$

sau

$$3(n-1) = 5m$$

de unde, tinand seama ca m, n sunt numere naturale, se obtine $n = 5k + 1$ si $m = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, adica termenii $a_6, a_{11}, a_{16}, \dots, a_{5k+1}$ din prima progresie coincid cu termenii $c_3, c_6, c_9, \dots, c_{3k}$, din a doua progresie. Asadar, termenii comuni sunt: 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137 si 152.

Exp 10. Suma a trei numere pozitive α, β si γ este egala cu $\pi/2$. Sa se determine produsul $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ daca $\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg} \gamma$ formeaza o progresie aritmetica.

Rezolvare. Se tine seama de proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice si se obtine relatia

$$2\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Cum $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ implica $\beta = \pi/2 - (\alpha + \gamma)$, se utilizeaza formula de reducere $\operatorname{ctg}(\pi/2 - x) = \operatorname{tg}x$ si se obtine

$$2\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$$

sau, folosind formula tangentei sumei a doua unghiuri

$$2 \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

de unde,

$$2 \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma}$$

sau, tinand seama ca α , β si γ sunt numere pozitive si sumelor este $\pi/2$ ($\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma \neq 1$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, $\operatorname{tg}\gamma \neq 0$) se obtine

$$2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma$$

de unde rezulta $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1/3$ si, prin urmare, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma = 3$.

Exp 11. Fie ecuatia patrata $x^2 + px + q = 0$ cu radacinile reale x_1 si x_2 . Sa se determine p si q astfel incat q, x_1, p, x_2 (in ordinea indicata) sa formeze o progresie aritmetica crescatoare.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice, teorema lui Viete si se obtine sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 = q + p, \\ 2p = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases}$$

cu solutiile

$$\begin{cases} q = -4, \\ x_1 = -2, \\ p = 0, \\ x_2 = 2, \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} q = 0, \\ x_1 = 0, \\ p = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Cum progresia urmeaza a fi crescatoare, ramane $q = -4$, $x_1 = -2$, $p = 0$, $x_2 = 2$ si prin urmare ecuatia patrata ce verifica conditiile problemei date este $x^2 - 4 = 0$ cu $p = 0$ si $q = -4$.

Exp 12. Sa se determine primii trei termeni ai unei progresii aritmetice, descrescatoare, daca $a_1 + a_3 + a_5 = -24$ si $a_1 a_3 a_5 = 640$.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea [P3](#) si se determina $a_3 = -8$, dupa ce se obtine sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = -16, \\ a_1 a_5 = -80, \end{cases}$$

cu solutiile $a'_1 = -20$, $a'_5 = 4$ si $a''_1 = 4$, $a''_5 = -20$. Cum progresia este descrescatoare ($d < 0$) ramane $a_1 = 4$ si $a_5 = -20$. Se utilizeaza [P3](#) si se obtine $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{4 + (-8)}{2} = -2$. Asadar primii trei termeni ai progresiei sunt 4, -2 si -8.

Progresia geometrica

Definitia 2. Sirul numeric $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se numeste progresie geometrica, daca exista asa un numar q , numit ratia progresiei, astfel incat

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

adica daca fiecare termen al sirului (incepand cu al doilea) este egal cu produsul dintre termenul precedent si unul si acelasi numar (ratia).

Elementul b_n se numeste termen general al progresiei de rang n .

Urmatoarele siruri reprezinta progresii geometrice:

$$\begin{array}{ll} 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots & \text{cu } b_1 = 2 \text{ si } q = 2, \\ 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots & \text{cu } b_1 = 3 \text{ si } q = -\frac{1}{3}, \\ a, a, a, \dots & \text{cu } b_1 = a \text{ si } q = 1, \\ a, 0, 0, \dots & \text{cu } b_1 = a \text{ si } q = 0 \end{array}$$

Tinem sa mentionam, ca daca unul din termenii progresiei geometrice este egal cu zero, atunci sau $b_1 = 0$ sau $q = 0$.

