Din nou despre Teorema Beatty şi câteva aplicaţii ale sale. Triunghiul vieţii.

NECULAI STANCIU[1]

Matematicianul american *Sam Beatty* a publicat în $[1]$ următoarea problemă:
"Dacă a este un număr iraţional, atunci şirurile $m(1+a), m=1,2,...$ şi $n(1+a^{-1}), n=1,2,...$ sunt disjuncte, dar, reunite conţin un număr şi numai unul din fiecare interval $(k,k+1), k=1,2,3,...$"
Problema a fost rezolvată de *Ostrowski* şi *Aitken* în $[3]$ iar apoi generalizată de *Lambeck* şi *Moser* în $[2]$.La adresa $[5]$se găsesc liber două variante de demonstraţie a teoremei *Beatty*.Mai târziu, a mai fost generalizată de *Holshouser* şi *Reiter* pentru şirurile de funcţii continue (vezi $[4]$).Prezentăm mai jos ultima variantă a demonstraţiei (2006) care se poate consulta liber la adresa $[6]$.

Teorema Beatty.*Dacă* $a,b \in R-Q$ *astfel încât* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ *şi* $(a_n)_{n>0}=na$, $(b_n)_{n>0}=nb$ *atunci exact un element din* $\{(a_n)_{n>0}\}\cup\{(b_n)_{n>0}\}$ *se găseşte în intervalul* $(N,N+1)$.

Demonstraţie. Observăm că $a_n \neq b_m$ (în caz contrar $na=mb \Rightarrow b=1+\frac{n}{m}\in Q$, contradicţie).Vom demonstra că $\forall N\geq 1$, exact un element din $\{(a_n)_{n>0}\}\cup\{(b_n)_{n>0}\}$ se găseşte în intervalul $(N,N+1)$.Fie $N\geq 1$ şi notăm cu $S(N)$ numărul elementelor din $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ mai mici decât N.

$a_n<N \Leftrightarrow na<N \Leftrightarrow n<\frac{N}{a}$.Deci există $\left[\frac{N}{a}\right]$ elemente din $\{a_n\}$ mai mici ca N şi analog $\left[\frac{N}{b}\right]$ elemente din $\{b_n\}$.Din relaţiile:

$$\begin{cases} \frac{N}{a}-1<\left[\frac{N}{a}\right]<\frac{N}{a} \\ \frac{N}{b}-1<\left[\frac{N}{b}\right]<\frac{N}{b} \end{cases}$$

adunate membru cu membru obţinem :
$N-2<S(N)<N \Rightarrow S(N)=N-1$.Rezultă că numărul elementelor din $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ aflate în intervalul $(N,N+1)$ este $S(N+1)-S(N)=1$.

Teorema Beatty.Altă variantă($[5]$).
Dacă $r,s\in R-Q$ *astfel încât* $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ *şi* $A=[nr]_{n\geq 1}$, $B=[ns]_{n\geq 1}$, *atunci* A *şi* B *realizează o partiţie a mulţimii* N^*.
Demonstraţia 1.

[1] Prof., Şcoala "George Emil Palade", Buzău
stanciuneculai@yahoo.com

I.presupunem prin reducere la absurd că $\exists j > 0, j \in N, k, m \in N^*$ astfel încât $j \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} j \le kr < j+1 \\ j \le ms \le j+1 \end{cases} \underset{j \neq 0}{\overset{r,s \in R-Q}{\Rightarrow}}$ că nu avem egalităţi, deci $\begin{cases} j < kr < j+1 \\ j < ms \le j+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{j}{r} < k < \frac{j+1}{r}$ şi $\frac{j}{s} < m < \frac{j+1}{s}$ care adunate membru cu membru dau $j < k+m < j+1$, contradicţie(nu putem avea un număr natural între două numere naturale consecutive).

II.presupunem prin reducere la absurd $j \notin A$ şi $j \notin B$.Deci $\exists j > 0, j \in N, k, m \in N^*$ astfel incât $\begin{cases} kr < j \\ j+1 \le (k+1)r \\ ms < j \\ j+1 \le (m+1)s \end{cases}$, deorece $j \neq 0$, iar $r, s \in R-Q$ - în precedentele nu avem egalităţi.Rezultă:

$\begin{cases} kr < j \\ j+1 < (k+1)r \\ ms < j \\ j+1 < (m+1)s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{j}{r} \\ \frac{j+1}{r} < k+1 \\ m < \frac{j}{s} \\ \frac{j+1}{s} < m+1 \end{cases}$ care adunate membru cu membru dau $k+m < j$ şi $j+1 < k+m+2$.Rezultă $k+m < j < k+m+1$, iarăşi contradicţie.

Din I. şi II. teorema este demonstrată.

Demonstraţia 2.

Se determină poziţia acupată de fracţiile $\frac{j}{r}$ şi $\frac{k}{s}$ ($j, k \in N^*$) aşezate în ordine crescătoare pe axa numerelor reale pozitive.

Se observă că $\frac{j}{r} \neq \frac{k}{s}$.

În caz contrar $\exists j, k \in N^*$ astfel încât $\frac{j}{r} = \frac{k}{s} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{j}{k}, \frac{r}{s} = r(1 - \frac{1}{r}) = r - 1 \in R - Q$, iar $\frac{j}{k} \in Q_+^\circ$, ceea ce este imposibil.Deci nu există două numere care să ocupe aceiaşi poziţie.

Pentru orice $\frac{j}{r}$, $\exists j$ numere astfel încât $\frac{1}{r} \le \frac{j}{r}$ şi $\left[\frac{js}{r}\right]$ numere astfel încât $\frac{k}{s} \le \frac{j}{r}$.Rezultă deci că poziţia lui $\frac{j}{r}$ în şir este $j + \left[\frac{js}{r}\right] = j + [j(s-1)] = [js]$.

Analog se obţine faptul că poziţia lui $\frac{k}{s}$ în şir este $[kr]$.Rezultă că orice număr natural nenul ocupă numai o poziţie în şir fiind de forma $[nr]$ sau $[ns]$ dar nu sub ambele forme.

Remarca 1. Reciproca teoremei *Beatty* :

Dacă p şi q sunt două numere reale astfel încât $[np]$ şi $[nq]$ ocupă poziţii diferite(apar o singură dată în unul şi numai unul din şirurile $[np]_{n\geq 1}$ respectiv $[nq]_{n\geq 1}$) atunci p şi q sunt iraţionale şi verifică relaţia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; este de asemenea adevărată.

Aplicaţia 1.*Ţinând cont de teorema Beatty, Problema dată la concursul interjudeţean "Nicolae Păun", Rm. Vâlcea, 2009 (publicată şi în RMT nr. 1/ 2010, pag 43 , cu nr. O.IX.195) , se poate extinde astfel:*

Dacă $a,b\in R-Q$ notăm cu $M(a,b)=\left\{[na]\cup[nb]\,\middle|\,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1, n\in N^*\right\}$.

a) Să se determine mulţimea $[n\varphi]$, mulţimea $[n\varphi^2]$ şi mulţimea $[n\varphi]\cup[n\varphi^2]$(unde φ este "numărul de aur").

b) Să se arate că $M(a,b)$ este infinită.

Soluţie.

a) Se obţine $[n\varphi]=\{1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,19,...\}$- care se numeşte şirul *Wythoff* inferior, respectiv $[n\varphi^2]=\{2,5,7,10,13,15,18,20,23,26,28,31,34,36,39,41,44,47,...\}$- şirul *Wythoff* superior.Observăm că $[n\varphi]$ şi $[n\varphi^2]$ realizează o partiţie a mulţimii N^* (deoarece se verifică ipotezele teoremei *Beatty*:$\varphi,\varphi^2\in R-Q$, $\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}=1$).

$[n\varphi]\cup[n\varphi^2]=N^*$.

b) conform *Teoremei Beatty* mulţimile $\{[a],[2a],[3a],...\}$, $\{[b],[2b],[3b],...\}$ conţin fiecare număr natural o singură dată.Deci $M(a,b)=N^*$.

Aplicaţia 2.Triunghiul Vieţii(numit astfel de către *Fibonacci*).

Configuraţia de mai jos conţine numere naturale aşezate pe trei rânduri.

2

3 5

4 7 8 13

a)Găsiţi regula de aşezare a numerelor şi construiţi următoarele două rânduri(configuraţia este infinită).

b)Găsiţi o porţiune generală pentru un număr natural oarecare şi arătaţi că orice număr natural nenul apare o singură dată în triunghiul infinit.

Soluţie.

a)

A

B C

D E F G

Dacă se cunosc numerele A şi B putem construi întreg triunghiul astfel: $C=A+B; D=A+B-1; E=B+D; F=B+C; G=C+F$. Mai observăm că $C-D=1; F-E=1$.

Completarea cerută este următoarea:

2

3 5

4 7 8 13

6 10 11 18 12 20 21 34

9 15 16 26 17 28 29 47 19 31 32 52 33 54 55 89

b) Pentru un număr oarecare n avem următorul triunghi:

$$n$$

$$[n\varphi] \qquad [n\varphi^2]$$

$$[\varphi[n\varphi]] \quad [\varphi^2[n\varphi]] \quad [\varphi[n\varphi^2]] \quad [\varphi^2[n\varphi^2]]$$

unde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (numit "numărul de aur") şi $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.Deoarece $\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}=1$, conform teoremei *Beatty* orice număr natural nenul apare odată şi numai odată în unul din şirurile $[n\varphi]$ respectiv $[n\varphi^2]$.Plecând de la relaţiile între A, B, C, D, E, F, G se obţine şi relaţiile :

$n+[n\varphi]=[n\varphi^2]; [n\varphi]+[n\varphi^2]=[\varphi[n\varphi^2]]; [n\varphi^2]+[\varphi[n\varphi^2]]=[\varphi^2[n\varphi^2]]$;

$[n\varphi^2]-[\varphi[n\varphi]]=1; [\varphi[n\varphi^2]]-[\varphi^2[n\varphi]]=1$, care sunt adevărate.

Exerciţiu. *Fie* $a=1+\sqrt{5}$ *şi* $b=3+\sqrt{5}$ *.Dacă pentru orice* $n \in N^*$ *aşezăm pe axa* $(OX$ *a numerelor reale pozitive toate fracţiile de tipul* $\frac{n}{a}$ *respectiv* $\frac{n}{b}$ *atunci ce poziţie(a câta este) ocupă fracţia* $\frac{2012}{a}$ *respectiv* $\frac{2012}{b}$ *?*

Soluţie. Se aplică **Teorema Beatty**(vezi *demonstraţia 2*.).

În cazul nostru $\frac{2012}{a}=\frac{1006}{\varphi}$ şi $\frac{2012}{b}=\frac{1006}{\varphi^2}$ unde $\varphi, \varphi^2 \in R-Q$, $\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}=1$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este "numărul de aur".Conform teoremei de mai sus poziţia ocupată de $\frac{1006}{\varphi}$ este $[1006\varphi^2]=2633$ şi poziţia fracţiei $\frac{2012}{b}=\frac{1006}{\varphi^2}$ este $[1006\varphi]=1627$.

Remarca 2.Demonstraţii diferite de cele din acest articol a *Teoremei Beatty* sunt prezentate de *Vasile Pop* şi *Viorel Lupşor* în articolul "*Partiţii ale mulţimii numerelor naturale*" din Gazeta Matematică seria B nr. 3/2006(paginile 113-121) precum şi de *Adrian Reisner* în articolul "*Asupra teoremei lui Beatty, şirurilor lui Wythoff şi cuvântul lui Fibonacci*" din Gazeta Matematică seria A nr. 3/2009(paginile 182-194).

