

**Soluții pentru patru probleme (J208, J209, S207, S209)
din Mathematical Reflections nr. 5 / 2011
altele decât cele din Mathematical Reflections nr. 6 / 2011**

Titu Zvonaru¹ și Neculai Stanciu²

J208. Let K be the symmedian point of triangle ABC and let R be its circumradius. Prove that

$$AK + BK + CK \leq 3R.$$

Proposed by Ivan Borsenco, Massachusetts Institute of Technology, USA

**Solution by: Titu Zvonaru, Comănești, Romania and Neculai Stanciu,
George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.**

We well-known that

$$AK = \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ (by Stewart theorem we obtain that } s_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} \cdot m_a \text{ and the by Van$$

Aubell theorem or Menelaus theorem we deduce that $AK = \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2}$), so we have to

prove that

$$2\sum bcm_a \leq 3R\sum a^2 \Leftrightarrow \left(\sum bcm_a\right)^2 \leq \frac{9R^2}{4}\left(\sum a^2\right)^2, \text{ and because}$$

$$\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2, \text{ and applying C-B-S we obtain that}$$

$$\left(\sum (bc)m_a\right)^2 \leq \left(\sum b^2c^2\right)\left(\sum m_a^2\right) = \frac{3}{4}\left(\sum b^2c^2\right)\left(\sum a^2\right), \text{ so is enough(sufficient) to prove that}$$

$$\frac{3}{4}\left(\sum b^2c^2\right)\left(\sum a^2\right) \leq \frac{9R^2}{4}\left(\sum a^2\right)^2 \Leftrightarrow 3\sum b^2c^2 \leq 9R^2\sum a^2.$$

But we known that $\sum a^2 \leq 9R^2$, and we have done if we prove that

$$3\sum b^2c^2 \leq \left(\sum a^2\right)\left(\sum a^2\right) \Leftrightarrow \sum b^2c^2 \leq \sum a^4, \text{ which is true.}$$

We have equality if and only if $\triangle ABC$ is equilateral.

¹ Comănești

² Șc. gen. "George Emil Palade", Buzău

J209. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{(b+c)^5}{a} + \frac{(c+a)^5}{b} + \frac{(a+b)^5}{c} \geq \frac{32}{9}(ab+bc+ca).$$

Proposed by Marius Stanean and Mircea Lascu, Zalau, Romania

Solution by Titu Zvonaru, Comănești, Romania and Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary school, Buzău, Romania.

By Cauchy-Buniacovski –Schwarz or Bergström's inequality (or Lema T_2 , or Titu Andreescu's inequality) we have

$$\frac{(b+c)^5}{a} + \frac{(c+a)^5}{b} + \frac{(a+b)^5}{c} = \frac{(b+c)^6}{a(b+c)} + \frac{(c+a)^6}{b(c+a)} + \frac{(a+b)^6}{c(a+b)} \geq \frac{[(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3]^2}{2(ab+bc+ca)}$$

so it is sufficient to prove that

$$\frac{[(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3]^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{32}{9}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 \geq \frac{8}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 3[(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3] \geq 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

We use $\sum = \sum_{cyclic}$ and we have successively that

$$3(2\sum a^3 + 3\sum a^2b + 3\sum ab^2) \geq 8(\sum a^2b + \sum ab^2 + 3abc)$$

$$\Leftrightarrow 6\sum a^3 + \sum a^2b + \sum ab^2 \geq 24abc,$$

which is true by AM-GM inequality ($\sum a^3 \geq 3abc$, $\sum a^2b \geq 3abc$, $\sum ab^2 \geq 3abc$).

We have equality if and only if $a = b = c = \frac{1}{3}$.

S207. Let a, b, c be distinct nonzero real numbers such that $ab + bc + ca = 3$ and $a + b + c \neq \frac{2}{abc}$. Prove that

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a(b-c)}{bc-1} \right) \cdot \left(\sum_{cyc} \frac{bc-1}{a(b-c)} \right)$$

is the square of an integer.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution by: Titu Zvonaru, Comănești, Romania and Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.

We denote by $bc-1=x, ca-1=y, ab-1=z$ and then we have $x+y+z=0$.

We use the identities

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \text{ and } \\ (x+y+z)(xy + yz + zx) = 3xyz + \sum x^2y + \sum xy^2$$

and we deduce that

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \text{ and } \sum x^2y + \sum xy^2 = -3xyz.$$

We have

$$\sum \frac{a(b-c)}{bc-1} = \frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} + \frac{y-x}{z} = \frac{\sum xy^2 - \sum x^2y}{xyz}$$

and because $(x-y)(y-z)(z-x) = (xy - y^2 - xz + yz)(z-x) = \sum xy^2 - \sum x^2y$ we obtain that

$$\sum \frac{a(b-c)}{bc-1} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}.$$

Then we calculate

$$\sum \frac{bc-1}{a(b-c)} = \frac{x}{z-y} + \frac{y}{x-z} + \frac{z}{y-x}, \text{ where we taking account that}$$

$$x(x-z)(y-x) + y(z-y)(y-x) + z(z-y)(x-z) = x^2y - x^3 - xyz + x^2z + y^2z - xyz - y^3 + \\ + xy^2 + xz^2 - z^3 - xyz + yz^2 = -\sum x^3 + \sum x^2y + \sum xy^2 - 3xyz = -9xyz, \text{ and we obtain that}$$

$$\sum \frac{bc-1}{a(b-c)} = \frac{x}{z-y} + \frac{y}{x-z} + \frac{z}{y-x} = \frac{-9xyz}{(z-y)(x-z)(y-x)}, \text{ and in finnaly we have}$$

$$\left(\sum \frac{a(b-c)}{bc-1} \right) \left(\sum \frac{bc-1}{a(b-c)} \right) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \cdot \frac{-9xyz}{(z-y)(x-z)(y-x)} = 9 = 3^2.$$

S209. Let a, b, c be the sidelengths, s the semiperimeter, r the inradius, and R the circumradius of a triangle ABC . Prove that

$$\frac{sr}{R} \left(1 + \frac{R-2r}{4R+r} \right) \leq \frac{(s-b)(s-c)}{a} + \frac{(s-c)(s-a)}{b} + \frac{(s-a)(s-b)}{c}.$$

Proposed by Darij Grinberg, Massachusetts Institute of Technology, and Cosmin Pohoata, Princeton University, USA

Solution by Titu Zvonaru, Comănești, Romania and Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.

We have $(s-a)(s-b)ab = ab[s^2 - s(a+b) + ab] = ab(sc + ab - s^2)$ and by

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr$$

we obtain that

$$\begin{aligned} \sum \frac{(s-a)(s-b)}{c} &= \frac{1}{abc} \sum (abcs + a^2b^2 - abs^2) = \\ &= \frac{1}{abc} \left[3abcs + (s^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 2abc(a+b+c) - s^2(s^2 + r^2 + 4Rr) \right] \\ &= \frac{1}{abc} (-abcs + s^4 + r^4 + 16R^2r^2 + 2s^2r^2 + 8Rrs^2 + 8Rr^3 - s^4 - r^2s^2 - 4Rrs^2) \\ &= \frac{1}{abc} (-4Rrs^2 + s^2r^2 + r^4 + 16R^2r^2 + 8Rr^3 + 4Rrs^2) \\ &= \frac{r^2}{abc} (s^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2) = \frac{r^2}{abc} [s^2 + (4R+r)^2] \end{aligned}$$

and the inequality to prove becomes

$$\begin{aligned} \frac{sr}{R} \left(1 + \frac{R-2r}{4R+r} \right) &\leq \frac{r}{4Rs} [s^2 + (4R+r)^2] \Leftrightarrow 4s^2 + 4s^2 \cdot \frac{R-2r}{4R+r} \leq s^2 + (4R+r)^2 \\ \Leftrightarrow s^2 \left(3 + 4 \cdot \frac{R-2r}{4R+r} \right) &\leq (4R+r)^2 \Leftrightarrow s^2(16R-5r) \leq (4R+r)^3. \end{aligned}$$

Because

$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ (see 5.8. from Geometric Inequalities, O. Bottema, Groningen, 1969) is sufficient to prove that

$$\begin{aligned} (4R^2 + 4Rr + 3r^2)(16R-5r) &\leq (4R+r)^3 \\ \Leftrightarrow 64R^3 + 64R^2r + 48Rr^2 - 20R^2r - 20Rr^2 - 15r^3 &\leq 64R^3 + 48R^2r + 12Rr^2 + r^3 \\ \Leftrightarrow 4R^2r - 16Rr^2 + 16r^3 &\geq 0 \Leftrightarrow 4r(R-2r)^2 \geq 0, \text{ which is true.} \end{aligned}$$

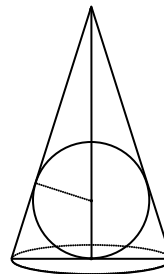
We have equality if and only if the triangle is equilateral.

APLICAȚII ALE ANALIZEI MATEMATICE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAȚIU (6)

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

Aplicație nr.1

Se dă o sferă de centru O și rază $r = 1$.
Să se determine conul circular drept de volum
minim în care se înscrie sfera dată.



SOLUȚIE: Secțiunea axială a conului circular drept este un triunghi isoscel pe care îl vom nota cu ABC . Fie și P punctul de tangență al sferei BC iar N punctul de tangență cu AC . Deasemenea vom nota $PC = r$ și $AP = x$. Calculăm în cele ce urmează volumul conului în funcție de x .

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice

ANO și APC obținem proporția:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{ON}{PC} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{x^2-2x} \quad (1).$$

Facem observația că problema are sens doar

pentru $x > 2$ și astfel (1) devine $r^2 = \frac{x}{x-2}$.

Volumul conului este dat de:

$$V_{con} = \frac{\pi r^2 x}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2} \text{ ceea ce permite}$$

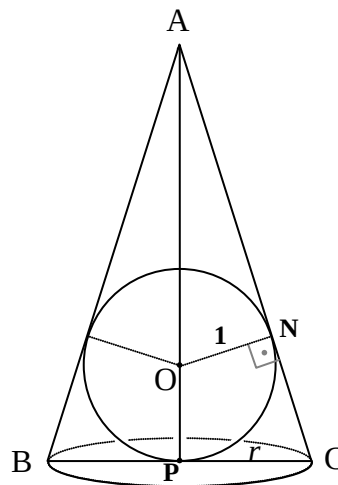
construcția funcției:

$$f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2}$$

Preliminarii în trasarea graficului: $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2$ este asimptotă verticală.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{3}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{3}x \right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}$ este asimptotă

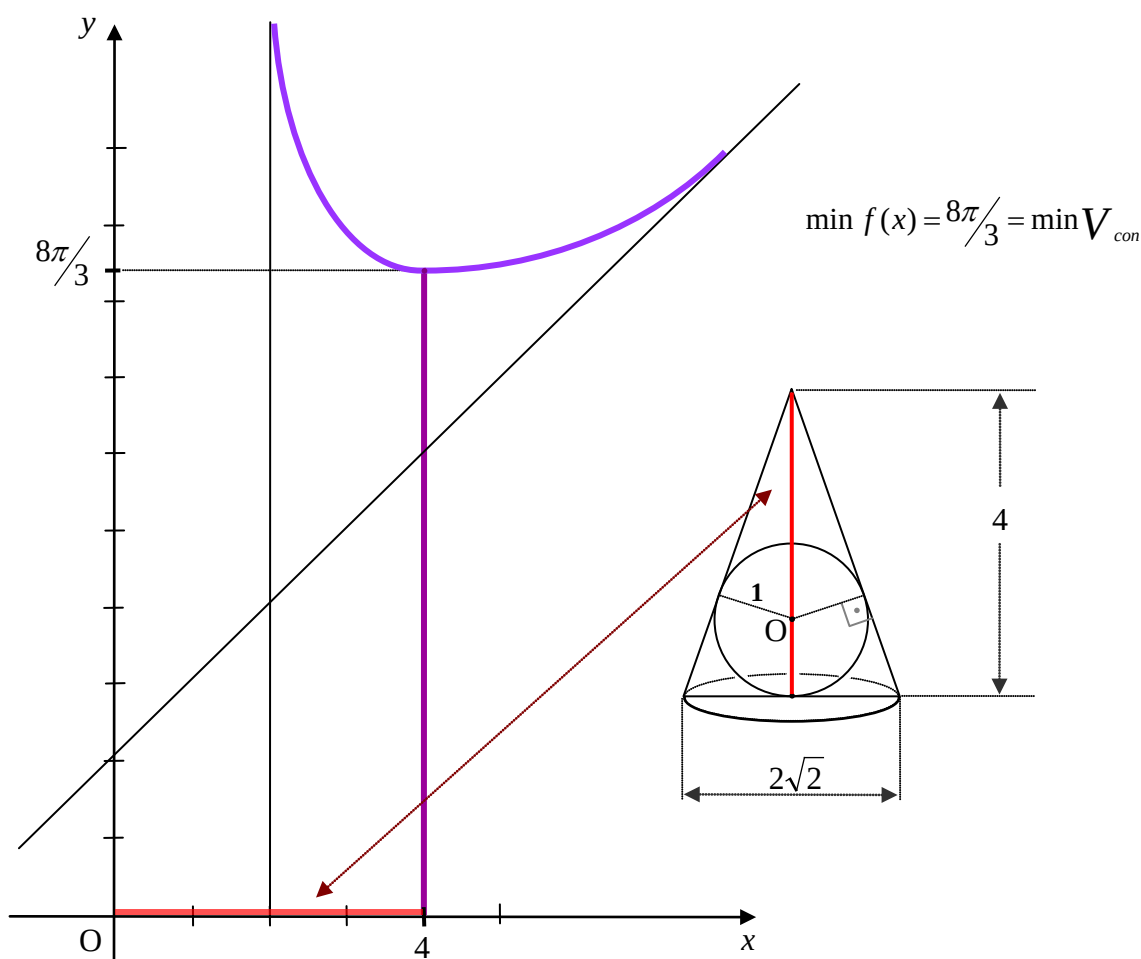
oblică. Funcția este continuă și derivabilă pe $(2, +\infty)$, expresia derivatei fiind dată de



$$f'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}. \text{ Ecuația } f'(x) = 0 \text{ are soluția } x_0 = 4 \text{ și } f(4) = \frac{8\pi}{3}.$$

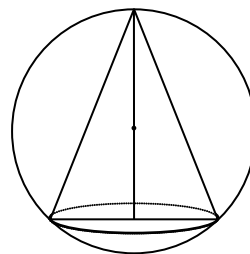
Tabelul de variație și graficul funcției pun în evidență variația funcției și deci variația volumului conului specificându-se și valoarea minimă.

x	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{8\pi}{3}$	$+\infty$



Aplicație nr.2

Se dă o sferă de centru O și rază $r = 1$.
Să se determine conul circular drept de volum
maxim înscris în sfera dată.



