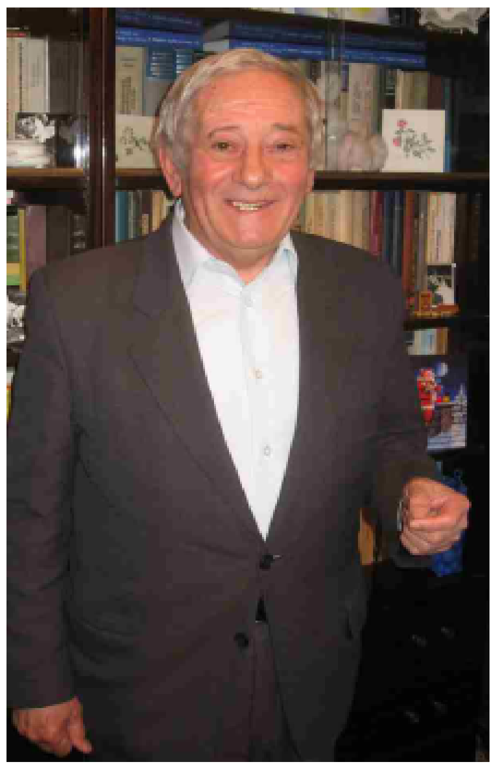
PROFESORUL D.M. BĂTINEŢU – GIURGIU -UN MATEMATICIAN NOTABIL[N.B.]-

Motto: "Boala cea mai gravă,
care macină societatea românească,
este lipsa caracterelor"
Nicolae Iorga

NECULAI STANCIU[1]

Abstract. We dedicated this article to ***D.M. Bătineţu – Giurgiu***.To determine whether any given subject deserves an entry, we uses the criterion of notability.Notability is not temporary.A reply to a question about how you got your expertise is: by studying the masters and not their pupils.
Keywords:biographies, neutral point of view, verifiability
MSC: 01A70



Acest articol este dedicat profesorului ***Dumitru M. Bătineţu – Giurgiu,*** cu ocazia împlinirii în anul 2011 a frumoasei vârste de 75 de ani și demonstrează multe afirmații, nedovedite din lipsa spațiului în [41].

[N.B.] Notabilitatea nu trebuie confundată cu notorietatea.
Notabil - vrednic de a fi luat în seamă, remarcabil, important, cu prestigiu (toate în sens pozitiv).
Notoriu - cunoscut de toată lumea, ştiut de toţi, renumit, celebru, cu faimă(nu neapărat în sens pozitiv).
[1] Profesor, Şcoala generală "George Emil Palade", Buzău

Ca în toate articolele aniversare am ţinut cont în primul rând de notabilitatea[2] subiectului, şi de caracterul[3] său remarcabil[4], pentru care acest subiect merită să i se dedice un articol separat.

Dacă scrierea unui articol autobiografic[5] este privită ca lipsă de modestie, de multe ori şi articolele biografice încalcă regulile de neutralitate, verificabilitate, opinii personale[6] şi criteriile de notabilitate.

Profesorul ***D.M. Bătineţu – Giurgiu*** s-a născut la 27 ianuarie 1936[7], în comuna Pietroşani, judeţul Vlaşca – ca prim fiu al lui *Marin* şi al *Andreianei*.

A fost asistent universitar titular (prin repartiţie guvernamentală) la Catedra de Matematică a Institutului Politehnic „Gh. Asachi" din Iaşi (1965-1968), cercetător ştiinţific (prin concurs) la Institutul de Cercetări Forestiere din Bucureşti (1968-1970), asistent universitar titular (prin concurs) la Catedra de Matematică-Fizică a Institutului Agronomic „Nicolae Bălcescu" din Bucureşti (1970-1972) apoi profesor titular(prin concurs) La Colegiul Naţional „MATEI BASARAB" şi la Colegiul Naţional „Ion Creangă" din Bucureşti.

De asemenea a fost redactor principal titular (prin concurs) la **GAZETA MATEMATICĂ** şi la revista Arhimede din Bucureşti.

Cu ocazia Centenarului **Gazetei Matematice** (1995) a făcut parte din Redacţia Centenarului **Gazetei Matematice**.

A făcut (face) parte din Comitetele de redacţie ale revistelor: **GAZETA MATEMATICĂ**, OCTOGON MATHEMATICAL MAGAZINE, RECREAȚII MATEMATICE din Iaşi, SINUS din Suceava, Creaţii matematice seria A şi seria B din Suceava, Revista de Matematică „Dimitrie Pompeiu" din Bucureşti, REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMIȘOARA, Revista Arhimede din Bucureşti, , Revista de Matematică şi Informatică din Constanţa, Revista Matematică din Valea Jiului , Revista Sfera Matematicii din Băileşti, Revista „ALPHA" din Craioava şi Erdélyi Matematikai Lapok din Braşov (în limba maghiară).Este membru de onoare a multora din revistele de mai sus şi mai nou al revistei de la Buzău, SCLIPIREA MINȚII.

Colaborează(a colaborat) la :Buletinul Ştiinţific al Universităţii „POLITEHNICA" din Timişoara, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „OVIDIUS" din Constanţa, Revista de Matematică din Craiova(CARDINAL), Revista de Matematică din Galaţi, Revista Matematică din Hunedoara, Foaie Matematică din Republica Moldova, Revista Matematică din Vâlcea, Educaţia Matematică a Universităţii „Lucian Blaga" din

---

[2] O persoană poate fi considerată notabilă dacă a făcut subiectul unor materiale publicate în surse de încredere, independente de persoana respectivă.