Bibliografie

[1] **Sam Beatty**, *Problema 3173*, American Mathematical Monthly, vol. 33, 1926, pag.159

[2] **J. Lambek şi L. Moser**, *"Inverse and Complementary Sequences o Natural Numbers"*, American Mathematical Monthly, vol. 61, 1954, pag. 454

[3] **Ostrowski şi Aitken**, *Soluţia Problemei 3173*, American Mathematical Monthly, vol. 34, 1926, pag. 159

[4] **Holshouser, Arthur; Reiter, Harold** (2001). *"A generalization of Beatty's Theorem"*, Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics vol. 2: pag. 24–29.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence

[6] http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfBeattysTheorem.html

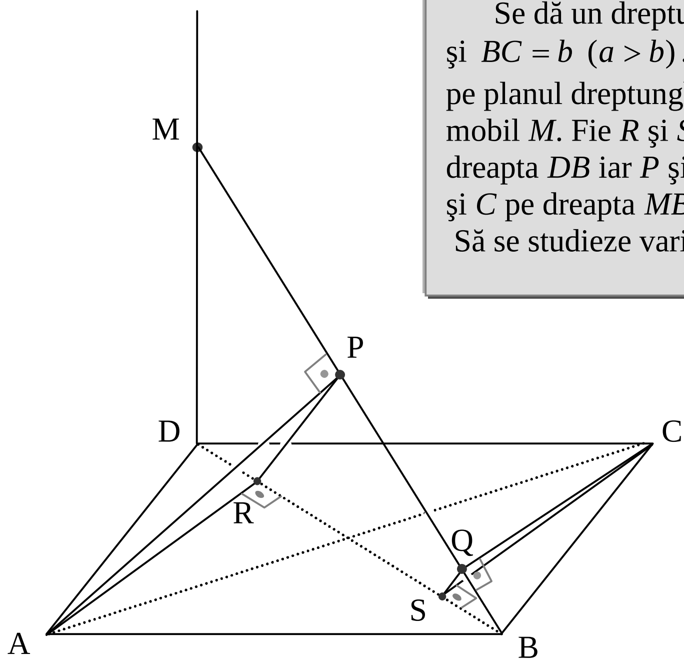
APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (3)**

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj -Napoca

<u>Aplicaţie:</u>

Se dă un dreptunghi $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $BC = b$ $(a > b)$. În D se ridică o perpendiculară pe planul dreptunghiului pe care se ia un punct mobil M. Fie R şi S proiecţiile punctelor A şi C pe dreapta DB iar P şi Q proiecţiile aceloraşi puncte A şi C pe dreapta MB.

Să se studieze variaţia ariei patrulaterului $PRSQ$.



<u>Soluţie:</u>

Din punct de vedere metodic, rezolvarea problemei poate fi prezentată în două etape distincte:

(*) Rezolvarea unei probleme de geometrie:

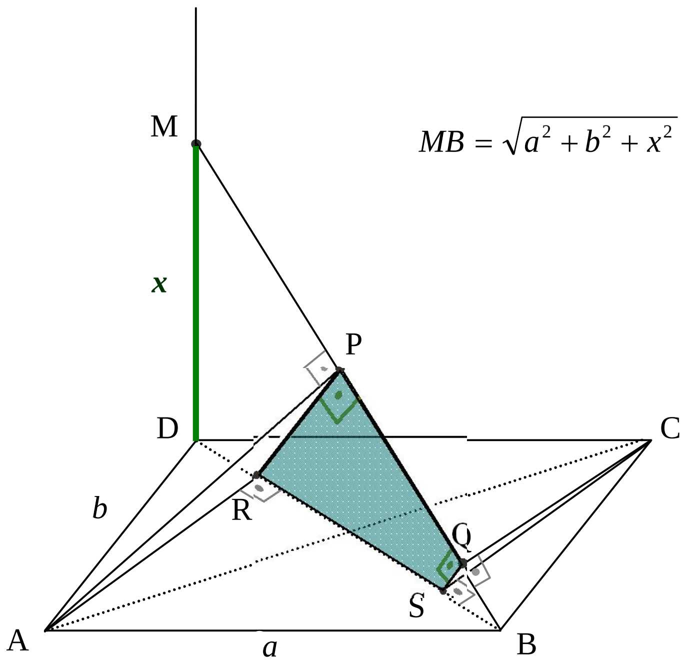
1. Se determină mai intâi forma particulară a patrulaterului; în acest scop, prin reciproca intâi a teoremei celor trei perpendiculare, se demonstrează relativ uşor că $PR \perp DB$ si $QS \perp DB$. În consecinţă, patrulaterul $PRSQ$ este un trapez dreptunghic.

2. Calculul ariei trapezului $PRSQ$:

Conform formulei cunoscute $A_{PRSQ} = \dfrac{(PR + QS)PQ}{2}$

Lungimile segmentelor prezentate în formula de mai sus se vor exprima în funcţie de dimensiunile dreptunghiului (a şi b) dar şi în funcţie de lungimea segmentului MD pe care o vom nota cu x ; aceasta caracterizează poziţia punctului variabil M pe dreapta perpendiculară pe plan.

Utilizand succesiv teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDB si apoi teorema catetei în triunghiurile dreptunghice MAB, respectiv MCB, obţinem:



$$MB = \sqrt{a^2 + b^2 + x^2} \quad si \quad PQ = \frac{\left(a^2 - b^2\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + x^2}}$$

Utilizând asemănarea triunghiurilor MDB, PRB şi QSB, obţinem:

$$PR = \frac{a^2 x}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}} \quad si \quad QS = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}}$$

Astfel se ajunge la: $A_{PRSQ} = \dfrac{a^4 - b^4}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \dfrac{x}{a^2 + b^2 + c^2}$ ceea ce sugerează o a doua etapă:

(**) Construirea si rezolvarea problemei de analiză ma tematică:

1. Construirea functiei

$$f:[0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\frac{a^4-b^4}{2\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{a^2+b^2+x^2}$$

2. Studiul variaţiei funcţiei

Comportamentul funcţiei la ,,capete”: $f(0)=0$ si respectiv $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

Derivata funcţiei este $f'(x)=\dfrac{a^4-b^4}{2\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{a^2+b^2-x^2}{\left(a^2+b^2+x^2\right)^2}$ iar ecuaţia derivatei

$f'(x)=0$ conduce la $x_0=\sqrt{a^2+b^2}$ şi $f(x_0)=\dfrac{a^2-b^2}{4}$

Tabel de variatie:

x	0		$\sqrt{a^2+b^2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + + + + + +	0	− − − − − − − − − − − − −	
$f(x)$	0	↗↗↗↗↗↗↗↗	$\dfrac{a^2-b^2}{4}$	↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘	0

Pentru ca etapa (**) să fie elocventă în ce priveste utilitatea studiului propus, se consideră necesară prezentarea unui caz numeric :

Fie $a=2$ şi $b=1$; obţinem funcţia:

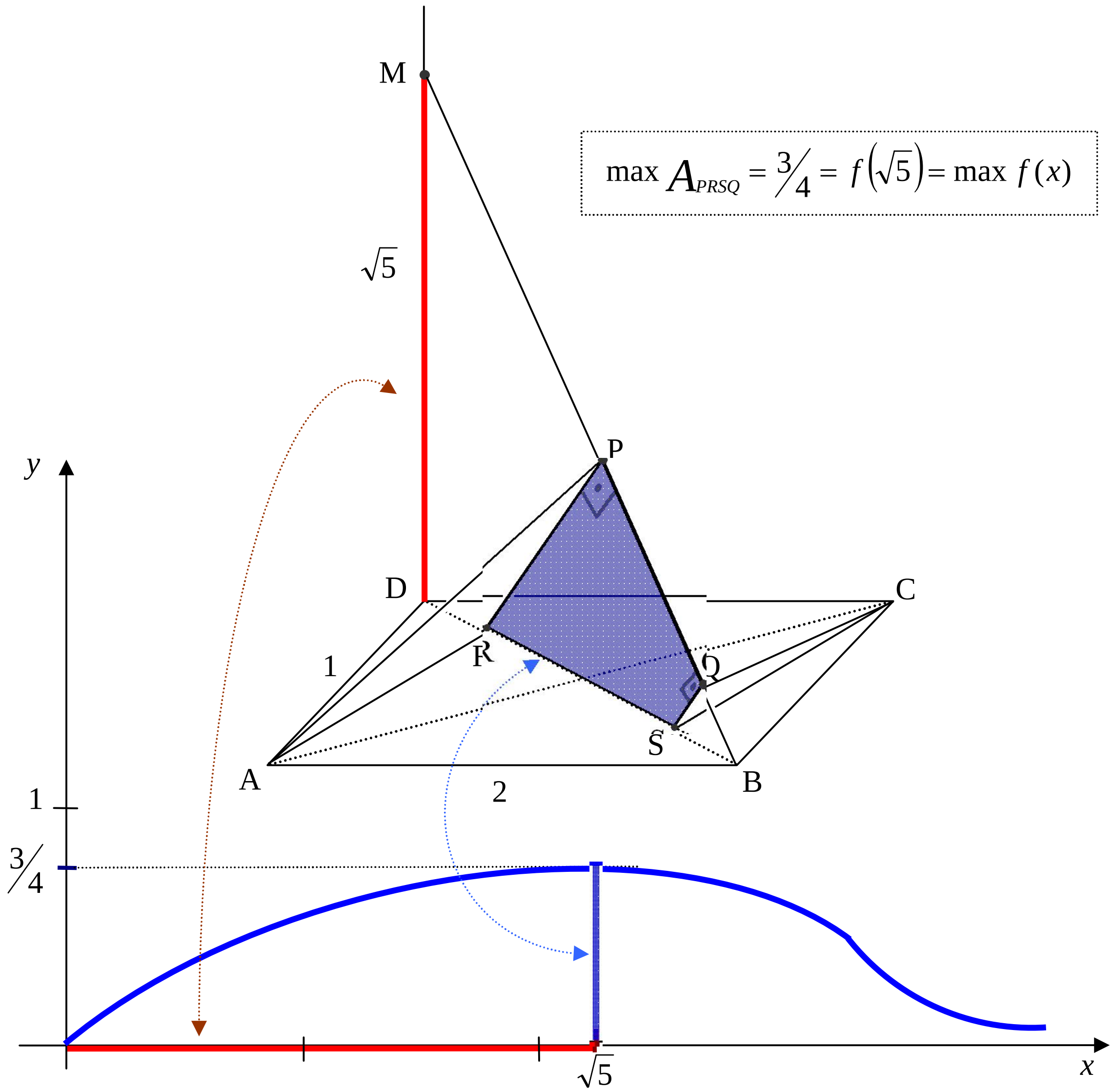
$$f:[0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\frac{3\sqrt{5}x}{2(x^2+5)}$$ având derivata

$$f':[0,+\infty)\to R,\quad f'(x)=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5-x^2}{(x^2+5)^2}$$

Valoarea maximă a ariei trapezului se obţine pentru $x_0=\sqrt{5}$, $f(\sqrt{5})=\dfrac{3}{4}$

Se prezintă în continuare tabloul de variaţie şi graficul funcţiei pentru acest caz particular ilustrându-se conexiunile aferente

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + + + + + +		− − − − − − − − − − − − −	
$f(x)$	0	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$\frac{3}{4}$	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	0



ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS

Corneliu Mănescu-Avram

6. **Inegalități între laturi**

Fie T mulțimea tripletelor (a,b,c) de numere reale strict pozitive astfel încât există un triunghi nedegenerat cu laturile de lungimi *a, b, c.*

1. Fie $n \geq 3$ un întreg şi $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale strict pozitive satisfăcând inegalitatea

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4\right).$$

Arătați că orice triplet (a_i, a_j, a_k) cu indici distincți $1 \leq i, j, k \leq n$ aparține lui *T.*

2. Pentru un întreg pozitiv dat *n*, să se găsească marginea inferioară şi marginea superioară a expresiei

$$\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n}}{a+b+c} \quad \text{după toate tripletele } (a,b,c) \in T.$$

3 . Să se descrie mulțimea numerelor reale pozitive *x* astfel încât inegalitatea $a^x < b^x + c^x$ să fie adevărată pentru orice triplet $(a,b,c) \in T$ cu $a \geq b \geq c$.

4 . Pentru un întreg pozitiv dat *n*, să se găsească cel mai mare număr real $k = k(n)$ astfel încât inegalitatea

$$a^n + b^n + c^n \geq k(a+b+c)^n$$

să fie adevărată pentru toate tripletele $(a,b,c) \in T$.

5 . La punctele 2 – 4 se poate înlocui mulțimea T prin

a) mulțimea T_{ac} a tripletelor (a,b,c) pentru care există un triunghi *ascuțitunghic* cu laturile de lungimi *a, b, c*;

b) mulțimea T_{ob} a tripletelor (a,b,c) pentru care există un triunghi *obtuzunghic* cu laturile de lungimi *a, b, c*;

c) mulțimea T_{re} a tripletelor (a,b,c) de numere reale pozitive pentru care $a^2 = b^2 + c^2$.

