Revista Electronică MateInfo.ro
FEBRUARIE

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Așteptăm materiale pentru revistă în fiecare lună pe revistaelectronica@mateinfo.ro

1. APLICAŢII FIZICĂ – GEOMETRIE – ANALIZA MATEMATICĂ (liceu)

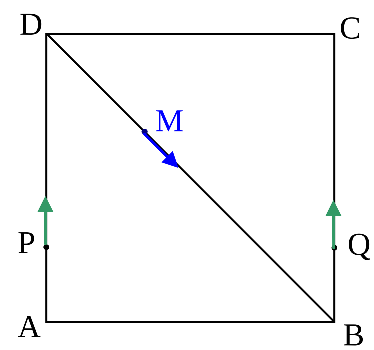
Prof. Poenaru Dan
Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

Aplicaţie

Se dă pătratul $ABCD$ de latură $AB = 1km$. Trei puncte mobile P, M şi Q parcurg în <u>acelaşi timp</u> respectiv distanţele: de la A la D, de la D la B şi de la B la C. Ştiind că fiecare punct mobil parcurge distanţa într-o oră şi îşi păstrează viteza, se cere:

a). Să se studieze variaţia distanţei dintre punctele P şi M ; după câte minute se obţine distanţa minimă?

b). Să se studieze variaţia distanţei dintre punctele Q şi M ; după câte minute se obţine distanţa minimă?



<u>SOLUŢIE:</u> Mai întâi P parcurge distanţa AD într-o oră de unde deducem că viteza acestui mobil este de $1km/h$. Putem nota $V_P = 1km/h$ şi analog $V_M = \sqrt{2}km/h$, $V_Q = 1km/h$.

După x ore cele trei mobile sunt surprinse pe traseu ca în figura alăturată, parcurgând fiecare distanţele AP, DM respectiv BQ. Astfel,

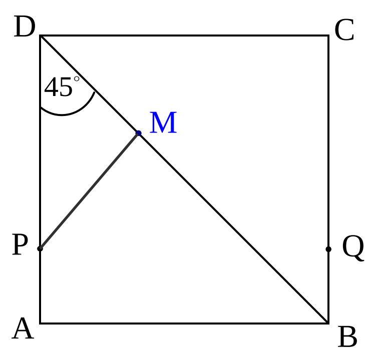
$AP = V_P \cdot x = (1km/h) \cdot xh = xkm$

$DM = V_M \cdot x = (\sqrt{2}km/h) \cdot xh = \sqrt{2}xkm$

Urmărim în continuare triunghiul PDM unde $m(\widehat{PDM}) = 45^\circ$, $DM = \sqrt{2}x,$ $DP = 1 - x$.

Aplicăm teorema cosinusurilor în acest triunghi:

$PM^2 = DP^2 + DM^2 - 2DP \cdot DM \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$



$PM^2 = (1-x)^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x \cdot (1-x) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PM^2 = 5x^2 - 4x + 1$. Se obţine astfel

$PM = \sqrt{5x^2 - 4x + 1}$ ceea ce permite construcţia funcţiei:

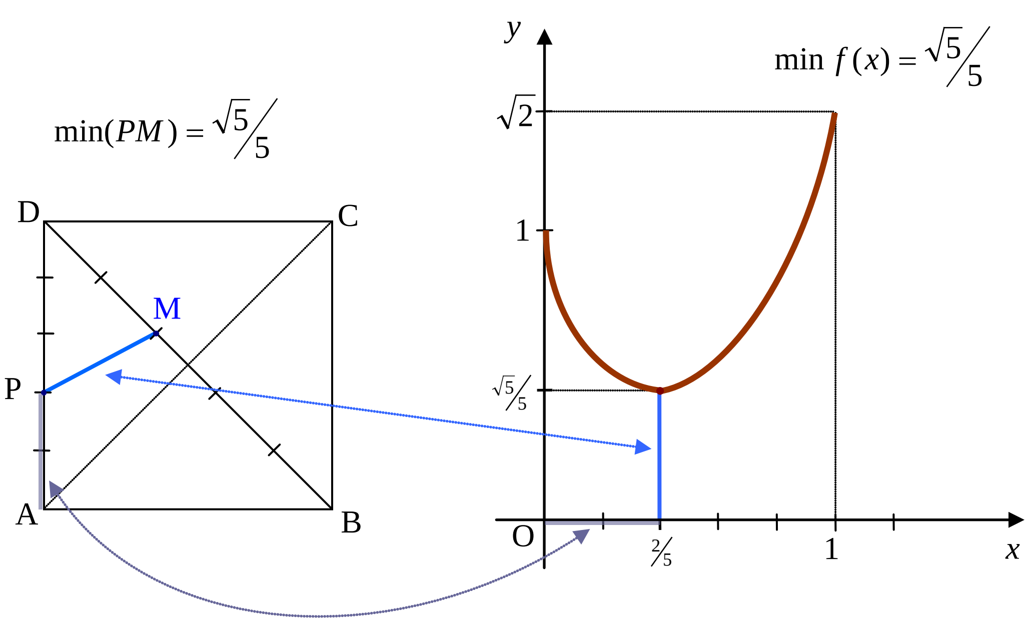
$$f : [0,1] \to R, \quad f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1}$$

Preliminarii pentru întocmirea tabloului de variaţie şi trasarea graficului funcţiei:

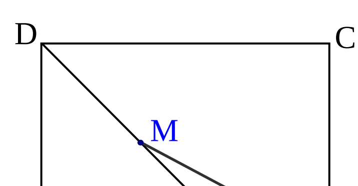
$f(0)=1$ şi $f(1)=\sqrt{2}$. Derivata funcţiei este dată de $f'(x)=\dfrac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$; ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţia $x_0=\dfrac{2}{5}$ iar $f(x_0)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Tabloul de variaţie:

x	0		$2/5$		1
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	
$f(x)$	1	↘↘↘↘↘↘↘	$\sqrt{5}/5$	↗↗↗↗↗↗↗	$\sqrt{2}$



Cea mai mică distanţă dintre punctele M si P este $\sqrt{5}/5$ km şi aceasta este înregistrată după $2/5\ h$, adică după 24 de minute.



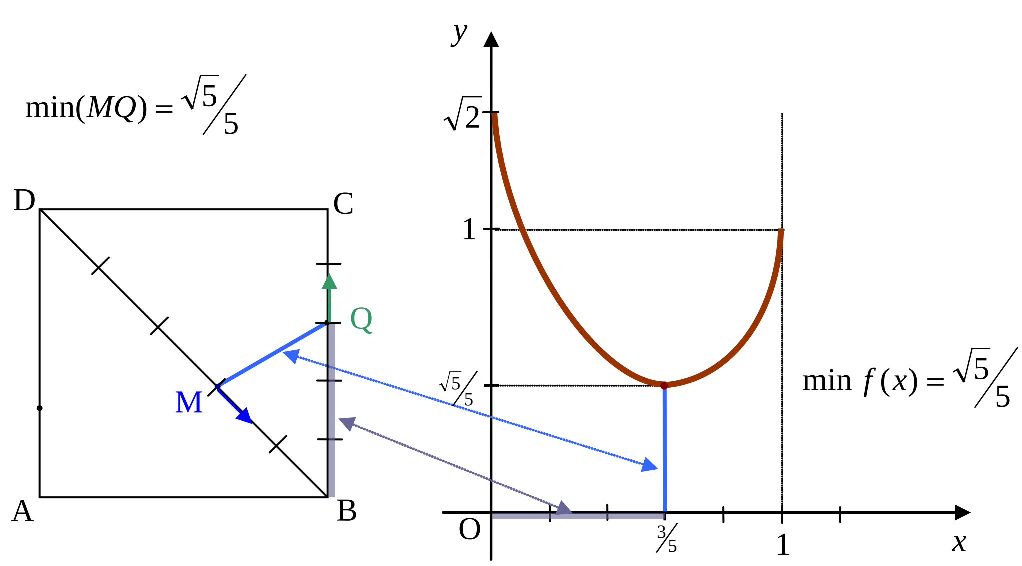
În ce priveşte studiul distanţei dintre punctele M şi Q se urmăreşte triunghiul MBQ unde $BQ = x$, $MB = \sqrt{2}(1-x)$ şi $m(M\hat{B}Q) = 45^\circ$.

Analog aplicăm şi în acest triunghi teorema cosinusurilor şi obţinem $MQ = \sqrt{5x^2 - 6x + 2}$; astfel funcţia corespunzătoare este:

$$f : [0,1] \to R, \quad f(x) = \sqrt{5x^2 - 6x + 2}$$

Tabloul de variaţie şi graficul funcţiei pun în evidenţă aceeaşi distanţă minimă şi pentru punctele M şi Q cu deosebirea că aceasta se obţine după $3/5$ h adică 36 min.

x	0		$3/5$		1
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘↘↘↘↘↘↘	$\sqrt{5}/5$	↗↗↗↗↗↗↗	1



2. Solutions to the problems 5171 and 5173 posted in the *School Science and Mathematics* Journal – october 2011 other than those presented in the *School Science and Mathematics* Journal– January 2012

by TITU ZVONARU[1] and NECULAI STANCIU[2]

- **5171:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  A triangle has integer length sides $x, x+y$, and $x+2y$.

  Part I: Find x and y if the inradius $r = 2011$.

  Part II: Find x and y if $r = \sqrt{2011}$.

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania and Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' Secondary School, Buzău, Romania.

From $x+(x+y) > x+2y$ follows that $x > y$.With usual notations we have

$$s = \frac{3(x+y)}{2}, s-x = \frac{x+3y}{2}, s-(x+y) = \frac{x+y}{2}, \text{ and } s-(x+2y) = \frac{x-y}{2}.$$

By Herron's formula and taking account that $Area = sr$, we deduce successively that

$$s(s-x)[s-(x+y)][s-(x+2y)] = s^2r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x-y}{2} = \frac{3(x+y)}{2}\cdot r^2$$

$$\Leftrightarrow (x+3y)(x-y) = 3\cdot 4\cdot r^2.$$

Part I: $r = 2011$ (prime number) $\Rightarrow (x+3y)(x-y) = 3\cdot 4\cdot 2011^2$.

From $(x+3y)+(x-y) = 2(x+y)$ yields that the numbers $x+3y$ and $x-y$ have the same parity, and because their product is even, yields that $x+3y$ and $x-y$ are even numbers.Also we have that $x+3y > x-y$.

From the above we deduce that we must to solve the following systems

$$\begin{cases} x+3y = 2\cdot 3\cdot 2011^2 \\ x-y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x+3y = 2\cdot 2011^2 \\ x-y = 2\cdot 3 \end{cases}; \begin{cases} x+3y = 2\cdot 3\cdot 2011 \\ x-y = 2\cdot 2011 \end{cases}.$$

Easly you obtain the solutions (exercise !).

Part II: If $r = \sqrt{2011}$ we must to solve the following systems:

$$\begin{cases} x+3y = 2\cdot 3\cdot 2011 \\ x-y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x+3y = 2\cdot 2011 \\ x-y = 2\cdot 3 \end{cases}$$

Easly you obtain the solutions (exercise !).

[1] Comăneşti

[2] Şc. Gen. George Emil Palade, Buzău

- **5173:** *Proposed by Pedro H. O. Pantoja, UFRN, Brazil*

  Find all triples x, y, z of non-negative real numbers that satisfy the system of equations,

$$\begin{cases} x^2(2x^2+x+2) = xy(3x+3y-z) \\ y^2(2y^2+y+2) = yz(3y+3z-x) \\ z^2(2z^2+z+2) = xz(3z+3x-y) \end{cases}$$

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania, and Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' Secondary School, Buzău, Romania.

Adding the equations of the system we obtain successively

$$2\sum x^4 + \sum x^3 + 2\sum x^2 = 3\sum x^2 y + 3\sum xy^2 - 3xyz$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum x^3 + 3xyz - \sum x^2 y - \sum xy^2\right) + \left(2\sum x^4 + 2\sum x^2 - 2\sum x^2 y - 2\sum xy^2\right) = 0.$$

By Schur's inequality we have that

$$\left(\sum x^3 + 3xyz - \sum x^2 y - \sum xy^2\right) \geq 0,$$

and by AM-GM $\left(x^4 + y^2 \geq 2x^2 y; x^2 + y^4 \geq 2xy^2 ...\right)$ we have that

$$\left(2\sum x^4 + 2\sum x^2 - 2\sum x^2 y - 2\sum xy^2\right) \geq 0.$$

We deduce that

$$\left(\sum x^3 + 3xyz - \sum x^2 y - \sum xy^2\right) = 0 \ ,$$

and

$$\left(2\sum x^4 + 2\sum x^2 - 2\sum x^2 y - 2\sum xy^2\right) = 0$$

Hence we have equality in the first bracket if and only if

(i) $x = 0, y = z$ (and their permutations).We follows easily that $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$, so we obtain the solution $(x, y, z) = (0,0,0)$;

(ii) $x = y = z$.Replacing in the system we obtain the solution $(x, y, z) = (1,1,1)$.

So,

$$(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,1,1)\}.$$

3.AVEM SAU NU NEVOIE DE GEOMETRIE?

Prof. IULIANA PASCA
LICEUL CU PROGRAM SPORTIV BISTRITA

Geometria este cea mai bună şi mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecăţii şi raţiunii.''
Denis Diderot

Geometria înseamnă în primul rând imaginaţie şi ingeniozitate. Evidenţa grafică joacă un mare rol în formarea şi în căştigarea încrederii în raţionamentul propriu. Frumuseţea rezultatului poate compensa lipsa unei utilităţi imediate.

Nimeni n-o să spună că geometria e lipsită de aplicaţii. Unele le trăim, le practicăm, instinctiv în viaţa de toate zilele, altele sunt folosite de unii dintre noi în diverse domenii, câteodată chiar punând mâna pe hârtie şi creion.

Însă nu aplicaţiile sunt cele care menţin această geometrie în viaţă ci acel inefabil, acea căutare perpetuă de frumos: un punct remarcabil, un cerc cu proprietăţi curioase, distanţe magice egale de anumite repere,etc.

Studiul geometriei are o deosebită importanţă în formarea la elevi a gândirii matematice, în dezvoltarea capacităţii de utilizare interdisciplinară a acestora. Scopul matematicii în general este ”să-i înveţe pe tineri SĂ GÂNDEASCĂ. ***„A-l învăţa pe elev să gândească”***-spunea **Polya-** ***“înseamnă că profesorul de matematică nu trebuie atâta să comunice informaţii, cât să caute să dezvolte priceperile elevului de a folosi informaţiile dobândite”.*** Pentru a putea face geometrie este nevoie într-adevăr de o mare flexibilitate a gândirii, a gândirii creatoare, de ceea ce se numeşte „***minte organizată***”.

Cineva spunea că o problemă de geometrie rezolvată complet satisfăcător, nu este ***punct terminus***; în timp ce serveşte scopului propus în mod conştient, ea devine şi o sursă pentru noi implicaţii, sugestii, probleme adiacente.

În mod deosebit geometria este chemată să dezvolte gândirea elevilor, mai ales gândirea vie, activă şi complexă, gândirea dialectică; capacitatea de a analiza şi generaliza, de a extrage esenţialul, de a schematiza realitatea păstrând numai aspectele matematice, deprinderea de a căuta şi a deprinde legăturile raţionale dintre fapte, iniţiativa personală în gândire. În procesul demonstraţiilor şi al rezolvării problemelor de geometrie, prin deosebirea implicaţiilor şi prin parcurgerea raţionamentelor care le dovedesc, se urmăreşte dezvoltarea gândirii sub aspectul logic formal: înţelegerea şi folosirea definiţiilor logice, a raţionamentelor, astfel ca ele să devină pentru elev mijloace proprii de convingere în învăţarea matematicii.