[3] Trăsăturile înrădăcinate în viaţa unui om, care determină reacţia şi acţiunile lui indiferent de circumstanţe

[4] S-a remarcat prin următoarele trăsături (în ordine alfabetică):ascultare, atenţie, autocontrol, blândeţe, bunătate, cinstire, compasiune, conştiinciozitate, creativitate, credinţă, cumpătare, curaj, determinare, discernământ, discreţie, disponibilitate, elocvenţă, entuziasm, fermitate, flexibilitate, generozitate, hărnicie, iertare, ingeniozitate, iniţiativă, înţelepciune, justiţie, loialitate, mărinimie, meticulozitate, mulţumire, onestitate, ordine, ospitalitate, punctualitate, prudenţă, răbdare, recunoştinţă, responsabilitate, rezistenţă, sensibilitate, siguranţă, sinceritate, smerenie, stimă, toleranţă, vigilenţă, virtute, voioşie.

[5] Bineînţeles că nu este interzisă scrierea articolelor autobiografice, dar, nu sunt recomandate.

[6] ***D.M. Bătineţu –Giurgiu*** este o paradigmă pentru orice profesor de matematică din preuniversitar care doreşte să se afirme pe tărâmul matematicii, şi va rămâne o prezenţă vie şi luminoasă în memoria celor pe care i-a educat şi cu care a colaborat .Am scris aceast articol ca „*semn al stimei mai multor generaţii*"(neutralitate+verificabilitate).

[7] La această dată (zi, lună şi an) s-a născut actorul *Florin Piersic* – o altă persoană notabilă

Sibiu, Lucrările seminarului de Creativitate Matematică a Universităţii de Nord din Baia-Mare, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii a Universităţii „Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca, Mathlap din Cluj-Napoca (în limba maghiară), revista POLYGON din SZEGED, Ungaria.

A publicat în reviste din ţară şi din străinătate un număr de peste 500 de articole şi note matematice, a propus în reviste de matematică sau la diverse concursuri, olimpiade matematice şi la barajele pentru alcătuirea echipelor olimpice internaţionale ale României peste 2500 de probleme.Are un număr mare de articole şi note matematice scrise în colaborare cu diverşi matematicieni printre care amintim pe *Maria Bătineţu-Giurgiu*[8] şi *Mihály Bencze*[9] (vezi de exemplu lucrările $[27]$ şi $[28]$) .A tipărit la diverse edituri peste 35 de culegeri de probleme de matematică.

A propus o problemă[10] în numele României la a XII-a Olimpiada Internaţională de Matematică, desfăşurată la Budapesta în 1970.

A participat la pregătirea loturilor naţionale olimpice ale României şi la pregătirea elevilor în diverse tabere naţionale de matematică.

Profesorul ***D.M. Bătineţu – Giurgiu***:

- Este considerat expert recunoscut în domeniul său [11](analiză matematică-şiruri);
- Este considerat personalitate importantă de către profesori independenţi din acelaşi domeniu (matematica)[12];
- A publicat o serie de lucrări academice importante[13] şi binecunoscute[14];

  O lucrare academică este importantă sau binecunoscută dacă, de exemplu, este baza unor manuale (cursuri) sau dacă este subiectul altor lucrări independente sau dacă este citată adesea în literatura de specialitate;
- Are o operă/capodoperă[15] considerată importantă şi binecunoscută;

---

[8] Prof.dr., la Academia Tehnică Militară, Bucureşti – care prin optimism şi tonus excelent a sprijinit activitatea soţului ei ***D.M. Bătineţu – Giurgiu***

[9] Redactor Şef, Revista „Octogon", Braşov – unul dintre cei mai prolifici şi mai premiaţi matematicieni (profesor la Colegiul Naţional Aprily Lajos – Braşov) români (de origine maghiară)

[10] Fie $a,b,n \in N^* - \{1\}$, unde a,b sunt bazele a două sisteme de numeraţie.Notând cu A_n respectiv B_n numărul $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$ scris în baza a respectiv în baza b , unde x_k , $k = \overline{0,n}$ sunt cifre în ambele baze de numeraţie şi unde x_n, $x_{n-1} \in N^*$. Notând cu A_{n-1} şi B_{n-1} numerele care se obţin prin suprimarea cifrei x_n , să se demonstreze că $a > b \Leftrightarrow A_{n-1} \cdot B_{n-1}$ (vezi adresa $[16]$)

[11] ***D.M. Bătineţu –Giurgiu*** s-a ocupat în numeroase articole (vezi $[5]$,…, $[15]$)de şirul $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$,al lui Lalescu (G.M. 6/1900, probl.579, pp.148) şi de extinderi ale acestuia, reuşind să-l transforme într-un şir care să rivalizeze prin frumuseţea sa cu şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ care defineşte numărul e.Legătura dintre aceste două şiruri este dată de relaţia: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

[12] vezi $[17]$, $[18]$, $[19]$, $[20]$, $[21]$, $[22]$, $[23]$, $[24]$, $[25]$, $[26]$, etc.

[13] vezi lucrările $[2]$, $[3]$ respectiv $[4]$.

[14] vezi şi articolele şi notele publicate – din bibliografia aferentă lucrărilor $[2]$ respectiv $[4]$.

[15] vezi lucrarea $[1]$.

- A enunţat un concept[16], o teorie sau o idee care prin noutatea şi importanţa sa face obiectul unor multiple lucrări independente şi semnificative, ele însele surse de încredere conform standardelor actuale;
- Este laureat al unui premiu[17] sau titlu important[18], sau a fost nominalizat de mai multe ori pentru asemenea premii sau titluri[19];
- Ocupă poziţia a treia în topul propunătorilor la **GAZETA MATEMATICĂ – seria B**[20].

O persoană este considerată notabilă dacă îndeplineşte cel puţin una din cele şapte condiţii de mai sus[21].

- ***D.M. Bătineţu – Giurgiu*** s-a mai ocupat şi de:
  - *şirul lui A.G. Ioachimescu* introducând noţiunea de *Constantă de tip Ioachimescu*(vezi $[32]$), şirurile de tip *Euler-Ioachimescu*, generalizări ale şirului lui *Ioachimescu*, *constante Ioachimescu*(vezi $[31],[34],[35],[36]$);
  - *şirul lui Ghermănescu* introducând conceptul de *şir Ghermănescu* şi de *constante Euler-Ghermănescu*(a se vedea $[37]$, $[38]$);
  - unele extinderi ale *şirurilor Lalescu* introducând conceptele de funcţii *Euler-Lalescu* şi de *funcţii Lalescu*(a se vedea $[30],[39]$).