Proprietatile progresiei geometrice

P5. Termenul de rang n al progresiei geometrice se determina prin formula

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad (\forall n \in \mathbf{N}). \quad (11)$$

P6. (Proprietatea caracteristica a unei progresii geometrice). Patrutul termenului de rang n este egal cu produsul termenilor echidistanti de el:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \quad (n \geq 2, k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (12)$$

in caz particular, pentru orice trei termeni consecutivi

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \quad (13)$$

Nota. Formulele (12), (13) se pot scrie si astfel

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}, \quad (14)$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad (15)$$

adica modulul termenului de rang n este media geometrica a termenilor echidistanti de el. In cazul progresiei cu termeni pozitivi insasi termenul de rang n este media geometrica a termenilor echidistanti de el

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (b_i > 0, i = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

P7. Daca $k + n = m + p$ ($k, n, m, p \in \mathbf{N}$), atunci

$$b_k \cdot b_n = b_m \cdot b_p, \quad (17)$$

unde b_k, b_n, b_m, b_p - termeni ai progresiei geometrice $b_1, b_2, \dots$

P8. Trei numere a, b, c formeaza o progresie geometrica (fara a preciza consecutivitatea lor) daca si numai daca veri fica relatia:

$$(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = 0, \quad (18)$$

iar numerele a, b, c formeaza o progresie geometrica (in ordinea indicata) daca si numai daca

$$b^2 = ac.$$

P9. Suma primilor n termeni S_n ai unei progresii geometrice se determina prin formula

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad (q \neq 1) \quad (19)$$

unde b_1 - primul termen, q - ratia, si b_n - termenul general al progresiei geometrice.

In caz $q = 1$ suma primilor n termeni se determina prin formula

$$S_n = b_1 \cdot n. \quad (20)$$

P10. Suma S a tuturor termenilor ai progresiei geometrice infinit descrescatoare ($|q| < 1$) se determina prin formula

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \quad (21)$$

In continuare sa analizam cateva exemple.

Exp 13. Produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice este egal cu 1728, iar suma lor este egala cu 63. Sa se determine primul termen si ratia progresiei.

Rezolvare. Fie primii termeni ai progresiei b_1, b_2 si b_3 . Atunci din conditia $b_1 b_2 b_3 = 1728$ rezulta (a se vedea (12)) $b_2^3 = 1728$ si $b_2 = 12$. Astfel se obtine sistemul:

$$\begin{cases} b_1 b_3 = 144, \\ b_1 + b_3 = 51, \end{cases}$$

solutiile caruia sunt si solutiile (a se vedea teorema reciproca a lui Viete) ecuatiei patrate

$$z^2 - 51z + 144 = 0.$$

Se rezolva ecuatie si se obtine $z_1 = 3$ si $z_2 = 48$, adica $b_1 = 3, b_3 = 48$ sau $b_1 = 48, b_3 = 3$. Cum $b_1 = 3, b_2 = 12$ sau $b_1 = 48$ si $b_2 = 12$ se obtine $q = 4$ sau $q = 1/4$. Asadar solutiile problemei sunt $b_1 = 3$ si $q = 4$ sau $b_1 = 48$ si $q = 1/4$.

Exp 14. Intr-o progresie geometrica cu termeni pozitivi termenul de rangul $(m + n)$ este egal cu p , iar termenul de rangul $(m - n)$ ($m > n$) este s . Sa se determine termenul de rang m si termenul de rang n .

Rezolvare. Cum (a se vedea (11))

rezulta $b_m^2 = ps$ si cum $b_m > 0$, se obtine $b_m = \sqrt{ps}$.

Conform conditiilor problemei si formulei (10) avem

$$\begin{cases} b_1 q^{m+n-1} = p, \\ b_1 q^{m-n-1} = s, \end{cases}$$

de unde $q^{2n} = \frac{p}{s}$ si prin urmare $q = \sqrt[2n]{\frac{p}{s}}$. Cum
 $b_1 q^{m+n-1} = b_1 q^{n-1} \cdot q^m = b_n \cdot q^m = p$,
 rezulta

$$b_n = \frac{p}{q^m} = \frac{p}{\sqrt[2n]{\left(\frac{p}{s}\right)^m}} = p \cdot \sqrt[2n]{\left(\frac{s}{p}\right)^m}.$$

Exp 15. Sa se calculeze suma

$$S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777 \dots 77}_{n \text{ cifre}}.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} S_n &= 7(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ cifre}}), \\ 9S_n &= 7(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ cifre}}) \end{aligned}$$

sau

$${}^9_7 S_n = (10 - 1) + (100 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

de unde

$${}^9_7 S_n = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n.$$

Cum in paranteze se afla suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu primul termen $b_1 = 10$ si ratia $q = 10$ se utilizeaza formula (19) si se obtine

$$\frac{9}{7} S_n = \frac{10 - 10^{n+1}}{1 - 10} - n$$

de unde

$$S_n = \frac{7}{9} \left(\frac{10 - 10^{n+1} + 9n}{-9} \right) = \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{9} \right) = \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - (n+1) \right).$$

BIBLIOGRAFIE:

Matematica, Manual pentru clasa a X- a, C. Năstăsescu, C. Niță, S. Popa.