În însuşirea noţiunilor de geometrie se urmăreşte ca toate cunoştinţele dobândite să devină pentru elevi bunuri proprii, instrumente de lucru, nu numai să fie reţinute pur şi simplu. De aceea, scopul instructiv-educativ se împleteşte strâns cu activitatea concretă, practică.

Asimilarea geometriei urmăreşte o spirală ce porneşte de la intuirea vie a relaţiilor obiective; pe această spirală se pun în acord cu intuiţia un număr crescând de propoziţii din ce în ce mai abstracte; aceste propoziţii devin „cărămizile” din care se construiesc edificiile teoriilor abstracte. Anumite porţiuni din spirala asimilării geometriei sunt parcurse în învăţământul preşcolar, altele în clasele primare, în gimnaziu, în liceu.

Importanţa studierii în scoală este logică şi indispensabilă aşa cum reiese şi din ceea ce spunea Grigore Moisil: **“Azi facem geometrie ce va fi folosită mâine şi mai ales poimâine, că dacă n-am face-o azi, poimâine ar trebui să o importăm”**

BIBLIOGRAFIE:

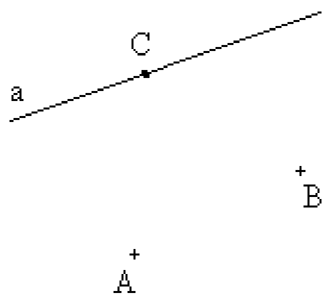
1. **Câmpan F.T.** -*„Aventura geometriilor neeuclideine”, Ed. Albatros, Bucureşti, 1983.*
2. **Cârjan F.** -*„Didactica matematicii”, Ed. Corint, Bucureşti, 2002.*
3. **Duican L.** -*„Prin labirintul geometriei”, Ed. Albatros, Bucureşti, 1990.*
4. **Văcăreţu A.S.** -*„Lecţii de matematică pentru dezvoltarea gândirii critice”, Ed. Eikon, Cluj-Napoca, 2008.*

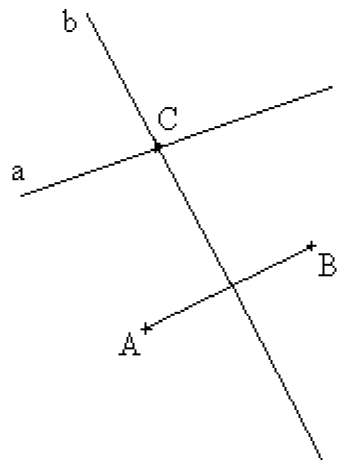
4. PROBLEME DE CONSTRUCŢII GEOMETRICE

Prof. Gogan Gabriela
Şcoala cu clasele I-VIII Nr.1 ″Nicolae Labiş″ Mălini, com. Mălini, jud. Suceava

1)Pe o dreaptă dată a, să se găsească un punct egal depărtat de două puncte date, A şi B, care nu aparţin dreptei.

Fie dreapta a şi punctele A, B$\notin$*a.*



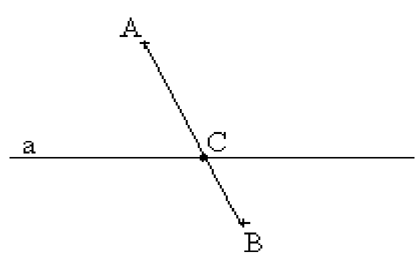


Construim mediatoarea segmentului [AB], notată b; a$\cap$*b ={C}. Cum orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului, va rezulta că CA=CB şi deci C este punctul căutat.*■

2)Pe o dreaptă a, să se găsească un punct pentru care suma distanţelor la două puncte date este minimă.

Fie dreapta a şi punctele A, B. Avem de analizat două situaţii:

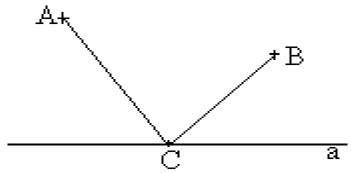
i)Punctele A şi B se află de o parte şi de alta a dreptei a.

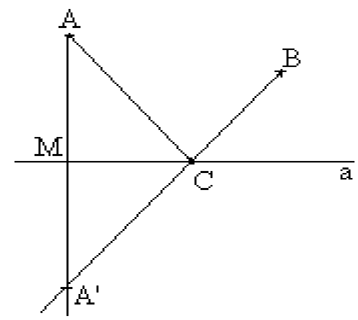


Construim dreapta determinată de punctele A şi B şi notăm AB$\cap$*a={C}.*

CA+CB=AB şi deci punctul C aflat la intersecţia dreptei AB cu dreapta a este punctul căutat.

ii) Punctele A şi B se află de aceeaşi parte a dreptei a.





Construim punctul A' -simetricul punctului A față de dreapta a și notăm $AA' \cap a=\{M\}$, $BA' \cap a=\{C\}$. $\Delta CAM \equiv \Delta CA'M$ *(L.U.L.)* $\Rightarrow CA=CA'$.

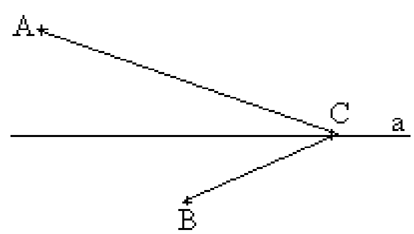
$CA+CB$ *este minimă* $\Leftrightarrow$ $CA'+CB$ *este minimă* $\Leftrightarrow$ *A',C,B sunt colineare.*

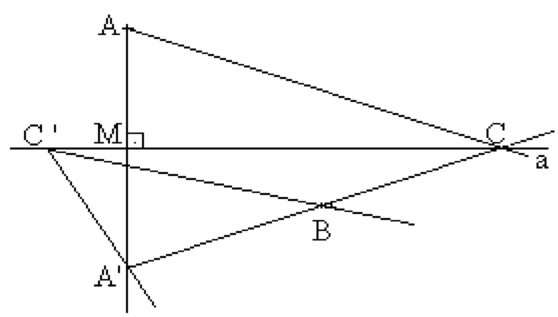
Așadar, punctul C căutat se află la intersecția dreptei A'B cu dreapta a, unde A' este simetricul punctului A față de dreapta a. ■

3)Pe o dreaptă dată a, să se găsească un punct pentru care diferența distanțelor la două puncte date este maximă.

Fie dreapta a și punctele A, B. Avem de analizat două situații:

i)Punctele A și B se află de o parte și de alta a dreptei a.

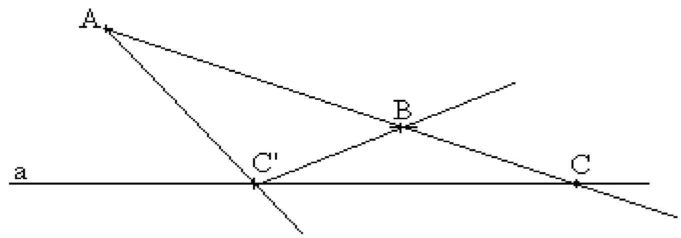




Construim punctul A' -simetricul punctului A față de dreapta a și notăm $AA' \cap a=\{M\}$, $BA' \cap a=\{C\}$.

$\Delta CAM \equiv \Delta CA'M$ (L.U.L.) $\Rightarrow CA=CA'$; $CA-CB=CA'-CB=A'B$. Considerăm C' un punct oarecare al dreptei a; în $\Delta A'BC'$: $A'B>|C'A'-C'B|$ $\Rightarrow CA-CB>|C'A'-C'B|$, $(\forall)C'\in a$ $\Rightarrow$diferența CA–CB este maximă. Așadar, punctul C căutat se află la intersecția dreptei A'B cu dreapta a, unde A' este simetricul punctului A față de dreapta a.

ii) Punctele A și B se află de aceeași parte a dreptei a.

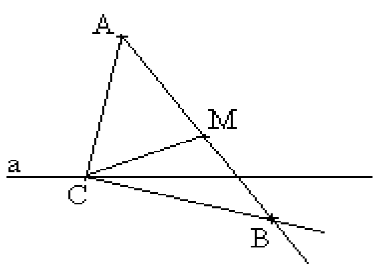


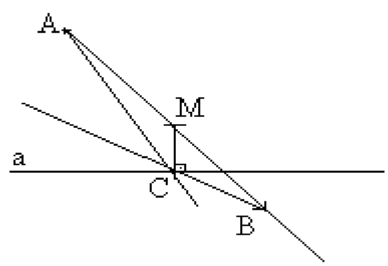
Fie AB∩a={C}; AB=CA–CB. Considerăm C' un punct oarecare al dreptei a; în ΔABC': AB>|C'A–C'B| ⇒CA–CB>|C'A–C'B|, (∀)C'∈a⇒diferenţa CA–CB este maximă.

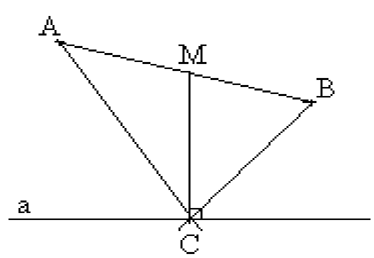
Aşadar, punctul C căutat se află la intersecţia dreptei AB cu dreapta a. ■

4)Pe o dreaptă dată a, să se găsească un punct pentru care suma pătratelor distanţelor la două puncte date ce nu aparţin dreptei este minimă.

Fie dreapta a şi punctele A, B.



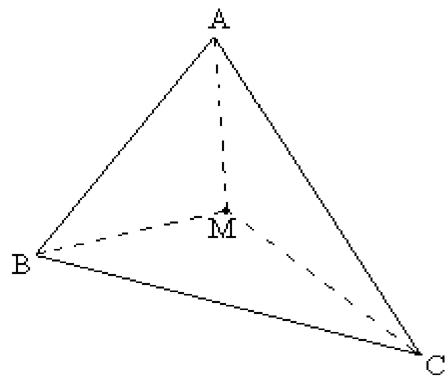


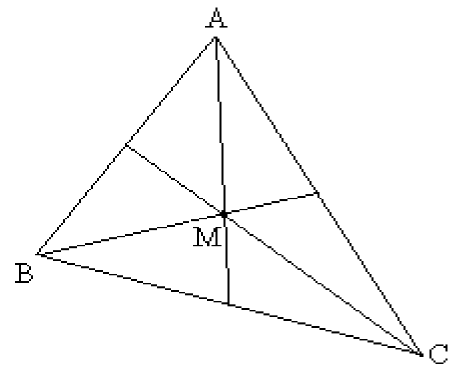


Fie C∈a şi M -mijlocul segmentului [AB]. În ΔABC: [CM] este mediană $\Rightarrow \frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=MC^2 \Rightarrow CA^2+CB^2=\frac{AB^2}{2}+2MC^2$ ⇒suma CA^2+CB^2 este minimă dacă $\frac{AB^2}{2}+2MC^2$ este minimă; dar cum AB este constant, rezultă că MC trebuie să fie minim, adică MC⊥a. Aşadar, pentru a construi punctul C pentru care suma pătratelor distanţelor la punctele date A şi B să fie minimă, construim M, mijlocul segmentului [AB], apoi perpendiculara din M pe dreapta a.■

5)În interiorul triunghiului ABC, să se găsească un punct M, pentru care suma $MA^2+MB^2+MC^2$ să fie minimă.

Fie ΔABC şi punctul M∈intΔABC.

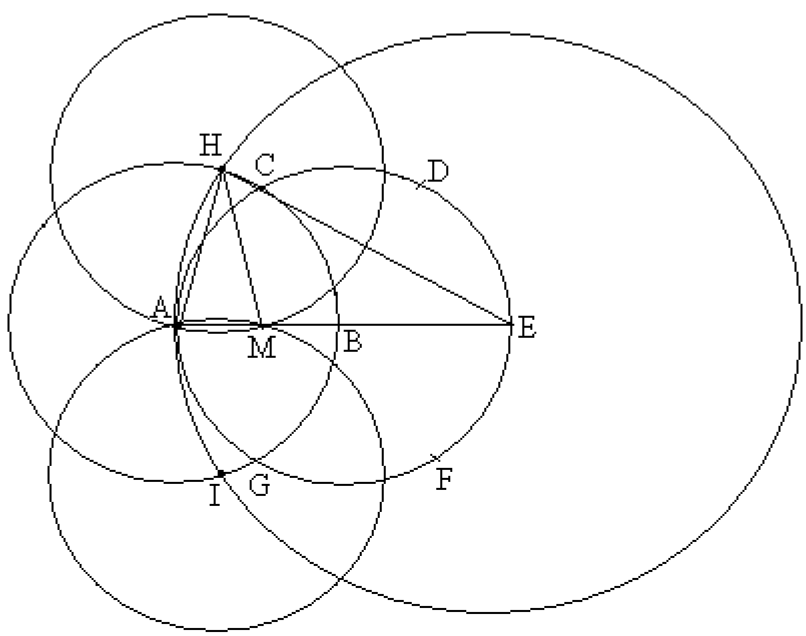




Presupunând MA constant, minimul sumei MB^2+MC^2 are loc atunci când M∈medianei din A (problema 4); la fel, presupunând MB şi MC constante, se găseşte că punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC. ■

6)Să se construiască numai cu compasul, mijlocul unui segment.

Fie segmentul [AB].

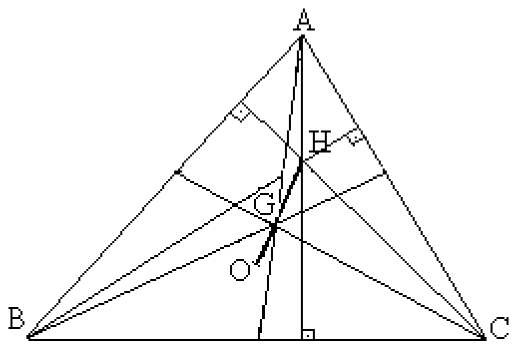


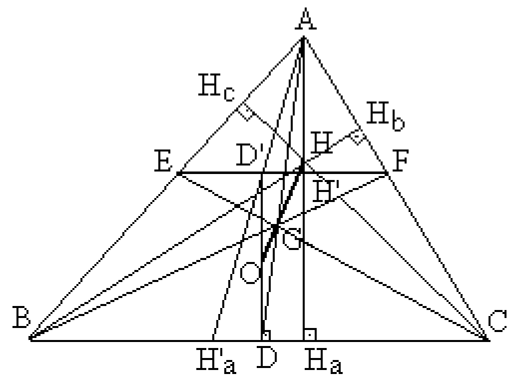
Construim cercul *C*(B, AB) şi determinăm pe acest cerc vârfurile hexagonului regulat ACDEFG. Construim *C*(E, AE) şi *C*(A, AB), care se intersectează în punctele H şi I, apoi *C*(H, AB) şi *C*(I, AB), care se intersectează a doua oară în punctul M. M este punctul căutat:

Din A, M∈*C*(H, AB) ⇒HA=HM; A, H∈*C*(E, AE) ⇒EA=EH; ∢HAM≡∢EHA ⇒ΔHAM~ΔEHA ⇒ $\frac{HM}{EA}=\frac{AM}{AH}\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow AM=\frac{AB}{2}$ ⇒punctul M este mijlocul segmentului [AB].■

7)În planul triunghiului ABC se dă ortocentrul H şi centrul de greutate G. Să se construiască numai cu rigla sau numai cu compasul centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

i)Construcţia numai cu rigla





Punctele H (ortocentrul), G (centrul de greutate) şi O (centrul cercului circumscris) sunt coliniare (dreapta lui Euler) şi HG =2GO.Această observaţie conduce la construcţia punctului O.