SOLUȚIE: Secțiunea axială a conului circular drept înscris în sferă este un triunghi isoscel pe care îl notăm cu $\triangle ABC$. Dacă P este centrul bazei conului notăm $PB = r$ și $AP = x$. Calculăm în continuare volumul conului în funcție de înălțimea x a acestuia:

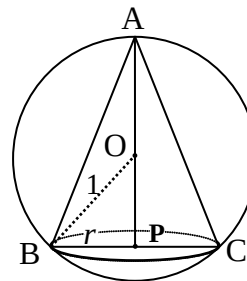
$V_{con} = \frac{\pi r^2 x}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot (-x^3 + 2x^2)$. Problema este posibilă doar pentru $0 \leq x \leq 2$. Putem astfel să construim funcția:

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (-x^3 + 2x^2)$$

Preliminarii în studiul funcției:

$f(0) = f(2) = 0$. Funcția este continuă și derivabilă pe $[0, 2]$

$$f'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot x(-3x + 4) \text{ iar } f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

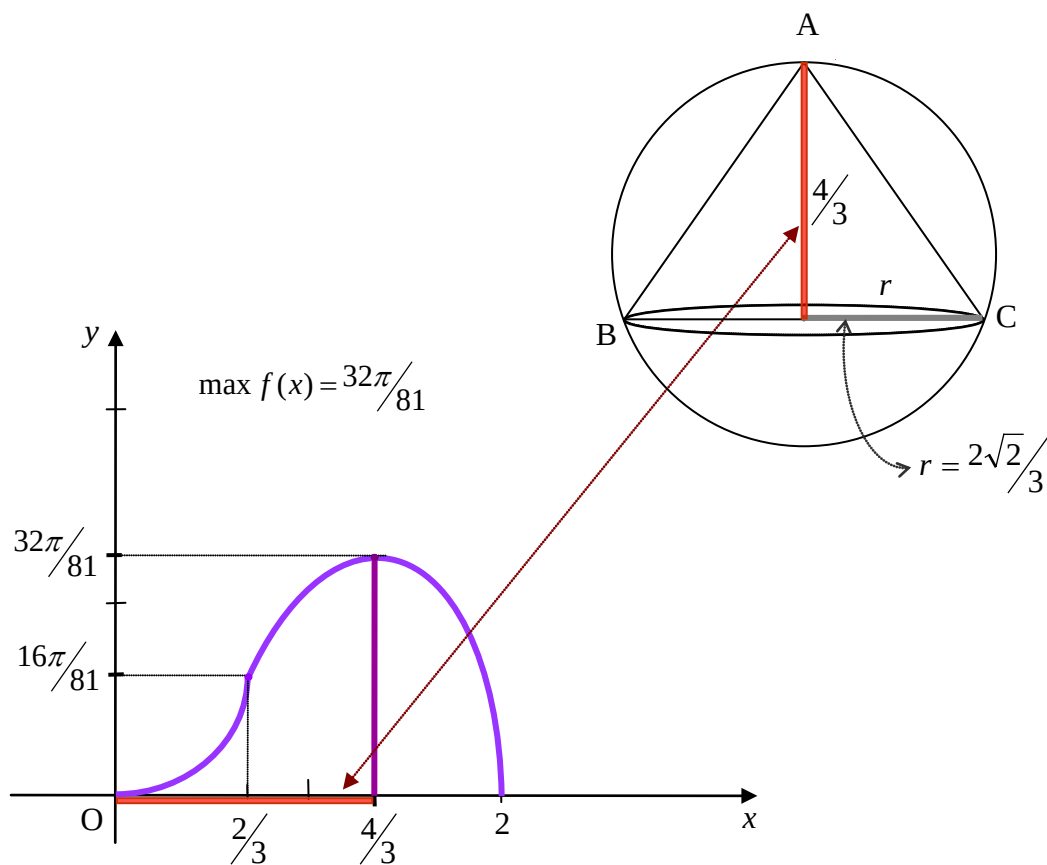


Tabelul de variație și graficul funcției pun în evidență variația funcției și deci variația volumului conului specificându-se și valoarea maximă.

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2				
$f'(x)$	+++++			0	-----			
$f''(x)$	+++++		0	-----				
$f(x)$	0			$\frac{16\pi}{81}$		$\frac{32\pi}{81}$		0

Graficul funcției - conexiuni

$$\max V_{con} = \frac{32\pi}{81}$$



*Profesor Camelia Grigoraș
Scoala “PETRU PONI” Iasi*

ARII și VOLUME ale POLIEDRELOR

Matematică - geometrie pentru clasa a VIII-a

Capitolul I

NOȚIUNI TEORETICE. FORMULE UZUALE

1. Introducere

Elevii devin familiarizați cu noțiunea de volum încă din clasa a V-a, (chiar a IV-a), mult înainte de a începe studiul teoretic al geometriei în plan și în spațiu. În clasa a VI-a și clasa a VII-a ne-am ocupat cu studiul mulțimilor de puncte dintr-un plan, adică al figurilor geometrice, pe care le-am concretizat în configurații geometrice (desene).

Lumea care ne înconjoară nu este o lume de figuri plane, este o deosebire între personajele “plate” ale unui film și cele “în spațiu” sau în relief de pe scena unui teatru, așa cum există deosebire între fotografie și obiectul fotografiat.

Intuitiv, obiectele din jurul nostru “ocupă loc” mai mare sau mai mic. Pentru a umple o piscină mică este necesară mai puțină apă decât pentru a umple o piscină mare; un dulap mai mare ocupă un spațiu mult mai mare dintr-o cameră decât un dulap mic. Exprimarea, firește, nu este făcută în limbaj matematic ci în limbaj obișnuit. Suntem conduși, în mod firesc, să comparăm, într-un fel oarecare, cât loc ocupă un obiect, cu cât loc ocupă alt obiect din spațiul înconjurător.

În geometria în spațiu ne vom ocupa, prin abstractizare, de mulțimi de puncte din lumea care “are relief”.

Apare ideea de a asocia fiecărui corp din spațiu un număr pozitiv pe care îl vom numi **volumul** său, număr care să ne permită să facem astfel de comparații.

Definiție: Numim **volumul** unui corp numărul pozitiv care arată de câte ori unitatea principală pentru volum “se cuprinde” în acesta.

Unitatea principală pentru volum este metrul cub, notat **1m³**.

Observație: Ca și aria unei suprafețe, volumul depinde de unitatea de măsură pentru lungime. Este important ca atunci când calculăm aria unei suprafețe sau volumul unui corp, să exprimăm lungimile în aceeași unitate de lungime.

Submultiplii și multiplii metrului	Submultiplii și multiplii metrului cub
---------------------------------------	---

$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$ $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm} = 0,01 \text{ m}$ $1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} = 0,01 \text{ dm}$ $= 0,001 \text{ m}$ $1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$ $1 \text{ hm} = 10 \text{ dam} = 100 \text{ m}$ $1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 10^2 \text{ dam} = 10^3 \text{ m}$	$1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ $1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ $1 \text{ mm}^3 = 10^{-3} \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ dm}^3$ $= 10^{-9} \text{ m}^3$ $1 \text{ dam}^3 = 10^3 \text{ m}^3$ $1 \text{ hm}^3 = 10^3 \text{ dam}^3 = 10^6 \text{ m}^3$ $1 \text{ km}^3 = 10^3 \text{ hm}^3 = 10^6 \text{ dam}^3 = 10^9 \text{ m}^3$
---	--

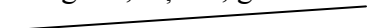
Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: **punctul, dreapta și planul.**

Punctul – în limbaj nematematic este “întepătura fină a acului pe foaia de hârtie”. Punctul nu are dimensiuni: lungime, lățime, grosime...

Desen  . A

Notății – litere mari de tipar A, B, C,.....

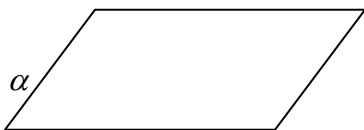
Dreapta - în limbaj nematematic este “fir de ață foarte bine întins care se întinde la nesfârșit”. Dreapta nu are dimensiuni: lungime, lățime, grosime...

Desen  d

Notății – litere mici de tipar a, b, c, d.....

Planul - deasemeni în limbaj nematematic, este “suprafața liniștită a unui lac întins la nesfârșit”. Planul nu are dimensiuni: lungime, lățime, grosime...

Desen



Notății – litere mici grecești: α , β , γ , δ ...

Axiomele(de incidență) ale geometriei în spațiu:

Ax 1. Două puncte distincte determină în mod unic o dreaptă; orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte. (axioma dreptei).

Ax 2. Trei puncte necoliniare și distincte determină în mod unic un plan; orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare și disincte.

Ax 3. Dacă două puncte A și B sunt incluse într-un plan, dreapta determinată de ele este inclusă în acel plan.

Ax 4. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

Consecință: Două plane distincte care au un punct comun au o dreaptă comună.

Ax 5. Există patru puncte nesituate în același plan (necoplanare).

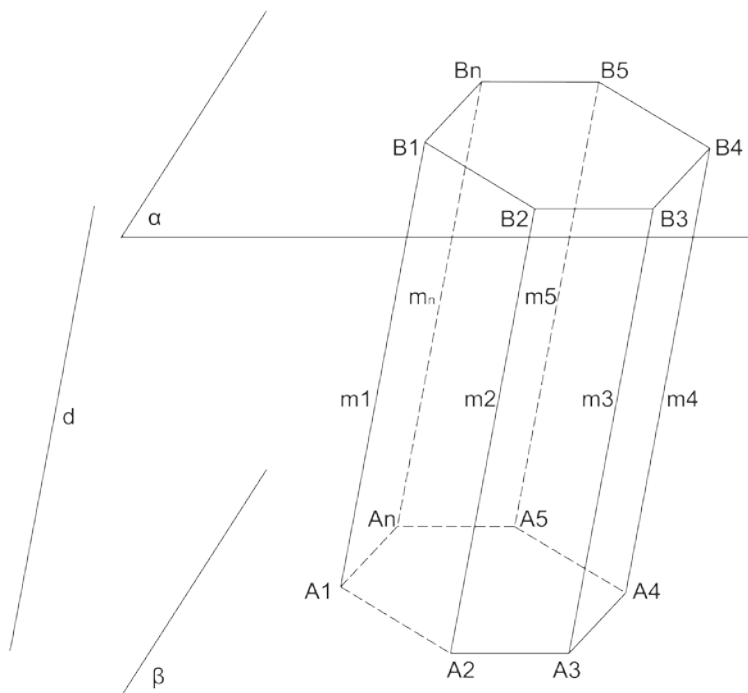
Obs: Această propoziție împreună cu **Axioma 2** ne „scoate” în spațiu.

Axioma paralelelor (Postulatul lui Euclid).

Printr-un punct exterior unei drepte date, există și este unică o dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Observație: Axiomele 1-5 sunt **axiomele de incidență**.

În fiecare plan din spațiu sunt adevărate toate propozițiile (axiomele și teoremele) valabile în geometria din plan. În plus, relațiile de congruență și asemănare operează și în plane diferite. Se mențin de asemenea și relațiile de ordine .



2. Prisma. Noțiuni generale

Unele elemente privitoare la prisme au fost prezentate intuitiv încă din clasa a V-a. Preocuparea pentru studiul acestor corpuri este generată de faptul că un număr mare de obiecte fabricate sau construite au formă de prisme, o serie de cristale componente ale rocilor au formă prismatică, în activitatea sa, omul vine în contact sau folosește corpuri care sunt prisme.

Fiind dată în spațiu o linie poligonală închisă plană cu n laturi $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$ și o dreaptă oarecare d , neparalelă cu planul liniei poligonale, se numește **suprafață prismatică** reuniunea tuturor punctelor paralelelor duse la d , care „se sprijină” pe linia poligonală $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$.

(fig. 1)

Linia $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$ se numește *linia directoare* a suprafeței prismatice, paralelele duse la d sunt *generatoarele* suprafeței prismatice, iar generatoarele care conțin vârfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc *muchiile* suprafeței prismatice. În figura 1, dreptele $m_1, m_2, m_3, \ldots$ sunt muchiile suprafeței prismatice.

Intersectând suprafața prismatică cu două plane paralele vom obține două poligoane care au laturile respectiv paralele și congruente, poligoane care reunite cu interioarele lor vor fi bazele prismei.

Definiție: Numim **prismă** reuniunea mulțimilor de puncte ale segmentelor $[MM']$, unde $MM' \parallel d$,

$M \in A_1A_2A_3 \dots A_n A_1 \cup \text{Int}_{A_1A_2A_3 \dots A_n}$,

$M' \in B_1B_2B_3 \dots B_n B_1 \cup \text{Int}_{B_1B_2B_3 \dots B_n}$.

Prisma se notează $A_1A_2A_3 \dots A_n B_1B_2B_3 \dots B_n = \cup [MM']$

Elemente ale prisme:

- *bazele prisme* – poligoanele $A_1A_2A_3 \dots A_n$, $B_1B_2B_3 \dots B_n$ care sunt congruente cu laturile respectiv paralele.