Această problemă a fost postată pe site-ul [3] la 14 aprilie 2011 şi propusă pentru Primul Concurs Francez al Tinerilor Matematicieni, 22 - 25 aprilie 2011, Orsay, Franța. Ea a fost postată şi pe site-ul [2] la 13 aprilie 2011 şi propusă pentru Al III-lea Concurs Internaţional al Tinerilor Matematicieni, 30 iunie – 7 iulie 2011, Minsk, Belarus (ITYM). Concursurile sunt întreceri pe echipe care ce adresează elevilor de liceu. Problemele ITYM sunt publicate anterior cu mai multe luni şi conţin părţi cu soluţie necunoscută. Participanţii îşi prezintă lucrările la concurs într-un fel de dezbatere de cercetare, iar rezultatele sunt afişate pe site-ul oficial [2].

Se remarcă structura eterogenă a subiectului : primul punct este algebric în formă, dar geometric în fond, următoarele trei puncte sunt în esenţă analitice şi sunt inserate artificial, fără o legătură directă cu primul punct, iar ultimul punct, menit să aducă unele clarificări şi completări aspectelor geometrice, se referă la punctele 2 – 4 şi nu la primul punct, aşa cum ar fi fost firesc.

Punctul 1 este de departe cel mai important şi corespunde, contrar aparenţelor, spiritului geometriei euclidiene elementare, prin caracterizarea algebrică pe care o dă existenţei triunghiurilor. Într-adevăr, toate proprietăţile geometrice importante au fost caracterizate prin egalitatea a două numere, deci algebric : *Tales* – paralelismul, *Pitagora* – perpendicularitatea, *Menelaus* – coliniaritatea, *Ceva* – concurenţa, *Ptolemeu* – conciclicitatea. Acest rezultat a făcut obiectul problemei săptămânii 6 – 19.09.2010, unde a primit o soluţie remarcabilă din partea doamnei profesoare *Silvia Muşătoiu* şi a fost extins la patrulatere inscriptibile într-un articol publicat în revista Mateinfo.ro din octombrie 2010. Legătura dintre triunghi şi patrulaterul inscriptibil este una firească, întrucât triunghiul este un patrulater inscriptibil degenerat. Este de aşteptat astfel ca unele rezultate referitoare la triunghi să poată fi extinse la patrulaterul inscriptibi, cum este de exemplu teorema tangentelor, care face obiectul problemei săptămânii 5 – 11.07.2010. Un alt exemplu este dat de formulele pentru calculul ariilor, cu toate că în acest caz ar fi mai natural să considerăm formula lui *Heron* ca un caz degenerat al formulei lui *Brahmagupta.*

Ideea rezultatului de la punctul 1 a apărut în soluţia la problema săptămânii 17 – 23.05.2010 şi a prins contur după lectura următorului rezultat din [1] :

Exemplul 2.2.2. (*ii*) Dacă *a, b, c, d* sunt numere reale strict pozitive şi

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2>3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right),$$

atunci oricare trei dintre ele sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Scopul acestei note nu este restabilirea priorităţii rezultatului şi nici rezolvarea problemei aşa cum a fost ea formulată pentru concursuri. Prima chestiune ar fi o muncă de Sisif, întrucât internet-ul transformă sistematic creaţiile originale individuale în folclor, iar cea de-a doua este sarcina tinerilor matematicieni (rezultatele activităţii lor vor fi postate pe site-ul [2]). Problema nu şi-a epuizat însă toate resursele, iar examinarea consecinţelor punctului 5 asupra punctului 1 este în măsură să producă rezultate interesante, dintre care unele vor fi prezentate în continuare.

Lema 1. Fie $a > b > c > 0$ numere reale. Următoarele afirmaţii sunt echivalente :

a) există un triunghi ascuţitunghic având laturile de lungimi *a, b, c;*

b) $\left(a^4+b^4+c^4\right)^2>2\left(a^8+b^8+c^8\right)$;

c) $a^2 < b^2 + c^2$.

DEMONSTRAȚIE : a) $\Rightarrow$ b) Din $\cos A = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} > 0$ şi analoagele, rezultă

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=$$

$$=\left(a^4+b^4+c^4\right)^2-2\left(a^8+b^8+c^8\right)>0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Dacă în produsul de mai sus doi factori sunt negativi, de exemplu al doilea şi al treilea, atunci suma lor este un număr negativ,

$$\left(-a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2-b^2+c^2\right)=2c^2<0,$$

contradicție. Rezultă că toți factorii sunt pozitivi, în particular al doilea factor este pozitiv.

c) $\Rightarrow$ a) Avem $a^2 < b^2 + c^2 < (b+c)^2$, de unde $a < b + c$; $b < a < c + a$, $c < b < a + b$, deci există un triunghi cu laturile de lungimi *a, b, c.* Acest triunghi este ascuțitunghic, deoarece cosinusurile măsurilor unghiurilor lui sunt pozitive :

$$a^2<b^2+c^2,\ \ b^2<a^2<c^2+a^2,\ \ c^2<b^2<a^2+b^2.$$

Notă. Un tetraedru se numeşte *semiregulat* (*isoscel, echifacial*) dacă are muchiile opuse congruente. Condițiile din lema 1 sunt echivalente cu următoarea :

d) există un tetraedru semiregulat cu muchiile de lungimi *a, b, c.*

Într-adevăr, din patru triunghiuri ascuțitunghice congruente se poate construi un tetraedru având ca fețe triunghiurile respective, deci a) implică d).

Volumul V al unui tetraedru semiregulat se exprimă (cf. [5] [6]) în funcție de lungimile *a, b, c* ale muchiilor tetraedrului prin formula

$$72V^2=\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right).$$

Toți factorii sunt pozitivi şi primul factor este cel mai mic dintre ei, deci d) implică c).

Lema 2. Fie $a > b > c > 0$ numere reale. Următoarele afirmații sunt echivalente :

a) există un triunghi dreptunghic având laturile de lungimi *a, b, c*;

b) $\left(a^4+b^4+c^4\right)^2=2\left(a^8+b^8+c^8\right)$;

c) $a^2 = b^2 + c^2$.

DEMONSTRAȚIE : a) $\Rightarrow$ b) Din $a > b > c$ rezultă că lungimea ipotenuzei este egală cu a, deci

$a^2 = b^2 + c^2$, de unde

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)^2-2\left(a^8+b^8+c^8\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Cel mai mic factor în produsul de mai sus este al doilea, deci $-a^2+b^2+c^2=0.$

c) $\Rightarrow$ a) Din $a^2=b^2+c^2$ rezultă $a=\sqrt{b^2+c^2}<b+c.$ Avem şi $b < a < c + a$, $c < b < a + b$, deci există un triunghi cu laturile de lungimi *a, b, c*. Conform reciprocei teoremei lui *Pitagora,* acest triunghi este dreptunghic.

Lema 3. Fie $a > b > c > 0$ numere reale astfel încât $a < b + c$. Următoarele afirmații sunt echivalente :

a) există un triunghi obtuzunghic având laturile de lungimi *a, b, c*;

b) $\left(a^4+b^4+c^4\right)^2<2\left(a^8+b^8+c^8\right)$;

c) $a^2>b^2+c^2$.

DEMONSTRAȚIE : Asemănătoare cu cea a lemei 1.

Propoziția 4. Dacă $n\geq 3$ este un număr natural şi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sunt numere reale strict pozitive astfel încât

$$\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)^2>(n-1)\left(a_1^8+a_2^8+\ldots+a_n^8\right),$$

atunci oricare trei dintre aceste numere sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic.

DEMONSTRAȚIE : Pentru $n = 3$ proprietatea rezultă din lema 1. O demonstrăm pentru $n\geq 4$:

$$(n-1)\left(a_1^8+a_2^8+\ldots+a_n^8\right)<\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a_1^4+a_2^4+a_3^4}{2}+\frac{a_1^4+a_2^4+a_3^4}{2}+a_4^4+\ldots+a_n^4\right)^2\leq$$

$$\leq(n-1)\left[\left(\frac{a_1^4+a_2^4+a_3^4}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1^4+a_2^4+a_3^4}{2}\right)^2+a_4^8+\ldots+a_n^8\right],$$

unde a doua inegalitate rezultă din inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică. Simplificăm, reducem termenii asemenea şi obținem

$$2\left(a_1^8+a_2^8+a_3^8\right)<\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)^2,$$

deci se poate construi, conform lemei 1, un triunghi ascuțitunghic cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_3. Cum expresiile din enunț sunt simetrice, rezultă că proprietatea rămâne adevărată pentru oricare trei dintre numerele a_1, a_2, ..., a_n.

Note. *i*) Inegalitatea $\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)^2 \le n\left(a_1^8+a_2^8+\ldots+a_n^8\right)$ este adevărată, oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

ii) Inegalitățile obținute din teorema cosinusului pentru pătratele lungimilor laturilor unui triunghi ascuțitunghic sunt de același sens, astfel că nu vom obține propoziții similare pentru triunghiurile dreptunghice sau obtuzunghice.

Printre triunghiurile obținute din aplicarea punctului 1 există triunghiuri ascuțitunghice, după cum reiese din

Propoziția 5 Dacă oricare trei dintre numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci printre oricare cinci dintre ele există trei care sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic.

DEMONSTRAȚIE : Alegem numerele a_1, ..., a_5 şi presupunem că $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Dacă triunghiurile cu lungimile laturilor printre aceste numere nu sunt ascuțitunghice, atunci, în particular, triunghiurile cu lungimile laturilor a_1, a_2, a_3, respectiv a_3, a_4, a_5 nu sunt ascuțitunghice, deci

$$a_3^2 \ge a_1^2+a_2^2, \quad a_5^2 \ge a_3^2+a_4^2,$$

de unde

$$a_5^2 \ge a_1^2+a_2^2+a_4^2 \ge a_1^2+a_2^2+a_3^2 \ge \left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_1-a_2\right)^2 \ge \left(a_1+a_2\right)^2,$$

prin urmare $a_5 \ge a_1+a_2$, astfel că nu există un triunghi cu laturile de lungimi a_1, a_2, a_5, contradicție. Cum numerele a_1, ... , a_5 au fost alese arbitrar, rezultă că proprietatea este adevărată pentru oricare cinci dintre ele.

Notă. Numărul 5 este minim cu proprietatea din enunț. Într-adevăr, oricare trei dintre numerele 30, 40, 51, 65 sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

Următorul rezultat este o generalizare a problemei săptămânii 25-31.10.2010 (*Biro Istvan,* [4]).