D.M. Bătineţu – Giurgiu este un matematician notabil şi un om de mare caracter - model de educaţie durabil[22].

BIBLIOGRAFIE[23]:

---

[16] Şirul $(b_n)_{n\geq 2}, b_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}$ se numeşte şirul ***D.M. Bătineţu –Giurgiu*** (vezi G.M. 4/1989, probl. C:890, pp.139).

[17] A obţinut la faza finală (pe ţară) premiul I la Simpozionul de Creativitate şi Eficienţă în Învăţământ, organizat la Iaşi în 1989.A obţinut premiul I la Concursul de articole metodice organizat de **Gazeta Matematică seria A** în anul 2000.

[18] La centenarul **Gazetei Matematice** (1995) a fost distins cu diploma jubiliară "Centenar **Gazeta Matematică**" şi cu Medalia Jubiliară "Centenar **Gazeta Matematică**".În anul 2007 a primit din partea S.S.M.R „Diploma de Excelenţă a S.S.M.R" iar în anul 2010 a fost distins cu Medalia Jubiliară „Centenarul Societăţii de Ştiinţe Matematice din Romania"

[19] A fost premiat ca rezolvitor de probleme la **Gazeta Matematică** în anii 1954, 1955 şi 1956.

[20] Această informaţie este preluată din ediţia electronică a gazetei matematice, care, oferă serviciul „listă autori".Topul 100: Probleme şi articole publicate în Gazeta Matematică se găseşte şi pe internet la adresa $[29]$.

[21] Dacă niciuna din condiţii nu este îndeplinită, este posibil ca persoana să fie suficient de notabilă prin publicarea unor articole cu caracter notabil prin citarea surselor.

[22] Lumea şi societatea în care trăim, mai mult ca niciodată, suferă din lipsă de modele.Modelul în viaţă este o persoană care te inspiră, care îţi arată prin ceea ce face şi ce realizează că este un exemplu demn de urmat şi de la care trebuie să înveţi (vezi $[40]$). Promovarea valorilor (ştiinţifice şi morale) autentice şi a rolului acestora în dezvoltarea societăţii româneşti ar fi soluţia(vezi *motto*).

[23] Pentru detalii mai complete se poate studia şi bibliografia din $[2]$, respectiv $[4]$.

[1] **Bătineţu M.D., *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979**
[2] D.M. Bătineţu – Giurgiu, M. Bătineţu – Giurgiu, I. Bîrchi – Damian, A. Semenescu, *Analiză Matematică-Probleme pentru clasa a XI-a,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2003
[3] Bătineţu M.D., Maftei V.I., Stancu-Minasian M.I., *Exerciţii şi Probleme de Analiză Matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1981
[4] D.M. Bătineţu – Giurgiu, M. Bătineţu – Giurgiu, I. Bîrchi – Damian, A. Semenescu, *Analiză Matematică-Probleme pentru clasa a XII-a*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004
[5] Bătineţu-Giurgiu M.D., Şomodi Marius, *O metodă elementară de determinare a limitei şirului lui Traian Lalescu*, G.M. 3/1989, pp.81-82
[6] Bătineţu-Giurgiu M.D., *O altă metodă de determinare a limitei şirului lui Traian Lalescu,* G.M. 2/1990, pp. 37-41
[7] Bătineţu-Giurgiu M.D., *Asupra unei generalizări a şirului lui Traian Lalescu.Metode de abordare*, G.M. 8-9/1990, pp.219-224
[8] Bătineţu-Giurgiu M.D., Negoi Tănase, *O nouă metodă elementară de stabilire a convergenţei şirului lui Traian Lalescu*, G.M. 12/1993, pp. 52-54
[9]Bătineţu-Giurgiu M.D., *O identitate algebrică şi convergenţa şirului lui Traian Lalescu,* G.M. 12/1993, pp. 444-445
[10] Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şiruri Lalescu*, R.M.T. 1,2/1989, pp.33-36
[11] Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şirurile Lalescu şi funcţia lui Euler de speţa a doua.Funcţii Euler-Lalescu,* G.M., seria A, Nr. 1/1990, pp.21-26
[12]Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şiruri Wallis*, G.M., seria A, Nr. 1/2000, pp. 53-64
[13]Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu A., *Problema lui Lalescu şi Reciproca Teoremei Cesaro-Stolz,* Lucrările Seminarului Didactica Matematicii, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj- Napoca, Vol. 15/2000, pp.3-8
[14] Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu A., *Unele extinderi privind Funcţiile şi Şirurile Lalescu, L*ucrările Seminarului Didactica Matematicii, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Vol. 15/2000, pp.9-14
[15] Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu A., *O sută de ani de studiere a şirului lui Traian Lalescu,* Lucrările Seminarului Didactica Matematicii, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Vol. 16/2000, pp.33-40
[16] http://www.imo-official.org/problems.aspx
[17] http://pefmath2.etf.bg.ac.yu/files/118/868.pdf
[18] http://math.colstate.edu/ejionascu/papers/twinproblems.pdf
[19]http://www.career.mexmat.ru/books/24962
[20]http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero25/BibliografiaOlimpiadas1.pdf
[21]http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=940
[22]http://www.tehetsegpont.hu/dokumentumok/eml2007majus.pdf
[23]http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/final-carte.pdf
[24] http://www.gazetamatematica.net/?q=node/1519

[25]http://www.mateinfo.ro/revista-mateinforo/cat_view/59-revista-mateinforo-issn-2065-6432-/113-revista-mateinforo-decembrie-2009

[26]http://www.lib.vsu.ru/resurses/rj/math/2007/13_02_2007.pdf

[27]Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., Bencze Mihály, *The Generalization of the Lalescu-type sequences*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 10, Nr. 2, October 2002, pp. 724-729

[28] Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., Bencze Mihály, *Şiruri t-derivabile* (În memoria profesorului *Ilie Iliescu*), G.M. –seria B , nr.1/2007.