- *muchiile bazelor* - $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$, $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, ..., $[B_nB_1]$.

- *muchiile laterale* $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ..., $[A_nB_n]$ care sunt congruente;

- *fețele laterale* care sunt paralelograme $A_1A_2B_2B_1$,

- *suprafața laterală a prisme* – reuniunea fețelor laterale, suma ariilor fețelor laterale se notează A_l sau S_l și se numește **aria laterală**;

- *suprafața totală a prisme* – reuniunea tuturor fețelor, laterale și baze, suma ariilor tuturor fețelor se notează A_t sau S_t și se numește **aria totală**.

- definim *înălțimea* prisme ca proiectanta oricărui punct al unei baze pe cealaltă (ca segment), dar și ca lungimea acestei proiectante - distanța dintre planele bazelor, pe care o notăm cu h .

Obs: pentru a face economie în limbaj, vom folosi *înălțime* pentru ambele accepțiuni, din context înțelegându-se dacă este vorba despre segment sau lungimea acestuia.

- *diagonala* într-o prismă este segmentul care unește un vârf al unei baze cu un vârf al bazei opuse care nu aparține vreunui plan care conține vârful din care pleacă.

Prisma are patru diagonale: $[AC']$, $[BD']$, $[CA']$, $[DB']$.

Clasificarea prismelor

- după numărul laturilor poligoanelor de la bază prismele pot fi:

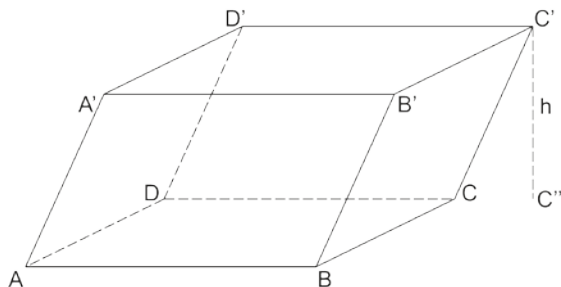
prisme triunghiulare (au la bază un triunghi),

prisme patrulatere (au la bază un pătrat),

prisme hexagonale (au la bază un hexagon), etc.

- după poziția muchiilor laterale față de planele bazelor pot fi: **prisme drepte** dacă muchia laterală este perpendiculară pe planele bazelor. (Ca și consecință, fețele laterale sunt dreptunghiuri, muchiile laterale sunt înălțimi în prismă),

prisme oblice dacă muchia laterală nu este perpendiculară pe planele bazelor. Ca și consecință, fețele laterale sunt paralelograme.

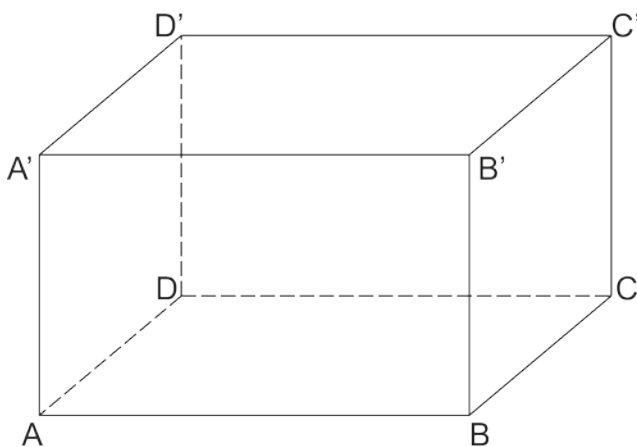


(fig. 2)

Paralelipipedul este prisma care are toate fețele paralelograme (fig. 2).

Paralelipipedul drept are bazele paralelograme și fețele laterale sunt dreptunghiuri.

Paralelipipedul dreptunghic are toate fețele dreptunghiuri, fețele opuse sunt congruente două câte două (fig. 3).



(fig. 3)

Consecința 1:

În orice paralelipiped diagonalele sunt concurente într-un punct O care este mijlocul fiecăreia.

Justificare:

$A'D'CB$ este paralelogram cu diagonalele $[AC']$ și $[BD']$. Conform proprietăților paralelogramului diagonalele se intersectează într-un punct O_1 care este mijlocul fiecărei diagonale $AC' \cap BD' = \{O_1\}$.

$D'C'BA$ este paralelogram cu diagonalele $[BD']$ și $[AC']$. Conform proprietăților paralelogramului diagonalele se intersectează într-un punct O_2 care este mijlocul fiecărei diagonale $BD' \cap AC' = \{O_2\}$.

$A'C'CA$ este paralelogram cu diagonalele $[CA']$ și $[AC']$. Conform proprietăților paralelogramului diagonalele se intersectează într-un punct O_3 care este mijlocul fiecărei diagonale $DB' \cap AC' = \{O_3\}$.

Analog, $CA' \cap CA' = \{O_4\}$.

Cum segmentele BD' , CA' , AC' , DB' nu pot avea decât un singur mijloc atunci punctele O_1, O_2, O_3, O_4 coincid și se notează O .

Obs: în paralelipipedul dreptunghic diagonalele sunt congruente.

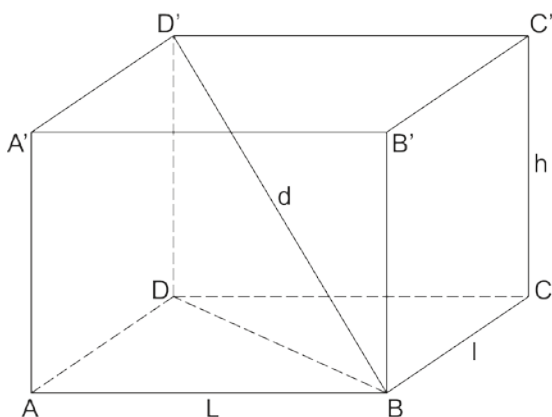
Consecința 2

În paralelipipedul dreptunghic (fig. 4) pătratul lungimii diagonalei este egal cu suma pătratelor lungimilor muchiilor concurente în același vârf.

$$d^2 = L^2 + l^2 + h^2$$

Justificare:

Aplicăm Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $\triangle DAB$, $BD^2 = L^2 + l^2$, apoi în triunghiul dreptunghic $\triangle D'DB$ $d^2 = BD^2 + h^2 \Rightarrow d^2 = L^2 + l^2 + h^2$



(fig. 4)

Consecința 3

Într-un paralelipiped dreptunghic

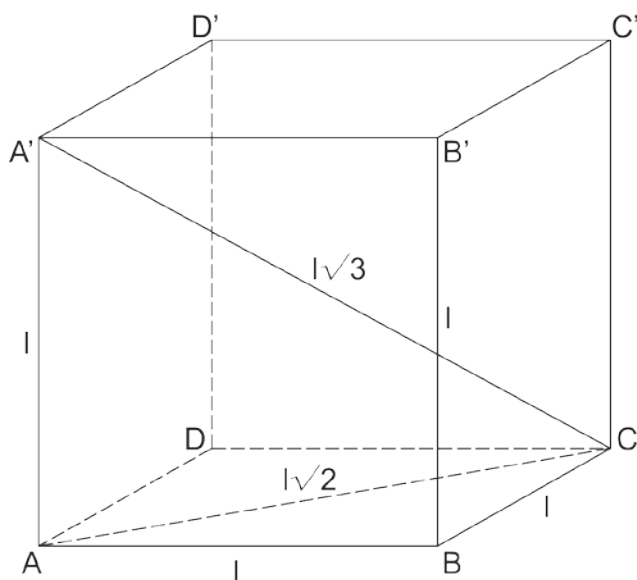
$$A_l = 2L \cdot h + 2l \cdot h \text{ (u.m.)}, \quad A_t = 2L \cdot h + 2l \cdot h + 2L \cdot l \text{ (u.m.)}.$$

Definiție: Cubul (fig. 5) este paralelipipedul dreptunghic care are trei muchiii concurente în același vârf congruente. (toate muchiile vor fi congruente, fețele laterale și bazele sunt pătrate).

$$A_l = 4 \cdot l^2 \text{ (u.m}^2\text{)}$$

$$A_t = 6 \cdot l^2 \text{ (u.m}^2\text{)}$$

$$d = l\sqrt{3} \text{ (u.m.)}.$$

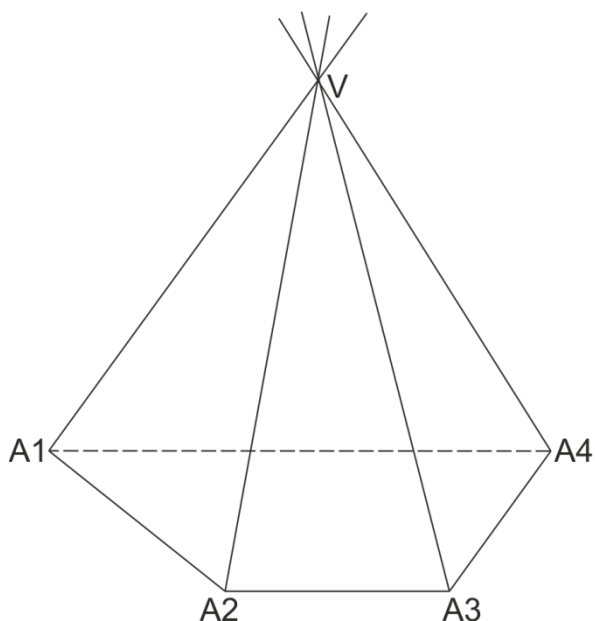


(fig. 5)

3. Piramida

Suprafața piramidală

Fiind date în spațiu o linie poligonală închisă (inclusă într-un plan) $A_1A_2A_3...A_nA_1$ și un punct V care nu aparține planului acesteia, se consideră toate dreptele determinate de V și un oricare punct M al liniei poligonale. Reuniunea mulțimilor de puncte ale acestor drepte este **suprafața piramidală**. Dreptele VM sunt *generatoarele suprafeței* (figura 10).



(fig. 10)

Definiție: O suprafață piramidală α este determinată de o linie poligonală închisă (linia directoare) și un punct V care nu aparține planului și este reuniunea mulțimilor de puncte ale dreptelor determinate de V și un punct M al liniei poligonale.

- V va fi vârful suprafeței,
- $A_1A_2A_3...A_nA_1$ - linia directoare,
- dreapta VM - generatoarea suprafeței,
- generatoarele care conțin vârfurile $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ sunt muchiile suprafeței piramidale. Două muchii consecutive (de exemplu VA_1 și VA_2) determină un plan care reprezintă o față a suprafeței piramidale. Suprafața piramidală poate fi definită ca reuniunea fețelor sale.

În figura 10 avem:

VA_1, VA_2, VA_3, VA_4 muchiile suprafeței piramidale, V - vârful, fețele sunt planele $(VA_1A_2), (VA_2A_3), (VA_3A_4), (VA_4A_1)$. Intersectând suprafața piramidală cu un plan care nu conține V , obținem o linie poligonală închisă.

Definiție:

Fie dată în spațiu E o suprafață piramidală α și un plan β care nu conține vârful V al suprafeței piramidale și care intersectează muchiile ei. Notând $\bar{\beta}$ suprafața poligonală mărginită în planul β de linia de intersecție $\alpha \cap \beta$ și $\bar{\alpha}$ porțiunea din α cuprinsă între V și β , definim $S = \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$

Suprafața S este închisă și separă punctele mulțimii

$E - S$ în două regiuni. O regiune interioară față de această suprafață care conține punctele din care semidreptele duse intersectează S în cel puțin un punct și o regiune exterioară

care conține punctele care au proprietatea că există semidrepte duse din ele care nu intersectează suprafața S .

Punctele din prima regiune sunt puncte interioare ale corpului, punctele regiunii exterioare sunt puncte care nu aparțin corpului.

Notăm $\{I\}$ mulțimea punctelor interioare.

$$\text{piramida} = \{I\} \cup S.$$

Elemente ale piramidei $VA_1A_2A_3A_4$ (figura 10)

- V vârful piramidei,
- $A_1A_2A_3A_4$ baza piramidei,
- $[A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_4], [A_4A_1]$ laturile bazei,
- fețele laterale $\triangle VA_1A_2, \triangle VA_2A_3, \triangle VA_3A_4, \triangle VA_4A_1$,
- muchiile laterale $[VA_1], [VA_2], [VA_3], [VA_4]$,
- suprafața laterală – reuniunea fețelor laterale

A_l = suma ariilor fețelor laterale

$$A_t = A_l + A_{\text{bazei}}$$

Utilizăm noțiunea de înălțime a piramidei având două accepțiuni – ca **segment** fiind proiectanta punctului V pe planul bazei

- ca **număr** este lungimea înălțimii.

Observație: pentru ușurința exprimării vom folosi termenul de înălțime când facem referire la segment dar și la lungimea acestuia.

Clasificarea piramidelor:

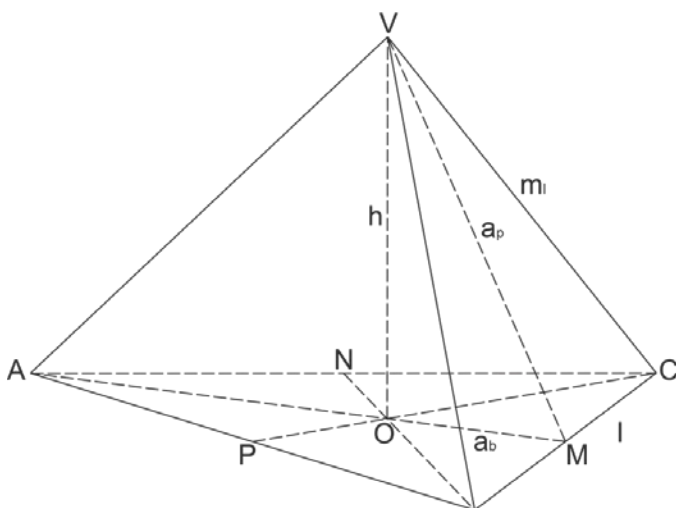
- după numărul de laturi ale poligonului de la bază: **piramide triunghiulare** (baza este triunghi), **piramide patrulatere** (baza este patrulater- figura 10), **piramide hexagonale** (baza este un hexagon), etc.
- **Piramida regulată** este piramida care are la bază un poligon regulat și muchiile laterale sunt congruente.