Propoziția 6 Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel ca

$$1 \le a_1 \le a_2 < \ldots < a_n \le M,$$

unde M este un număr real. Dacă printre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu există trei care sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci marginea inferioară a lui M este egală cu F_n, al n-lea termen din şirul lui *Fibonacci.*

DEMONSTRAȚIE : Dacă nu există trei dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ care sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $a_i \geq a_j + a_k$, pentru orice $i > j, i > k.$ Avem aşadar

$$a_n \geq a_{n-1} + a_{n-2},\ a_{n-1} \geq a_{n-2} + a_{n-3},\ a_{n-2} \geq a_{n-3} + a_{n-4},\ \dots,\ a_3 \geq a_2 + a_1,$$

de unde se deduce

$$M \geq a_n \geq a_{n-1} + a_{n-2} \geq 2a_{n-2} + a_{n-3} \geq 3a_{n-3} + 2a_{n-4} \geq 5a_{n-4} + 3a_{n-5} \geq \dots \geq F_{n-1}a_2 + F_{n-2}a_1 \geq F_n.$$

Marginea inferioară a numerelor M este deci egală cu F_n şi este atinsă atunci când toate numerele $a_i, 1 \leq i \leq n$ sunt termeni ai şirului lui *Fibonacci.*

Observație. Asemănător deducem :

Dacă $1 \leq a_1 \leq a_2 < a_3 < a_4 \leq M$ şi triunghiurile care au lungimile laturilor egale cu oricare trei dintre numerele a_1, a_2, a_3, a_4 nu sunt ascuțitunghice, atunci marginea inferioară a numerelor M este egală cu $\sqrt{3}$ şi este atinsă atunci când $a_1 = a_2 = 1, a_3 = \sqrt{2}, a_4 = \sqrt{3}.$

Bibliografie

[1] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado, *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach,* Birkhäuser Basel, 2009

[2] www.itym.org

[3] www.tfjm.org

[4] www.mateinfo.ro

[5] Brânzei, Dan, Anița, Sebastian, Cocea, Constantin, *Planul şi spațiul euclidian,* Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[6] Klee, Victor, Wagon, Stan, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,* The Mathematical Association of America, 1991

Demonstrarea unor relatii metrice cu ajutorul vectorilor

Prof.Balogh Erika
Colegiul Tehnic "C.D.Nenitescu" Baia Mare

1. TEOREMA SINUSURILOR

Intr-un triunghi oarecare raportul dintre fiecare latura si sinusul unghiului opus este constant si anume egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

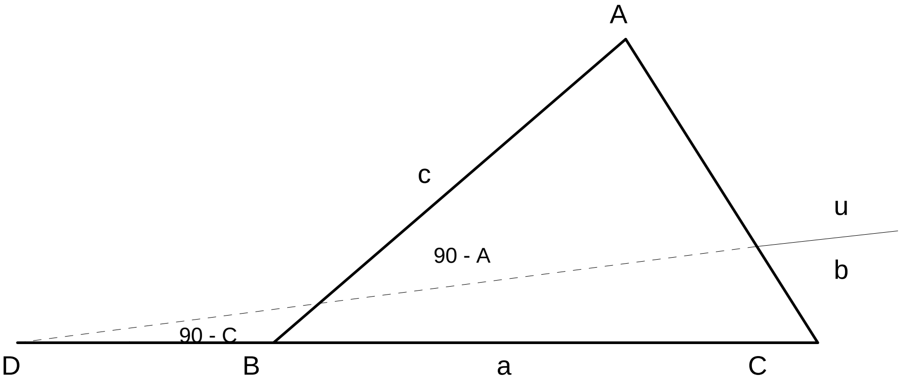


Fig. 1.

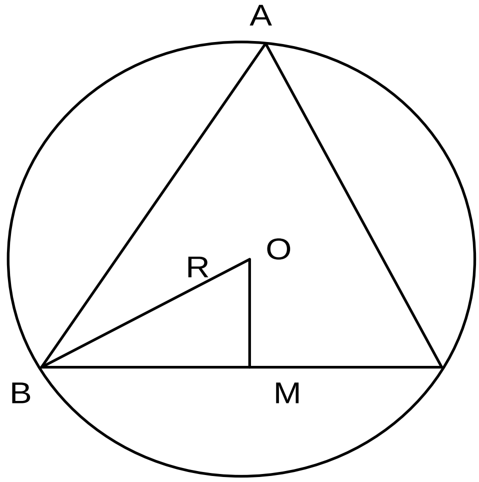


Fig. 2.

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

Consideram un vector unitar $\bar{u}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AC}$ si inmultim scalar relatia precedenta cu $\bar{u}$:

$$\overrightarrow{BC}\cdot\bar{u}=\overrightarrow{BA}\cdot\bar{u}+\overrightarrow{AC}\cdot\bar{u}$$

sau

BC · cos (90 °- C) = BA · cos (90 °- A) adica

$$a \sin C = c \sin A$$

deci

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

analog se demonstreaza ca $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Construim cercul circumscris Δ ABC si luam OM $\perp$ BC

in Δ BOM, M = 90° $\Rightarrow$ sin BOM = $\frac{BM}{BO}$ dar BOM $\equiv$ BAC, BM = $\frac{a}{2}$ si BO = R

rezulta

$$\sin A = \frac{a}{2} / R \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

2. TEOREMA COSINUSULUI

Intr-un triunghi oarecare patratul unei laturi este egal cu suma patratelor celorlalte doua laturi din care se scade dublul produsului acestor laturi prin cosinusul unghiului cuprins intre ele.

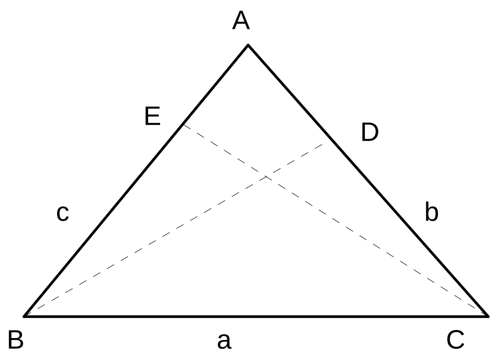


Fig. 3.

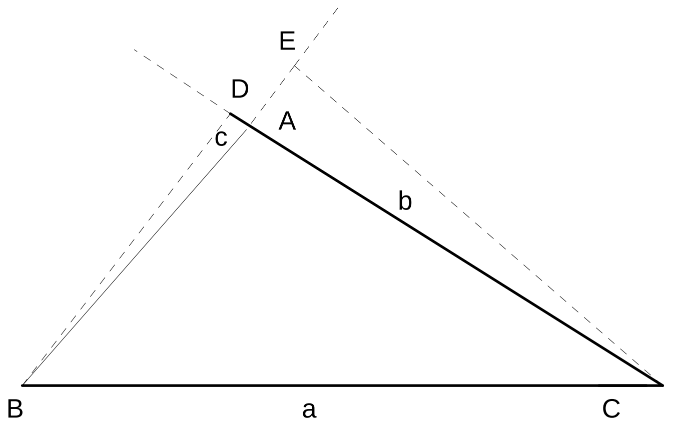


Fig. 4.

Intre laturile Δ ABC carora li s-a stabilit un sens $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ exista relatia:

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \quad | \ (\ )^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, \vec{b} \cdot \vec{c}$$

folosind definitia produsului scalari dintre doi vectori rezulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos(\bar{b}, \bar{c})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos A$$

se mai poate scrie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot pr_b\, c$$

sau

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot pr_c\, b$$

daca A este ascutit $\cos A > 0$ sau daca este obtuz $\cos A < 0$

cind $0 < A \leq 90°$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AC \cdot AD$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB \cdot AE$$

cind $90° < A < 180°$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\, AC \cdot AD$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\, AB \cdot AE$$

relatiile precedente sunt cunoscute sub numele de teorema lui Pitagora generalizata.

In particular daca $A = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ adica teorema lui Pitagora.

Si inversa teoremei lui Pitagora este valabila: daca intr-un triunghi patratul unei laturi este egal cu suma patratelor celorlalte doua laturi atunci triunghiul este dreptunghic.

In general aceasta teorema se foloseste cind vrem sa demonstram despre un triunghi ca este dreptunghic.

3. Relatia metrica in legatura cu centrul de greutate

Sa se arate ca daca G este punctul de intersectie a medianelor unui triunghi oarecare ABC, avem relatia:

$$2\,(GA^2 + GB^2 + GC^2) = BC^2 + CA^2 + AB^2$$

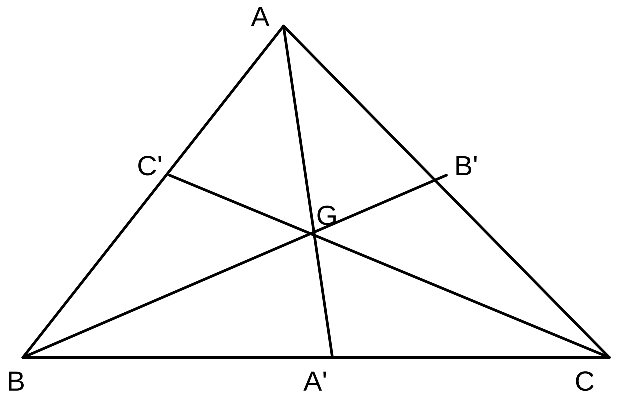


Fig. 5.

G fiind centru de greutate rezulta:

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = 0$$

prin ridicarea la patrat relatia obtinem:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = -2\overline{GA}\cdot\overline{GB} - 2\overline{GA}\cdot\overline{GC} - 2\overline{GB}\cdot\overline{GC} \qquad (\text{i})$$

In triunghiurile GBC, GAC, si GAB aplicam teorema cosinusului si obtinem:

$$-2\overline{GA}\cdot\overline{GB} = AB^2 - GA^2 - GB^2$$
$$-2\overline{GA}\cdot\overline{GC} = AC^2 - GA^2 - GC^2$$
$$-2\overline{GB}\cdot\overline{GC} = BC^2 - GB^2 - GC^2$$

Adunind aceste trei egalitati rezulta:

$$-2\overline{GA}\cdot\overline{GB} - 2\overline{GA}\cdot\overline{GC} - 2\overline{GB}\cdot\overline{GC} = AB^2 + AC^2 + BC^2 - 2GA^2 - 2GB^2 - 2GC^2$$

Inlocuind aceasta relatie in relatia (i) obtinem:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2 - 2GA^2 - 2GB^2 - 2GC^2$$

sau

$$3 (GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + AC^2 + BC^2$$

analog se poate demonstra $9 (GA^4 + GB^4 + GC^4) = a^2 + b^2 + c^2$

4. Calcularea medianei intr-un triunghi oarecare

Fie triunghiul ABC si medianele AA', BB' si CC'. Daca BC = a, AC = b, AB = c

$$AA'^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \qquad BB'^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}, \qquad CC'^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

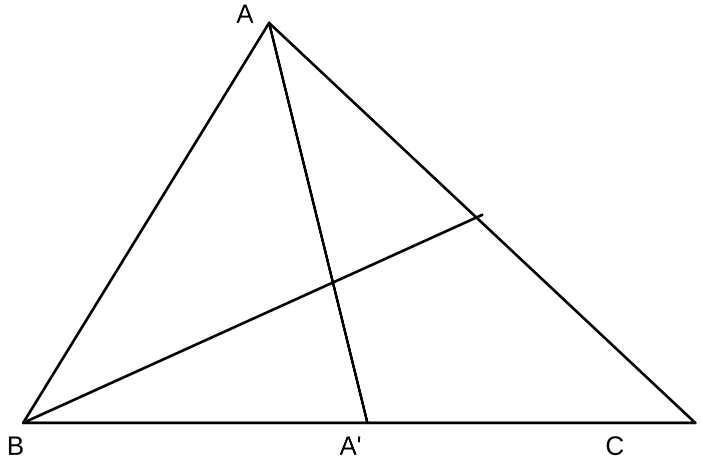


Fig. 6

A' fiind mijlocul laturii BC rezulta:

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2} \qquad |\ (\ )^2$$

ridicat la patrat relatia obtinem:

$$AA'^2 = (AB^2 + AC^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\ )\ /\ 4 \qquad (1)$$

In Δ ABC avem relatia:

$$BC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}$$

deci

$$2\overline{AB}\cdot\overline{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2 \qquad (2)$$

Inlocuind relatia (1) in relatia (2) obtinem:

$$AA'^2 = [\,2\,(AB^2 + AC^2) - BC^2]\ /\ 4 \quad \text{sau} \quad AA'^2 = [\,2\,(b^2 + c^2) - a^2]\ /\ 4$$

Se stabilesc in mod analog si celelalte doua relatii.

5. <u>Relatia metrica intre laturile si diagonalele unui paralelogram</u>

Intr-un paralelogram suma patratelor laturilor unui paralelogram este egala cu suma patratelor diagonalelor.

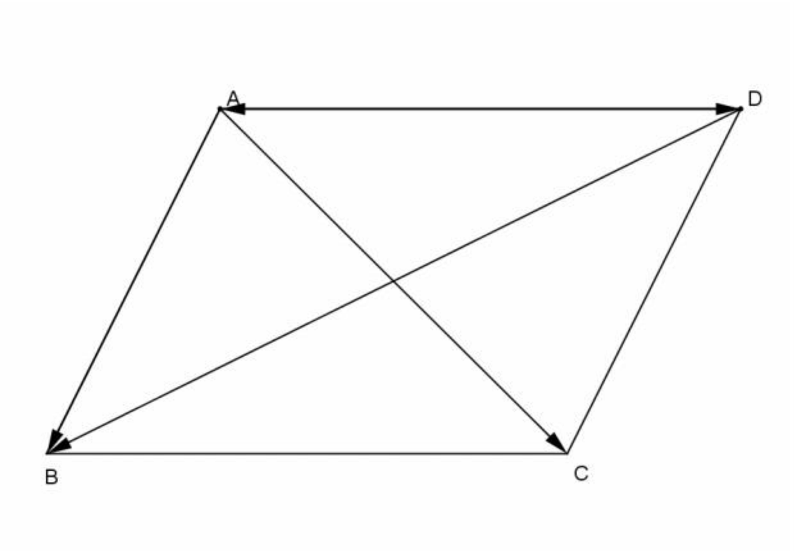


Fig. 7.