[29] http://mvlada.blogspot.com/2010/01/top-50-gazeta-matematica.html

[30] Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şirurile Lalescu şi Funcţia lui Euler de speţa a doua.Funcţii Euler-Lalescu*, G.M.-seria A, nr.1/1990, pag. 21-26;

[31] Bătineţu-Giurgiu M.D., Bătineţu-Giurgiu Maria, *Şiruri de tip Ioachimescu,* G.M.-seria A, nr.1/1998, pag. 35-40;

[32] Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *În legătură cu şirurile constantei lui Euler şi A.G. Ioachimescu,* G.M. –seria B , nr.9/1995, pag.430-441.

[33] Bătineţu-Giurgiu M.D, *Asupra şirului lui Wallis,* RMT Anul IV(seria a 4-a) nr.2/1999, pag. 3-5;

[34] Bătineţu-Giurgiu M.D, Bencze Mihály, *About a generalization of the A.G. Ioachimescu sequences,* Octogon Mathematical Magazine, vol.9, nr. 2/2001, pag. 892-894;

[35] Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *Perechi de şiruri Euler-Ioachimescu,* Didactica Matematicii, Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca, vol. 14/1998, pag. 45-50;

[36] Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şiruri de tipEuler-Ioachimescu,* Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, Universitatea de Nord din Baia Mare, vol.7(1997-1998), pag. 13-20.

[37]Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., Bencze Mihály, *Şirul lui Ghermănescu la 70 de ani de la apariţie,* G.M.-seria A, nr.1/2006, pag. 20-33;

[38]Bătineţu-Giurgiu M.D., *Asupra unor probleme ale lui Mihail Ghermănescu.Constante Euler-Ghermănescu,* G.M.-seria B, nr.10/1993, pag. 341-343;

[39] Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin, *New Clases of Lalescu Functions,* Buletinul Ştiinţific al al Universităţii „POLITEHNICA" din Timişoara, TOM 44(58), 2/1999, pag. 51-38;

[40] Neculai Stanciu, *D.M. Bătineţu-Giurgiu.Model de Educaţie durabil.,* Revista Electronică MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432, mai 2011;

[41] Neculai Stanciu, Profesorul D.M. Bătinețu-Giurgiu la 75 de ani, Gazeta Matematică seria B, nr. 7-8-9/2011, pag. 337-338.

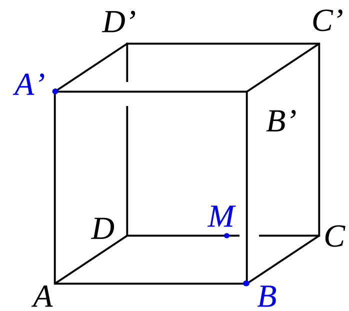
APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE** ÎN **GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (4)**

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

Aplicaţie (secţiuni în cub)

Se dă un cub *ABCDA'B'C'D'* de muchie $AB = a$ şi *M* un punct variabil situat pe semidreapta $[DC$.

Se cere să se studieze variaţia ariei secţiunii determinate în cub de punctele fixe *A'*, *B* şi punctul mobil *M*.

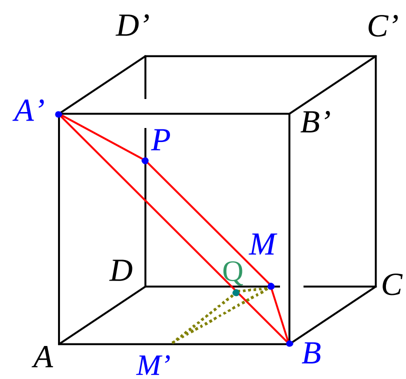


Soluţie: Notăm $DM = x$, $x \in R_+$. Distingem trei cazuri:

I. $x \in [0, a]$;
II. $x \in [a, 2a]$;
III. $x \in [2a, +\infty)$.

În cele ce urmează, se va studia în detaliu primul caz, pentru cazurile II şi III prezentând doar expresiile algebrice ce se pot obţine prin demonstraţii asemănătoare.

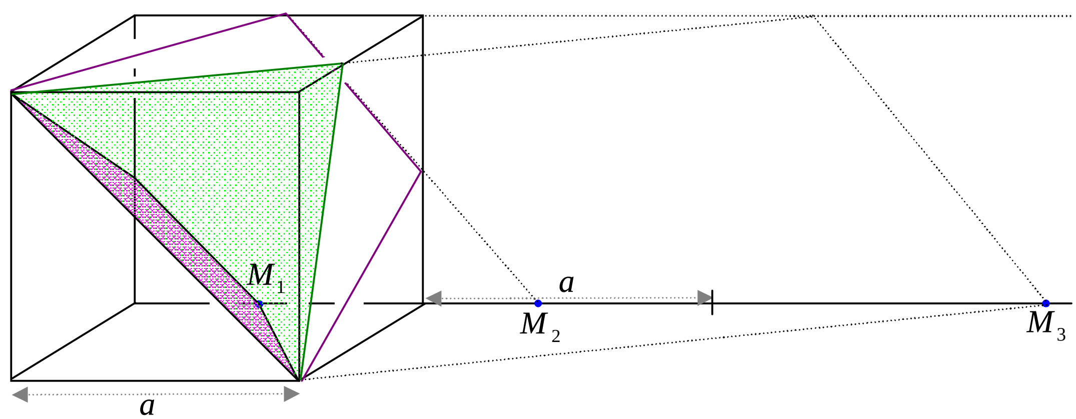
Cazul I. $x \in [0, a]$. Fie $P \in (DD')$ astfel încât $MP \parallel A'B \Rightarrow A', B, M, P$ coplanare iar $A'BMP$ este trapez isoscel. Suprafaţa trapezoidală $A'BMP$ este secţiunea în cub obţinută.Din $DM = x$ şi ΔPDM dreptunghic isoscel rezultă $PM = x\sqrt{2}$. Fie $M' \in AB$ astfel încât $MM' \in (ABB')$; construim $M'Q \perp A'B$ din ultimele două propoziţii rezultând (conf. $T.3.\perp$): $MQ \perp A'B$, şi de aici deducem că MQ este înalţime în trapezul $A'BMP$. Apoi, $\Delta BM'Q$ fiind dreptunghic în Q şi $m(M'\hat{B}Q) = 45^\circ$ $\Rightarrow M'Q = \frac{M'B}{\sqrt{2}} = \frac{(x-a)}{\sqrt{2}}$. În $\Delta MQM'$ avem: $MM' = a$ şi $M'Q = \frac{(x-a)}{\sqrt{2}}$; aplicând



teorema lui Pitagora obţinem: $MQ = \sqrt{a^2 + \frac{(x-a)^2}{2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2ax + 3a^2}}{\sqrt{2}}$