SUFLETUL MOROMETIAN SI LOGICA MATEMATICA

MOTTO

De *Acolo de Sus* si din opera lui Marin Preda, intr-o superba zi de primavara,coboara pe prispa casei parintesti din Silistea Gumesti sufletul lui **Moromete** , tatal, si provoaca sufletul lui **Niculae** ,fiul, la o fascinanta lectie de logica matematica .

AURORA

Marin Preda, prozator contemporan, a cărei întreagă activitate s-a desfășurat în secolul XX, a scris celebrul roman "**Moromeții**". Aflați în ce an a apărut primul volum al romanului știind că cifra unităților este media aritmetică a cifrelor sutelor și miilor, și că numărul format de cifra zecilor și a unităților este divizibil cu 11.

„La inceputul campaniei o fata de la U.T.M.,secretara raionului cu tineretul ,l -a cautat pe Niculae pe camp si a incercat sa-l convinga sa-l sprijine pe Vasile in intentia lui de a forma aici o gospodarie colectiva si de a lupta necontenit contra noastra ,a mea si a lui **Plotoaga** ,care stii si dumneata ca ne-am opus.” (*Morometii* vol. II pag 340)

Sa resupunem ca a lui Plotoaga era cismar si intr-o duminica a mers in tirg la Pitesti si a cumparat o bucata de piele tabacita de vita care avea forma unui trapez dreptunghic ortodiagonal cu bazele de 90cm si 40cm.Câte opinci ale oamenilor din Silistea Gumesti putea el potlogi daca pentru una folosea in medie 30cm^2 de piele ?

„Acum masina strabatea cu grija drumul deloc neted si **Niculae** statea tacut si se uita pe fereastră. Era toamnă târzie ,dar era soare si uscat si cimpia zacea impacata sub lumina inserarii.Soferul manevra des,si intr-o vreme masina se opri cu botul chiar sub fundul unui magar pe care nu-l putuse ocoli ca sa nu dea intr-o groapa mai mare. Proprietarul,un taran foarte tinar,ridica o jordine si îi aplica magarului o lovitura energica pe spinare si facu loc. ” (*Morometii* vol. II pag 389)

Sa presupunem ca Niculae venea de la Bucuresti si de la Bucuresti la Silistea Gumesti masina a mers cu viteza constanta de 65km/h ,iar la intors cu viteza constanta de 75km/h.Care este viteza medie de deplasare a autoturismului ?

' -Eu am fost ,in armata , magazioner ! explica **Paraschiv** suparat ca **Nila** uita acest lucru . Prin mina mea treceau mii de kilograme de arpacas si de undelemn si de vite taiate ,eu mergeam la oras si achizitionam, continua **Paraschiv** sa-i explice."El scotea bani "Pentru ca socoteam la scazamint si putea sa vie el mama intendetei, ca socoteala ieseasa asa cum o faceam eu "(*Morometii* vol.I pag 317)Presupunem ca intr-o zi el a cumparat : 50 kg arpacas (2,50lei \ kg) , 12litri undelemn (3,50lei\l)si 70kg carne (5,50lei\kg) Ajuns la cazarma el a aplicat urmatoarele scazaminte;12 %la arpacas 5%la undelemn si 3% la carne . Care a fost cistigul lui **Paraschiv** in acea zi ?

' **Tudor Bălosu** si muierea,gatiti si ei de sarbatoare –**Tudor Bălosu** purta vesta neagra peste camasa alba cu mineci bogate , **Aristita** rochie de catifea albastra-stateau pe scaun avindu-l pe **Victor** intre ei .Nu oricine putea primi calusul ,caretinea mai bine de un ceas .Calusul tinea trei zile ,de **Rusalii**,si istovea cumplit pe calusari ,caci era un joc cu atit mai frumos cu cit ritmul sa u ajungea mai incordat si mai intens".(*Morometii* vol.I pag 142) Daca suprafata bataturii ,unde se juca .era de forma unui trapez dreptunghiccu baza mare de 12m , baza mica 1 \3din baza mare si un unghi de 45 grade citi mp avea batatura ?