Presupunem figura construită.

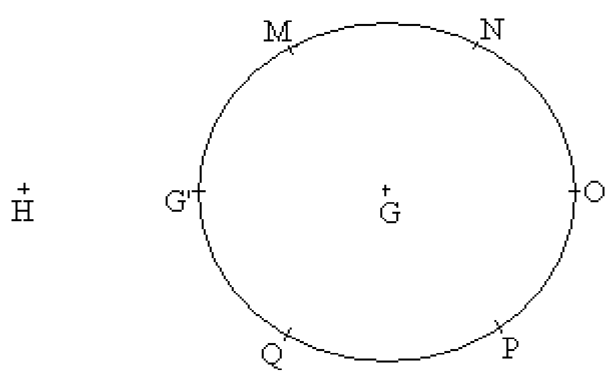
$AG\cap BC=\{D\}$, $BG\cap AC=\{F\}$, $CG\cap AB=\{E\}$; $AH\cap BC=\{H_a\}$, $BH\cap AC=\{H_b\}$, $CH\cap AB=\{H_c\}$. Din $E\in AB$, $AE=EB$ si $F\in AC$, $AF=FC \Rightarrow EF//BC$; notând $EF\cap AH_a=\{H'\}$ vom avea $AH'=H'H_a$.

Fie $H'G\cap BC=\{H_a'\}$. Deoarece $AH'=H'H_a \Rightarrow [H_a'H']$ este mediană în $\Delta\, H_a'H_aA$ şi cum $GD=\dfrac{AD}{3} \Rightarrow H_a'D=DH_a$.

Fie $AH_a'\cap EF=\{D'\}$; cum $AE=EB$ si $EF//BC \Rightarrow AD'=D'H_a'$. Din $H_a'D=DH_a$ şi $AD'=D'H_a' \Rightarrow DD'//D'H_a'$ şi cum $AH_a\perp BC \Rightarrow DD'\perp BC$. Deoarece punctul O se află pe DD' şi pe HG $\Rightarrow O\in DD'\cap HG$.

$\Delta GOD\sim\Delta GHA \Rightarrow \dfrac{OD}{HA}=\dfrac{OG}{HG}=\dfrac{GD}{GA}\Rightarrow\dfrac{OG}{HG}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow HG=2OG$.

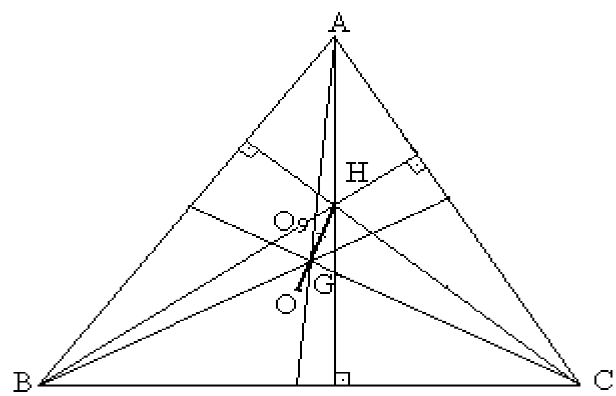
ii)Construcţia numai cu compasul



Construim punctul G' –mijlocul segmentului [GH] (numai cu compasul), apoi construim punctul O –simetricul lui G' faţă de G: pe circumferinţa cercului *C*(G, GG'), se iau punctele M, N, O, P, Q astfel încât G'MNOPQ este hexagon regulat, în care G'O este diagonală.

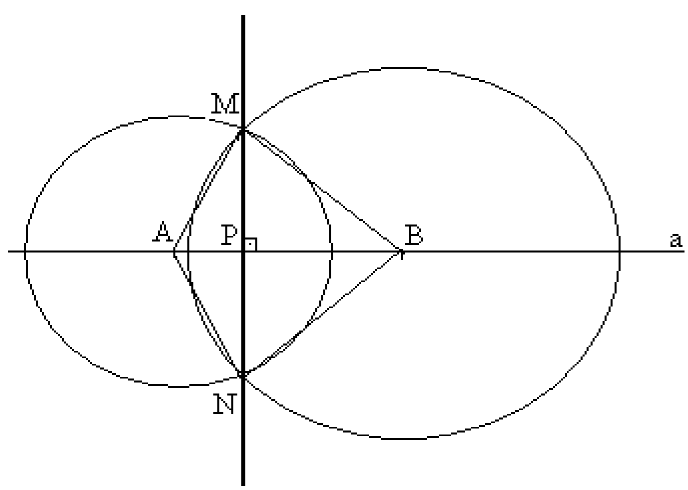
Aşadar, OG=GG'=G'H $\Rightarrow$2OG=GH.■

Observaţie: Tot pe dreapta OH şi anume la mijlocul segmentului [OH], se află punctul O_9 –centrul cercului celor nouă puncte (cercul lui Euler), care trece prin mijloacele laturilor, prin picioarele înălţimilor şi prin mijloacele segmentelor [AH], [BH], [CH]. Din construcţia precedentă, rezultă că dacă se dau două din punctele O, G, H, O_9, atunci se pot construi şi celelalte două.



8)Să se construiască o dreaptă perpendiculară pe o dreaptă dată.

Fie dreapta a $\Rightarrow$($\exists$)A, B$\in$a.



Construim două cercuri de centre A şi B, astfel încât intersecţia lor să fie formată din două puncte; C(A, r_1)$\cap$C(B, r_2)={M, N}. Dovedim că MN$\perp$a:

ΔMAB$\equiv\Delta$NAB (L.L.L.) $\Rightarrow\sphericalangle$MAB$\equiv\sphericalangle$NAB.

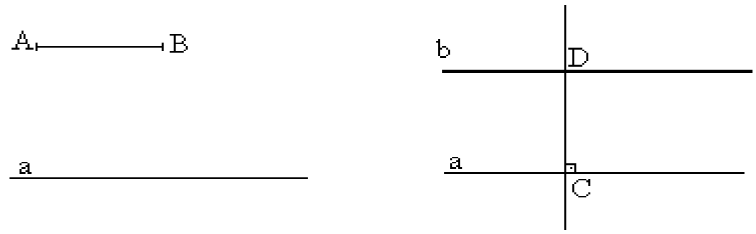
ΔMAN este isoscel şi [AP] este bisectoare $\Rightarrow$AP$\perp$MN, deci MN$\perp$a. ■

Observaţii:

1)Când r_1=r_2, punctul P este mijlocul segmentului [AB].

2)Variind razele r_1 şi r_2, sau numai pe una din ele, se obţin oricâte drepte MN perpendiculare pe dreapta a.

9)Să se construiască o paralelă la o dreaptă dată, la o distanţă dată.
Fie dreapta a şi segmentul [AB], a cărui lungime este distanţa dată.

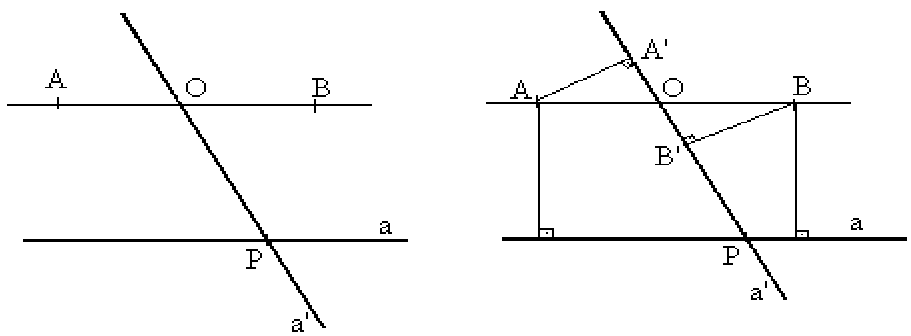


Considerăm C∈A şi construim perpendiculara în punctul C, pe dreapta a.Pe această perpendiculară, construim punctul D, astfel încât CD =AB, apoi construim paralela (notată b) prin punctul D, la dreapta a.

b//a ⇒d(b, a)=d(D, a)=DC=AB. ■

10)Prin punctul P, să se construiască o dreaptă la egală distanţă de punctele date, A şi B.

i)Dacă punctele P, A, B sunt necoliniare:



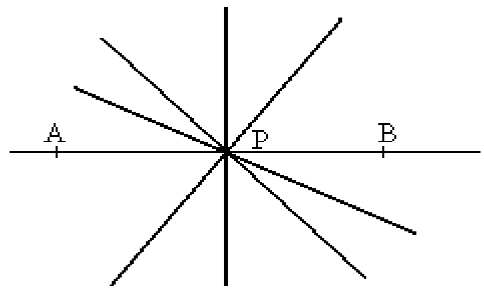
Construim a//AB, P ∈AB ⇒d(A, a) =d(B, a) ⇒dreapta a îndeplineşte condiţiile din enunţ.

Fie O –mijlocul segmentului [AB]; OP =a' este o altă dreaptă care îndeplineşte condiţiile din enunţ:

Dacă AA'⊥a', BB'⊥a', A', B'∈a', avem că ΔAOA'≡ΔBOB'(I.U.) ⇒AA'=BB' ⇒d(A, a')=d(B, a'). Aşadar, problema are în acest caz, două soluţii –dreptele a şi a'.

ii)Dacă punctele A, B, P sunt coliniare, P nefiind mijlocul segmentului [AB], dreapta căutată este AB.

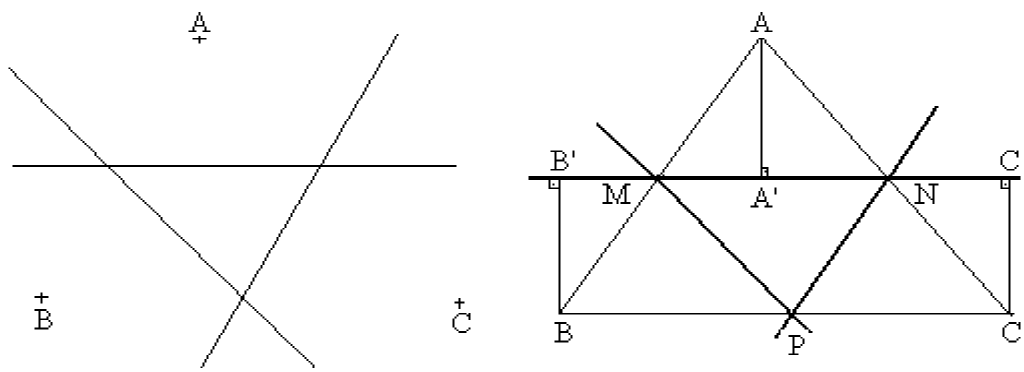
iii)Dacă punctul P este mijlocul segmentului [AB], problema are o infinitate de soluţii: orice dreaptă care trece prin P.



■

11)Să se construiască o dreaptă, la egală distanţă de punctele A, B şi C.

i)Dacă punctele A, B, C sunt necoliniare



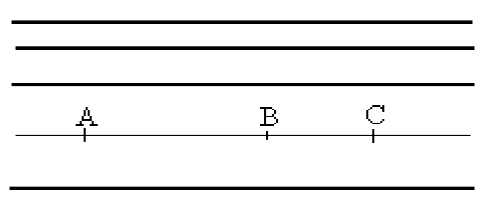
Construim mijloacele laturilor [AB] şi [AC]; $M\in AB$, $AM=MB$, $N\in AB$, $AN=NC$. Fie $AA'\perp MN$, $BB'\perp MN$, $CC'\perp MN$.

$\Delta BB'M\equiv\Delta AA'M$ (I.U.) $\Rightarrow BB'=AA'$; $\Delta CC'N\equiv\Delta AA'N$ (I.U.) $\Rightarrow CC'=AA'$. Aşadar, $AA'=BB'=CC'$ $\Rightarrow d(A, MN)=d(B, MN)=d(C, MN)$ $\Rightarrow MN$ este dreapta căutată.

Construind mijlocul laturii [BC], $P\in BC$, $BP=PC$, atunci şi dreptele PM şi PN îndeplinesc condiţiile din problemă.

În această situaţie, soluţiile problemei sunt cele trei drepte determinate de mijloacele laturilor triunghiului.

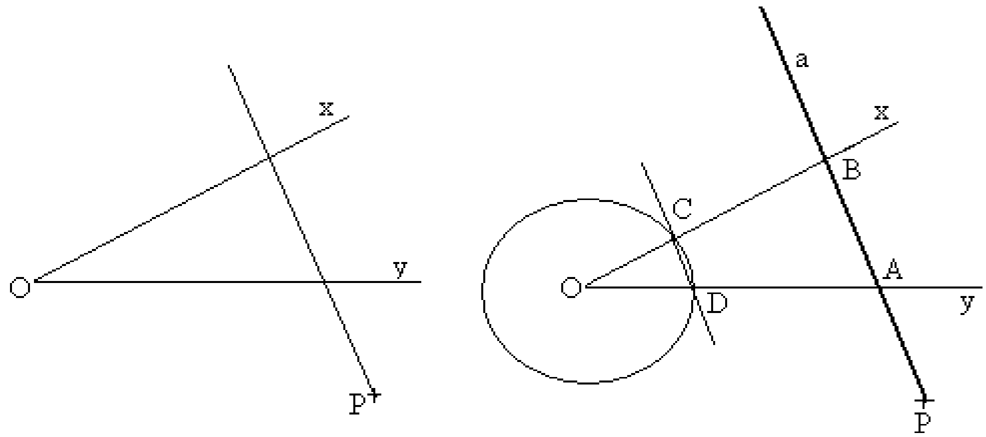
ii) Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, problema are o infinitate de soluţii –orice dreaptă paralelă cu dreapta determinată de cele trei puncte.



■

12)Prin punctul P, să se ducă o dreaptă care să taie laturile unghiului ∢xOy în A şi B, astfel încât OA =OB.

Fie ∢xOy şi punctul P.



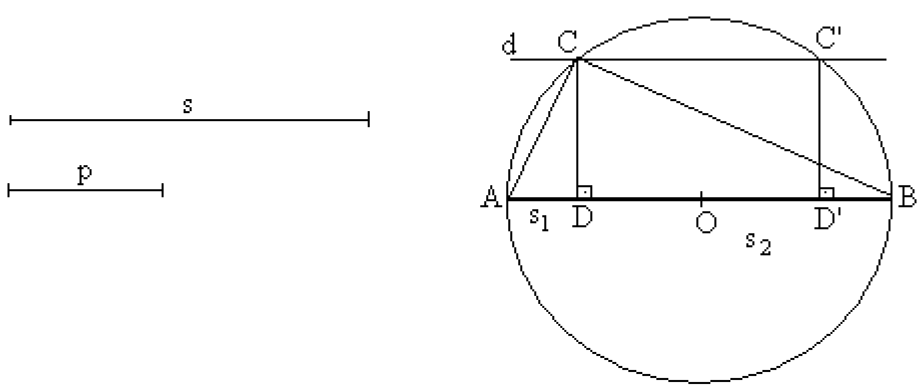
Construim cercul $\mathcal{C}(O, r)$; $\mathcal{C}(O, r)\cap[Ox = \{C\}$, $\mathcal{C}(O, r)\cap[Oy = \{D\}$.

Construim prin P, paralela la CD, care intersectează laturile unghiului $\sphericalangle xOy$ în A şi B, $a\cap[Ox = \{A\}$, $a\cap[Oy = \{B\}$. OC=OD, CD//AB $\Rightarrow$OA=OB $\Rightarrow$a=AB este dreapta căutată. ■

13)Să se construiască două segmente cunoscând suma şi produsul lor.