Consecințe:

- într-o piramidă regulată înălțimea „cade” în centrul cercului circumscris poligonului de la bază (se demonstrează aplicând criteriile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice);
- fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente;
- definim **apotema** unei piramide regulate ca segmentul care unește vârful piramidei cu mijlocul laturii poligonului de la bază. Apotema piramidei este și înălțime a feței laterale.

Piramida triunghiulară regulată

Desen:



(figura 11)

Elemente ale piramidei VABC (figura 11)

- V vârful piramidei
- $\triangle ABC$ echilateral baza piramidei
- $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ laturile bazei
- fețele laterale $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VAC$
- muchiile laterale $[VA]$, $[VB]$, $[VC]$
- apoteme ale bazei $[OM]$, $[ON]$, $[OP]$
- apoteme ale piramidei $[VM]$, $[VN]$, $[VP]$
- suprafața laterală – reuniunea fețelor laterale

$$A_l = \text{suma ariilor fețelor laterale} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a_p = p_b \cdot a_p \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

$$A_t = A_l + A_{\text{bazei}} = p_b \cdot a_p + \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

$$\text{înălțimea piramidei } VO = h$$

Relații între elementele piramidei triunghiulare regulateÎn triunghiul $\triangle VMC$ dreptunghic în $\angle (VMC)$ avem

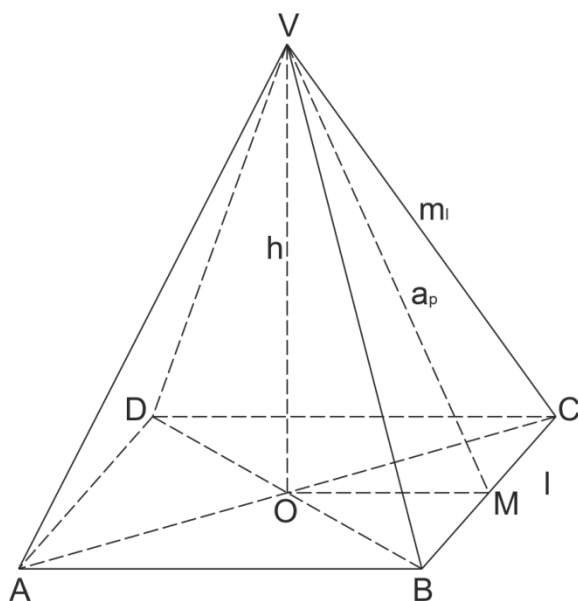
$$m_l^2 = \frac{1}{4} \cdot l^2 + a_p^2;$$

În triunghiul $\triangle VOM$ dreptunghic în $\angle (VOM)$ avem

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2;$$

Piramida patrulateră regulată

Desen:



(fig. 12)

Elemente ale piramidei VABCD (figura 12)

- V vârful piramidei
- ABCD pătrat baza piramidei
- [AB], [BC], [CD], [DA] laturile bazei
- fețele laterale ΔVAB , ΔVBC , ΔVCD , ΔVDA
- muchii laterale [VA], [VB], [VC], [VD]
- apoteme ale bazei [OM], [ON], [OP], [OQ]
- apoteme ale piramidei [VM], [VN], [VP], [VQ]
- suprafața laterală – reuniunea fețelor laterale

$$A_l = \text{suma ariilor fețelor laterale} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a_p = p_b \cdot a_p (\text{u.m.}^2)$$

$$A_t = A_l + A_{\text{bazei}} = p_b \cdot a_p + l^2 (\text{u.m.}^2)$$

- înălțimea piramidei $VO = h$

Relații între elementele piramidei patrulatere regulate

În triunghiul $\triangle VMC$ dreptunghic în $\angle (VMC)$ avem

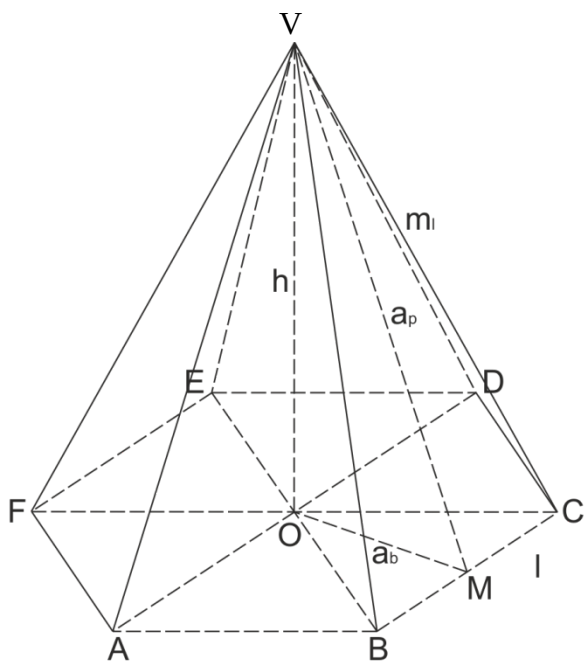
$$m_l^2 = \frac{1}{4} \cdot l^2 + a_p^2;$$

În triunghiul $\triangle VOM$ dreptunghic în $\angle (VOM)$ avem

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2;$$

Piramida hexagonală regulată

Desen:



(fig. 13)

Elemente ale piramidei VABCDEF (figura 13)

- V vârful piramidei
- ABCDEF hexagon regulat baza piramidei
- [AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA] laturile bazei
- fețele laterale ΔVAB , ΔVBC , ΔVCD , ΔVDA
- muchiile laterale [VA], [VB], [VC], [VD], [VE], [VF]
- apoteme ale bazei [OM], [ON], [OP], [OQ], [OR], [OS]
- apoteme ale piramidei [VM], [VN], [VP], [VQ], [VR], [VS]
- suprafața laterală – reuniunea fețelor laterale

$$A_l = \text{suma ariilor fețelor laterale} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot a_p = p_b \cdot a_p \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

$$A_t = A_l + A_{\text{bazei}} = p_b \cdot a_p + 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

- înălțimea piramidei VO = h

Relații între elementele piramidei hexagonale regulate

În triunghiul ΔVMC dreptunghic în $\angle (VMC)$ avem

$$m_l^2 = \frac{1}{4} \cdot l^2 + a_p^2;$$

În triunghiul ΔVOM dreptunghic în $\angle (VOM)$ avem

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2;$$

Tetraedrul este poliedrul care are cel mai mic număr de fețe. Un tetraedru este definit de patru puncte necoplanare și distincte.

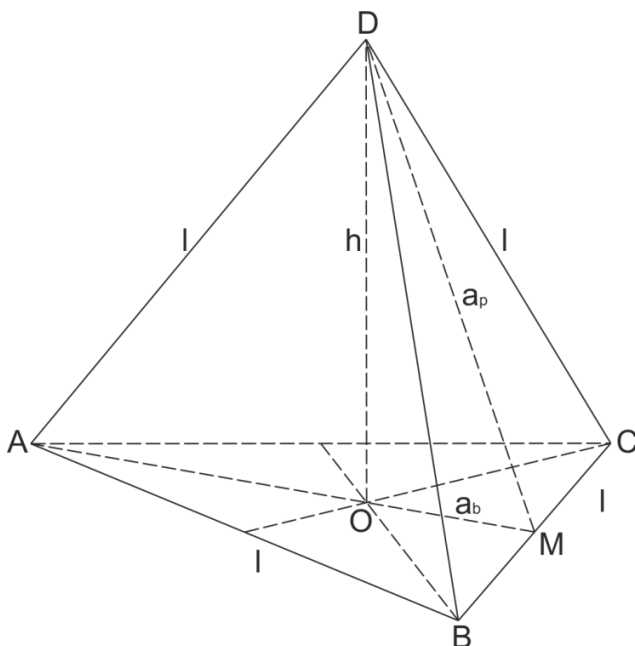
Deci, **tetraedrul** = $S \cup \{I\}$.

Suma ariilor fețelor tetraedrului o numim arie totală a tetraedrului. Dacă considerăm tetraedrul „așezat” pe una din fețe, o vom numi pe aceasta bază, iar pe celelalte, fețe laterale.

Distanța de la un vârf la fața opusă se numește înălțimea tetraedrului.

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

Desen:



(fig. 14)

Elemente ale tetraedrului DABC (figura 14)

- D vârful tetraedrului în acest caz
- $\triangle ABC$ echilateral baza piramidei
- $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ laturile bazei
- fețele laterale $\triangle DAB$, $\triangle DBC$, $\triangle DAC$
- muchiile laterale $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$
- apoteme ale bazei $[OM]$, $[ON]$, $[OP]$
- apoteme ale piramidei $[DM]$, $[DN]$, $[DP]$
- suprafața laterală – reuniunea fețelor laterale

$$A_l = \text{suma ariilor fețelor laterale} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

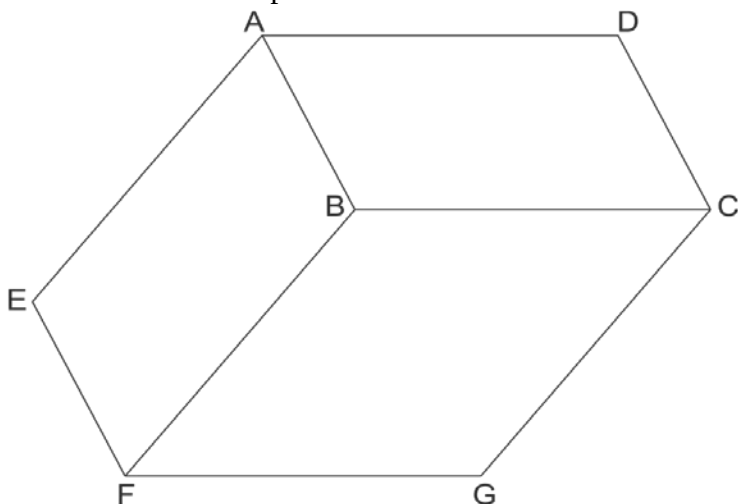
$$A_t = A_l + A_{\text{bazei}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \text{ (u.m.}^2\text{)}$$

$$\text{înălțimea tetraedrului este } DO = h = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \sqrt{6}$$

4. Poliedre. Noțiuni generale

Suprafața poliedrală este formată din poligoane situate în plane diferite care au laturi comune.

În figura 6 este reprezentată o suprafață poliedrală cu trei fețe romburi ABCD, BCGF, ABFE situate în trei plane diferite.



(fig. 6)

O suprafață poliedrală S a spațiului pe care îl notăm $\mathcal{E}$ este închisă atunci când separă mulțimea de puncte $\mathcal{E} - S$ în două regiuni, mulțimi nevide de puncte: o *regiune interioară* I în care sunt punctele M din care oricum am duce o semidreaptă intersectează S în cel puțin un punct și o *regiune exterioară* II care conține punctele M astfel încât există semidrepte duse din M care nu intersectează suprafața S .

Observație: Suprafața unei prisme este suprafață poliedrală închisă.

Numim **poliedru** reuniunea dintre S o suprafață poliedrală închisă și I mulțimea punctelor din spațiu interioare în raport cu această suprafață.

Deci, **poliedru** = $S \cup \{I\}$, S suprafața poliedrului, fețele poliedrului sunt poligoanele care compun suprafața S a poliedrului.

Consecințe imediate:**1. Prismele și piramidele sunt poliedre.**

2. Un poliedru are cel puțin patru fețe. Poliedrul cu 4 fețe se numește *tetraedru*, cu 6 fețe *hexaedru*, cu 8 fețe *octaedru*, cu 12 fețe *dodecaedru*.

Se cunoaște din studiul chimiei că, în natură, materia solidă se poate prezenta în structură cristalină. Un cristal care s-a putut dezvolta liber, are în mod natural forma de poliedru. Astfel, sarea gemă (clorura de sodiu) are cristalele sub formă de cuburi.

Studiul poliedrelor este necesar pentru acea ramură a științelor naturii numită *cristalografie* care studiază cristalele și proprietățile lor.

5. Volumul poliedrelor

Ca și în cazul poliedrelor, obiectele (corpurile) din natură sunt submulțimi de puncte ale spațiului.

Multe din corpurile din natură sunt mărginite de o suprafață poliedrală închisă.

Dacă E este mulțimea punctelor din spațiu, S separă mulțimea $E - S$ în două regiuni. O *regiune interioară* față de această suprafață care conține punctele din care semidreptele duse intersectează S în cel puțin un punct și o *regiune exterioară* care conține punctele care au proprietatea că există semidrepte duse din ele care nu intersectează suprafața S .

Punctele din prima regiune sunt puncte interioare ale corpului, punctele regiunii exterioare sunt puncte care nu aparțin corpului.

$$\text{corp} = S \cup \{I\}$$

Aceste constatări intuitive privitoare la corpurile din natură se abstractizează și se generalizează pentru definirea corpurilor geometrice.

Am văzut cum sunt definite în acest mod prismele și piramidele și, mai general, **poliedrele**.

Intuiția ne arată că în natură există și altfel de suprafețe închise decât suprafețele poliedrale, de exemplu: suprafața tuberculului de cartof, suprafața bulbului de ceapă, suprafața bilei de rulment, suprafața unei monede metalice, etc.

În geometrie sunt definite și alte suprafețe închise decât suprafețele poliedrale. Un exemplu este suprafața numită sferă formată din mulțimea punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix. Acestea fac parte din **corpuri rotunde** care sunt mărginite de suprafețe curbe.