Fie ABCD parallelogram

Prin notatiile $\overline{AB} = \overline{DC}$ si $\overline{AD} = \overline{BC}$ (3)

In Δ ABD si Δ ABC $\overline{DB}$ si $\overline{AC}$ se exprima prin relatiile:

$$\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB} \quad \text{si} \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Tinind seama de relatiile (3) obtinem:

$$\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB} \quad \text{si} \quad \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{DA}$$

Prin ridicarea la patrat ai egalitatilor obtinem:

$$DB^2 = DA^2 + AB^2 + 2\ \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

si

$$AC^2 = AB^2 + DA^2 - 2\ \overline{DA} \cdot \overline{AB}$$

Adunind aceste doua egalitati membru cu membru ajungem la relatia:

$$DB^2 + AC^2 = 2\ (\ AD^2 + AB^2\ )$$

6. Calculul lungimilor AI , BI , CI unde I este centrul cercului inscris in triunghiul ABC

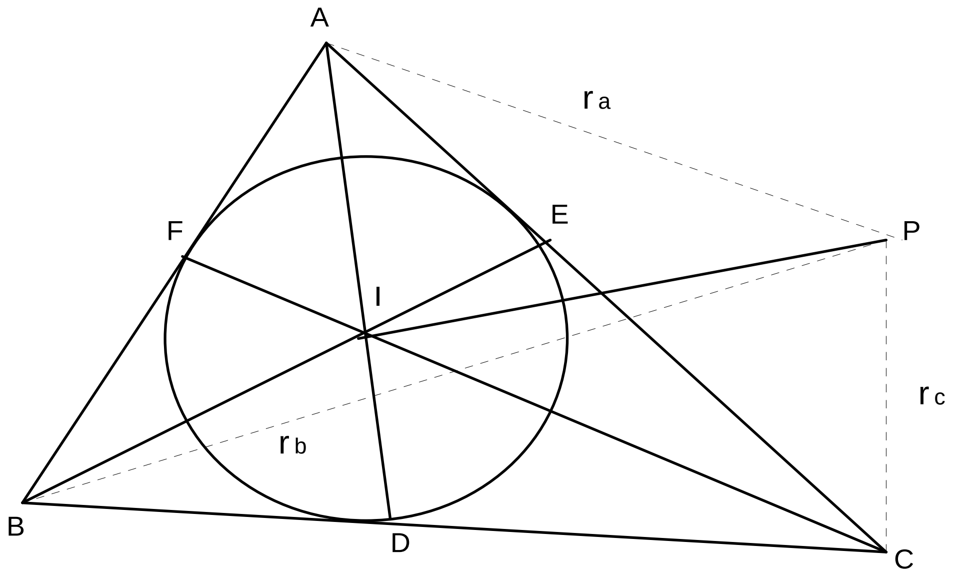


Fig. 8.

Fie P un punct oarecare din spatiu sau din planul Δ ABC

$$\overline{r}_a = \overline{PA}, \quad \overline{r}_b = \overline{PB}, \quad \overline{r}_c = \overline{PC}$$

$$\overline{PD} = \frac{\overline{r_b} + {}^{c}\!/_{b}\,\overline{r_c}}{1 + {}^{c}\!/_{b}} = \frac{b\overline{r_b} + c\overline{r_c}}{b+c}$$

Deoarece BI este bisectoarea in Δ ABD se poate scrie:

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IA}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = -\frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = -\frac{a}{b+c}$$

prin urmare

$$\overline{PI} = \frac{\overline{PD} + \frac{a}{b+c} \cdot \overline{PA}}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{\frac{b\overline{r_b} + c\overline{r_c}}{b+c} + \frac{a\overline{r_a}}{b+c}}{\frac{a+b+c}{b+c}} = \frac{a \cdot \overline{r_a} + b \cdot \overline{r_b} + c \cdot \overline{r_c}}{a+b+c}$$

$$\overline{PI} = \frac{a \cdot \overline{r_a} + b \cdot \overline{r_b} + c \cdot \overline{r_c}}{a+b+c} \qquad (4)$$

Pentru calcului lui AI presupunem P $\equiv$ A $\Rightarrow$ $\overline{r_a}$ = 0 atunci

$$\overline{AI} = \frac{b \cdot \overline{AB} + c \cdot \overline{AC}}{a+b+c} \Rightarrow AI^2 = (2\, b^2c^2 + 2bc\, \overline{AB} \cdot \overline{AC}\,) / (\,a + b + c\,)^2 =$$

$$= 2\, b^2c^2\,(\,1 + \cos A\,) \,/\, (\,a + b + c\,)^2 = 4bc\, p\,(\,p - a\,) \,/\, (\,a + b + c\,)^2$$

prin urmare:

$$\overline{AI} = \frac{2}{2p}\sqrt{bcp(p-a)} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

$\overline{BI}$ si $\overline{CI}$ se deduc prin permutari circulare.

7. <u>Calculul distantei OH ,</u> unde O este centrul cercului circumscris triunghiului iar H ortocentrul

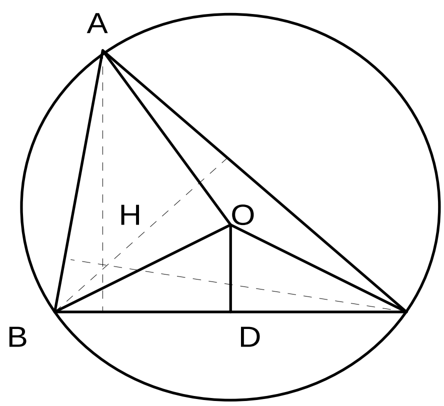


Fig. 9.

Stim ca $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Dar $|\,\overline{OA}\,| = |\,\overline{OB}\,| = |\,\overline{OC}\,| = R$, deci ridicind la patrat relatia obtinem:

$$OH^2 = 3R^2 + 2\,(\,\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA}\,)$$

I. caz deoarece $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$ reprezinta puterea punctului O fata de centrul cu diametrul BC putem scrie:

$\overline{OB} \cdot \overline{OC}$ - OD² - a² / 4 = R² - a² / 4 - a² / 4 = R² - a² / 2

deci

$OH^2 = 3 R^2 + 2 [3 R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) / 2]$

$OH^2 = 9 R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ (5)

II. caz $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA} = R^2 (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) =$

$= R^2 (- 4 \cos A \cos B \cos C - 1)$

deci

$OH^2 = 3 R^2 + 2 R^2 (- 1 - 4 \cos A \cos B \cos C)$

$OH^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$ (6)

Prin urmare relatia (5) este distanta OH^2 in functie de R si laturile triunghiului iar relatia (6) este distanta OH^2 in functie de R si unghiurile triunghiului ABC.

8. Calculul distantei OI dintre centrele cercului circumscris si al cercului inscris ale unui triunghi.

Utilizind relatia (4) din paragraful 6. in care P ≡ O si obtinem:

$$\overline{OI} = \frac{a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}}{a+b+c}$$

ridicam la patrat si obtinem:

$OI^2 = R^2 (a^2+ b^2+ c^2) / 4p^2 + 2 (ab\, \overline{OA} \cdot \overline{OB} + bc\, \overline{OB} \cdot \overline{OC} + ca\, \overline{OC} \cdot \overline{OA}) / 4p^2$

Tinind seama de expresiile pentru

$\overline{OA} \cdot \overline{OB}$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$ si $\overline{OC} \cdot \overline{OA}$ putem scrie:

$OI^2 = R^2(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)^2+2[ab(R^2-c^2/2)+bc(R^2-a^2/2)+ca(R^2-b^2/2)]/(a+b+c)^2$

$OI^2 = R^2(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)^2+R^2(2ab+2bc+2ac)/(a+b+c)^2-abc(a+b+c)/(a+b+c)^2$

$OI^2 = R^2(a+b+c)^2 / (a+b+c)^2 - abc (a+b+c) / (a+b+c)^2$

$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{2p}$ dar abc = 4RS = 4R pr S = aria triunghiului

r = raza cercului inscris

$OI^2 = R^2 - 2 Rr$

$OI^2 = R (R - 2r)$

9. TEOREMA lui EULER

Intr-un patrulater oarecare suma patratelor laturilor este egala cu suma patratelor diagonalelor la care se aduna de patru ori patratul segmentului care uneste mijloacele diagonalelor.

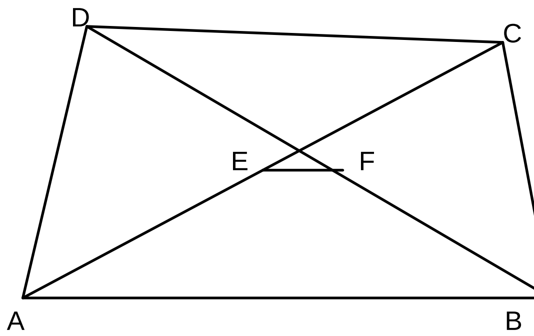


Fig. 7.

$\overline{AB}$ = a , $\overline{BC}$ = b , $\overline{CD}$ = c , $\overline{DA}$ = d , AC = δ_1 , BD = δ_2 , EF = m

Fie ABCD patrulater oarecare E mijlocul lui AC si F mijlocul lui BD

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}$$

adunate cele doua relatii:

$$2\,\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD} \qquad (7)$$

pentru ca

$$\overline{EA} + \overline{EC} = 0 \,, \qquad \overline{BF} + \overline{DF} = 0$$

dar

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB}$$

deci

$$2\,\overline{EF} = \overline{AD} + \overline{CB} \qquad (8)$$

Ridicind la patrat relatia (7) si (8) rezulta:

$$4\,EF^2 = AB^2 + CD^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AD^2 + CB^2 + 2\,\overline{AD} \cdot \overline{CB} \qquad (9)$$

pe de alta parte adunind relatia (7) cu (8) obtinem:

$$4\,\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{AD} + \overline{CB}$$

ridicind la patrat rezulta:

$$16EF^2=(AB^2+CD^2+AD^2+CB^2+2\,\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2\,\overline{AD} \cdot \overline{CB})+2(\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CB} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{CD} \cdot \overline{CB})$$

Tinind seama de relatia (9) atunci:

$$8\ EF^2 = 2\ (\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BA}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{DB}+\overline{DC}\cdot\overline{DA})$$

Dar

$$2\ \overline{AB}\cdot\overline{AD} = 2\ ad\cos A = a^2 + d^2 - \delta_1^2$$

$$2\ \overline{BA}\cdot\overline{BC} = 2\ ab\cos B = a^2 + b^2 - \delta_2^2$$

$$2\ \overline{CD}\cdot\overline{CB} = b^2 + c^2 - d_1^2$$

$$2\ \overline{DC}\cdot\overline{DA} = c^2 + d^2 - d_2^2$$

deci

$$4\ EF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2$$

prin urmare

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\ m^2$, care se numeste si relatia lui Euler

10. Calculul distantei de la centrul O al cercului circumscris unui patrulater ABCD pina la anticentrul sau

Anticentrul unui patrulater inscriptibil este punctul de concurenta ale dreptelor duse din mijlocul fiecarei laturi, perpendicculare pe latura opusa

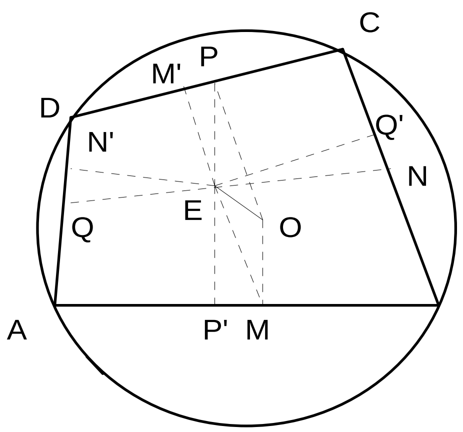


Fig.8.