Notăm lungimile segmentelor necunoscute cu s_1 şi s_2;

s –lungimea segmentului sumă, $s=s_1+s_2$ şi cu p –lungimea segmentului a cărui pătrat este egal cu produsul dat, $p^2=s_1s_2$.



Construim cercul de diametru AB =s, apoi paralela d la dreapta AB, la distanţa p, care intersectează cercul în punctele C şi C'.

Construim $CD\perp AB$, $C'D'\perp AB$, $D, D'\in AB$.

Segmentele [AD] şi [DB] (respectiv [AD'] şi [D'B]) îndeplinesc condiţiile din enunţ:

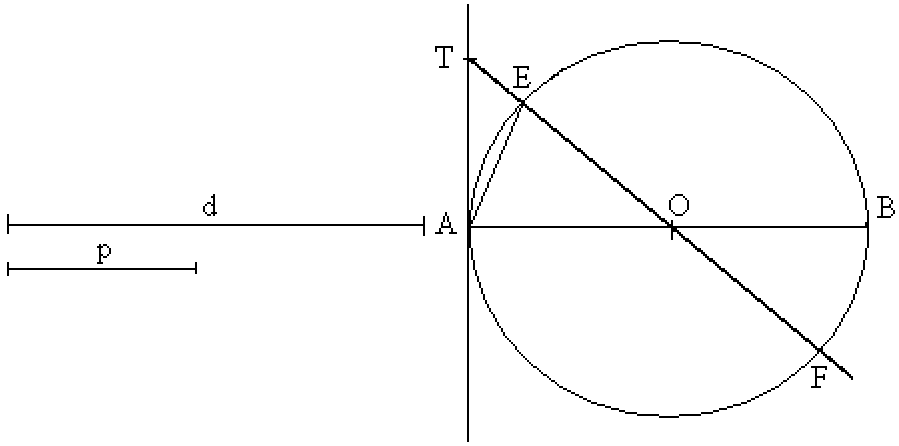
$AD+DB=AB=s=s_1+s_2$, $(AD'+D'B=AB=s=s_1+s_2)$; $AD\cdot DB=CD^2=p^2=s_1s_2$, $(AD'\cdot D'B=C'D'^2=p^2=s_1s_2)$.

Observaţie: Problema are soluţie dacă $p\leq\frac{s}{2} \Leftrightarrow s_1s_2 \leq \frac{(s_1+s_2)^2}{4} \Leftrightarrow (s_1-s_2)^2 \geq 0$.■

14)Să se construiască două segmente, cunoscând diferenţa şi produsul lor.

Notăm lungimile segmentelor necunoscute cu s_1 şi s_2;

d –lungimea segmentului diferenţă, $d=s_1-s_2$ şi cu p –lungimea segmentului a cărui pătrat este egal cu produsul dat, $p^2=s_1s_2$.



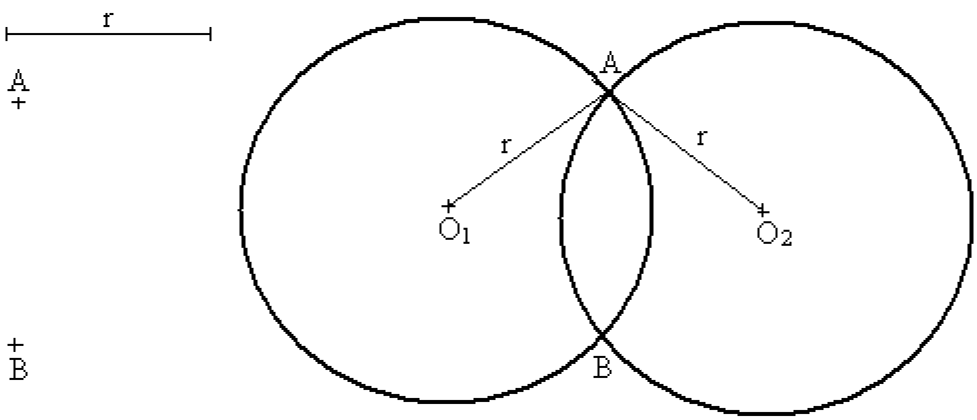
Construim cercul de diametru AB=d, apoi tangenta TA la cerc, în puctul A, TA=p.

$C(O, \frac{AB}{2})\cap TO=\{E, F\}$. Segmentele [TE] şi [TF] îndeplinesc condiţiile din enunţ:

$TF-TE=EF=AB=d$; $\Delta ATE\sim\Delta FTA$(U.U.) $\Rightarrow \frac{AT}{FT}=\frac{AE}{FA}=\frac{TE}{TA}\Rightarrow AT^2=TF\cdot TE \Rightarrow p^2=TF\cdot TE$.■

15)Să se construiască un cerc, dacă sunt date două puncte de pe circumferinţa lui şi raza.

Fie A şi B puncte de pe cerc şi r –raza.



Construim două arce de cerc de centre A şi B şi rază r, $C(A, r)\cap C(B, r)=\{O_1, O_2\}$ (problema are soluţie dacă AB<2r).

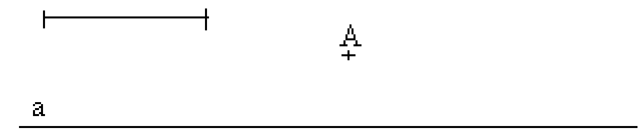
$C(O_1, r)$ şi $C(O_2, r)$ îndeplinesc condiţiile din enunţ:

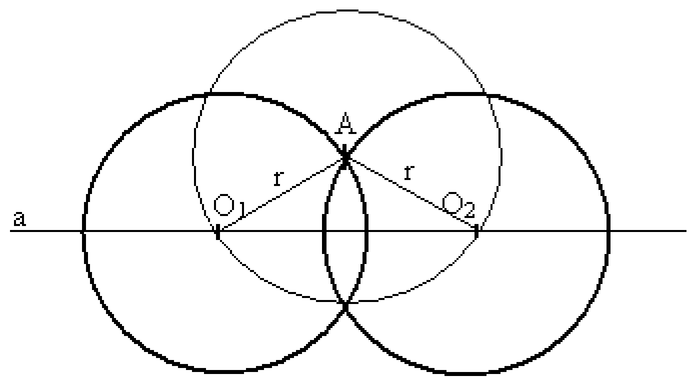
$A, B\in C(O_1, r)\cap C(O_2, r)$. ■

16)Să se construiască un cerc de rază dat, r, cu centrul pe o dreaptă dată,a , care trece printr-un punct dat , A.

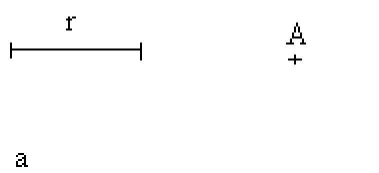
Fie dreapta a, punctul A şi segmentul de lungime r. Construim C(A, r).

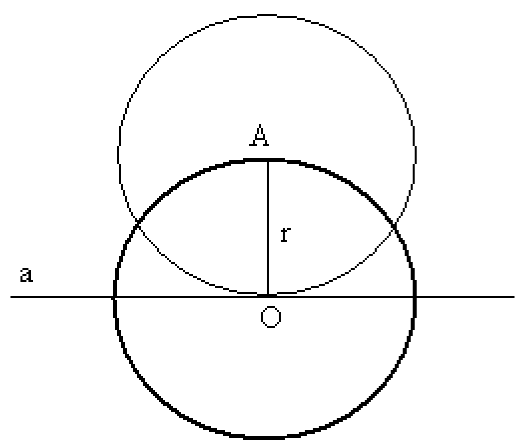
i)Dacă C(A, r)∩a ={O_1, O_2}, problema are două soluţii: C(O_1, r) şi C(O_2, r) au centrele pe dreapta a şi conţin punctul A.



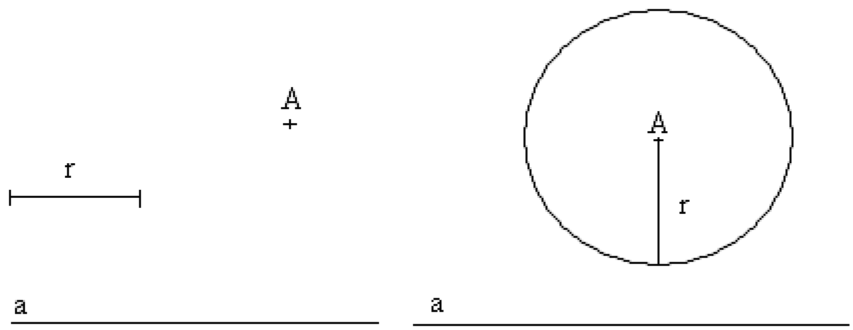


ii)Dacă C(A, r)∩a={O}, problema are o soluţie: C(O, r) are centrul pe dreapta a şi conţine punctul A.





iii)Dacă C(A, r)∩a=∅, problema nu are soluţie (nu se poate construi un cerc, cu centrul pe a şi care conţine punctul A).

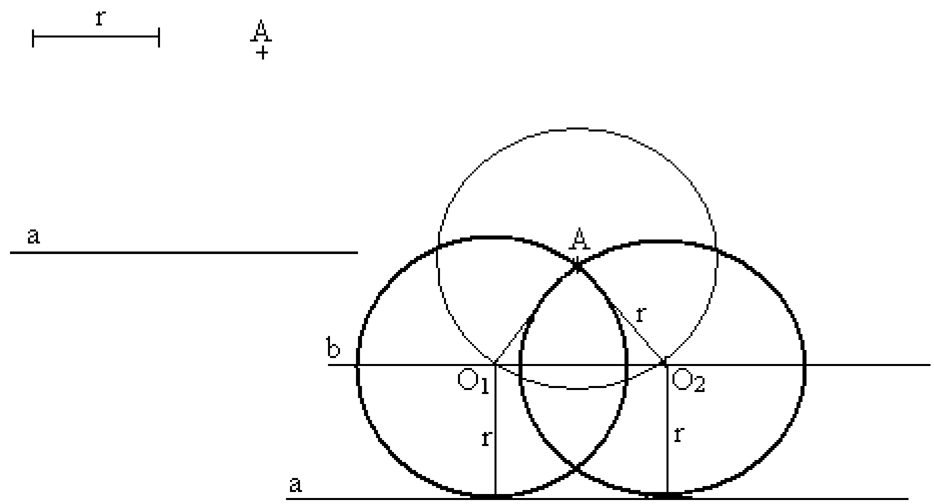


■

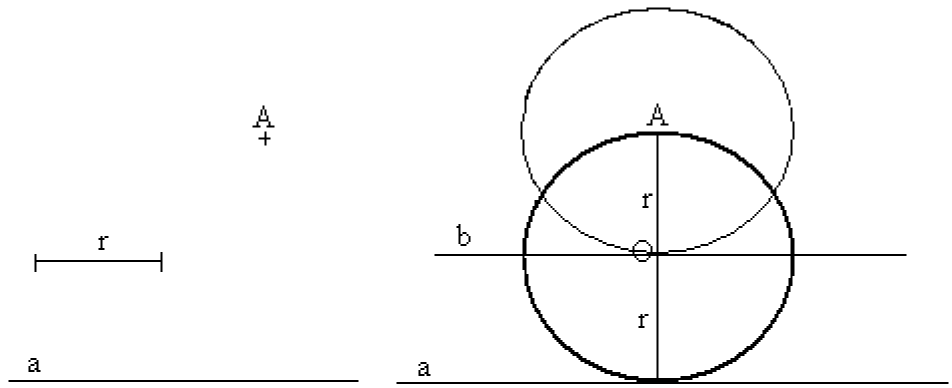
17)Să se construiască un cerc de rază dată ,r,tangent unei drepte date,a , care trece printr-un punct dat , A.

Fie dreapta a, punctul A şi segmentul de lungime r. Construim dreapta b, b//a, la distanţa r faţă de dreapta a şi cercul C(A, r).

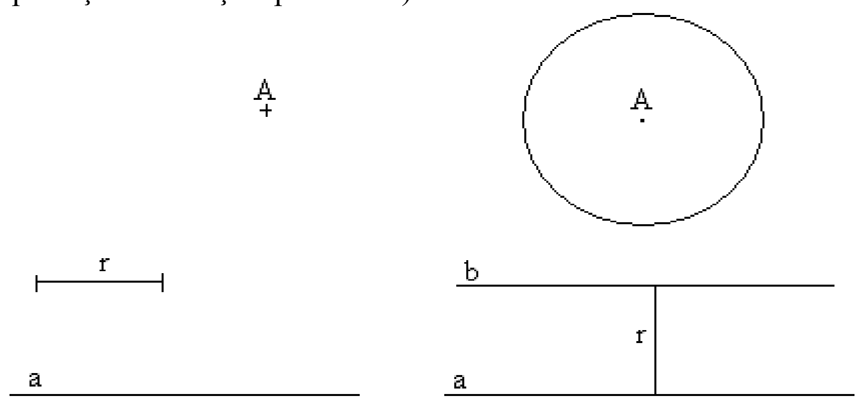
i) Dacă *C*(A, r)∩b={O_1, O_2}, problema are două soluţii: *C*(O_1, r) şi *C*(O_2, r) sunt tangenta la dreapta a şi conţin punctul A.



ii) Dacă *C*(A, r)∩b={O}, problema are o soluţie: *C*(O, r) este tangent la dreapta a şi conţine punctul A.



iii)Dacă $\mathcal{C}(A, r) \cap b = \emptyset$, problema nu are soluţie (nu se poate construi un cerc de rază r, tangent la dreapta a şi care conţine punctul A).



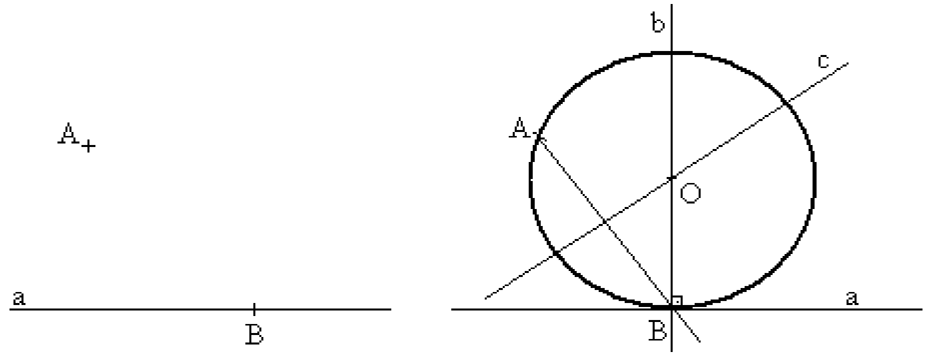
■

18)Să se construiască un cerc, care să treacă printr-un punct dat, A, şi să fie tangent unei drepte, a, într-un punct dat, B.

Fie dreapta a, punctele A şi B, $B \in a$.

i)Dacă $A \in a$, atunci dreapta şi cercul au două puncte comune -imposibil$\Rightarrow$problema nu are soluţie.