Vom defini în mod natural o noțiune mai generală - cea de **corp geometric**.

Dacă E este mulțimea punctelor din spațiu, S separă mulțimea $E - S$ în două submulțimi nevide – submulțimea *punctelor interioare* în raport cu S și mulțimea *punctelor exterioare*.

Dacă $\{I\}$ este mulțimea punctelor interioare în raport cu S , mulțimea de puncte $S \cup \{I\}$ este un corp geometric K mărginit de suprafața S (S este suprafața corpului).

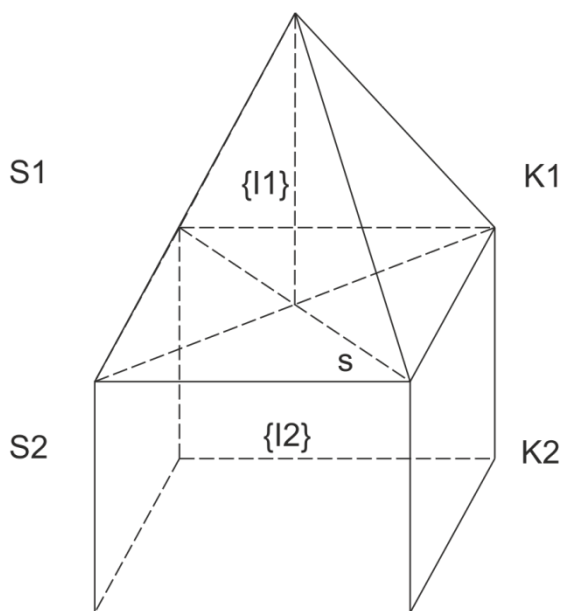
$$\text{Deci, } K = S \cup \{I\}.$$

Concluzie imediată:***Poliedrele sunt corpuri geometrice.***

Pornind de la ceea ce intuitiv se numește volumul unui obiect, se definește noțiunea de volum al unui corp geometric.

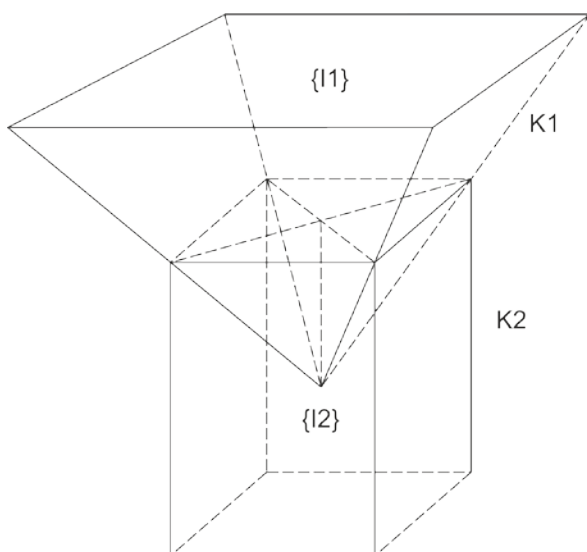
Volumul unui corp geometric este un *număr pozitiv* asociat corpului astfel încât: fiind date două corpuri geometrice $\mathcal{K}_1$ și $\mathcal{K}_2$, având suprafețele S_1 și S_2 și mulțimile de puncte interioare $\{I_1\}$ și $\{I_2\}$, iar ca volume V_1 și V_2 sunt îndeplinite următoarele proprietăți (proprietățile de aditivitate ale volumului):

1) dacă suprafețele corpurilor au o mulțime de puncte comună $s = S_1 \cap S_2$ și mulțimile punctelor interioare sunt disjuncte $\{I_1\} \cap \{I_2\} \neq \emptyset$ (ca în figura 7), atunci mulțimea de puncte $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ formează un corp geometric $\mathcal{K}$ al cărui volum este $V = V_1 + V_2$ (suprafața corpului va fi $(S_1 - s) \cup (S_2 - s)$).



(fig. 7)

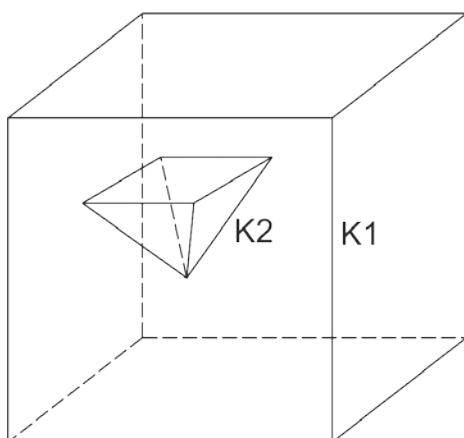
2) Dacă ambele corpuri $\mathcal{K}_1$ și $\mathcal{K}_2$ au o mulțime de puncte comune k (vezi figura 8) conținând și puncte interioare ale celor două corpuri, adică $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = k$, $k \cap \{I_1\} \neq \emptyset$, $k \cap \{I_2\} \neq \emptyset$, atunci mulțimea de puncte $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ formează un corp geometric $\mathcal{K}$ al cărui volum este $V < V_1 + V_2$, $V = (V_1 - v) + (V_2 - v) + v = V_1 + V_2 - v$, unde v este volumul lui k .



(fig. 8)

3) Dacă unul din corpuri K_2 este inclus în K_1 (figura 9), adică avem $K_1 \cup K_2 = K_1$, atunci mulțimea de puncte

$K_1 - K_2$ formează un corp K al cărui volum va fi
 $V = V_1 - V_2$, (suprafața corpului K va fi $S_1 \cup S_2$).



(fig. 9)

Volumul prisme = aria bazei · înălțimea (u.m.³).

Particularizare:

Volumul paralelipipedului dreptunghic = $L \cdot l \cdot h$ (u.m.³)

Volumul cubului = l^3 (u.m.³)

Volumul cubului atunci când muchia are lungimea

1 u.m. este de 1 u.m.³

Volumul acestui cub reprezintă *unitatea de volum*.

Volumul piramidei oarecare

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{aria bazei} \cdot \text{înălțimea (u.m.}^3\text{)}.$$

Particularizare:

Volumul piramidei triunghiulare regulate (figura 11)

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h \text{ (u.m.}^3\text{)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \cdot h \text{ (u.m.}^3\text{)}$$

(înălțimea piramidei VO = h)

Volumul piramidei patrulatere regulate (figura 12)

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h \text{ (u.m.}^3\text{)}$$

Volumul piramidei hexagonale regulate (figura 13)

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot l^2 \sqrt{3} \cdot h \text{ (u.m.}^3\text{)}$$

Două corpuri care prin suprapunere coincid se numesc *egale*.

Două corpuri egale au același volum.

Două corpuri egale sau neegale sunt *echivalente* dacă au același volum.

Definiție: *Volumul tetraedrului este un număr pozitiv egal cu o treime din produsul dintre aria unei fețe și înălțimea corespunzătoare ei.*

Precizări asupra definiției: vom arăta că acest număr este același, oricare ar fi alegerea feței tetraedrului, considerată ca bază, și a înălțimii corespunzătoare ei.

Considerăm tetraedrul ABCD (figura 15).

Ducem înălțimile fețelor ABC și DBC și înălțimile AQ = h₁, DP = h₂.

Vom demonstra egalitatea produselor a₁ · h₁ = a₂ · h₂

Pentru aceasta vom constata congruența unghiurilor ∠QAM și ∠PDN. Dreptele MQ și ND sunt perpendiculare pe BC (DN fiind înălțime și MQ din reciproca Teoremei celor trei perpendiculare).

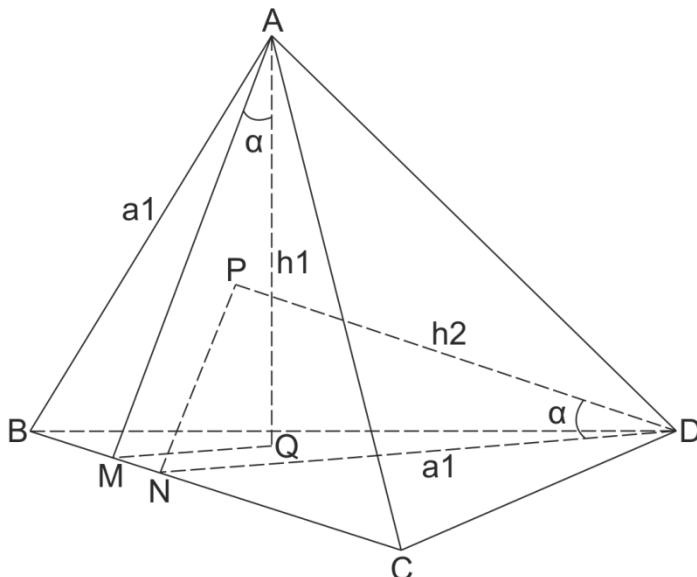
Deci, MQ ⊥ ND. La fel, MA ⊥ PN. Rezultă că

∠AMQ ≡ ∠PND. De aici, rezultă că și complementele lor sunt congruente (∠MAQ ≡ ∠NDP),

m(∠MAQ) = α.

Exprimăm, în două moduri, cosinusul unghiului $\alpha = \frac{h_1}{a_2} = \frac{h_2}{a_1}$ și egalând produsul

mezilor cu al extremilor, obținem egalitatea căutată.



(fig. 15)

Vom nota cu $A_{\Delta BCD}$ și $A_{\Delta BCA}$ ariile fețelor BCD, respectiv BCA.

Demonstrăm că

$$\frac{1}{3} \cdot A_{\Delta BCD} \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta BCA} \cdot h_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot h_1 = a_2 \cdot h_2, \text{ relație demonstrată.}$$

Consecințe:

1) *Dacă se dă un tetraedru ABCD și prin dreapta AD se duce un plan care taie muchia BC într-un punct interior M, este evident că suma volumelor tetraedrelor ABMD și ACMD este egală cu volumul tetraedrului ABCD, pentru că suma ariilor triunghiurilor ΔBMD și ΔMCD este aria ΔBCD, iar înălțimea corespunzătoare acestor fețe este aceeași.*

2) *Două tetraedre care au două fețe congruente și înălțimile corespunzătoare lor congruente sunt echivalente (au același volum).*

3) *O prismă triunghiulară ABCA'B'C' se poate descompune în trei tetraedre echivalente.*

Justificare:

Considerăm prismă ABCA'B'C' pe care o secționăm cu un plan determinat de punctele C, A', B'. Obținem două corpuri: tetraedrul CA'B'C' pe care îl notăm P_1 și corpul ABCA'B'.

Secționăm apoi corpul ABCA'B' cu planul determinat de punctele A', B, C. Notăm tetraedrele obținute ACBA' cu P_2 și A'B'BC cu P_3 .

$P_1 \approx P_2$ au bazele triunghiuri congruente și înălțimile egale.

$P_3 \approx P_2$ au bazele triunghiuri congruente ca jumătăți ale aceluiași paralelogram și aceeași înălțime distanța de la C la planul paralelogramului.

Deci, P_1 este echivalent cu P_2 este echivalent cu P_3 .

4) *Volumul unei prisme triunghiulare este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțime.*
Consecință finală: Orice prismă poate fi împărțită într-un număr de prisme triunghiulare .

Volumul tetraedrului regulat (figura 14)

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h = \frac{1}{12} \cdot l^3 \cdot \sqrt{3} \text{ (u.m.}^3\text{)}$$

$$\text{înălțimea tetraedrului este } DO = h = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \sqrt{6}$$

MAREA TEOREMĂ A LUI FERMAT

=Istoria unei teoreme=

Profesor Laura Radu

Colegiul de Industrie Alimentară „Elena Doamna”, Galați

Marea teoremă a lui Fermat este o celebră teoremă de teoria numerelor. Ea a fost enunțată de Pierre Fermat în anul 1637, iar demonstrația completă a fost găsită 357 de ani mai târziu, de către matematicianul englez Andrew Wiles.

„Este imposibil ca un cub să fie exprimat ca sumă a două cuburi, sau ca puterea a patra să fie rescrisă ca sumă a două puteri de ordin patru sau, în general, ca orice număr care este o putere mai mare decât doi să se reprezinte ca sumă de puteri de același ordin, ca în cazul pătratului. Mă aflu în posesia unei demonstrații minunate a acestei afirmații, dar marginea paginii este prea strâmtă pentru a o cuprinde.”

Așa scria **Pierre Fermat** pe marginea Cărții a doua a *Aritmeticii* lui Diophantus publicată în 1621, unul dintre cei mai învățați francezi ai secolului al XVII-lea.

Pierre de Fermat era un matematician amator, dar genial, care propusese și rezolvase multe probleme frumoase. După moartea sa (în 1665), fiul său a pregătit timp de cinci ani o nouă ediție a *Aritmeticii*, cu comentariile tatălui său. În 1670, cartea a apărut, la Toulouse.

Enunțul matematic cuprins în comentariul lui Fermat este următorul, cunoscut și sub numele de „marea teoremă a lui Fermat”:

Ecuatia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi nenule, pentru $n \geq 3$, număr natural.

O astfel de ecuație, cu coeficienți și soluții în $\mathbb{Z}$, se numește *ecuație diofantică*, după numele lui Diophantus.

Este un caz unic de teoremă având un enunț simplu, care poate fi înțeles de oricine, dar care a rezistat, din 1670 până în 1993, la orice încercare de demonstrație.

La data de 23 iunie 1993, în cadrul Institutului Newton din Cambridge, Anglia, demonstrația teoremei era produsă, în fața unui public numeros și select, atras de zvonul, răspândit pe internet, că va avea loc acest eveniment, de către Andrew Wiles, un englez născut la Cambridge, în 1953.

Scopul suprem al Institutului Newton este de a reuni mințile cele mai mari ale lumii, pentru câteva săptămâni, pentru a ține seminarii pe o temă de cecetare de importanță majoră, stabilită în prealabil.