Cunoscând pentru trapezul $A'BMP$ dimensiunile $A'B$, PM şi MQ putem calcula aria $\mathcal{A}_{A'BMP} = \dfrac{(a+x)\sqrt{x^2-2ax+3a^2}}{2}$. Se poate construi funcţia:

$$f_1 : [0, a] \to R, \quad f(x) = \frac{(a+x)\sqrt{x^2-2ax+3a^2}}{2}$$



În figura de mai sus se pun în evidenţă secţiunile în cub obţinute în cele trei cazuri. Construim în continuare o funcţie ce va caracteriza variaţia ariilor secţiunilor obţinute pentru orice x număr real pozitiv.

$$f_1 : [0, +\infty) \to R, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+x)\sqrt{x^2-2ax+3a^2}}{2}, & x \in [0, a) \\ \dfrac{(3a-x)\sqrt{x^2-2ax+3a^2}}{2}, & x \in [a, 2a] \\ \dfrac{a^2\sqrt{x^2-2ax+3a^2}}{2(x-a)}, & x \in (2a, +\infty) \end{cases} \qquad a > 0$$

Fără a ne îndepărta de esenţa studiului propus, se va cerceta în continuare variaţia acestei funcţii pentru $a = 1$. Aceasta va înlesni calculele pentru întocmirea tabelului de variaţie precum şi trasarea cât mai riguroasă a graficului. Aşadar, în cazul particular considerat, obţinem funcţia:

$$f_1 : [0,+\infty) \to R, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}}{2}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{(3-x)\sqrt{x^2-2x+3}}{2}, & x \in [1,2] \\ \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2(x-1)}, & x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

Se constată uşor că funcţia pozitivă şi continuă pe $[0,+\infty)$.

Deasemenea $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ este asimptotă orizontală. Un studiu mai atent se va acorda derivatei I şi derivatei a-II-a a funcţiei pe cele trei intervale:

1. $x \in [0,1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2-2x+3}} > 0, \forall x \in [0,1)$; deasemenea $f'(x) = 0$ nu are soluţie şi $f'(0) = \sqrt{3}/3$ iar $\lim\limits_{x\uparrow 1} f'(x) = \sqrt{2}/2$. Derivata a-II-a este dată de

$$f''(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 2}{(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+3}}.$$

Din $\left.\begin{array}{l} f''(0) = -2/(3\sqrt{3}) < 0 \\ \lim\limits_{x\uparrow 1} f''(x) = 3/(2\sqrt{2}) > 0 \\ f''\ continua\ pe\ [0,1) \end{array}\right| \Rightarrow \exists i_1 \in R$ astfel încât $f''(i_1) = 0$ şi deci $(i_1, f(i_1))$ este

un punct de inflexiune pentru graficul funcţiei.

2. $x \in [1,2] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x^2+3x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}} < 0, \forall x \in [1,2]$; $f'(1) = -\sqrt{2}/2$ şi $f'(2) = -\sqrt{3}/3$. Derivata a –II-a este dată de :

$$f''(x) = \frac{-x^3+3x^2-6x+6}{(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$\text{Din}\quad \left.\begin{array}{l} f''(1) = \sqrt{2}/2 > 0 \\ f''(2) = -2/3\sqrt{3} < 0 \\ f'' \textit{ continua pe } [1,2] \end{array}\right| \Rightarrow \exists i_2 \in (1,2) \text{ astfel încât } f''(i_2) = 0 \text{ şi deci } (i_2, f(i_2))$$

este un punct de inflexiune pentru graficul funcţiei.

3. $x \in (2,+\infty) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}} < 0, \ \forall x \in (2,+\infty)$; deasemenea $\lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x) = -\sqrt{3}/3$. Derivata a-II-a este dată de :

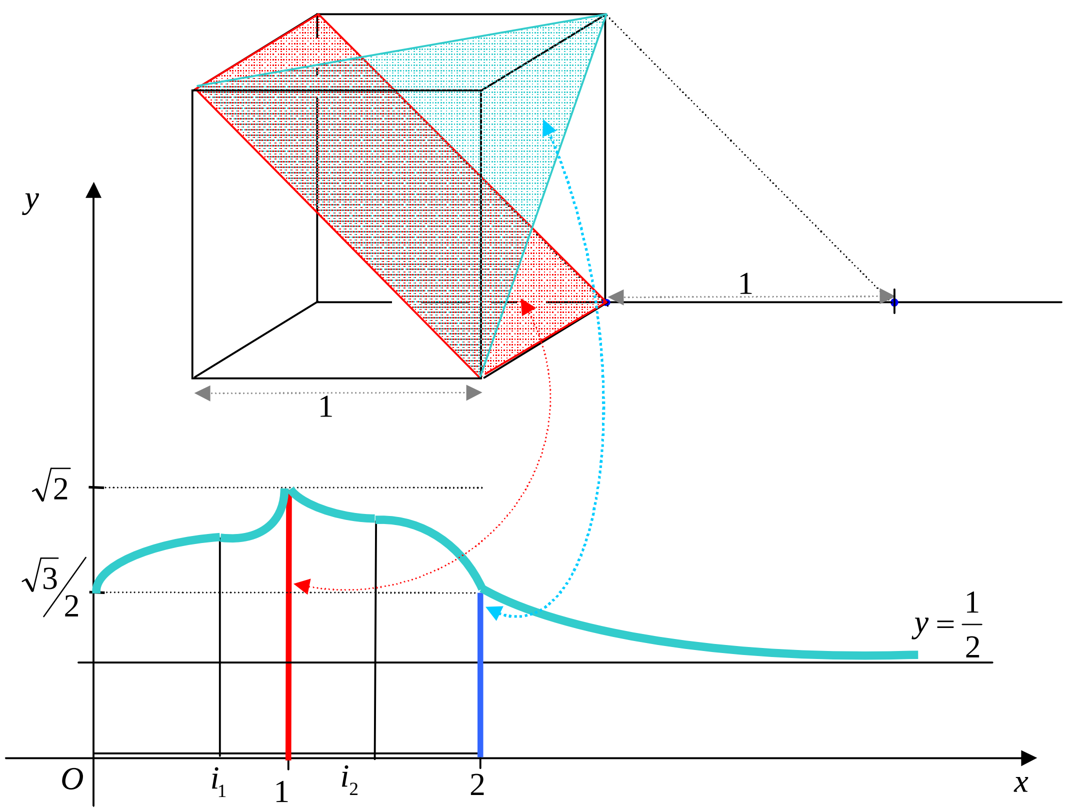
$$f''(x) = \frac{(x-1)(3x^2-6x+7)}{(x-1)^4(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+3}} > 0$$