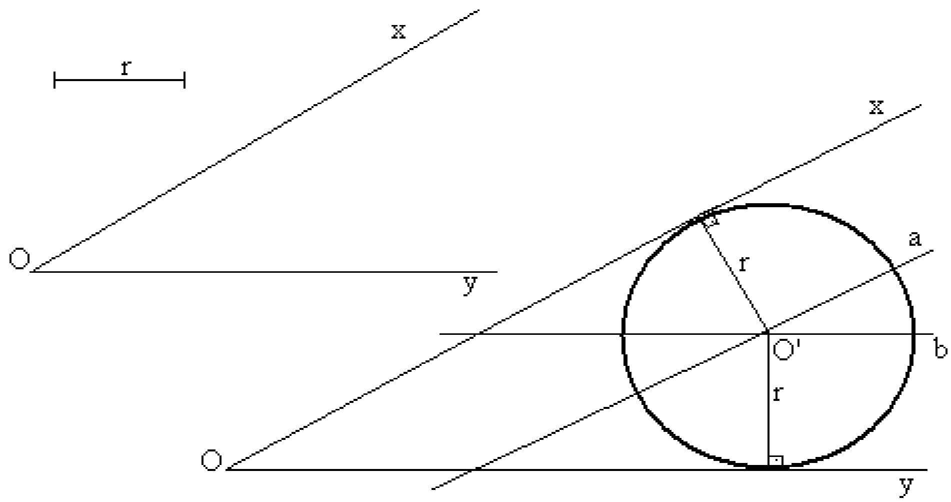
ii)Dacă $A \notin a$, construim perpendiculara pe dreapta a, în punctul B, notată b; construim mediatoarea segmentului [AB], notată c.



Notând $b\cap c=\{O\}$, $C(O, OA)$ este cercul căutat: $A\in C(O, OA)$ şi $OB\perp a$, $B\in a$ (deci dreapta a este tangentă la cerc) ■

19)Să se construiască un cerc de rază r, tangent la două semidrepte, [Ox şi [Oy.

Fie unghiul $\sphericalangle xOy$ şi r–lungimea razei.

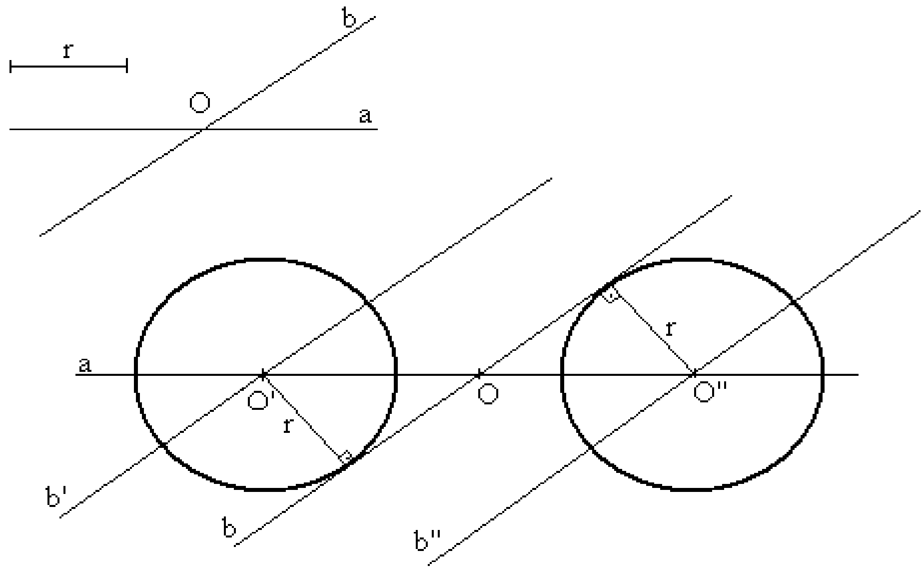


Construim $a//Ox$, $d(a, Ox) =r$, $b//Oy$, $d(b, Oy) =r$, şi notăm $a\cap b =\{O'\}$. Cercul $C(O', r)$ este cercul căutat:

$d(O', Ox) =d(O', Oy) =r \Rightarrow C(O', r)$ este tangent la semidreptele [Ox şi [Oy. ■

20)Să se construiască un cerc de rază dată, r, cu centrul pe o dreaptă dată, a şi tangent unei drepte date b, secante cu prima.

Fie dreptele a şi b, astfel încât $a\cap b\neq\varnothing$ şi r –lungimea razei.

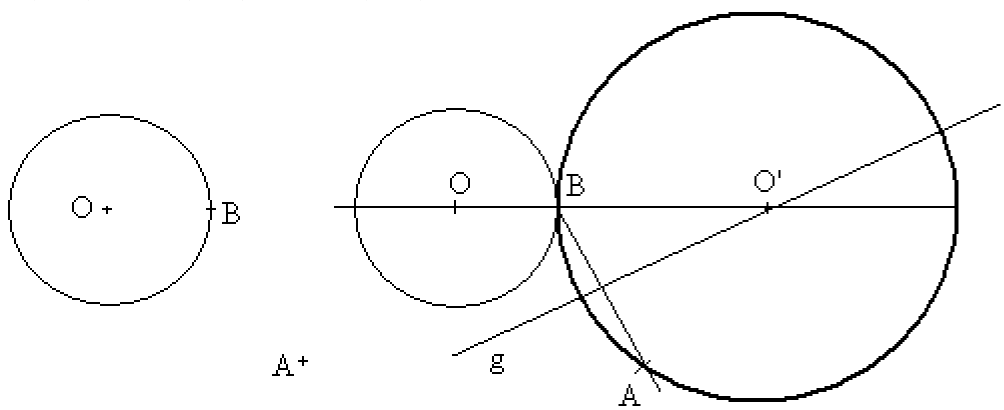


Construim b'//b, b"//b, astfel încât d(b', b)=d(b", b)=r şi b', b" se află de o parte şi de alta a dreptei b. Notăm b'∩a={O'} şi b''∩a={O''}.

C(O', r) şi C(O'', r) sunt cercurile căutate: au centrele pe dreapta a şi d(O', b)=d(O", b)=r ⇒dreapta b este tangentă la cele două cercuri. ■

21)Să se construiască un cerc care trece printr-un punct dat, A, şi este tangent unui cerc dat, C(O,r), într-un punct, B, dat.

Fie C(O, r), B∈C(O, r),şi A∉C(O, r).



Construim mediatoarea segmentului [AB],notată a. Notăm a∩[AB]={O'}; C*(O', OB) este cercul căutat:*

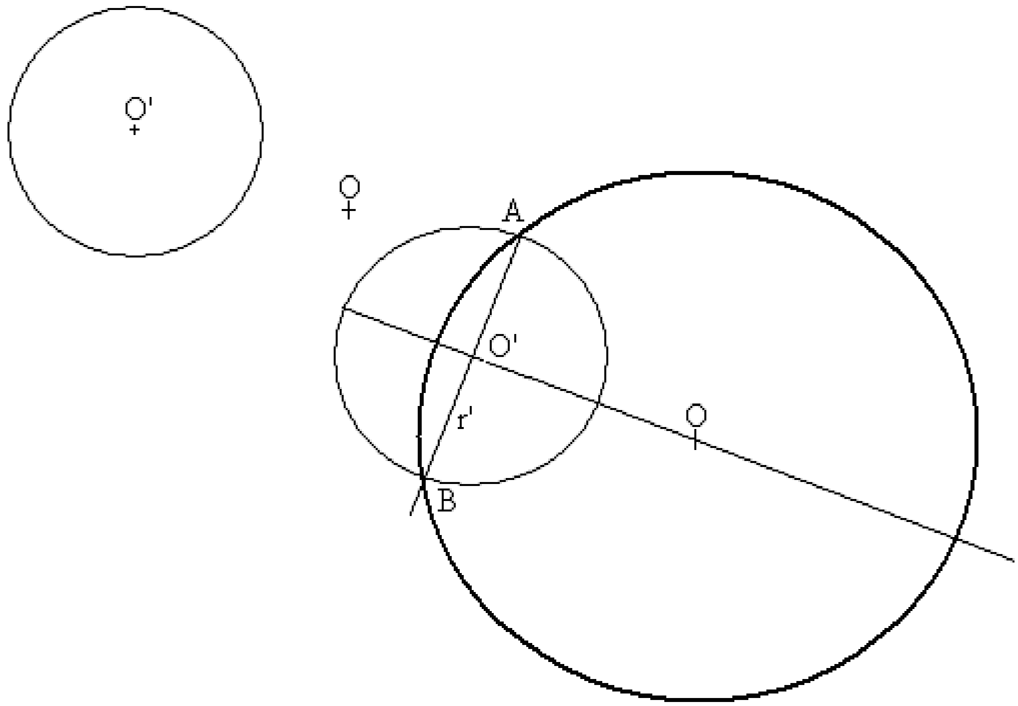
*OO'=OB+BO' ⇒*C*(O, r) şi* C*(O', O'B) sunt tangente în B.*

*O'∈a (mediatoarea segmentului [AB]) ⇒O'A=O'B ⇒A∈*C*(O', O'B).*

Observaţie*: Dacă AB⊥OB ⇒a//OB şi problema nu are soluţie.*■

22)Să se construiască cercul de centru O, care intersectează cercul C(O', r') după un diametru.

Fie C*(O', r') şi O un punct.*

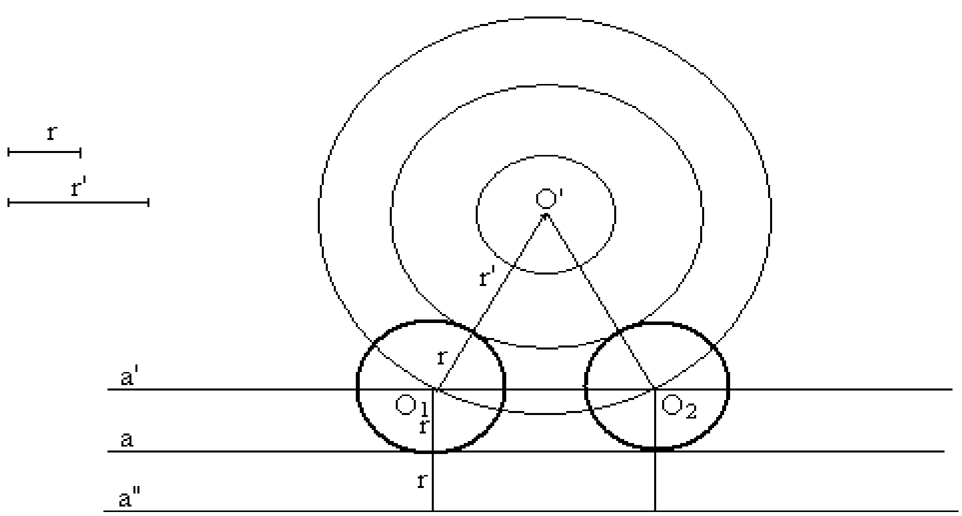


Construim a–perpendiculara în O' pe OO', care intersectează C*(O', r') în punctele A şi B.*

C*(O, OA) este cercul căutat:* C*(O', r')∩*C*(O, OA)={A, B} şi A, B sunt puncte diametral opuse în* C*(O', r').*■

23)Să se construiască un cerc de rază r, tangent la un cerc C(O', r') şi la o dreaptă a.

Fie cercul C*(O', r'), a o dreaptă, r –lungimea razei.*



Construim a'//a, a"//a, astfel încât d(a', a) =d(a", a) =r şi a', a" se află de o parte şi de alta a dreptei a. Construim C*(O', r'+r),* C*(O', │r'-r│); a'∩* C*(O', r'+r) ={O_1, O_2}. C(O_1, r), C(O_2, r) îndeplinesc condiţiile din problemă:*

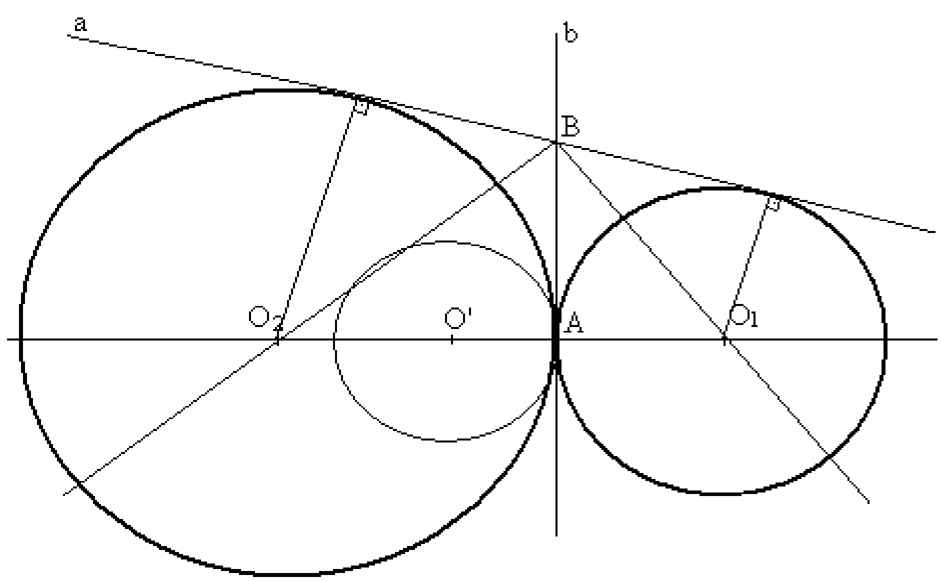
$O'O_1=O'O_2=r+r'$ ⇒C(O_1, r) şi C(O_2, r) sunt tangente cercului C*(O', r').*

d(O_1, a)=d(O_2, a)=r ⇒C(O_1, r) şi C(O_2, r) sunt tangente la dreapta d.

Observaţie*: Numărul de soluţii ale problemei diferă în fucţie de poziţia dreptei a faţă de cercul* C*(O', r'). Centrele cercurilor căutate se găsesc la intersecţia unuia din cercurile* C*(O', r'+r),* C*(O', │r'-r│) cu paralele a', şi a", situate la distanţa r, faţă de dreapta d.* ■

24)Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă a şi la un cerc C(O', r'), într-un punct A.

Fie dreapta a, cercul C*(O', r') şi punctul A ∈*C*(O', r').*



Construim dreapta b, tangentă în punctul A la cercul C*(O', r'), b∩a={B}.*

Centrul cercului căutat se află la egală distanţă de a şi b, deci se află pe bisectoarele unghiurilor formate de a şi b. Construim bisectoarele acestor unghiuri ([BO_1 şi [BO_2), care intersectează dreapta O'A în punctele O_1 şi O_2. C(O_1, O_1A), C(O_2, O_2A) îndeplinesc condiţiile din enunţ:

O_1∈[BO_1 ⇒d(O_1, a)=d(O_1, b)=O_1A ⇒C(O_1, O_1A) este tangent la dreapta a.

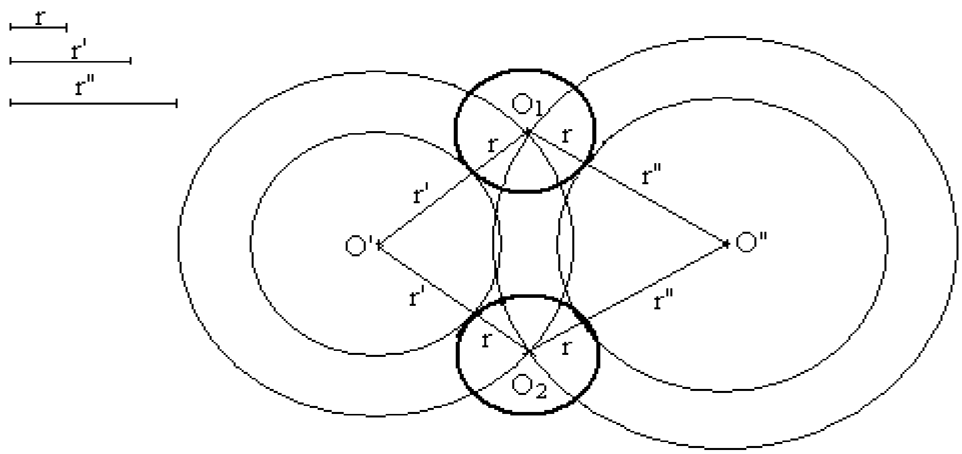
$O'O_1=O'A+AO_1$ ⇒C(O_1, O_1A) este tangent exterior cercului C*(O', r'). O_2∈[BO_2 ⇒ d(O_2, a)=d(O_2, b)=O_2A ⇒C(O_2, O_2A) este tangent la dreapta a. $O'O_2 =AO_2 -AO'$ ⇒C(O_2, O_2A) este tangent interior cercului* C*(O', r').* ■

25)Să se construiască un cerc de rază r, tangent la două cercuri date C(O', r') şi C(O", r").