Institutul era creat pentru a facilita discuțiile: fiecare sală-birou se deschidea spre un forum central, exista tablă până și în ascensor și în camerele de baie.

Tema aceluia an era: „*Funcțiile L și aritmetica*” și adunase toate somitățile în teoria numerelor.

A. Wiles, la 40 de ani profesor la Princeton în Statele Unite, își petrecuse ultimii șapte ani în izolare completă, încercând să rezolve problema.

Întâlnirea lui Andrew Wiles cu problema celebră propusă secolelor de Fermat s-a petrecut la vârsta de 10 ani, în biblioteca orașului natal, unde a împrumutat cartea lui Eric Temple Bell, „*Ultima problemă*” și în care a găsit povestea unei probleme de origine greacă, maturizată în secolul XVII și expusă involuntar ca o provocare de Pierre de Fermat.

Copilul a fost izbit de simplitatea problemei, pe care o înțelegea la acea vârstă, și a decis să o rezolve, decizie care s-a realizat peste 30 de ani. A examinat abordările tuturor celor care au încercat serios să rezolve această problemă.

Marele Leonhard Euler (1707 -1873) este unul dintre aceștia. Numit de contemporani „întruchiparea analizei”, Euler calcula fără efort aparent, așa cum respiră oamenii sau cum vulturii planează în bătaia vântului (Francis Arago).

Euler demonstrează inexistența soluțiilor ecuației pentru $n=3$ și decriptează soluția lui Fermat pentru cazul $n=4$. Pentru cazul $n=3$, Euler folosește numerele imaginare, pe care le studiase. Euler observă că teorema rămâne de demonstrat numai pentru numere prime, din păcate și ele formând o mulțime infinită.

Sophie Germain (1776-1831), elevă a lui Lagrange, a lucrat ani de zile la marea teoremă a lui Fermat. Ea l-a impresionat pe Gauss cu demonstrația pe care a făcut-o în 1825 pentru numerele prime p satisfăcând condiția că $2p+1$ este prim. Lista sa îl include pe 5, nu și pe 13.

Succesul metodei lui Sophie Germain s-a verificat după 1825, datorită lui Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) și Adrien-Marie Legendre (1752-1833) care au demonstrat riguros cazul $n=5$.

În 1839, Gabriel Lamé (1795-1870), deși considerat mai mult un specialist în matematici aplicate, demonstrează teorema pentru $n=7$, completând ingenios metoda lui Sophie Germain. Aceasta se petrecea când Academia Franceză de Științe oferea o Medalie de aur și 3000 de franci celui ce ar demonstra Marea Teoremă a lui Fermat.

Lamé a crezut că demonstrase teorema.

În același timp, Ernst Kummer, specialist în teoria numerelor, arată că demonstrațiile precedente se bazează pe unicitatea descompunerii în factori ireductibili, care nu are loc în general în inelele de numere imaginare.

Astfel în $Z[\sqrt{-11}] = \{a + b\sqrt{-11} / a, b \in Z\}$, numărul 12 se descompune în două moduri complet diferite: $12 = 2^2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-11})(1 - \sqrt{-11})$ iar în $Z[\sqrt{-5}]$, $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.

Se recuperează unicitatea descompunerii pentru numerele prime $n \leq 31$, iar până la 100, există trei cazuri atipice de numere prime: $n=37, 59, 67$.

Kummer a arătat astfel că demonstrația teoremei depășea posibilitățile matematicii timpului și a primit pentru aceasta premiul Academiei Franței, deja exasperată de încercările de demonstrație primite.

Deși nu rezolvă teorema lui Fermat, contribuția lui Kummer la dezvoltarea algebrei este, cu adevărat, inestimabilă, el a deschis calea spre algebra modernă, furnizând metode, exemple, probleme.

Andrew Wiles a studiat la Oxford și, în ciuda scepticismului contemporanilor săi cu privire la rezolvarea mării teoreme a lui Fermat, el nu a renunțat niciodată la aspirația sa de a rezolva, înarmându-se cu matematica secolului al XX-lea.

În 1908, industriașul german Paul Wolfskehl lăsase o mare parte din averea sa ca premiu pentru cel ce va demonstra marea teoremă a lui Fermat. Premiul urma a fi oferit de un Comitet de la Universitatea din Göttingen, care trebuia să decidă asupra corectitudinii demonstrației.

Între 1909-1934, șeful departamentului de matematică din Göttingen a fost Edmund Landau, care a tipărit un formular-tip de răspuns celor ce trimiteau memorii:

Stimate.....

Vă mulțumim pentru manuscrisul cu demonstrația MTF.

Prima eroare este pe pag....., rândul.....

Aceasta invalidează demonstrația dvs.

Prof. E.M. Landau.

În primul an au sosit 621 de „soluții”, iar până în 1970 „soluțiile” au ocupat trei metri de corespondență.

În secolul XX, mașinile au preluat calculele pe care oamenii nu le puteau face. A pornit o campanie de verificare a teoremei lui Fermat cu calculatorul; s-a demonstrat pentru p prim mai mic decât 500, apoi, pentru $p < 1000$, pentru $p < 10000$.

În 1980, se demonstrase pentru $p < 25000$, apoi pentru $p < 4 \cdot 10^6$.

În 1988, Naom Elkies (Universitatea Harvard) a arătat cu calculatorul că, conjectura lui Euler referitoare la faptul că ecuația:

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

nu are soluții întregi nenule este falsă, găsim un contraexemplu, anume

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615675^4,$$

și demonstrând că există o infinitate de soluții.

Andrew Wiles, îndrumat de John Coates la teza de doctorat, a studiat la Oxford teoria curbelor eliptice, subiect care-i va furniza lui Wiles tehnicile noi de care avea nevoie pentru o nouă abordare a MTF.

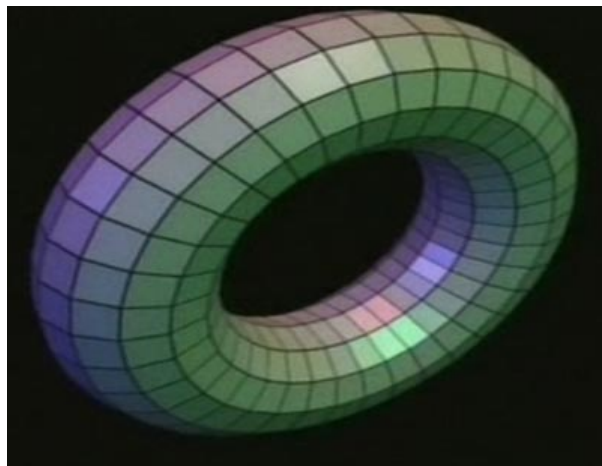
O curbă eliptică este o ecuație de forma:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Numele vine de la utilizarea acestor curbe pentru a măsura elipse și lungimi de orbite planetare.

O problemă pentru aceste curbe este următoarea: „Există pe curbele eliptice puncte de coordonate întregi și câte?”

Curbele eliptice arată simplu, dar complexitatea lor aritmetică este imensă. Fiecare punct de pe curbă reprezintă soluția unei ecuații. Ele se numesc ecuații eliptice deoarece în trecut au fost folosite la măsurarea perimetrelor elipselor și lungimilor orbitelor planetare.



Curbă eliptică

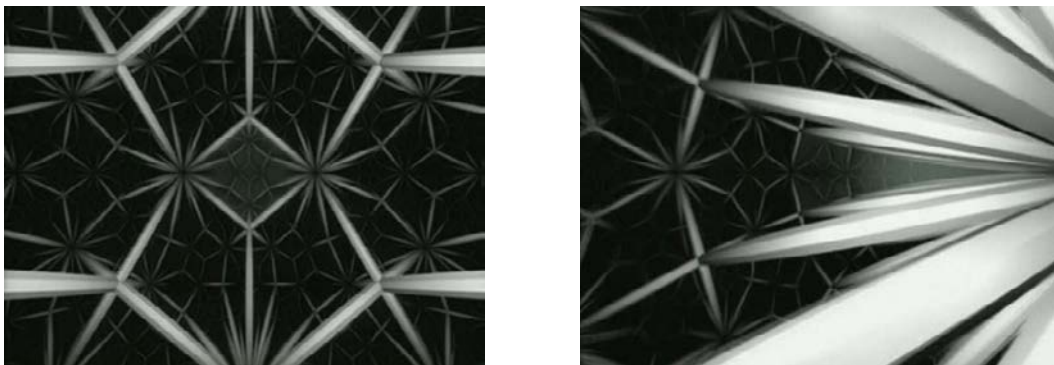
Provocarea ecuațiilor eliptice constă în a stabili dacă ele admit ca soluții numere întregi și dacă da, câte.

De exemplu, $y^2 = x^3 - 2$ are soluție unică (3;5), lucru demonstrat chiar de Fermat. Fermat observase că 26 este singurul număr aflat între un număr la pătrat și un număr la cub, $5^2 < 26 < 3^3$.

Ecuațiile eliptice au fost studiate de greci, apoi de Fermat și oferă probleme de studiu și astăzi.

În paralel cu încercările de a stabili soluțiile unei ecuații eliptice, se desfășura, într-un domeniu al matematicii fără aparent nici o legătură cu acestea, cercetări intense în domeniul formelor modulare. Acestea sunt unele dintre cele mai abstracte entități matematice. Fiind entități cu o simetrie infinită, acestea pot fi permutate, comutate, interschimbate, reflectate și rotite într-o infinitate de moduri și rămân totuși neschimbate.

O formă modulară este definită de 2 axe (x,y), dar axele sunt ambele complexe, adică fiecare axă are o parte reală (xr,yr) și una imaginară (xi,yi). Prin urmare, ele se reprezintă într-un spațiu cu 4 dimensiuni numit *spațiu hiperbolic*, care ar putea fi imaginat cam ca în figurile următoare:



Forme modulare

Între timp, în Japonia, în 1954, Goro Shimura are nevoie de un articol din Mathematische Annalen, vol. 24, pe care îl împumutase Yutaka Taniyama (n.1927). Shimura era harnic iar Taniyama era un geniu distrat. Au lucrat împreună la formele modulare, prezentând curioase simetrii.

Formele modulare hiperbolice sunt caracterizate de *M-serii*, așa cum ecuațiile eliptice sunt caracterizate de *E-serii*.

În 1955, la Tokyo a fost un simpozion internațional.

Tinerii cercetători japonezi au distribuit în asistență o foaie cu treizeci și șase de probleme legate de lucrările lor, rugând pe participanți să le comenteze. Patru dintre probleme fuseseră formulate de Taniyama și se refereau la o „*curioasă legătură dintre formele modulare și ecuațiile eliptice.*”

Taniyama calculase primii termeni ai M -seriei unei forme modulare particulare și văzuse că sunt aceiași cu cei ce intrau în E -seria unei ecuații eliptice.

Deci, M -seria și E -seria făceau o legătură între cele două obiecte matematice sau poate nu?

Taniyama face ipoteza că formele modulare și ecuațiile eliptice sunt legate. Shimura pleacă în 1957 la Princeton pentru 2 ani, iar Taniyama se sinucide în 1958.

Shimura se apucă de lucru, fără a putea demonstra conjectura lor.

Shimura spunea următoarele : „ *Eu am filosofia aceasta a bunătății. Matematica trebuie să conțină bunătate. De pildă, în cazul unei ecuații eliptice, ecuația ar putea fi numită bună, dacă este parametrizată printr-o formă modulară. Mă aștept ca toate ecuațiile eliptice să fie bune. Este o filosofie mai degrabă simplistă, dar ea poate fi totuși luată drept punct de plecare. Atunci a trebuit firește să dezvolt diverse argumente tehnice în sprijinul conjecturii. Aș putea spune că ea s-a ivit din această filosofie a bunătății. Cei mai mulți matematicieni fac matematică dintr-un punct de vedere estetic, iar filosofia aceasta a bunătății provine din punctul meu estetic de vedere.*”

Shimura n-a demonstrat dar a acumulat dovezi și a câștigat prin aceasta, partizani pentru conjectura sa.

André Weil, teoretician de excepție al numerelor, face publicitate conjecturii prin anii 1966, când și-a început cariera de cercetător științific, dar această conjectură nu putea fi încă bine înțeleasă.

Matematicianul Barry Mazur, de la Harvard, vorbind despre conjectura Shimura-Taniyama, considera această conjectură ca un „dicționar” între cele două obiecte-lumi matematice, asemenea pietrei Rosette pentru descifrarea hieroglifelor egiptene.

În anii '60, Robert Langlands de la Institutul pentru Studii Avansate de la Princeton a fost frapat de puterea conjecturii și crede în modul de rezolvare a unor probleme, prin transfer în alt domeniu al matematicii.

În anii '70, se continuă încercările pentru conjectura lui Taniyama-Shimura și apar o serie de teoreme al căror adevăr se baza pe adevărul conjecturii acestora.

În 1984, discuțiile ajunseseră departe, astfel încât, la Oberwolfach, în Germania, s-au analizat pe larg, în cadrul unui atelier de lucru, progresele în rezolvarea conjecturii Taniyama-Shimura.

Gerhard Frey de la Saarbrücken vede primul legătura conjecturii cu marea teoremă a lui Fermat:

Dacă $x^n + y^n = z^n, n > 2$, are soluția (A, B, C) pentru $N, A^N + B^N = C^N$, atunci Frey aduce ecuația inițială a lui Fermat la forma:

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N,$$

care este o ecuație eliptică.

Ecuația lui Frey este o „*ecuație fantomă*”, adică ea se bazează pe falsitatea MTF. Dar dacă această ecuație există, ei nu i se poate asocia o formă modulară.

Frey își derulează argumentația și în sens invers.

Dar el nu putuse demonstra că strania ecuație obținută este sau nu modulară eliptică. Mulți matematicieni au încercat să arate că este o ecuație eliptică nemodulară.