În continuare se prezintă tabloul de variaţie al funcţiei urmat de graficul acesteia

Tabloul de variaţie:

x	0	i_1		1		i_2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + +$	$+ + +$	$+ + +$	$\sqrt{2}/2 \mid -\sqrt{2}/2$	$- - - - -$			$-\sqrt{3}/3$	$- - - - -$	
$f''(x)$	$- - -$	0	$+ + + + +$	$\mid$	$+ + + +$	0	$- - -$	$\mid$	$+ + +$	
$f(x)$	$\sqrt{3}/2$ $\nearrow$	$f(i_1)$	$\nearrow \nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$f(i_2)$	$\searrow\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow\searrow\searrow$	$1/2$

Graficul şi conexiunile aferente:



Şiruri convergente – Aspecte metodice

1. Studiul convergenţei şirurilor constituie un prim moment de separare între algebră şi analiză şi el face obiectul unuia dintre capitolele importante ale analizei matematice, necesar pentru fundamentarea noţiunilor de limită a unei funcţii, derivată, integrală; adică pentru fundamentul unor concepte de bază, pentru întreaga cunoaştere ştiinţifică. În acelaşi timp studiul şirurilor infinite permite răspunsul corect la o multitudine de probleme de algebră şi geometrie; de exemplu, progresiile geometrice, calculul cu fracţii zecimale infinite, lungimea cercului, aria cercului, volumul cilindrului, etc. Trebuie spus că în predarea analizei matematice în liceu şirurile nu sunt considerate un scop în sine, ci sunt un instrument de lucru. Înţelegerea noţiunii de limită este o piatră de încercare pentru elev şi în mod obiectiv el întâmpină mari dificultăţi. Geneza acestei noţiuni se află în studiul dinamicii obiectelor care ocupă diverse poziţii în timp. Au fost necesare eforturi mari pentru găsirea limbajului necesar pentru elaborarea modelului matematic al limitelor şirurilor. Oricum ar fi prezentate nu se poate evita abordarea infinitului matematic prin utilizarea unor inegalităţi care sunt îndeplinite pentru valori ale unor numere naturale începând de la un anumit rang, care la rândul lui nu este fixat. Aşa cum am mai spus şirurile nu constituie un scop în sine şi principalul lor rost este acela de a oferi un instrument util în practică înlesnind înţelegerea conceptului fundamental de limită a unei funcţii.

Adoptăm următoarea definiţie generală: un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale are limită dacă există $a \in \overline{R}$ astfel încât pentru orice vecinătate V a lui a să existe un rang N natural cu proprietatea că oricare ar fi $n \geq N$, să rezulte $a_n \in V$.

Un şir se numeşte convergent dacă are limită şi aceasta este finită.
Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numesc şiruri divergente.

Teorema privind convergenţa şirurilor prin utilizarea unor şiruri – tip care converg către zero sau $\infty, -\infty$ şi corolarele sunt fundamentale şi trebuie ilustrate prin exemple. Într-o primă luare de contact a elevilor cu fenomenul de convergenţă aceste rezultate, ca şi fenomene asupra convergenţei şirurilor monotone şi mărginite, pot fi la început luate fără demonstraţie, urmând ca ele să fie demonstrate ulterior, după o familiarizare a elevilor cu analiza şirurilor. Problema infinitului, a limitei unui şir, se va lămuri pentru elevi când vor face operaţii cu şiruri care au limită şi profesorul va veni cu contraexemple pentru cazurile de excepţie: $0\cdot\infty; \frac{0}{0}; \pm\frac{\infty}{\infty}; 1^{\infty}; 0^0; \infty^0$. La sfârşitul capitolului *Limite de funcţii* profesorul poate să revină la calcularea limitelor de şiruri cu câteva exemple.

Vom prezenta cele relatate prin câteva exemple:

1. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ cu $a_n > 0, b_n > 0, (\forall) n \in \mathbf{N}$. Ştiind că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{a_n}\right), (\forall) n \in \mathbf{N}$, să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

<u>Soluţie</u>: Din ipoteză şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este pozitiv şi descrescător, deci este mărginit. Atunci, conform teoremei lui Weierstras (orice şir monoton şi mărginit este convergent), deci $(b_n)_{n\geq 0}$ este convergent, adică $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Să arătăm că şi şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Pentru a arăta monotonia vom folosi şi inegalitatea mediilor $m_a \geq m_g$.