Fie C*(O', r') şi* C*(O", r") şi r –lungimea razei. Construim* C*(O', r'+r) şi* C*(O", r"+r),* C*(O', r'+r) ∩*C*(O", r"+r) ={O_1, O_2}. C(O_1, r), C(O_2, r) îndeplinesc condiţiile din problemă:*

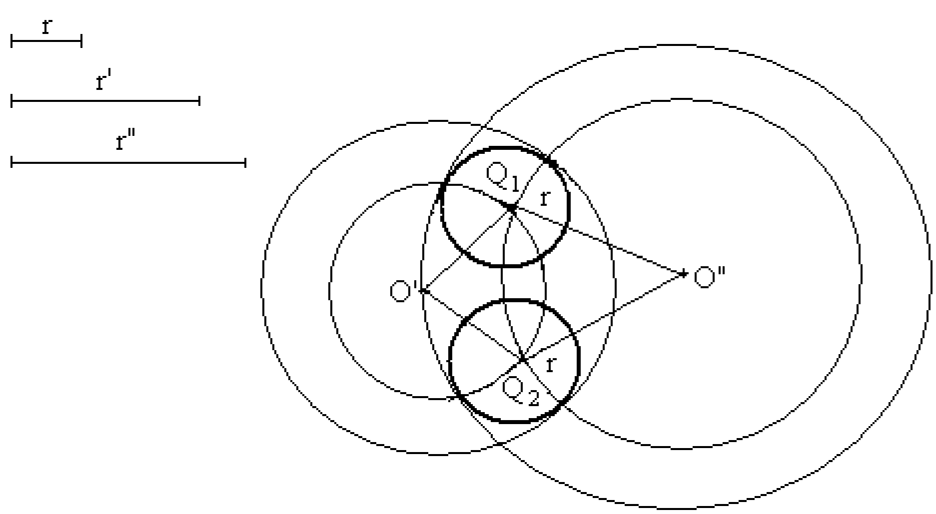
$O_1O'=r+r'$, $O_1O''=r+r''$ $\Rightarrow$ *C*(O_1, r) *este tangent exterior cercurilor* C(O', r') *şi* C(O'', r''). $O_2O'=r+r'$, $O_2O''=r+r''$ $\Rightarrow$ *C*(O_2, r) *este tangent exterior cercurilor* C(O', r') *şi* C(O'', r'').

Construim C$(O', |r'-r|)$ *şi* C$(O'', |r''-r|)$, C$(O', |r'-r|) \cap$ C$(O'', |r''-r|)=\{Q_1, Q_2\}$.

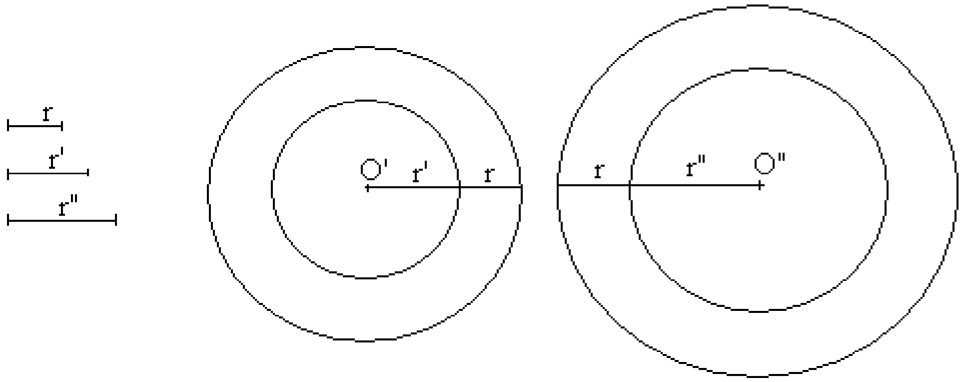


C(Q_1, r), *C*(Q_2, r) *îndeplinesc condiţiile din problemă:*

$Q_1O'=|r'-r|$, $Q_1O''=|r''-r|$ $\Rightarrow$ *C*(Q_1, r) *este tangent interior cercurilor* C(O', r') *şi* C(O'', r''). $Q_2O'=|r'-r|$, $Q_2O''=|r''-r|$ $\Rightarrow$ *C*(Q_2, r) *este tangent interior cercurilor* C(O', r') *şi* C(O'', r'').



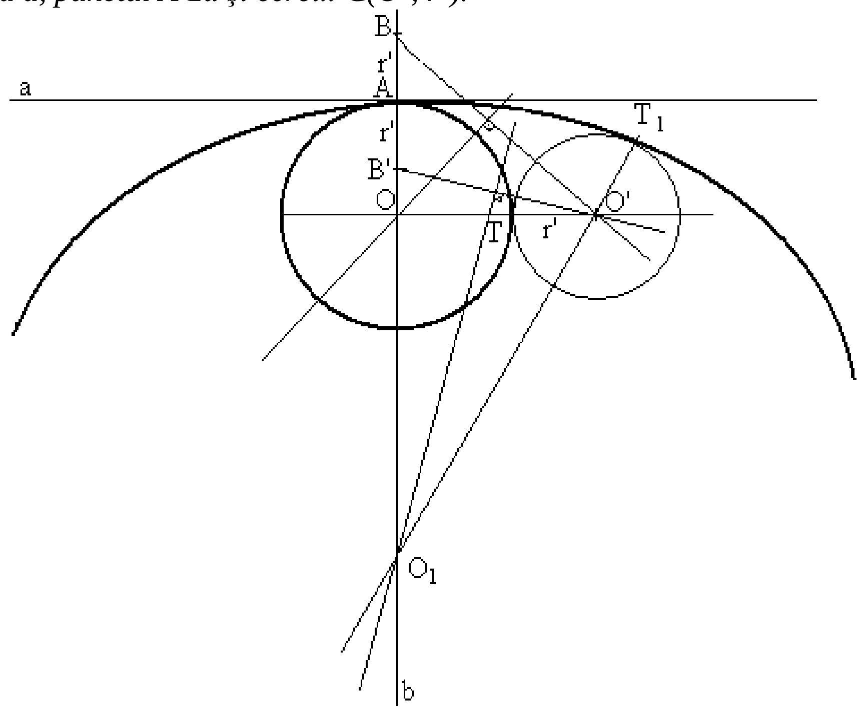
Observaţie*: Dacă* C$(O', r'+r) \cap$ C$(O'', r''+r) = \varnothing$, *problema nu are soluţie.*



■

26)Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă a, într-un punct A şi la un cerc C(O', r').

Fie dreapta a, punctul A∈a şi cercul C*(O', r').*



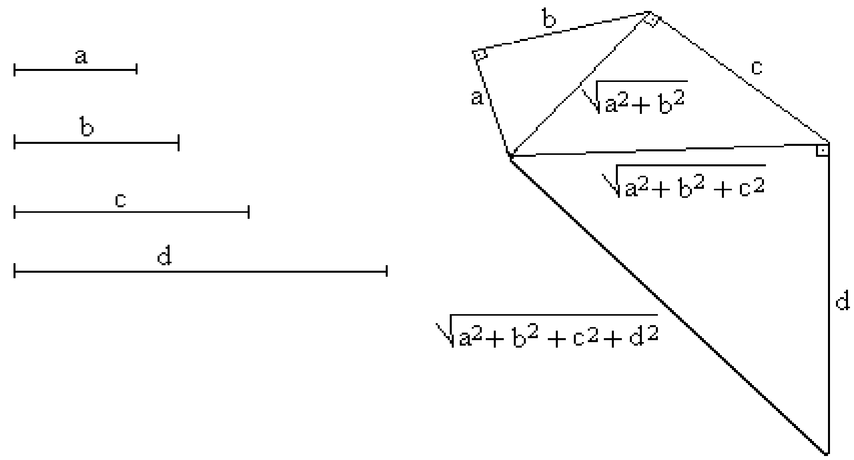
*Construim perpendiculara pe a, în punctul A, b⊥a, A∈b. Pe dreapta b, construim punctele B şi B', de o parte şi de alta a dreptei a, astfel încât BA=AB'. Construim mediatoarele segmentelor [O'B] şi [O'B'], care intersectează dreapta b în punctele O şi O_1. Dacă T∈OO'∩*C*(O', r') şi T_1∈O_1O'∩*C*(O', r'), cercurile* C*(O, OT) şi* C*(O_1, O_1T_1) sunt soluţii ale problemei:*

O∈meditoarei segmentului [O'B] ⇒OO'=OB ⇒OT+TO'=OA+AB⇒OT=OA ⇒cercul C*(O, OT) este tangent la dreapta a şi la cercul* C*(O', r'). O_1∈meditoarei segmentului [O'B'] ⇒O_1O'=OB' ⇒O_1O'+O'T_1=O_1B'+B'A ⇒O_1T_1=O_1A⇒cercul* C*(O_1, O_1T_1) este tangent la dreapta a şi la cercul* C*(O', r').*■

27)Să se construiască segmentul de lungime $\sqrt{n}$, n∈ℕ*, cunoscând lungimea segmentului unitate.

Varianta I (utilizând teorema lui Pitagora):

Se descompune numărul n în sumă de numere naturale pătrate perfecte.($n=a^2+b^2+c^2+d^2$).

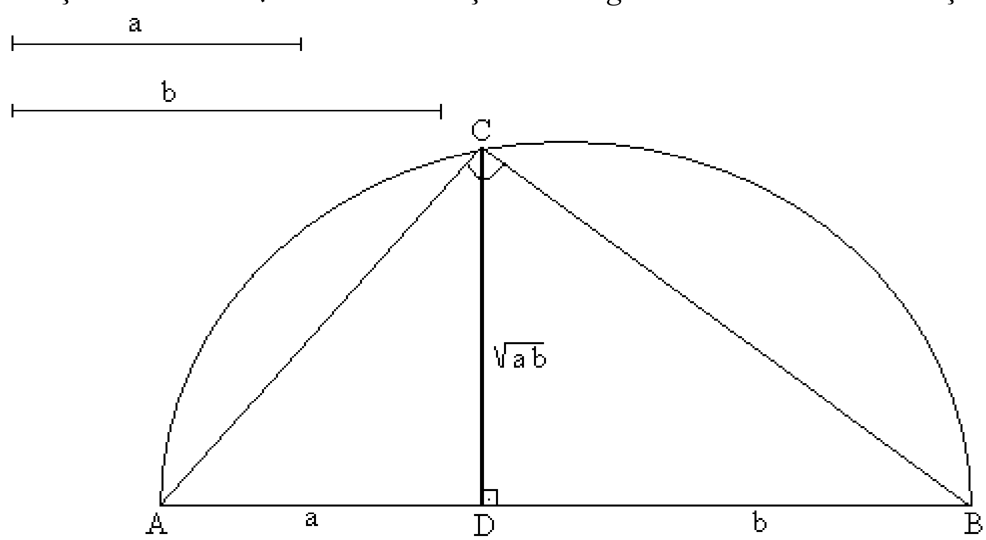


Construim ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele a şi b, ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele $\sqrt{a^2+b^2}$ şi c, apoi ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ şi d, obţinând segmentul cu lungimea $\sqrt{n}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Varianta II (utilizând construcţia mediei geometrice):

Se descompune numărul n în produs de două numere naturale, n=a·b. (Dacă este număr prim, atunci a sau b vor fi egale cu unitatea).

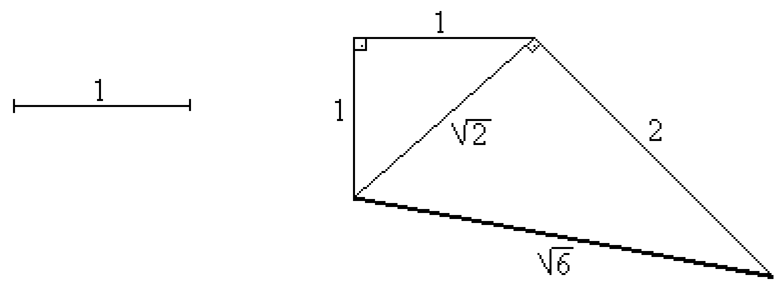
Construcţia numărului $\sqrt{n}$ este construcţia mediei geometrice a numerelor a şi b.



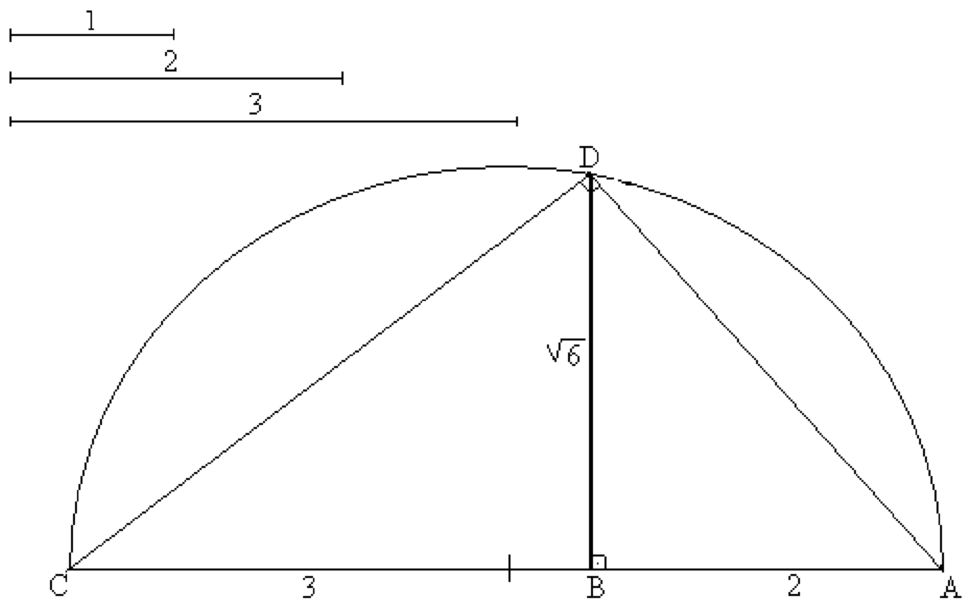
ΔCAB, $m(\sphericalangle C)=90^{\circ}$, $CD\perp AB$, $D\in AB \Rightarrow CD^2=AD\cdot DB \Rightarrow CD=\sqrt{ab}$.■

28)Să se construiască segmentul de lungime $\sqrt{6}$ cunoscând lungimea segmentului unitate.

Varianta I:
Descompunem numărul 6 în sumă de numere naturale pătrate perfecte; $6=1^2+1^2+2^2$.