Daca ABCD este inscris in cercul cu centrul O si E anticentrul sau atunci:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OE} \quad (10)$$

Fie M, N, P, R mijloacele laturilor AB, BC, CD si DA
MM' $\perp$ CD, PP' $\perp$ AB, si E = MM' $\cap$ PP' rezulta OMEP paralelogram

$$\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OM} \quad \text{si} \quad \overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OP}$$

adunind rezulta:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2(\overline{OM}+\overline{OP})=2\overline{OE}$$

Analog se poate demonstra daca luam NN' $\perp$ AD si QQ' $\perp$ BC si E' = NN' $\cap$ QQ'

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OE} \qquad \text{deci} \quad E \equiv E'$$

Prin ridicarea la patrat a relatiei (10) rezulta:

$$4\,OE^2 = 4\,R^2 + 2\,(\overline{OA}\cdot\overline{OB}+\overline{OA}\cdot\overline{OC}+\overline{OA}\cdot\overline{OD}+\overline{OB}\cdot\overline{OC}+\overline{OB}\cdot\overline{OD}+\overline{OC}\cdot\overline{OD}) \qquad (11)$$

insa $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ reprezinta puterea punctului O fata de cercul cu diametrul AB deci fiind M mijlocul laturii AB

avem: $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = OM^2 - \frac{1}{4}AB^2 = R^2 - \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = R^2 - AB^2/2$,

analog si pentru celelalte produse scalare.

Daca notam AB = a, BC = b, CD = c, DA = d si diagonalele AC = m, BD = n relatia (11) devine:

$$4\overline{OE}^2 = 4\,R^2 + 2\,[\,6\,R^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2)/2 - (m^2+n^2)/2\,]$$

$$OE^2 = 4\,R^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2+m^2+n^2)/4$$

Pe baza teoremei lui Euler $a^2+b^2+c^2+d^2 = m^2+n^2+4e^2$ unde e este distanta dintre mijloacele diagonalelor, prin urmare:

$$4\,OE^2 = 16\,R^2 - (2m^2+2n^2+4e^2)$$

sau

$$OE^2 = 4\,R^2 - (m^2+n^2)/2 - e^2$$

11. <u>Distanta intre centrul cercului inscris si centrul de greutate la un triunghi oarecare</u>

Pornim din relatia

$$\overline{IA}+\overline{IB}+\overline{IC}=3\overline{IG}$$

ridicind la patrat obtinem:

$$9\,IG^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\,(\overline{IA}\cdot\overline{IB}+\overline{IB}\cdot\overline{IC}+\overline{IC}\cdot\overline{IA}) \qquad (12)$$

dar stiind ca:

$\overline{IA}\cdot\overline{IB} = IF^2 - c^2/4$ unde F mijlocul lui AB

$\overline{IA}\cdot\overline{IB} = [\,2\,(IA^2+IB^2) - c^2\,]/4 - c^2/4$

$\overline{IA}\cdot\overline{IB} = (IA^2+IB^2-c^2)/2$

Analog se pot deduce relatiile:

$\overline{IB} \cdot \overline{IC}$ = (IB² + IC² - a²) / 2

si

$\overline{IC} \cdot \overline{IA}$ = (IC² + IA² - a²) / 2

Inlocuind cele trei produse $\overline{IA} \cdot \overline{IB}$, $\overline{IB} \cdot \overline{IC}$, $\overline{IC} \cdot \overline{IA}$ obtinem:

$$9\,IG^2 = 3\,(IA^2 + IB^2 + IC^2) - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (13)$$

Dar in acest capitol in puntul 6. am demonstrat:

$$AI^2 = \frac{bc(p-a)}{p}\ ; \quad BI^2 = \frac{ac(p-b)}{p}\ ; \quad CI^2 = \frac{ab(p-c)}{p}$$

Folosind aceste relatii la relatia (46) rezulta:

$$IG^2 = \frac{ab+bc+ca}{3} - (a^2 + b^2 + c^2) / 9 - \frac{abc}{p}$$

dar

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(p^2 - 4\,Rr - r^2)$$

$$ab + bc + ca = p^2 + 4\,Rr$$

$$abc = 4\,RS = 4\,R\,pr$$

care rezulta:

$$IG^2 = (P^2 - 5\,r^2 - 16\,Rr) / 9$$

Prof.Balogh Erika
Colegiul Tehnic "C.D.Nenitescu" Baia Mare

BIBLIOGRAFIE:

1. Gh.D.Simionescu: Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie, 1982

2. G.Simionescu,V.Ştefănescu: Aplicaţii ale calculul vectorial în geometrie şi trigonometrie, 1975

3. E.Rusu: Vectori, 1976

4. L.Constantinescu,C.Perişor: Goemetrie şi trigonometrie manual pentru an 1. de liceu ed. 1976

TEOREME DE MEDIE

Prof. Descultu Sanda – Mioara
Colegiul National "Unirea"– Turnu Magurele, Teleorman

Capitolul I.– PRINCIPALELE TEOREME DE MEDIE PENTRU INTEGRALE

TEOREMA I DE MEDIE (Prima formula de medie)

Daca $f, g : [a,b] \to R$ sunt integrabile , $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

$g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$ (sau $g(x) \leq 0, (\forall) x \in [a,b]$)

Atunci $(\exists)\gamma \in [m, M]$ a.i. $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \gamma \cdot \int\limits_a^b g(x)dx$

Demonstratie

Presupunem ca $g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$.

f integrabila pe $[a,b] \Rightarrow f$ marginita $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists) m, M \in R$ a.i. $m \leq f(x) \leq M$ $(\forall) x \in [a,b]$. Dar $g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$

$$\Rightarrow m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \quad (\forall) x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b m\cdot g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq \int\limits_a^b M\cdot g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m\cdot\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \le M\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Functia g este integrabila , $g(x)\ge 0,(\forall)x\in[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge 0$.

Se disting doua cazuri :

Cazul I : $\int_a^b g(x)dx = 0$.$\Rightarrow$ $0\le\int_a^b f(x)g(x)dx \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

Deci γ se poate alege orice nr. din $[m,M]$, si $\gamma\cdot\int_a^b g(x)dx = \gamma\cdot 0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \gamma\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Cazul II : $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow$

$$m\cdot\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \le M\cdot\int_a^b g(x)dx \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \le \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\exists)\gamma = \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m,M] \quad \text{a.i.} \quad \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \gamma\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Analog daca $g(x) \leq 0, (\forall) x \in [a,b]$.

COROLARUL 1.

Daca $f, g : [a,b] \to R$
f este continua pe $[a,b]$
g este integrabila pe $[a,b]$
$g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$ (sau $g(x) \leq 0, (\forall) x \in [a,b]$) ,

Atunci $(\exists) c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Demonstratie

f continua pe $[a,b] \Rightarrow f$ integrabila pe $[a,b] \Rightarrow$ f marginita , cu :
$m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Avem : $f, g : [a,b] \to R$ integrabile si $g(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$

$\xrightarrow{th.I.medie} (\exists) \gamma \in [m, M]$ a.i. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \gamma \cdot \int_a^b g(x) dx$.

f continua pe $[a,b]$ =interv.compact $\Rightarrow f$ isi atinge marginile pe $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists) \alpha, \beta \in [a,b]$ a.i. $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$.

$\gamma \in [m, M] \Rightarrow m \leq \gamma \leq M \Rightarrow f(\alpha) \leq \gamma \leq f(\beta)$.

f continua pe $[a,b]$ =interval $\Rightarrow f$ are P.D. pe $[a,b]$.

f are P.D. pe $[a,b]$, $f(\alpha) \leq \gamma \leq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in [a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists) c \in [a,b]$ a.i. $\gamma = f(c)$.

Deci $(\exists)c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot \int_a^b g(x)dx$.

COROLARUL 2.

Daca $f:[a,b]\to R$, f este continua pe $[a,b]$

Atunci $(\exists)c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Demonstratie

In corolarul 1. particularizam pe g , si consideram $g(x)=1\ (\forall)x\in[a,b]$.

f continua pe $[a,b]$, g integrabila pe $[a,b]$, $g(x)\geq 0, (\forall)x\in[a,b]$ $\Rightarrow$

$\xrightarrow{corolar 1.} (\exists)c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot \int_a^b g(x)dx$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\exists)c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

COROLARUL 3.

Daca $f:[a,b]\to R$, f integrabila pe $[a,b]$

Atunci $(\exists)\gamma \in [m,M]$ a.i. $\int_a^b f(x)dx = \gamma\cdot(b-a)$

Demonstratie

Particurarizam g si consideram $g(x)=1\ (\forall)x\in[a,b]$.

Avem : $f,g:[a,b]\to R$ integrabile , $g(x)\geq 0, (\forall)x\in[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\xrightarrow{th.I.medie} (\exists)\gamma \in [m,M] \text{ a.i. } \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \gamma \cdot \int_a^b g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists)\gamma \in [m,M] \text{ a.i. } \int_a^b f(x)dx = \gamma \cdot (b-a) .$$

In demonstratia teoremei II de medie ,se utilizeaza urmatoarea lema:

LEMA

Daca $f,g:[a,b]\to R$, f,g integrabile si

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b) \ , \ x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}, 0\le k\le n,$$

$$m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad , \quad M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad , i=\overline{1,n}$$

$$m_i(g) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) \quad , \quad M_i(g) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) \quad , i=\overline{1,n}$$

Atunci $(\forall)\alpha_i \in [m_i(f), M_i(f)]$ si $(\forall)\beta_i \in [m_i(g), M_i(g)]$ $, i=\overline{1,n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\cdot\beta_i\cdot(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(t)\cdot g(t)dt$$

TEOREMA II DE MEDIE (a doua formula de medie)

Daca $f, g : [a,b] \to R$
f, g integrabile pe $[a,b]$
g monoton descrescatoare
$g(x) \ge 0, (\forall) x \in [a,b]$

Atunci $(\exists) c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx$.

Demonstratie

Fie $n \in N^*$ si fie sirul de diviziuni echidistante :

$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$, $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, 0 \le k \le n$.

Notam : $m_i(f) = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i(f) = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $, i = \overline{1,n}$.

$m_i(f) \le f(x) \le M_i(f)$, $(\forall) x \in [x_{i-1}, x_i]$, $(\forall) i = \overline{1,n}$.

f integrabila pe $[a,b], [x_{i-1}, x_i] \subset [a,b] \Rightarrow f$ integrabila pe $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$.

$\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i(f) dx \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} M_i(f) dx$, $(\forall) i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_i(f)\cdot(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \le M_i(f)\cdot(x_i - x_{i-1}),\ (\forall) i=\overline{1,n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_i(f) \le \frac{1}{x_i - x_{i-1}}\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \le M_i(f),\ (\forall) i=\overline{1,n} \quad .$$

Notam : $\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \alpha_i$, $(\forall) i=\overline{1,n}$ si $g(x_{i-1}) = \beta_i$, $(\forall) i=\overline{1,n}$.

Avem : $f,g:[a,b]\to R$, f,g integrabile,

$$\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b),\ x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}, 0\le k\le n$$

$$\alpha_i \in [m_i(f), M_i(f)] \text{ si } \beta_i \in [m_i(g), M_i(g)],\ i=\overline{1,n}$$

$$\xrightarrow{lema}$$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\cdot\beta_i\cdot(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot g(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1})$$

Fie $F:[a,b]\to R$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = \int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt = \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = (x_i - x_{i-1})\cdot\left[\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\cdot\alpha_i,\ (\forall) i=\overline{1,n}\ .$$

Notam $L_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot g(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \cdot g(x_{i-1}) =$

$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \cdot g(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) =$

$= F(x_1)g(x_0) + F(x_2)g(x_1) + F(x_3)g(x_2) + \ldots + F(x_n)g(x_{n-1}) -$

$- F(x_0)g(x_0) - F(x_1)g(x_1) - F(x_2)g(x_2) - \ldots - F(x_{n-1})g(x_{n-1}) =$

$= F(x_1) \cdot (g(x_0) - g(x_1)) + F(x_2) \cdot (g(x_1) - g(x_2)) + \ldots +$

$\ldots + F(x_{n-1}) \cdot (g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})) + F(x_n) \cdot (g(x_{n-1})) - F(x_0) \cdot g(x_0)$.