Ken Ribet de la Universitatea California, Berkeley, în 1986, povestind la o cafea, lui Barry Mazur la ce lucrează, interlocutorul său a observat că demonstrația sa dintr-un caz particular ar putea merge în general, dacă se folosesc proprietățile ale M -seriilor.

Și Ribet a demonstrat că ecuația lui Frey nu e modulară, ceea ce leagă MTF de Conjectura Taniyama-Shimura.

Dar Ribet era pesimist în legătură cu progresul în rezolvarea problemelor apărute.

Andrew Wiles află de demonstrația lui Ribet. El ajunsese unul dintre cei mai buni cunoscători ai ecuațiilor eliptice.

Se așează la masa de lucru și, cu excepția obligațiilor față de departament, se concentrează numai asupra problemei. Soția sa i-a fost singurul martor, confident, spijin.

„Trebuie cu adevărat să nu te gândești la nimic altceva decât la problema aceea, să te cufunzi pur și simplu în ea”, spune Andrew Wiles.

Și atunci apare ideea nouă!

Andrew Wiles a construit un raționament inductiv al cărui prim pas se află în teoria lui Galois. Mai precis, el începe să demonstreze coincidența E -seriilor cu M -seriile astfel: mai întâi se compară primul element al celor două serii, apoi al doilea, apoi arată că, dacă două serii coincid până la n , vor coincide și la $n+1$.

La 8.03.1988, ziarele *Washington Post* și *New York Times* publicau articole referitoare la demonstrația MTF de către Joichi Miyaoka de la Universitatea Metropolitană Tokyo.

Acesta abordase problema cu ajutorul geometriei diferențiale, bazându-se pe ideea din 1983 a lui Gerd Faltings (Princeton) de a studia corpurile asociate ecuațiilor $x^n + y^n = z^n, n \geq 3$.

Faltings reușise să observe că, deoarece aceste corpuri au întotdeauna mai mult decât o singură gaură, ecuația lui Fermat asociată nu putea avea decât un număr finit de soluții în numere întregi. Acest număr putea fi și zero, ceea ce și trebuia arătat.

Faltings descoperă o eroare în demonstrația pe cinci pagini a lui Miyaoka. Andrew Wiles răsuflă ușurat.

Andrew Wiles decide să țină cursul *Calcul pe curbe eliptice*, de la care studenții s-au retras și a rămas numai Nick Katz.

Ultima familie de curbe rezistentă a cedat, după ce Wiles s-a inspirat dintr-un articol al lui Mazur în care acesta utiliza o construcție din secolul al XIX-lea.

Preluând ultimile descoperiri, Andrew Wiles formulează următorul raționament:

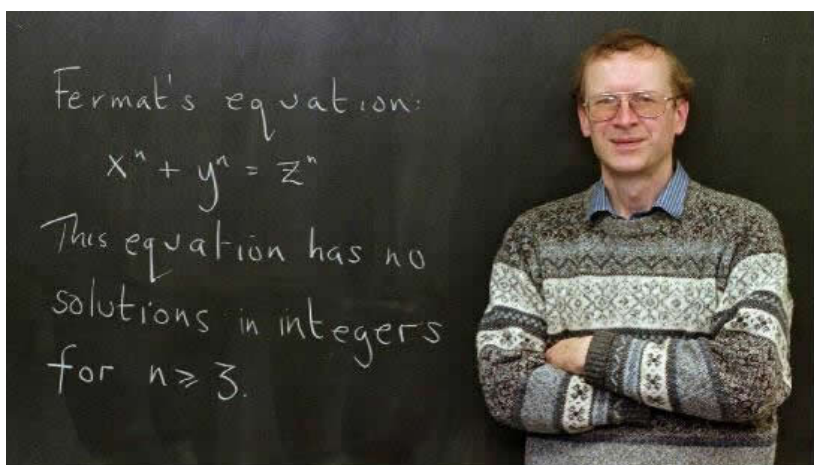
- 1) Dacă conjectura Shimura-Taniyama ar fi dovedită, atunci orice curbă eliptică ar fi modulară;
- 2) Dacă orice curbă eliptică ar fi modulară, atunci curba eliptică a lui Frey care nu este modulară, nu poate exista;
- 3) Dacă curba eliptică a lui Frey nu există, atunci nu pot exista nici soluții pentru ecuația lui Fermat;
- 4) Prin urmare, Marea Teoremă a lui Fermat ar fi adevărată.

A verificat din nou demonstrația chiar înainte de începerea conferințelor, la Cambridge, cu un expert, Barry Mazur.

În 1920, David Hilbert spunea la o conferință despre MTF că el nu va apuca s-o vadă rezolvată, dar din auditoriu cei mai tineri vor fi, poate, martorii rezolvării ei.

Titlul conferinței lui Andrew Wiles era „*Forme Modulare, Curbe Eliptice și Reprezentări Galois.*”

Erau în sală Mazur, Ribet, Kolîvaghin, sala era încărcată cu emoția unui eveniment istoric.



Andrew Wiles

Cu creta în mână, se întoarse pentru ultima dată spre tablă. Ultimele rânduri de logică încheiau demonstrația. Pentru prima dată după aproape 300 de ani, provocarea lui Fermat primise răspunsul. Au clipit alte blițuri pentru a immortaliza acest moment istoric. Wiles a scris pe tablă formula Marii Teoreme a lui Fermat, s-a întors spre public și a spus cu modestie:

"Cred că mă voi opri aici."

Două sute de matematicieni au aplaudat și au aclamat cu entuziasm. Chiar și cei ce anticipaseră rezultatul zâmbiră neîncrezători.

Au fost mici erori, corectate imediat de Andrew Wiles, apoi Katz a semnalat una mai mare când a analizat articolul de 200 de pagini trimis la *Inventiones Mathematicae*. Această eroare s-a rezolvat abia peste un an, în octombrie 1994, odată cu unele simplificări ale demonstrației.

Andrew Wiles predă două manuscrise complete însumând 130 de pagini, la *Annals of Mathematics*, unde apar în mai 1995.

În 1996, Comitetul Wolf deja acordase lui Wiles și Langlands premiul de o sută de mii de dolari, iar în 1997, Comitetul Wolfskehl din Göttingen, a cărui activitate s-ar fi încheiat în 2007, a înmânat lui Andrew Wiles premiul de 50000 de dolari.

Bibliografie:

- [1]. Singh Simon, *Marea Teoremă a lui Fermat*, Editura Humanitas, București 1998;
- [2]. Ștefănescu Mirela, *15 lecții de istoria matematicii*, Editura Matrix Rom, București 2008.

SUFLETUL MOROMEȚIAN ȘI LOGICA MATEMATICĂ

MOTTO

Sufletele moromeților au colindat, de Sfintele Sărbători ale Crăciunului, prin comuna Siliștea Gumești într-o superbă logică matematică.

1

„**Moromete** deschise ochii și **Niculae** îl văzu. Îl văzu și pe jandarm și pe perceptor și înțelese că aceștia nu vor pleca, iar mama nu va lăsa să i se ia căldarea. Însăpăimîntat, îl văzu atunci pe tatăl său ridicîndu-se încet în capul oaselor”. (*Moromeții* vol.I pag 353)

Căldarea din aramă avea forma unui trunchi de con circular drept cu secțiunea axială un trapez isoscel ortodiagonal cu lungimile bazelor de 80 cm și 60 cm. Câți metri pătrați de aramă avea căldarea ? (presupunem grosimea neglijabilă)

2

„Era chiar **Moromete**. Se apropie, dar încă de departe **Țugurlan** rămase uimit de cît de mare era șira de grîu a acestuia. Tocmai terminase, îi făcea creastă ca unui acoperiș și **Paraschiv** se chinuia greu cu snopii din pricina înalțimii. Parcă era un palat șira lui **Moromete**, un acaret, față de colibele de prin preajmă.” (*Moromeții* vol.I pag 276)

Să presupunem că șira de grâu reprezenta o prismă triunghiulară regulată dreaptă. Fața laterală de pe pămînt reprezenta un dreptunghi cu aria 72 m^2 avînd lungimea, paralelă cu creasta, dublul lățimii. Câte duble de grâu a treierat Moromete, cu batoza lui locan, știind că din $2\sqrt{3} \text{ m}^3$ din șiră el obținea 9 duble de grâu

3

„De la primărie la **Aristide** nu era departe. Mergeau împreună agale. **Aristide** era mai înalt, și cu toate că era elegant în costumul său ușor, de vară, albastru-deschis, cu pălărie moale de pai de orez, atrăgea atenția mai puțin decît **Moromete**, care arăta parcă supărat, și avea o expresie ca și cînd nu singur, ci silit de cineva ar fi mers alături de primar.” (*Moromeții* vol.I pag.166)

Să presupunem că într-o zi Moromete și Aristide au plecat unul către celălalt în același moment unul de la Primărie iar altul de la casa lui. Dacă unul se deplasa cu 30m/min iar celălalt cu 20m/min, iar distanța dintre cele două clădiri era de 1500m, după cît timp se întîlnesc ei ?

4

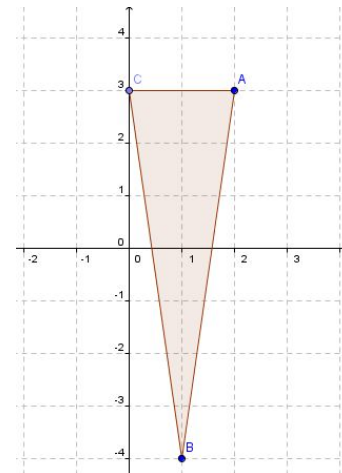
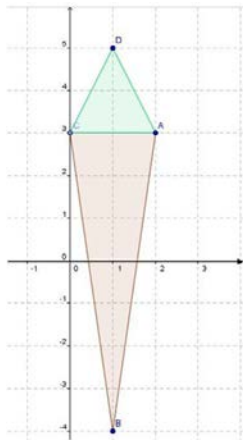
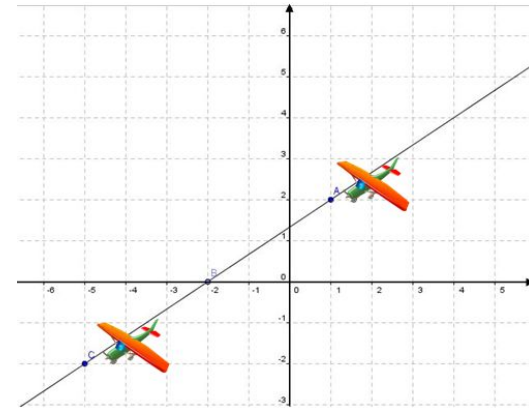
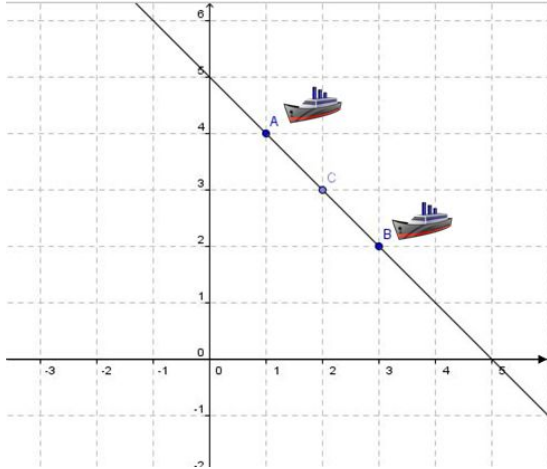
„Învățătorul vorbi timp de cîteva minute și spuse că nu se poate ca un băiat așa cum avea **Moromete** să nu urmeze mai departe o școală superioară. Nu lua în seamă nici un fel de împotrivire. Datorii a avut **Moromete** o viață întreagă și va avea o viață întreagă. Nedîndu-l pe băiat mai departe la școală, nu va scăpa de datorii, dar de nenorocit îl va nenoroci; băiatului îi place cartea și va suferi cît va trăi din pricina asta, n-o să fie niciodată om întreg dacă rămîne în sat.” (*Moromeții* vol.I pag.314)

Să presupunem că acum doi ani Moromete avea 4000 lei datorii. Acum un an datoriile au crescut cu 25%. Cu ce procent trebuie să scadă datoriile, în acest an, pentru a ajunge la suma de acum doi ani ?

5.

Dacă **Niculae** are 40 lei și **Nilă** 85 lei, câți lei trebuie să-i dea **Niculae** fratei lui astfel încât el să aibă un sfert din suma lui **Nilă** ?.

Aplicații (practice) ale determinanților în geometria analitică



Să ne reamintim ...

- Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$
- Care este distanța dintre punctele A și B?

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Care este ecuația dreptei AB determinată de punctele A și B?