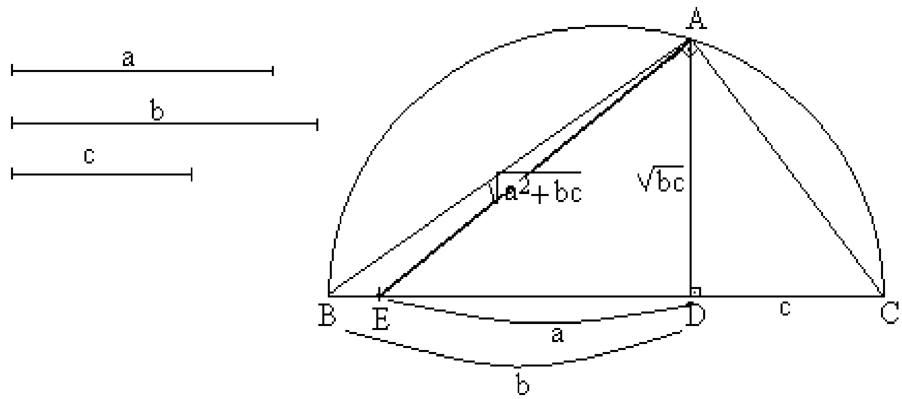


Construim triunghiul dreptunghic isoscel cu catetele egale cu 1, apoi triunghiul dreptunghic isoscel cu catetele egale cu $\sqrt{1^2+1^2}$ *şi 2.*
Varianta II:
Descompunem numărul 6 în produs de două numere naturale, 6 =2·3.Construim media geometrică a numerelor 2 şi 3.



ΔADC, $m(\sphericalangle D)=90^o$, $DB\perp AC$, $B\in AC \Rightarrow DB^2=CB\cdot AB \Rightarrow DB=\sqrt{6}$.■

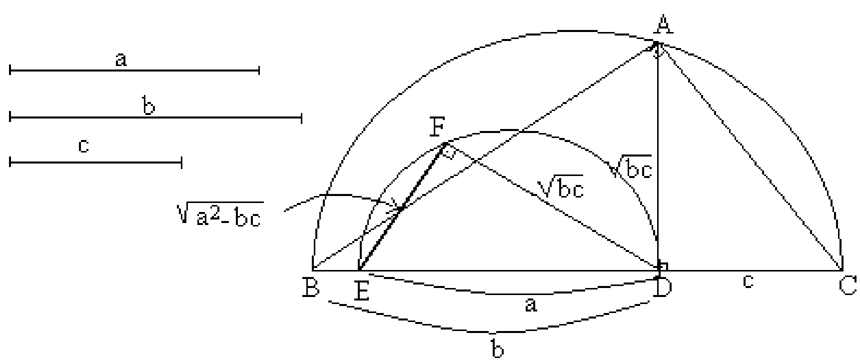
29)Să se construiască segmentele de lungimi $\sqrt{a^2+bc}$ şi $\sqrt{a^2-bc}$, a, b, c fiind lungimi date.
Fie segmentele de lungimi a, b, c.



Construim media geometrică a numerelor b şi c.

ΔABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$, $AB\perp BC$, $D\in BC$ $\Rightarrow AD^2=BD\cdot CD$ $\Rightarrow AD^2=bc$. Construim triunghiul dreptunghic cu catetele a şi $\sqrt{bc}$, construind $E\in[DB$, $DE=a$; ΔDAE, $m(\sphericalangle D)=90^o$ $\Rightarrow AE^2=AD^2+DE^2$ $\Rightarrow AE=\sqrt{a^2+bc}$.

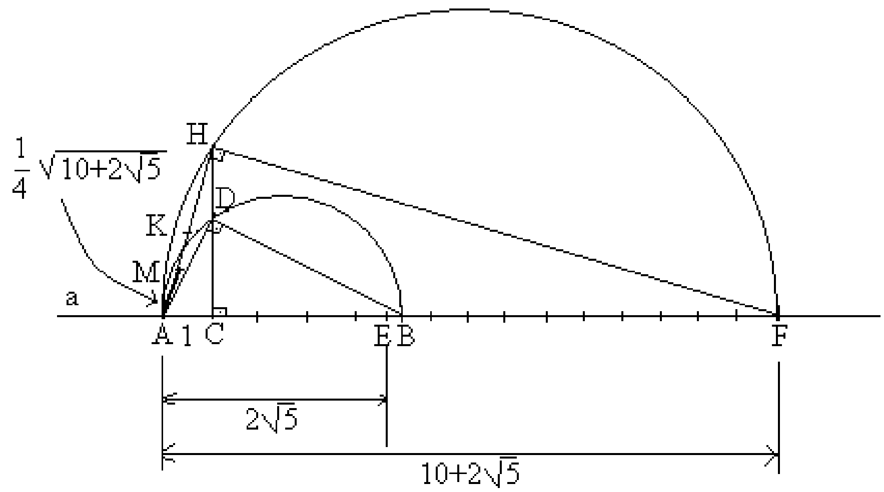
Pentru a construi segmentul de lungime $\sqrt{a^2-bc}$, construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză a şi o catetă $\sqrt{bc}$.



În ΔFED, $m(\sphericalangle F)=90^o$ $\Rightarrow DE^2=FE^2+FD^2$ $\Rightarrow FE=\sqrt{a^2-bc}$. ■

30)Să se construiască lungimea a cărei valoare numerică este $x=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, cunoscând lungimea segmentului unitate.

Fie segmentul de lungime 1şi dreapta a.



Pe dreapta a, considerăm punctele A, B şi C, astfel încât AC=1, AB=5, A–C–B. Semicercul de diametru AB intersectează perpendiculara în C pe AB, în punctul D. Aşadar, în ΔDAB, *m(∢D)=90º* $\Rightarrow AD^2=AC\cdot AB \Rightarrow AD=\sqrt{5}$.

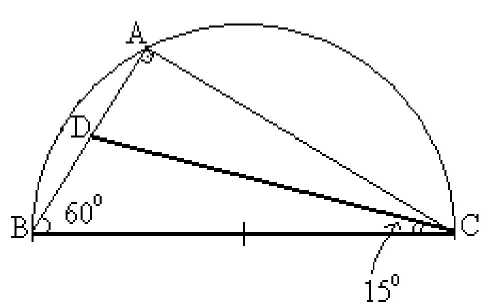
Pe prelungirea lui AC, construim punctul E, astfel încât AE=2AD=2$\sqrt{5}$, *iar pe prelungirea lui AE, construim punctul F, astfel încât AF=2*$\sqrt{5}$*+10. Semicercul de diametru AF intersectează CD în H.*

În ΔHAF, *m(∢H) =90º* $\Rightarrow AH^2 = AC\ AF \Rightarrow AH = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$. *Construim punctul M∈(AH, astfel încât AM=*$\frac{AH}{4}$ *(construim punctul K .mijlocul segmentului [AH], apoi M – mijlocul segmentului [AK]* $\Rightarrow AM=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.■

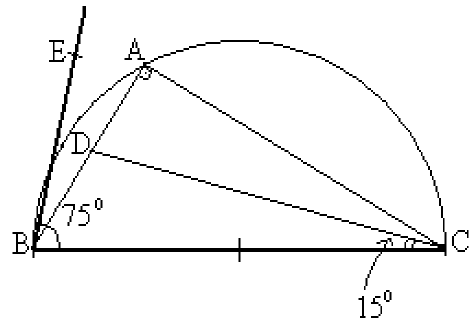
31)Să se construiască unghiuri cu măsurile de: i) 15°; ii) 75°; iii) 105°.

Construim un triunghi dreptunghic în care lungimea unei catete este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei; ΔABC, *m(∢A)=90º, BC=a, AB=* $\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$*m(∢C)=30º, m(∢B)=60º.*

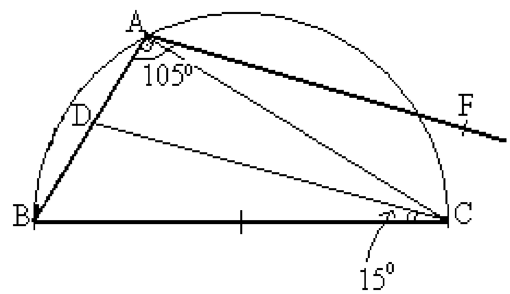
i)Construim semidreapta [CD–bisectoarea unghiului ∢C, D∈AB; m(∢BCD)=$\frac{m\left(A\hat{C}B\right)}{2}$*=15°.*



ii)Construim unghiul ∢ABE, ∢ABE≡∢BCD, astfel încât E şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AB; m(∢CBE)=m(∢CBA)+m(∢ABE)=60º+15º=75º.



iii)Construim unghiul ∢CAF, ∢CAF≡∢BCD, astfel încât F şi B sunt de o parte şi de alta a dreptei AC; m(∢BAF)=m(∢BAC)+m(∢CAF)=90º+15º=105º.

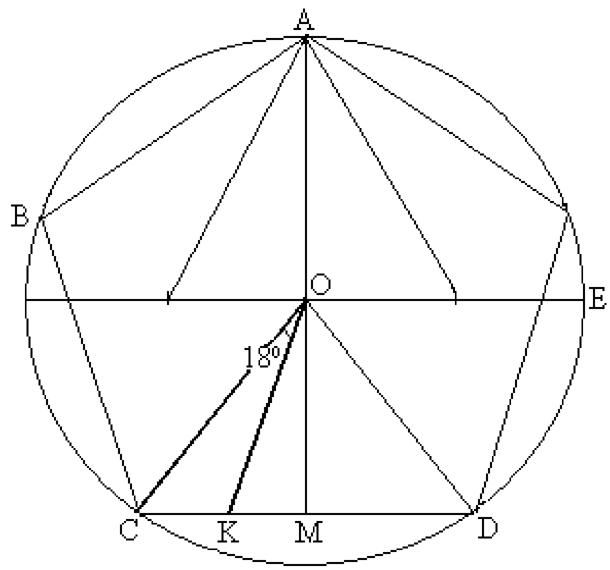


32)Să se construiască unghiul cu măsura de 18°.

$18° = \frac{72^{\circ}}{4} = \frac{72^{\circ}}{2^2}$;

Deoarece măsura unghiului la centru corespunzător laturii pentagonului regulat este de 72°, pentru a costrui unghiul de 18°, construim mai întâi pentagonul regulat, apoi împărţim unghiul de 72° în 2^2 unghiuri congruente.

$m(\sphericalangle COK) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle COM) = \frac{1}{4} m(\sphericalangle COD) = \frac{72^{\circ}}{4}. = 18°.$



■.

Observaţie*: Matematicienii au demonstrat că, în general, nu se poate construi numai cu rigla şi compasul un unghi de o măsură dată. Excepţie fac:*

-unghiurile cu măsurile de: 90°, 72°, 60°;

-unghiurile complementare şi suplementare acestora;

-unghirile cu măsurile de : $\frac{90^\circ}{2^p}$, $\frac{72^\circ}{2^p}$, $\frac{60^\circ}{2^p}$, $p\in\mathbb{N}^*$;

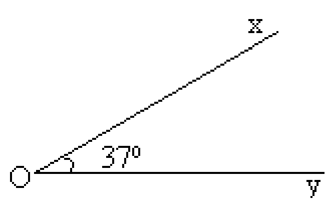
-unghiurile cu măsurile obţinute din combinaţii de forma $m\alpha+n\beta$, $m, n\in\mathbb{Z}$, *iar* α, β *sunt măsurile a două unghiuri din mulţimea* $\{90°, 72°, 60°, \frac{90^\circ}{2^p}, \frac{72^\circ}{2^p}, \frac{60^\circ}{2^p}\}$, $p\in\mathbb{N}^*$.

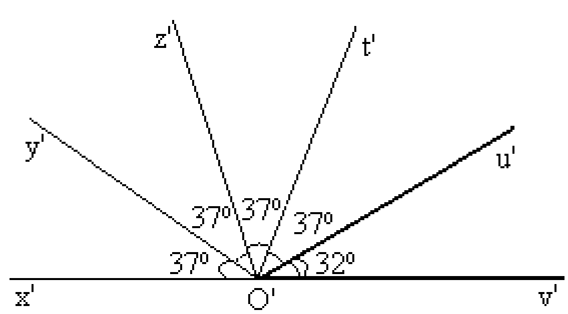
În aceste moduri se pot construi, de exemplu, unghiuri cu măsurile de: 15°, 9°, 4°30’, 7°30’, 12°.

$15°=\frac{60^\circ}{2^2}$; $9°=\frac{72^\circ}{2^3}$; $4°30'=\frac{72^\circ}{2^4}$; $7°30'=\frac{60^\circ}{2^3}$; $12°=4°30'+7°30'$.

33)Fiind dat un unghi cu măsura de 37°, să se construiască un unghi cu măsura de 32°.

Fie unghiul ∢xOy, m(∢xOy)=37° şi semidreapta [O’x’.





Construim patru unghiuri adiacente cu vârful în O’: ∢x’O’y’, ∢y’O’z’, ∢z’O’t’, ∢t’O’u’, congruente cu unghiul dat ∢xOy (fiecare unghi construit are măsura de 37°).

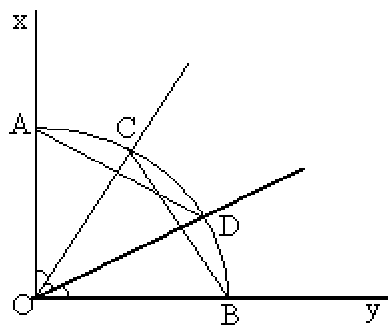
În prelungirea semidreptei [O’x’, construim semidreapta [O’v’.

m(∢u’O’v’) =180°-4·37°=32°, deci ∢u’O’v’ este unghiul căutat. ■

Observaţie:*Pentru construcţia unui unghi de o anumită măsură, când avem construit un unghi de o măsură dată, sunt posibile doar construcţiile prin care suma dintre măsura unghiului ce trebuie construit şi măsura unui multiplu sau a celei 2^p parte din unghiul dat, alcătuiesc un unghi contruibil cu rigla şi compasul. Sunt preferate ca sume măsurile de 360° (a unghiurilor din jurul unui punct), 180° (a unghiurilor cu laturile în prelungire), 90°, 72°, 60°, 90°, 45°, 30°.*

34)Să se împartă unghiul drept în trei părţi egale.

Fie ∢xOy, m(∢xOy)=90°.



Cu centrul în punctul O şi cu o rază oarecare, trasăm un arc de cerc, care intersectează laturile unghiului ∢xOy în punctele A şi B.

Cu centrele în A şi B şi cu aceeaşi rază, trasăm arce de cerc, care intersectează cercul iniţial în punctele C şi D.

OA=OD=AD ⇒ΔAOD este echilateral;

OB=OC=BC ⇒ΔBOC este echilateral.

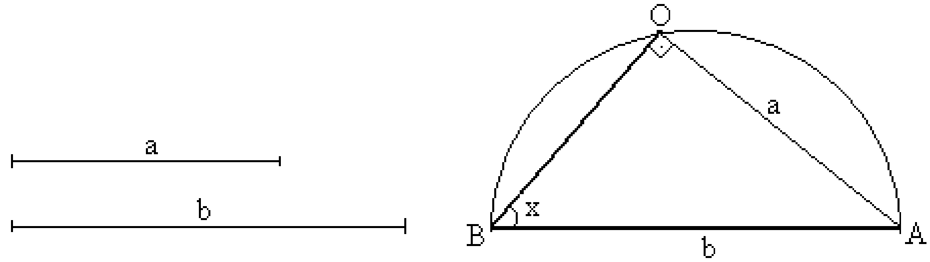
m(∢BOD)=m(∢BOA)-m(∢DOA)=60°-30°=30°.■

Observaţie*: Împărţirea unui unghi oarecare în trei unghiuri congruente (trisecţiunea unghiului), nu se poate rezolva numai cu rigla şi compasul.*

35)Să se construiască unghiul x dat de: i)sinx $=\frac{a}{b}$; ii)cosx $=\frac{a}{b}$, unde a şi b sunt lungimi date, a <b.; iii)tgx $=\frac{a}{b}$.