Marele prozator **Marin Preda** s-a nascut in anul 1922 in comuna Silistea Gumesti si in acelasi secol se stinge din viata . Aflati anul stingerii din viata a marelui scriitor stiind ca acesta este divizibil cu zece iar cifra zecilor este predecesoarea cifrei sutelor .

Prof gr I Anghel Aurora

Scoala cu cls I-VIII ,, Marin Preda" Silistea Gumesti .

Asteptam solutii pana pe data de 30.01.2011.

Trei dintre elevii cu cele mai multe probleme rezolvate vor fi premiati

Solutiile le puteti trimite pe office@mateinfo.ro cu subiectul MOROMETE

NUMEREELE COMPLEXE ÎN GEOMETRIE (II)

Corneliu Mănescu-Avram

Problemele selectate și prezentate în continuare sunt clasice ^[4] și au rolul de a ilustra aplicarea metodei numerelor complexe în geometrie.

PROBLEME

1. Într-un triunghi în care una din înălțimi este tangentă cercului circumscris, centrul cercului *Euler* se află pe latura opusă vârfului din care pleacă acea înălțime.
2. Dreapta care unește centrele cercurilor înscris și circumscris ale unui triunghi dat este dreapta *Euler* a triunghiului antisuplementar. (Triunghiul *antisuplementar* al unui triunghi oarecare T este triunghiul format de bisectoarele exterioare ale acestui triunghi T).
3. Dreapta *Simson* a unui punct oarecare se intersectează cu dreapta care unește acest punct cu ortocentrul pe cercul *Euler* al triunghiului dat.
4. Două drepte *Simson* perpendiculare se intersectează pe cercul *Euler* al triunghiului.
5. Într-un patrupunct inscriptibil, perpendicularele duse din mijlocul fiecărei laturi pe latura opusă sunt concurente într-un punct care este simetricul centrului cercului circumscris față de punctul comun al bimedanelor patrupunctului (punctul lui *Mathot*). (Un *patrupunct* este figura geometrică formată din patru puncte coplanare, oricare trei dintre ele fiind necoliniare).
6. Fie un pentagon oarecare înscris în cercul (O). Punctele lui *Mathot* ale celor cinci patrulatere având vârfurile în câte patru vârfuri ale pentagonului sunt pe un cerc având raza egală cu jumătatea razei cercului (O).
7. Dacă H este ortocentrul, O centrul cercului circumscris, G centrul de greutate și M un punct oarecare din planul triunghiului ABC , atunci

$$MH^2 + 2MO^2 - 3MG^2 = 6OG^2.$$

8. Într-un triunghi dreptunghic, tangenta dusă cercului descris pe una din catete ca diametru, prin punctul unde acest cerc taie ipotenuza, trece prin mijlocul celeilalte catete.

SOLUȚII

1. Fie ΔABC înscris în cercul unitate. Ecuația înălțimii din vârful A este $z - a = bc(\bar{z} - \bar{a})$, iar ecuația tangentei în punctul A la cercul circumscris este $z + a^2\bar{z} = 2a$. Aceste drepte coincid dacă și numai dacă $a^2 + bc = 0$. Centrul cercului *Euler* are afixul $e = \frac{a+b+c}{2}$, iar ecuația laturii BC este $z + bc\bar{z} = b + c$. Calculăm $e + bc\bar{e} = \frac{a+b+c}{2} + \frac{ab+bc+ca}{2a} = b + c + \frac{a^2+bc}{2a} = b + c$, deci centrul cercului *Euler* al triunghiului ABC se află pe latura BC .

2. Cercul circumscris al unui triunghi oarecare este cercul *Euler* al triunghiului antisuplementar, deoarece vârfurile triunghiului dat sunt picioarele înălțimilor antisuplementarului ^[4]. Fie a^2, b^2, c^2 afixe vârfurilor triunghiului dat (înscris în cercul unitate), atunci afixele centrului cercului înscris în triunghiul dat și ale cercurilor exînscrise (vârfurile antisuplementarului) sunt respectiv ^[2] $i = -ab - bc - ca$, $i_A = ab - bc + ca$, $i_B = ab + bc - ca$, $i_C = -ab + bc + ca$, ortocentrul antisuplementarului are afixul $i_A + i_B + i_C = -i$, deci acest punct se află pe dreapta OI . Această dreaptă conține punctul O , centrul cercului *Euler* al antisuplementarului, deci este dreapta *Euler* a antisuplementarului.

3. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC , H ortocentrul triunghiului și μ afixul mijlocului segmentului HM . Avem $h = a + b + c$, $\mu = \frac{h+m}{2}$ și ecuația dreptei *Simson* a punctului M este ^[1] $z - \mu = abc\bar{m}(\bar{z} - \bar{\mu})$. Centrul cercului *Euler* este $e = \frac{h}{2}$, raza lui este egală cu $\frac{1}{2}$, iar punctul de afix μ aparține acestui cerc, deoarece $|\mu - e| = \frac{|m|}{2} = \frac{1}{2}$.

4. Intersecția a două drepte *Simson* corespunzătoare punctelor M și N are afixul ^[1]

$$z = e + \frac{m+n}{2} + \frac{abc\bar{m}\bar{n}}{2},$$

unde e este afixul centrului cercului *Euler*. Când punctele M și N sunt diametral opuse, dreptele *Simson* corespunzătoare sunt perpendiculare și se intersectează pe cercul *Euler*, deoarece $m + n = 0$.

5 Mijlocul laturii AB are afixul $\frac{a+b}{2}$, coeficientul unghiular al laturii CD este egal cu cd , deci perpendiculara din mijlocul lui AB pe CD are ecuația $z - \frac{a+b}{2} = cd\left(\bar{z} - \frac{a+b}{2ab}\right)$. Punctul M cu afixul $m = \frac{a+b+c+d}{2}$ aparține acestei perpendiculare, iar din motive de simetrie deduce m că el aparține și celorlalte trei.

6. Dacă $ABCDE$ este pentagonul inscriptibil dat, înscris în cercul unitate, atunci punctul M al patrulaterului $ABCD$ are afixul $\frac{a+b+c+d}{2}$ și aparține cercului cu centrul în punctul de afix $\frac{a+b+c+d+e}{2}$ și raza de lungime $\frac{1}{2}$. Un rezultat similar are loc pentru celelalte patru patrulatere cu vârfurile în vârfurile pentagonului, deoarece patrulaterul $ABCD$ a fost ales arbitrar.

7. Având în vedere egalitatea $h = 3g$, avem de demonstrat identitatea

$$|m - 3g|^2 + 2|m|^2 - 3|m - g|^2 = 6|g|^2, \quad m \in \mathbb{C}.$$

Folosim egalitatea $|z|^2 = z\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ și obținem

$$\begin{aligned} |m - 3g|^2 + 2|m|^2 - 3|m - g|^2 &= (m - 3g)(\bar{m} - 3\bar{g}) + 2m\bar{m} - 3(m - g)(\bar{m} - \bar{g}) = \\ &= m\bar{m} - 3(m\bar{g} + \bar{m}g) + 9g\bar{g} + 2m\bar{m} - 3m\bar{m} + 3(m\bar{g} + \bar{m}g) - 3g\bar{g} = 6g\bar{g} = 6|g|^2. \end{aligned}$$

8. Fie triunghiul ABC înscris în cercul unitate, el este dreptunghic în A dacă și numai dacă mijlocul laturii $[BC]$ coincide cu centrul cercului circumscris, deci dacă și numai dacă $b + c = 0$.

Ecuția cercului cu diametrul $[AB]$ este $\left(z - \frac{a+b}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) = \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{4}$, deci

$z\bar{z} - \frac{a+b}{2a}z - \frac{a+b}{2}\bar{z} + \frac{a^2+b^2}{2ab}$. Acest cerc intersectează ipotenuza (BC) : $z = b^2\bar{z}$ în punctul cu afixul $z_0 = \frac{a^2+b^2}{2a}$. Tangenta într-un punct la un cerc este perpendiculară pe rază, deci

coeficientul său unghiular este $\lambda = -\frac{z_0 - o}{\bar{z}_0 - \bar{o}} = \frac{b^3}{a}$, unde $o = \frac{a+b}{2}$. Ecuția acestei tangente este deci

$z - \frac{a^2+b^2}{2a} = \frac{b^3}{a}\left(\bar{z} - \frac{a^2+b^2}{2ab^2}\right)$ și se verifică simplu că această dreaptă trece prin mijlocul catetei $[AC]$, al cărui afix este $\frac{a-b}{2}$.

Bibliografie

- [1] Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, București, 1968
- [2] Liang-shin Hahn, Complex Numbers and Geometry, The Mathematical Association of America, 1994
- [3] Radovanović, Marko, Complex Numbers in Geometry, www.imomath.com

[4] Mihalescu, C., Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Științe Matematice din România, București, 2007

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail : avram050652@yahoo.com