Dar $F(x_0) = F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad L_n = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + F(x_n)g(x_{n-1})$

Fie $M = \sup_{x \in [a,b]} F(x)$, $m = \inf_{x \in [a,b]} F(x) \Rightarrow m \le F(x_i) \le M$, $(\forall) i = \overline{1,n}$

g monoton descrescatoare , $x_{i-1} < x_i$, $(\forall) i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g(x_{i-1}) \ge g(x_i)$, $(\forall) i = \overline{1,n} \Rightarrow g(x_{i-1}) - g(x_i) \ge 0$, $(\forall) i = \overline{1,n}$.

Din: $m \le F(x_i) \le M$, $(\forall) i = \overline{1,n-1}$ si $g(x_{i-1}) - g(x_i) \ge 0$, $(\forall) i = \overline{1,n-1} \Rightarrow$

$m \cdot (g(x_{i-1}) - g(x_i)) \le F(x_i) \cdot (g(x_{i-1}) - g(x_i)) \le M \cdot (g(x_{i-1}) - g(x_i))$,
$i = \overline{1,n-1}$

$$\Rightarrow m\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)\le\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)\cdot\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)\le$$
$$\le M\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)\Rightarrow$$

$$m\cdot\left(g(x_0)-g(x_{n-1})\right)\le\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)\cdot\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)\le M\cdot\left(g(x_0)-g(x_{n-1})\right)$$

Adunam $F(x_n)g(x_{n-1})$ in cei trei membri $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad F(x_n)g(x_{n-1})+m\cdot\left(g(x_0)-g(x_{n-1})\right)\le$$
$$\le F(x_n)g(x_{n-1})+\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)\cdot\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)\le$$
$$\le F(x_n)g(x_{n-1})+M\cdot\left(g(x_0)-g(x_{n-1})\right)\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad F(x_n)g(x_{n-1})+m\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)\le L_n\le$$
$$\le F(x_n)g(x_{n-1})+M\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)\Rightarrow$$

Majoram al III-lea membru :

$$F(x_n)g(x_{n-1})+M\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)\le M\cdot g(x_{n-1})+M\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)=$$

$$=M\cdot\left(g(x_{n-1})+g(a)-g(x_{n-1})\right)=M\cdot g(a)\ .$$

Minoram membrul I:

$$F(x_n)g(x_{n-1})+m\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)\ge m\cdot g(x_{n-1})+m\cdot\left(g(a)-g(x_{n-1})\right)=$$

$$=m\cdot\left(g(x_{n-1})+g(a)-g(x_{n-1})\right)=m\cdot g(a)$$

Deci $m\cdot g(a)\le L_n\le M\cdot g(a)$.

$g(x)\ge 0,(\forall)x\in[a,b]\Rightarrow g(a)\ge 0\Rightarrow$ analizam 2 situatii: $g(a)>0, g(a)=0$.

Cazul I): $g(a) > 0$

$$m \cdot g(a) \le L_n \le M \cdot g(a) \Leftrightarrow m \le \frac{1}{g(a)} \cdot L_n \le M$$

$$\Rightarrow m \le \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{n\to\infty} L_n \le M \Rightarrow m \le \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx \le M .$$

$F:[a,b] \to R$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow$ F derivabila si $F'(x) = f(x), (\forall) x \in [a,b]$.

F derivabila pe $[a,b] \Rightarrow$ F continua pe $[a,b] \Rightarrow$ F isi atinge marginile pe $[a,b]$

$\Rightarrow (\exists) u, v \in [a,b]$ a.i. $F(u) = m, F(v) = M \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(u) \le \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx \le F(v) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx = F(u)$ sau $\frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx = F(v)$ sau

sau $F(u) < \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx < F(v)$.

Daca $F(u) < \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx < F(v)$,cum F este continua si are deci

Prop. Darboux $\Rightarrow (\exists) c \in [a,b]$ a.i. $F(c) = \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Dar $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F(c) = \int_a^c f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{g(a)} \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Deci $(\exists) c \in [a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x)dx$.

Cazul II) : $g(a) = 0$

$a \le x \le b \Rightarrow g(a) \ge g(x) \ge g(b) \Rightarrow 0 \ge g(x) \ge g(b) \ge 0 \;\; \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 0, (\forall) x \in [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x) g(x) dx = 0$

Dar $\; g(a) \cdot \int_a^b f(x) dx = 0$.

Deci relatia $\; \int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx \;$ se verifica pt. $(\forall) c \in [a,b]$.

TEOREMA BONNET- WEIERSTRASS

Daca $\quad f, g : [a,b] \to R$

f continua pe $[a,b]$

g monotona

Atunci $(\exists) c \in [a,b]$ a.i. $\; \int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x) dx$.

Demonstratie

Cazul I) : g descrescatoare

Fie $x \in [a,b] \Rightarrow a \le x \le b \xrightarrow{g-descrescatoare} g(a) \ge g(x) \ge g(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) - g(b) \ge 0, (\forall) x \in [a,b]$.

Fie $h : [a,b] \to R$, $\; h(x) = g(x) - g(b) \Rightarrow h(x) \ge 0, (\forall) x \in [a,b]$.

$h = g - g(b)$,g descrescatoare , $g(b)$ constanta $\Rightarrow h$ descrescatoare .

f continua pe $[a,b] \Rightarrow f$ integrabila pe $[a,b]$.

h monotona pe $[a,b] \Rightarrow h$ integrabila pe $[a,b]$.

Avem : $f,h:[a,b] \to R$
f,h integrabile pe $[a,b]$
h monoton descrescatoare
$h(x) \geq 0, (\forall) x \in [a,b]$

$$\xrightarrow{th.II.medie} (\exists) c \in [a,b] \text{ a.i. } \int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = h(a) \cdot \int_a^c f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot (g(x) - g(b)) dx = (g(a) - g(b)) \cdot \int_a^c f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx - g(b) \cdot \int_a^b f(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx - g(b) \cdot \int_a^c f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx + g(b) \cdot \left(\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx + g(b) \cdot \left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x) dx \quad .$$

Cazul II) : g crescatoare – analog.

Capitolul II - APLICATII

TEOREMA DE EXISTENTA A PRIMITIVELOR UNEI FUNCTII CONTINUE (Aplicatie la Th. I de medie – Corolarul 2.)

Daca $f:[a,b]\to R$, f este continua si $F:[a,b]\to R$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$,

Atunci F este o primitiva a lui "f" care se anuleaza in "a".

Demonstratie

Aratam F derivabila si $F'(x_0)=f(x_0),(\forall)x_0\in[a,b]$. Fie $x_0\in[a,b], x\neq x_0$.

Cazul I) : $x<x_0$ $.\Rightarrow$ $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}=$

$$=\frac{\int_a^x f(t)dt-\left(\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x_0} f(t)dt\right)}{x-x_0}=\frac{-\int_x^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}.$$

Cazul II): $x_0 < x$ $.\Rightarrow$ $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0} =$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\left(\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}.$$

Deci $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}$, $(\forall)x \in [a,b], x \neq x_0$.

Fie $(c_n), c_n \in [a,b], c_n \neq x_0, c_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. $\dfrac{F(c_n)-F(x_0)}{c_n-x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^{c_n} f(t)dt}{c_n-x_0}$

f continua pe $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $c_n \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continua pe intervalul de capete x_0 si $c_n \Rightarrow$

$\xrightarrow{corolar2.} (\exists)\xi_n$ in int.de capete x_0 si c_n ,a.i.

$$\int_{x_0}^{c_n} f(t)dt = f(\xi_n)\cdot(c_n-x_0)$$

Deci $\dfrac{F(c_n)-F(x_0)}{c_n-x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^{c_n} f(t)dt}{c_n-x_0} = \dfrac{f(\xi_n)\cdot(c_n-x_0)}{c_n-x_0} = f(\xi_n)$.

Deoarece : $c_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, ξ_n este in intervalul de capete x_0 si $c_n \Rightarrow$

$\Rightarrow |\xi_n - x_0| \leq |c_n - x_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$.

Avem : f continua in x_0 , $\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

Deci $(\forall)(c_n)$, $c_n \in [a,b], c_n \neq x_0, c_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{F(c_n)-F(x_0)}{c_n - x_0} \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) .$$

$$\Rightarrow (\exists) \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \Rightarrow (\exists) F'(x_0) = f(x_0) .$$

EXERCITIUL1.

(Aplicatie le Th. I.de medie-Corolarul 2.)

Calculati : $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-1} \cdot \int\limits_n^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)dx$, $k \in N$, $k \geq 2$.

Solutie

Fie $f:[0,\infty) \to R$, $f(x) = \ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)$, si f este continua.

Fie $n \in N^*$. $[n, n+1] \subset [0,\infty)$ si f continua $\Rightarrow$ f continua pe $[n, n+1] \Rightarrow$

$$\xrightarrow{ThI.corolar2} (\exists) c_n \in [n, n+1] \text{ a.i. } \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = f(c_n) \cdot [(n+1)-n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{n}^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)dx = \ln\left(1+\frac{c_n}{1+(c_n)^k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot \int_{n}^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)dx = \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot \ln\left(1+\frac{c_n}{1+(c_n)^k}\right).$$

$c_n \geq n, (\forall) n \geq 1$ si $n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow c_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Deci : $\dfrac{c_n}{1+(c_n)^k} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{c_n}{1+(c_n)^k}\right)}{\dfrac{c_n}{1+(c_n)^k}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot \int_{n}^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)dx = \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot \ln\left(1+\frac{c_n}{1+(c_n)^k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n^{k-1}\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{c_n}{1+(c_n)^k}\right)}{\dfrac{c_n}{1+(c_n)^k}}\cdot\frac{c_n}{1+(c_n)^k}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot\frac{c_n}{1+(c_n)^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot\frac{c_n}{(c_n)^k\left(\dfrac{1}{(c_n)^k}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot\frac{1}{(c_n)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{1}{(c_n)^k}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{c_n}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{(c_n)^k}+1}\right)$$

$$n \le c_n \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{c_n} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \le \frac{n}{c_n} \le 1 \Rightarrow \frac{n}{c_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{c_n}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{(c_n)^k}+1}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{k-1}\cdot\int_n^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{1+x^k}\right)dx = 1 \quad .***$$

EXERCITIUL 2.

(Aplicatie la Teorema I de medie –Corolar 2.)

Calculati : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x}{x^2}dx$.

Solutie

Fie $f: R^* \to R$, $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$.

Fie $n \in N^*. \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \subset (0,\infty)$, f continua pe $(0,\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f \text{ continua pe.} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \xrightarrow{Th.I.corolar\,2}$$

$$\Rightarrow (\exists) c_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ a.i. } \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin c_n}{(c_n)^2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists) c_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ a.i. } \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin c_n}{n \cdot (n+1) \cdot (c_n)^2} .$$

$$\frac{1}{n+1} \le c_n \le \frac{1}{n}, (\forall) n \ge 1 , \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 , \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \xrightarrow{cleste}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = 0 .$$

Trebuie sa calculam : $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin c_n}{n \cdot (n+1) \cdot (c_n)^2}$.

$$0 < \frac{1}{n+1} \le c_n \le \frac{1}{n} \le 1 < \frac{\pi}{2} , \Rightarrow c_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), (\forall) n \ge 1 \Rightarrow \sin c_n > 0, (\forall) n \ge 1 .$$

$$\frac{1}{n+1} \le c_n \le \frac{1}{n}, (\forall) n \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \le (c_n)^2 \le \frac{1}{n^2}, (\forall) n \ge 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 \le \dfrac{1}{(c_n)^2} \le (n+1)^2, (\forall) n \ge 1$. Dar $\sin c_n > 0, (\forall) n \ge 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \sin c_n \le \frac{\sin c_n}{(c_n)^2} \le (n+1)^2 \cdot \sin c_n, (\forall) n \ge 1 \text{ ; inmultim cu } \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 \cdot \sin c_n}{n \cdot (n+1)} \le \frac{\sin c_n}{n \cdot (n+1) \cdot (c_n)^2} \le \frac{(n+1)^2 \cdot \sin c_n}{n \cdot (n+1)}, (\forall) n \ge 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \cdot \sin c_n \le \frac{\sin c_n}{n \cdot (n+1) \cdot (c_n)^2} \le \frac{n+1}{n} \cdot \sin c_n, (\forall) n \ge 1 \; .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \sin c_n = 1 \cdot 0 = 0 \; , \; \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \sin c_n = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\xrightarrow{cleste} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin c_n}{n \cdot (n+1) \cdot (c_n)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx = 0 \; .$$

EXERCITIUL3.