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \quad x_A \neq x_B, y_A \neq y_B$$

1. Ecuația dreptei sub forma de determinant

Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

Atunci ecuația dreptei AB sub formă de determinant este :

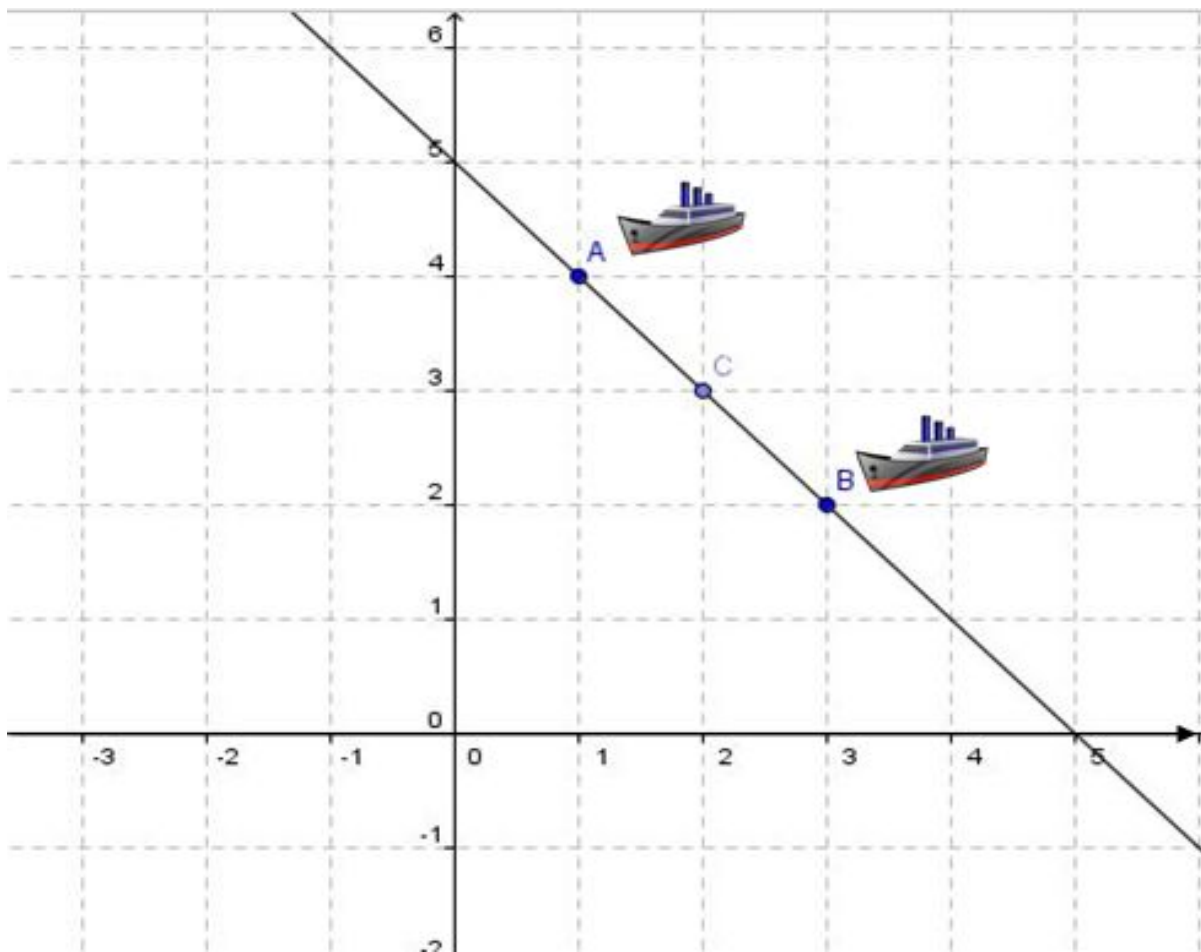
$$AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1. Un vapor străbate oceanul dintre două orașe pe care le vom reprezenta prin punctele A și B.

Prin trasarea unui reper cartezian xOy găsim **A(1,4)** și **B(3,2)**.

Știind că vaporul parcurge această distanță pe cel mai scurt drum, aflați **distanța** dintre punctele A și B și scrieți **ecuația dreptei determinată de cele două puncte**, ecuație care ne va ajuta să descoperim traiectoria drumului parcurs de vapor.

Vaporul va trece și prin punctul **C(2, 3)**?



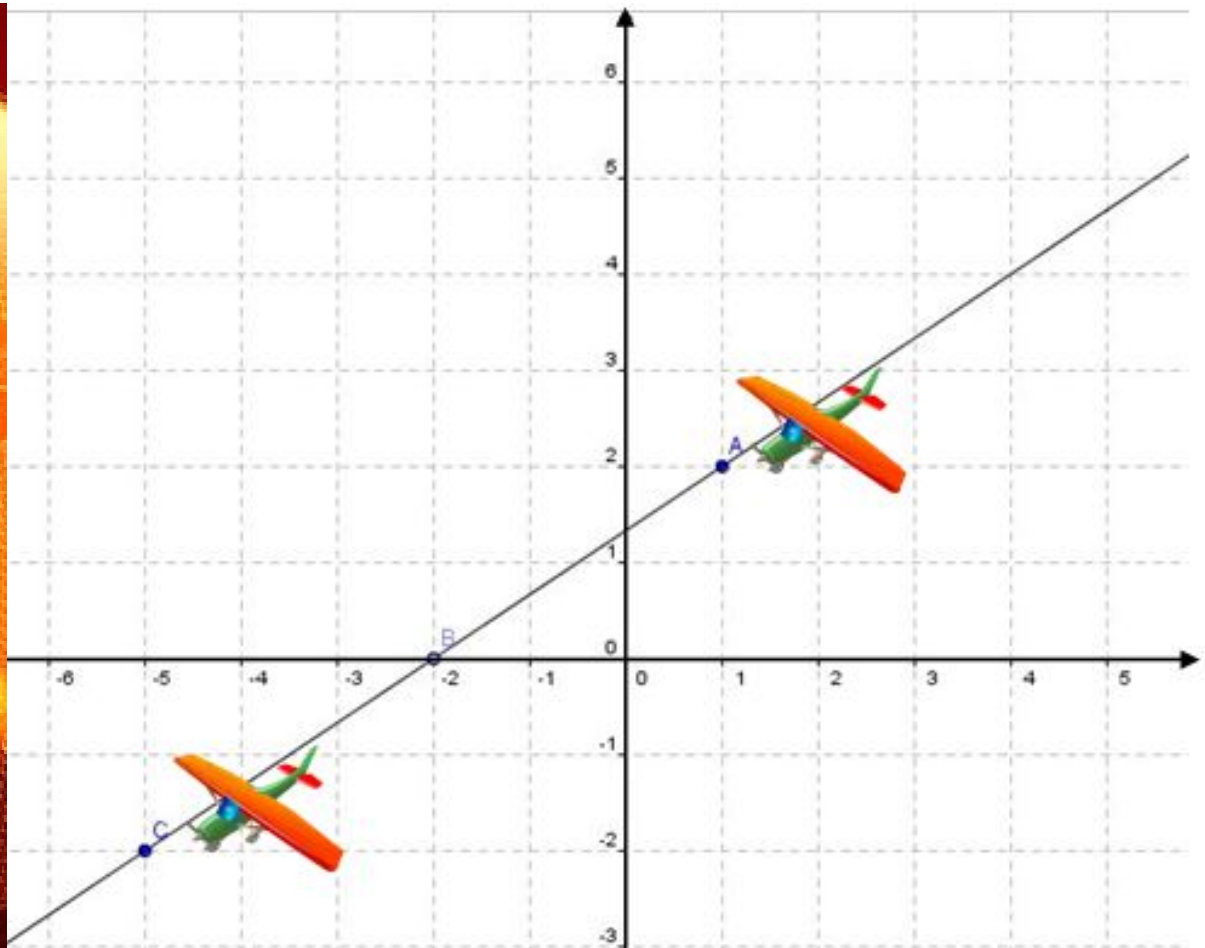
2. Coliniaritatea a trei puncte

Teoremă:

Punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ sunt **coliniare dacă și numai dacă**

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Fie două orașe reprezentate pe o hartă prin punctele A și C. Dacă într-un reper cartezian xOy avem $A(1,2)$ și $C(-5,-2)$, iar în drumul său cel mai scurt de la A la C un avion trece pe deasupra unui oraș $B(m,0)$, aflați m .



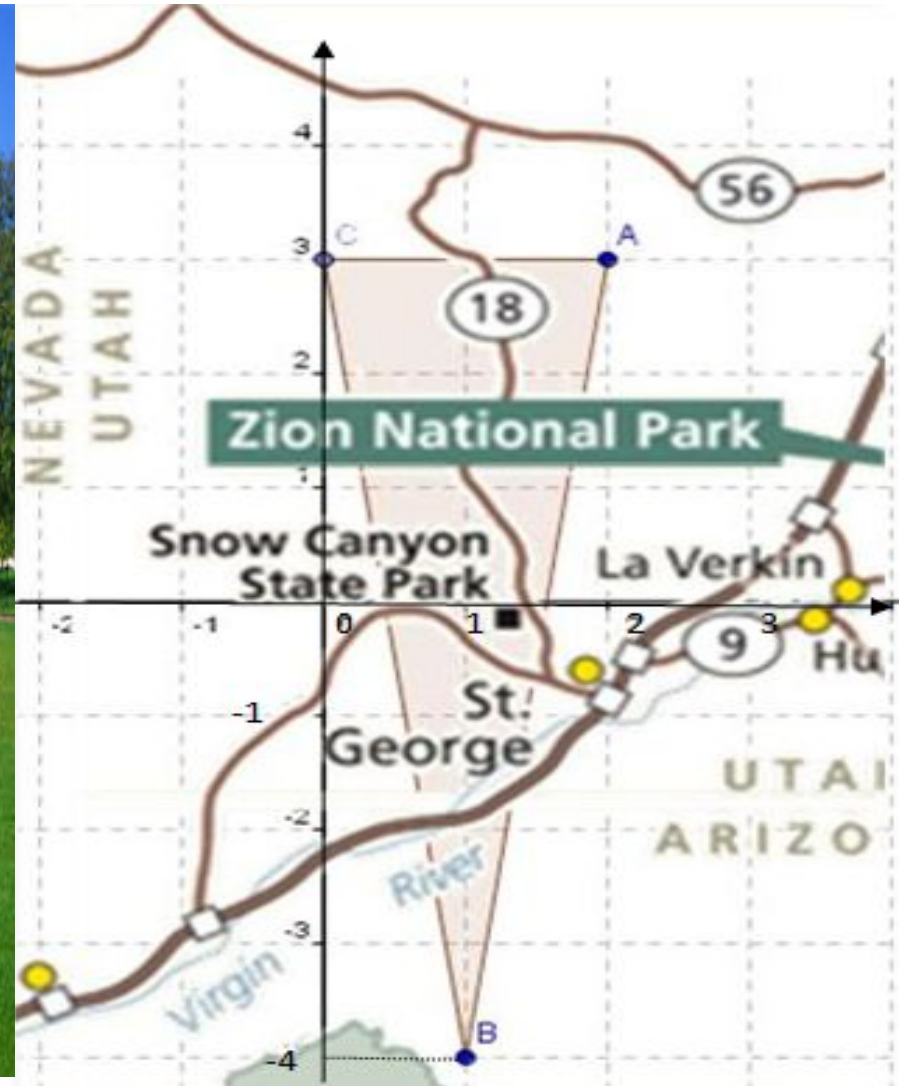
3. Aria unui triunghi

Fie $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$

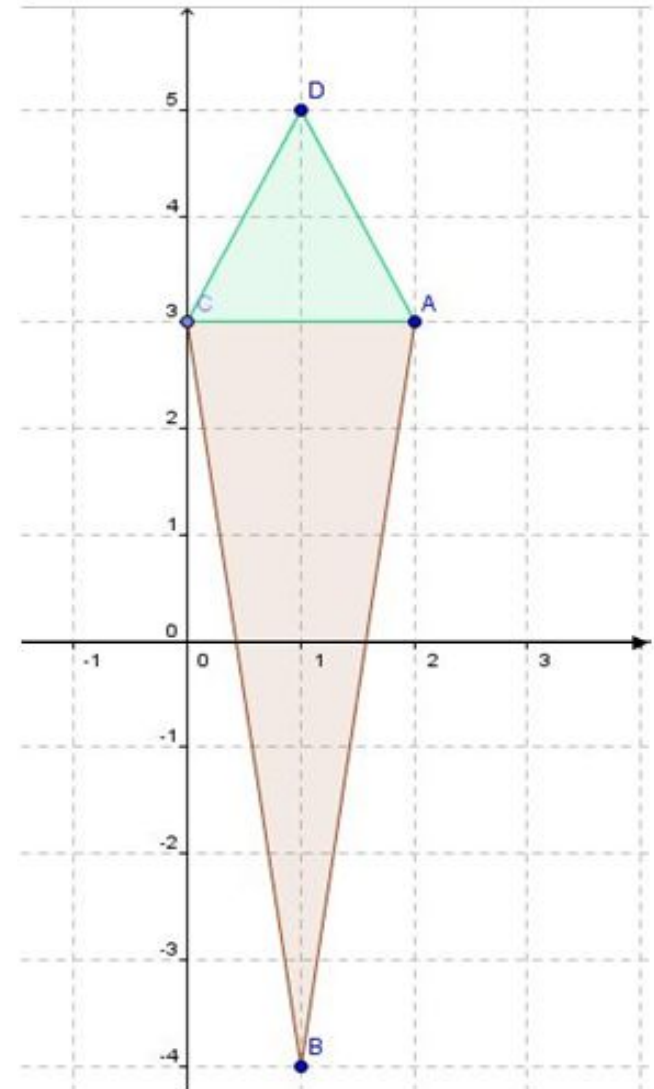
Atunci **aria triunghiului ABC** este :

$$S = \frac{1}{2} |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

3.a) Având o hartă dorim să aflăm aria unui parc în formă de triunghi folosind determinanții. Pentru a realiza acest lucru descoperim **$A(2, 3)$, $B(1, -4)$, $C(0,3)$** , puncte găsite după realizarea unui reper cartezian xOy . Aflați aria parcului.



3. b) Dorim , de asemenea, să calculăm **aria unui teren agricol în formă de patrulater**, ale cărui vârfuri sunt punctele **A(2,3), B(1,-4), C(0,3), D(1, 5)**.
Cum putem calcula această arie folosind determinanții?



4. Problemă propusă în variantele de BAC 2009

- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2, 3n-2), n \in \mathbb{N}$
- a) Să se scrie **ecuația dreptei** determinate de punctele A_1 și A_2 .
- b) Să se calculeze **aria triunghiului** OA_0A_1 .
- c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ punctele A_1, A_2 și A_n sunt **coliniare**.

- Bibliografie
 - Manual cls. a XI a - Mirecea Ganga
 - www.mateinfo.ro
-
- **AUTOR:** Prof. Andrei Octavian Dobre
 - Grupul Școlar de Transporturi Ploiești