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{b_n}{a_n}}{2}\ge\sqrt{a_n\cdot\frac{b_n}{a_n}}=\sqrt{b_n}$$

$a_{n+1}\ge\sqrt{b_n}\ge\sqrt{b_{n+1}}$, ($(b_n)_{n\ge0}$ este descrescător), deci $a_n^2\ge b_n,(\forall)n\ge1$.

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_n-a_n^2}{2a_n}\le0,(\forall)n\ge1$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\ge0}$ este descrescător și fiind pozitiv, este și mărginit, deci este convergent, adică $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

Aplicând limita în relația de recurență, obținem:

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right)\Leftrightarrow a=\frac{a^2+b}{2a}\Leftrightarrow 2a^2=a^2+b\Leftrightarrow a^2=b\Leftrightarrow a=\sqrt{b}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

Rezută că șirurile $(a_n)_{n\ge0}$ și $(b_n)_{n\ge0}$ sunt convergente.

2. Apelând la proprietatea „Orice șir monoton are o limită, finită sau infinită", să studiem convergența următoarelor șiruri:

a) Fie șirul $(a_n)_{n\ge0}$ definit prin $a_0=1$ și relația de recurență $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},(\forall)n\ge0$.

b) Fie șirul $(x_n)_{n\ge1}$, cu $x_1>0$, definit prin relația de recurență $x_n=x_{n-1}^2-x_{n-1}+1$, $(\forall)n\ge2$.

__Soluție__: a) Din relația de recurență rezultă $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{a_n},(\forall)n\ge0$. Dar șirul $(a_n)_{n\ge0}$ este strict pozitiv, atunci $a_{n+1}-a_n>0$, deci șirul este strict crescător, adică are limita finită sau infinită.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (finită), rezultă, din relația de recurență, $a=a+\dfrac{1}{a}\Rightarrow\dfrac{1}{a}=0\Rightarrow a=+\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, adică șirul $(a_n)_{n\ge0}$ este divergent.

b) Din relația de recurență rezultă $x_n-x_{n-1}=x_{n-1}^2-2x_{n-1}+1=(x_{n-1}-1)^2\ge0\Rightarrow$ $(x_n)_{n\ge1}$ aste monoton crescător. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, atunci relația de recurență devine $l=l^2-l+1\Rightarrow(l-1)^2=0\Rightarrow l=1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, adică șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent.

3. Sunt unele situații în care calculăm limita șirului și dacă aceasta este finită, atunci șirul este convergent.

În exemplul următor vom folosi criteriul majorării și lema cleștelui.

Pentru $n\in\mathbf{N}$, $n\ge3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=x^n-nx+1$.

a) Să se studieze monotonia funcției f_n pe intervalul $[0,\infty)$.

b) Să se arate că ecuația $f_n(x)=0, x>0$ are exact două rădăcini reale $a_n\in(0,1)$ și $b_n\in(1,2)$.

c) Cercetați dacă șirurile $(a_n)_{n\ge0}$ și $(b_n)_{n\ge0}$ sunt convergente.

__Soluție__: Funcția f_n este funcție continuă.

$f_n'(x)=nx^{n-1}-n$

$f_n'(x)=0\Leftrightarrow x^{n-1}-1=0\Rightarrow x=1$

$f_n(0)=1>0$ și $f_n(1)=2-n<0$, deoarece pentru $n\ge 3$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\infty$.
Din tabelul de următor reies punctele a) și b).

x	0 1 ∞
$f_n'(x)$	-1 - - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + +
$f_n(x)$	1 $2-n$ ∞

a) Pentru $x\in(0,1)$, $f_n'(x)<0$ funcția f_n este strict descrescătoare pe $(0,1)$.
Pentru $x\in[1,\infty)$, $f_n'(x)>0$ funcția f_n este strict crescătoare pe $[1,\infty)$.
b) Din $f_n(0)=1>0$ și $f_n(1)=2-n<0,(\forall)n\ge 3,\Rightarrow f_n(0)\cdot f_n(1)=2-n<0$, și funcția f_n strict descrescătoare pe $(0,1)$, rezultă că există o singură rădăcină $a_n\in(0,1)$ astfel încât $f_n(a_n)=0$.
Din $f_n(1)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=(2-n)\cdot\infty=-\infty<0$ și funcția f_n strict crescătoare pe $[1,\infty)$, rezultă că există o singură rădăcină $b_n\in[1,\infty)$ astfel încât $f_n(b_n)=0$.
Restrângem intervalele unde se află cele două rădăcini.
Calculăm $f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)^2-n\cdot\frac{2}{n}+1=\left(\frac{2}{n}\right)^2-1<0$ deoarece $n\ge 3$ și

$$f_n(2)=2^n-2n+1=2\left(2^{n-1}-n\right)+1>0,(\forall)n\ge 3.$$

Obținem $f_n(1)<f_n\left(\frac{2}{n}\right)<f_n(a_n)<f_n(0)\Rightarrow a_n\in\left(0,\frac{2}{n}\right)$, respectiv

$$f_n(1)<f_n(b_n)<f_n(2)\Rightarrow b_n\in(1,2)$$

c) Din $0<a_n<\frac{2}{n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0 \overset{conform\ criteriului\ majorarii}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Deci șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este convergent.
Din b_n rădăcină a ecuației, $b_n^n-n\cdot b_n+1=0\Leftrightarrow b_n^n=n\cdot b_n-1$. Logaritmăm egalitatea $\ln b_n^n=\ln(n\cdot b_n-1)\Leftrightarrow n\ln b_n=\ln(n\cdot b_n-1)$.
Dar $1<b_n<2|\cdot n\Leftrightarrow n<n\cdot b_n<2n|-1\Leftrightarrow n-1<n\cdot b_n-1<2n-1,(\forall)n\ge 3$.
Prin logaritmare obținem $\ln(n-1)<\ln(n\cdot b_n-1)<\ln(2n-1)$.
Deoarece $\ln(n\cdot b_n-1)=n\ln b_n\Rightarrow\ln(n-1)<n\ln b_n<\ln(2n-1)|:n$, adică $\frac{\ln(n-1)}{n}<\ln b_n<\frac{\ln(2n-1)}{n}$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n-1)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n-1)}{n}=0 \overset{conform\ criteriului\ clestelui}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\ln b_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$, adică șirul $(b_n)_{n\ge 0}$ are limită finită, deci este convergent.