(Aplicatie la Teorema I. de medie – Corolarul 2.)

Daca $P : R \to R$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$, $a_k \in R \quad (\forall) k = \overline{0, n}$,

sa se arate ca $(\exists) c \in (0,1)$ a.i. $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1} = P(c)$.

Solutie

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n \right) dx =$$

$$= a_0 x\Big|_0^1 + a_1 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + a_2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \ldots + a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1}.$$

P continua pe $[0,1] \xrightarrow{Corolar.2} (\exists) c \in (0,1)$ a.i. $\int_0^1 P(x)dx = P(c)$.

Dar $\int_0^1 P(x)dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists) c \in (0,1)$ a.i. $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = P(c)$.

EXERCITIUL 4.

(Aplicatie la Teorema I de medie-Corolarul 1.)

Sa se arate ca $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

Solutie

Fie $f, g : [0,1] \to R$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = x^n$.

Deoarece : f continua pe $[0,1]$

g integrabila

$g(x) \geq 0, (\forall) x \in [0,1]$

$$\xrightarrow{Corolar.1.} (\exists) c \in [0,1] \text{ a.i. } \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_0^1 g(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists) c \in [0,1] \text{ a.i. } \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+c} \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{1+c} \cdot \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+c} \cdot \frac{1}{n+1} \right) = 0 \ .$$

EXERCITIUL 5.
(Aplicatie la Teorema I de medie – Corolarul 1.)

Fie $f : [0,1] \to R$, o functie de doua ori derivabila , cu f'' continua pe $[0,1]$.

Sa se arate ca $(\exists) c \in [0,1]$ a.i. $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} \cdot f'(0) + \frac{1}{6} \cdot f''(c)$.

Solutie

f este de doua ori derivabila $\Rightarrow$ f' derivabila $\Rightarrow$ f' continua.

Fie $h(x)=x-1, h:[0,1]\to R$

Avem: f,h derivabile, cu f', h' continue $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)' \cdot f(x)dx = (x-1)\cdot f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)\cdot f'(x)dx =$$

$$= (1-1)f(1)-(0-1)f(0)-\int_0^1 \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)' \cdot f'(x)dx =$$

$$= f(0)-\left[\frac{(x-1)^2}{2}\cdot f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}\cdot f''(x)dx\right] =$$

$$= f(0)+\frac{1}{2}\cdot f'(0)+\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (x-1)^2\cdot f''(x)dx$$

Avem : $\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}\cdot f'(0)+\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (x-1)^2\cdot f''(x)dx$

Calculam : $\int_0^1 (x-1)^2\cdot f''(x)dx$

Fie $g(x)=(x-1)^2$, $g:[0,1]\to R$

Deoarece : f'' continua
g integrabila
$g(x) \geq 0, (\forall) x \in [0,1]$

$$\xrightarrow{Corolar.1.} (\exists) c \in [0,1] \text{ a.i. } \int_0^1 f''(x) \cdot g(x) dx = f''(c) \cdot \int_0^1 g(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists) c \in [0,1] \text{ a.i. } \int_0^1 f''(x) \cdot (x-1)^2 dx = f''(c) \cdot \int_0^1 (x-1)^2 dx =$$

$$= f''(c) \cdot \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_0^1 = f''(c) \cdot \frac{1}{3}$$

Dar $\int_0^1 f(x) dx = \quad f(0) + \frac{1}{2} \cdot f'(0) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x-1)^2 \cdot f''(x) dx$

Deci $(\exists) c \in [0,1]$ a.i. $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} \cdot f'(0) + \frac{1}{6} \cdot f''(c)$.

***

EXERCITIUL6.

(Aplicatie la Teorema II de medie)

Fie $f : [0, \infty) \to R$, f continua ,si
$F : [0, \infty) \to R$, F o primitiva a lui f , cu $F(0) = 0$.

Daca $n \in N^*, n > 1$, demonstrati ca $(\exists) c \in [1, n]$ a.i. $\int_1^c f(\ln x) dx = F(\ln n)$.

Demonstratie

$n \in N^*, n > 1 \Rightarrow [1, n] \subset [0, \infty)$. Fie $h(x) = \ln x$, $h : [1, n] \to [0, \ln n]$.

$[1, n] \xrightarrow{h} [0, \ln n] \subset [0, \infty) \xrightarrow{f} R \Rightarrow f \circ h : [1, n] \to R$

h, f continue $\Rightarrow$ $f \circ h$ continua . Fie $g : [1, n] \to R$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

$f \circ h$, g continue pe $[1, n] \Rightarrow$ $f \circ h$, g integrabile pe $[1, n]$

Deoarece : $f \circ h$, g integrabile pe $[1, n]$
g descrescatoare
$g > 0$ pe $[1, n]$

$\xrightarrow{Th.II.medie} (\exists) c \in [1, n]$ a.i. $\int_1^n (f \circ h)(x) \cdot g(x) dx = g(1) \cdot \int_1^c (f \circ h)(x) dx$

$\Rightarrow (\exists) c \in [1, n]$ a.i. $\int_1^n f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^c f(\ln x) dx \Rightarrow$

$(\exists) c \in [1, n]$ a.i. $\int_1^c f(\ln x) dx = \int_1^n f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^n f(\ln x) \cdot (\ln x)' dx = F(\ln x)\Big|_1^n =$

$= F(\ln n) - F(\ln 1) = F(\ln n) - F(0) = F(\ln n) - 0 = F(\ln n)$. ***

INEGALITATILE LUI CEBASEV

(le utilizam la exercitiul urmator)

Fie $f, g:[a,b]\to R$, functii monotone .

a) Daca f si g sunt de aceeasi monotonie ,

atunci $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \geq \frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)$

b) Daca f si g sunt de monotonii diferite,

atunci $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)$.

EXERCITIUL 7. (Aplicatie la Teorema Bonnet-Weierstrass)

Fie $f, g:[a,b]\to R$, derivabile , cu $f^{'}(x)>0$ si $g^{'}(x)<0$ $(\forall)x\in[a,b]$.

Aratati ca $(\exists)p,q,r\in[a,b]$ a.i.

$$f(p)\cdot g(q)\geq\frac{1}{b-a}\cdot\left(g(a)\cdot\int_a^r f(x)dx+g(b)\cdot\int_r^b f(x)dx\right).$$

Demonstratie

f,g derivabile $\Rightarrow f,g$ continue .

$f^{'}>0$ pe $[a,b]\Rightarrow f$ strict cresc; $g^{'}<0$ pe $[a,b]$ $\Rightarrow g$ strict descresc

. f,g monotone , f,g de monotonii diferite $\xrightarrow{inegalitatile.Cebasev}$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\leq\frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

f continua pe $[a,b]\xrightarrow{Th.I.}(\exists)p\in[a,b]$ a.i. $\int_a^b f(x)dx=f(p)\cdot(b-a)$.

g continua pe $[a,b]\xrightarrow{Th.I.}(\exists)q\in[a,b]$ a.i. $\int_a^b g(x)dx=g(q)\cdot(b-a)$.

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\leq\left(\frac{1}{b-a}\right)\cdot f(p)(b-a)\cdot g(q)\cdot(b-a)=(b-a)\cdot f(p)\cdot g(q)$$

$$\Rightarrow f(p)\cdot g(q)\geq\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$$

f continua si g monotona $\xrightarrow{Th.Bonnet-Weierstrass}$

$$\Rightarrow(\exists)r\in[a,b]\text{ a.i. }\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^r f(x)dx+g(b)\cdot\int_r^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow f(p)\cdot g(q)\geq\frac{1}{b-a}\cdot\left(g(a)\cdot\int_a^r f(x)dx+g(b)\cdot\int_r^b f(x)dx\right).$$

EXERCITIUL 8. **(Aplicatie la Teorema Bonnet-Weierstrass)**

Daca $f:[0,1]\to R$, f derivabila, $f^{'}$ continua , $f^{'}(x)\neq 0,(\forall)x\in[0,1]$,

si $\int_0^1 f(x)dx=0$, demonstrati ca $(\exists)k\in[0,1]$ a.i. $k\cdot f(0)=(k-1)\cdot f(1)$.

Demonstratie

$f^{'}$ continua pe $[0,1]\Rightarrow f^{'}$ are P.D.pe $[0,1]$,dar $f^{'}(x)\neq 0,(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{'}$ are semn constant pe $[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{'}(x)>0,(\forall)x\in[0,1]$ sau $f^{'}(x)<0,(\forall)x\in[0,1]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f strict crescatoare pe $[0,1]$ sau f strict descrescatoare pe $[0,1]\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f strict monotona pe $[0,1]$.

Fie $h:[0,1]\to R$, $h(x)=1$.
Deoarece $h, f:[0,1]\to R$
h continua
f monotona , $\xrightarrow{Th.Bonnet-Weierstrass}$

$\Rightarrow$ $(\exists)k\in[0,1]$ a.i. $\int_0^1 h(x)f(x)dx=f(0)\cdot\int_0^k h(x)dx+f(1)\cdot\int_k^1 h(x)dx\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)k\in[0,1]$ a.i. $\int_0^1 f(x)dx=f(0)\cdot\int_0^k 1dx+f(1)\cdot\int_k^1 1dx$ .Dar $\int_0^1 f(x)dx=0$

$\Rightarrow(\exists)k\in[0,1]$ a.i. $0=f(0)\cdot x\Big|_0^k+f(1)\cdot x\Big|_k^1\Rightarrow 0=f(0)\cdot k+f(1)\cdot(1-k)$

$\Rightarrow(\exists)k\in[0,1]$ a.i. $k\cdot f(0)=(k-1)\cdot f(1)$.

EXERCITIUL 9.

Sa se arate ca daca $f:[a,b]\to R$ este o functie continua ,

atunci $(\exists)c\in[a,b]$ a.i. $\int_a^b x\cdot f(x)dx = a\cdot\int_a^c f(x)dx + b\cdot\int_c^b f(x)dx$.

Solutie

f continua $[a,b]\xrightarrow{Th.existenta.primitivelor} F:[a,b]\to R, F(t)=\int_a^t f(x)dx$,

F primitiva pt.f ,si $F(a)=0 \Rightarrow F$ derivabila si $F'(x)=f(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$

$$\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_a^b x\cdot F'(x)dx = x\cdot F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dx=$$

$$= b\cdot F(b)-a\cdot F(a)-\int_a^b F(x)dx = b\cdot F(b)-\int_a^b F(x)dx = b\cdot\int_a^b f(x)dx-\int_a^b F(x)dx.$$

F derivab $\Rightarrow F$ cont. $\xrightarrow{Th.I.medie}$ $(\exists)c\in[a,b]$ a.i. $\int_a^b F(x)dx = F(c)\cdot(b-a)$

$$\Rightarrow \int_a^b x\cdot f(x)dx = b\cdot\int_a^b f(x)dx-\int_a^b F(x)dx = b\cdot\int_a^b f(x)dx-(b-a)\cdot F(c)=$$

$$= b\cdot\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right)-(b-a)\cdot\int_a^c f(x)dx = a\cdot\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Deci $(\exists)c\in[a,b]$ a.i. $\int_a^b x\cdot f(x)dx = a\cdot\int_a^c f(x)dx+b\cdot\int_c^b f(x)dx$. ***

BIBLIOGRAFIE

1. Mircea Ganga : Teme si probleme de matematica , Editura Tehnica,Bucuresti,1991

2. Ion Chitescu ,Marius Radulescu ,Petrus Alexandrescu ,Sorin Radulescu :Analiza matematica.Clasa a XII-a,Editura Paralela 45 ,1998.

3. Virgiliu Schneider,Liliana Niculescu,Cristian Schneider,colaboratori: Matematica-Teme pregatitoare pentru olimpiada,Editura Valeriu,2002.

4. Mircea Ganga :Elemente de analiza matematica-pentru clasa a XII-a, Editura Mathpress,1995.