4. Să se calculeze limita șirului $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cos^2\frac{k}{n}$.

__Soluție__: Considerăm $f(x)=e^x\cos^2 x$ și intervalul $[0,1]$ cu diviziunea $x_k=\frac{k}{n}, k=0,1,2,\ldots n$.

$$\int_0^1 e^x\cos^2 x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cos^2\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cos^2\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty} a_n,$$

deoarece $x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$.

$\int e^x \cos^2 x dx = \int e^x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int e^x dx + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx$, (1)

$\int e^x \cos 2x dx = \int (e^x)' \cos 2x dx = e^x \cos 2x - \int e^x (-2\sin 2x) dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx =$

$= e^x \cos 2x + 2\int (e^x)' \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 2\int e^x (2\cos 2x) dx = e^x \cos 2x +$

$+ 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx \Rightarrow 5\int e^x \cos 2x dx = e^x (\cos 2x + \sin 2x) \Rightarrow$

$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + \sin 2x) + C$. Înlocuind în relația (1), obținem:

$\int e^x \cos^2 x dx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10}(\cos 2x + \sin 2x) + C = \frac{e^x}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2x + \sin 2x)\right] + C$.

Atunci

$$\int_0^1 e^x \cos^2 x dx = \frac{e^x}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2x + \sin 2x)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{e}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2 + \sin 2)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 0 + \sin 0)\right] =$$

$$= \frac{e}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2 + \sin 2)\right] - \frac{6}{10} = \frac{e}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2 + \sin 2)\right] - \frac{3}{5}.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 e^x \cos^2 x dx = \frac{e}{2}\left[1 + \frac{1}{5}(\cos 2 + \sin 2)\right] - \frac{3}{5}$.

5. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență: $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $x_0 = a$, $0 \leq a \leq 1$.

a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

b) Să se calculeze limita: $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Să se calculeze limita: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2$.

Soluție: a) $x_1 = x_0 - x_0^2 = x_0(1 - x_0) \in [0,1]$.(Produsul a două numere subunitare este subunitar)

Presupunem că $x_n \in [0,1] \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$.

Din $0 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - x_n \leq 1$.

Deoarece x_n și $1 - x_n$ sunt subunitare, atunci $x_{n+1} \in [0,1]$. Deci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leq 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Din, $(x_n)_{n\geq 0}$ șir mărginit și strict descrescător, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

b) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $l = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci, din relația de recurență,

$l = l - l^2 \Rightarrow l^2 = 0 \Rightarrow l = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Calculăm $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (x_n - x_{n+1}) = x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + ... x_n - x_{n+1} = x_0 - x_{n+1}$, atunci

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to\infty} (x_0 - x_{n+1}) = x_0 - 0 = x_0$.

6. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

Soluție: Folosind relația din enunț

$(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < \dfrac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător și $0 < x_n \leq x_1$ atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

În inegalitatea $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < \dfrac{n}{n+1}$, dăm valori lui n și obținem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_2}{x_1} < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x_3}{x_2} < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x_4}{x_3} < \dfrac{3}{4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < \dfrac{n}{n+1} \end{array}\right\} \text{prin înmulțire, rezultă } \frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\frac{x_4}{x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_1} < \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow x_{n+1} < \dfrac{x_1}{n+1} \Rightarrow 0 < x_n < \dfrac{x_1}{n}$.Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

7. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}, I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Găsiți o formulă de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 0}$.

c) Studiați convergența șirului și calculați limita sa.

Soluție: a) $I_0 = \int_1^e (\ln x)^0 dx = \int_1^e dx = x\Big|_1^e = e - 1$.

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{x}dx = e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1}dx \Rightarrow I_n = e - nI_{n-1}; n\geq 1$

c) $I_n - I_{n-1} = \int_1^e (\ln x)^n dx - \int_1^e (\ln x)^{n-1}dx = \int_1^e (\ln x)^{n-1}(\ln x - 1)dx$.

Știm că, pentru orice funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ cu $f(x)\geq 0, (\forall)x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Atunci $(\ln x)^{n-1}(\ln x - 1)\leq 0, (\forall)x\in[1,e] \Rightarrow I_n - I_{n-1}\leq 0, (\forall)x\in[1,e] \Leftrightarrow I_n \leq I_{n-1} \Rightarrow$ șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător și $0\leq I_n\leq I_0 = e-1$, adică șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Din $(I_n)_{n\geq 0}$ șir monoton și mărginit, conform criteriului lui Weierstrass, șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = l \geq 0$.

Pentru calculul limitei folosim relația $I_n = e - nI_{n-1}; n\geq 1 \Leftrightarrow nI_{n-1} = e - I_n$.

Dacă $\lim_{n\to\infty} I_n = l > 0$, $\Rightarrow \infty \cdot l = e - l$ contradicție, deci $l = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Bibliografie:

1. Virgil Nicula, Analiză Matematică, Editura Adria-Pres, București, 1996
2. Marcel Țena, Marian Andronache, Dinu Șerbănescu, Matematică M_1, Manual pentru clasa a XI-a, Grup Editorial ART, București, 2008
3. Constantin Udriște, Ionel Țevy, Gheorghe Necșulescu, Ion Necșulescu, Ion Preda, Florea Puican, Matematică, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Fair Partners, București, 2001
4. Ștefan Mirică, Inocențiu Drăghicescu, Ilie Petre Iambor, Mihai Chiraleu, Matematică M_1, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Aramis, 2002
5. Ghid de pregătire pentru bacalaureat 2011, Matematică M_1, Editura Sigma, București, 2011

Lungana Viorica, profesor de matematică, gradul I, Colegiul Național „Alexandru Dimitrie Ghica", Alexandria, Județul Teleorman

viorica.lungana@yahoo.com / 0726773468