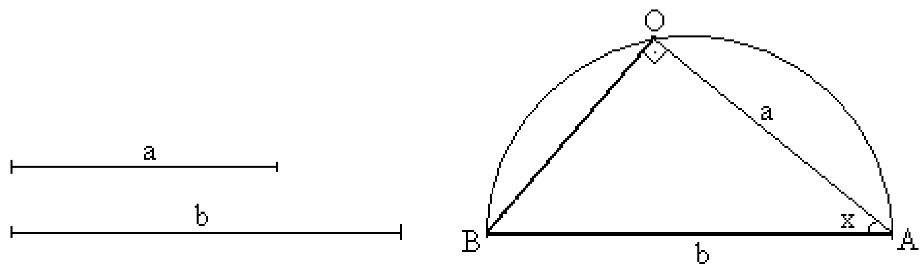
Fie a şi b lungimile segmentelor, a<b.

i)Construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză b şi o catetă a. ΔOAB, m(∢O)=90º $\Rightarrow$sinB=$\frac{OA}{AB}$ $\Rightarrow$sinB=$\frac{a}{b}$ $\Rightarrow$∢B este unghiul căutat.



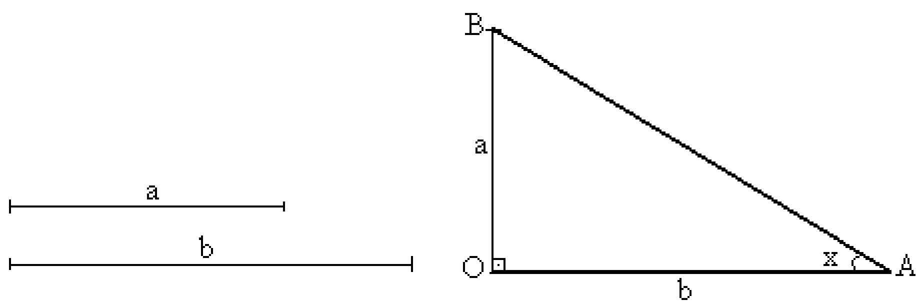
ii)Construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză b şi o catetă a.

ΔOAB, m(∢O) =90º ⇒cosA = $\frac{OA}{AB}$ ⇒cosA = $\frac{a}{b}$ ⇒∢A este unghiul căutat.



iii) Construim triunghiul dreptunghic OAB, m(∢O)=90º, de catete a şi b.

ΔOAB, m(∢O)=90º ⇒tgA=$\frac{OB}{OB}$ ⇒tgA=$\frac{a}{b}$ ⇒∢A este unghiul căutat.



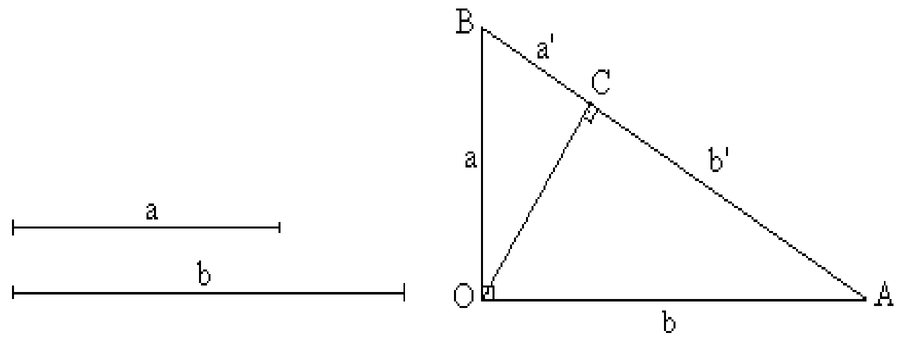
■

36)Să se construiască unghiul dat de agalitatea sinx=$\frac{a^2}{b^2}$, a şi b fiind lungimi date, a<b.

Fie a şi b lungimile segmentelor, a <b. Construim triunghiul dreptunghic OAB, m(∢O)=90º, de catete a şi b.

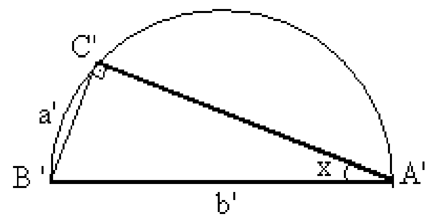
Fie OC⊥AB, C∈AB. În ΔOAB, m(∢O)=90º ⇒OA^2=AC·AB şi OB^2=BC·AB.

Aşadar, b^2=AC·AB şi a^2=BC·AB, iar $\frac{a^2}{b^2} = \frac{BC}{AC}$.



Construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză b’=AC şi o catetă a’=BC.

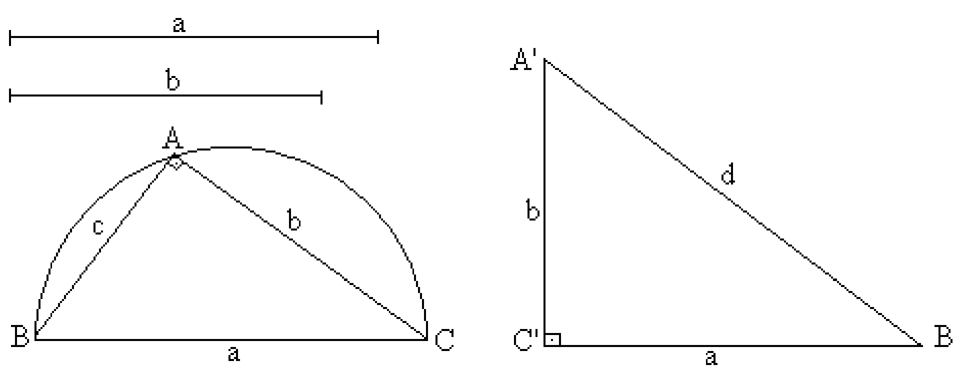
$\Delta C'B'A'$, $m(\sphericalangle C')=90^o \Rightarrow \sin A'=\dfrac{B'C'}{A'B'} \Rightarrow \sin A'=\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sphericalangle A'$ este unghiul căutat.



■

37)Să se construiască unghiul x dat de egalitatea $\sin x=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, a şi b fiind lungimi date, a>b

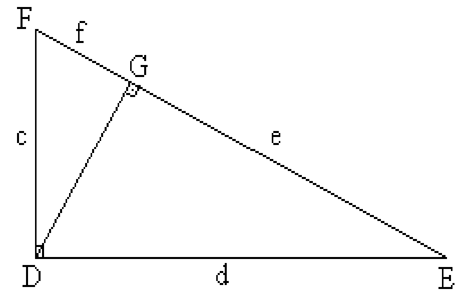
Fie a şi b lungimile segmentelor, a>b. Construim triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$, de ipotenuză a şi o catetă b, şi triunghiul dreptunghic C’B’A’, $m(\sphericalangle C')=90^o$, de catete a şi b.



În ΔABC, $m(\sphericalangle A)=90^o \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow AB^2=a^2-b^2$.

În $\Delta C'B'A'$, $m(\sphericalangle C')=90^o \Rightarrow A'B'^2=C'B'^2+C'A'^2 \Rightarrow A'B'^2=a^2+b^2$.

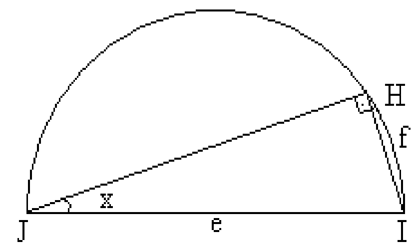
Notăm AB=c, A’B’=d; construim triunghiul dreptunghic DEF, $m(\sphericalangle D)=90^o$, de catete c şi d.



Fie DG⊥EF, G∈EF. În ΔDEF, m(∢D)=90° ⇒DF^2=FG·FE şi DE^2=EG·EF.

Aşadar, c^2=FG·FE şi d^2=EG·EF, iar $\frac{c^2}{d^2}=\frac{FG}{EG} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{FG}{EG} \Rightarrow$ sinx=$\frac{FG}{EG}$.

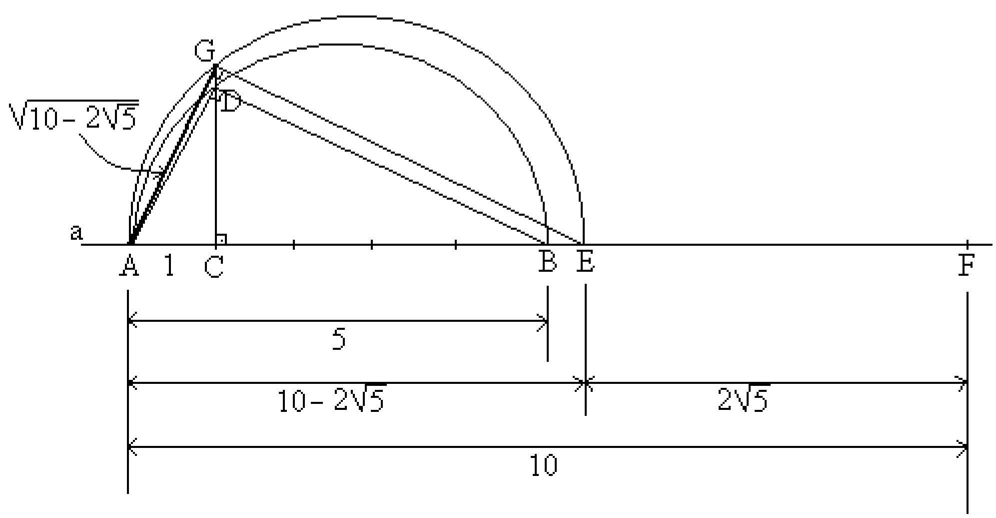
Notăm EG=e, FG=f; construim triunghiul dreptunghic HIJ, m(∢H)=90°, de ipotenuză IJ=e şi cateta HI=f.



ΔHIJ, m(∢H)=90° ⇒sinJ= $\frac{HI}{JI}$ ⇒sinx= $\frac{f}{e}$ ⇒sinx= $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ⇒∢HIJ este unghiul căutat.■

38)Să se construiască unghiul x dat de relaţia sinx= $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ *, cunoscând lungimea segmentului unitate.*

Fie segmentul de lungime 1şi dreapta a.

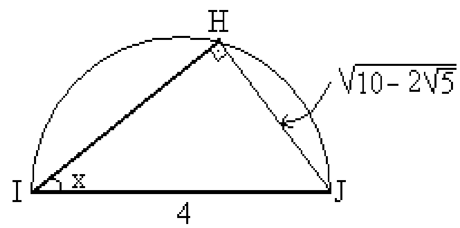


Pe dreapta a, considerăm punctele A, B şi C, astfel încât AC=1, AB=5, A–C–B.

Semicercul de diametru AB intersectează perpendiculara în C pe AB, în punctul D. Aşadar, în ΔDAB, m($\sphericalangle$D)=90^o $\Rightarrow AD^2=AC\cdot AB$ $\Rightarrow AD=\sqrt{5}$.

Pe dreapta a, construim punctele E şi F, de aceeaşi parte cu punctul B faţă de A, astfel încât AF=10, EF=$2\sqrt{5}$, A-E-F ; aşadar, AE=AF–EF=10-2$\sqrt{5}$.

Semicercul de diametru AE intersectează CD în G. În ΔGAE, m($\sphericalangle$G)=90^o $\Rightarrow AG^2=AC\cdot AE$ $\Rightarrow AG=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Construim triunghiul dreptunghic HIJ, m($\sphericalangle$H)=90^o, de ipotenuză 4 şi o catetă egală cu $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

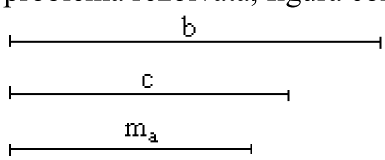


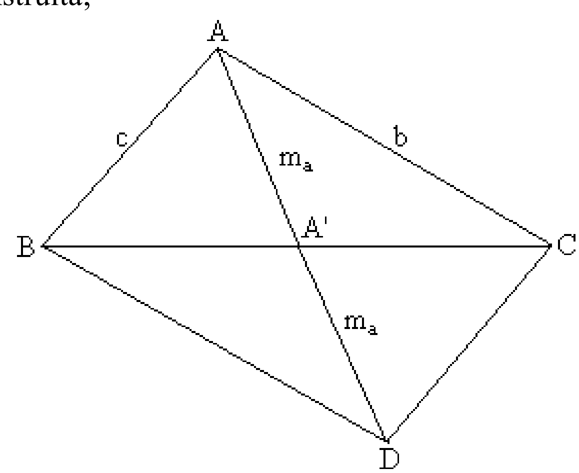
ΔHIJ, m($\sphericalangle$H)=90^o $\Rightarrow \sin I=\dfrac{HI}{JI}$ $\Rightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ $\Rightarrow \sphericalangle$HIJ este unghiul căutat. ■

Observaţie: Membrul al doilea al egalităţii $\sin x=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ reprezintă jumătate din latura pentagonului regulat înscris în cercul cu raza egală cu unitatea ($l_5=\dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$).■

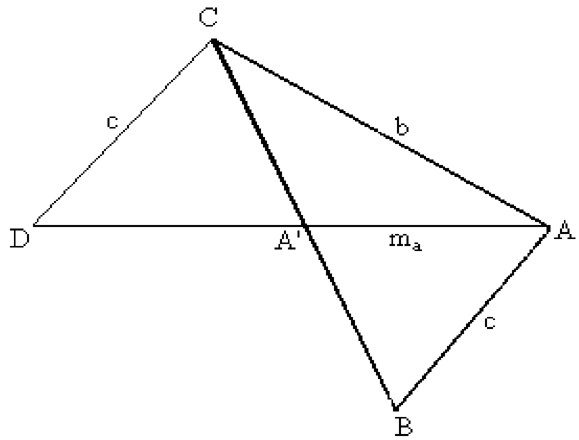
39)Să se construiască un triunghi cunoscând două laturi şi o mediană.

i)Se cunosc două laturi şi mediana care pleacă din vârful comun laturilor (b, c, m_a). Presupunem problema rezolvată, figura construită;





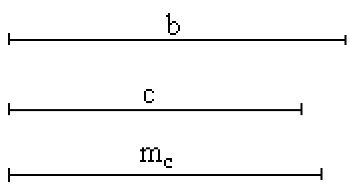
Fie punctul D –simetricul punctului A faţă de mijlocul A’ al laturii [BC]. Din A’$\in$AD, AA’=A’D şi A’$\in$BC, BA’=A’C $\Rightarrow$ABDC este paralelogram, deci AB=CD=c. Aşadar, problema revine la a construi ΔACD de laturi AD=2 m_a, AC=b, DC=c (cazul de construcţie L.L.L.).

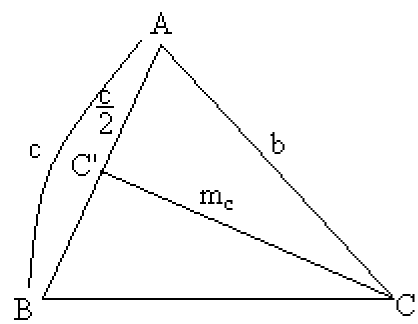


Construim punctul A’ –mijlocul segmentului [AD], apoi punctul B –simetricul punctului C faţă de A’. Din A’∈AD, AA’=A’D şi A’∈BC, BA’=A’C ⇒ABDC este paralelogram, deci AB=CD=c şi ΔABC îndeplineşte condiţiile din enunţ.

ii)Se cunosc două laturi şi mediana care pleacă din alt vârf decât cel comun celor două laturi (b, c, m_c)

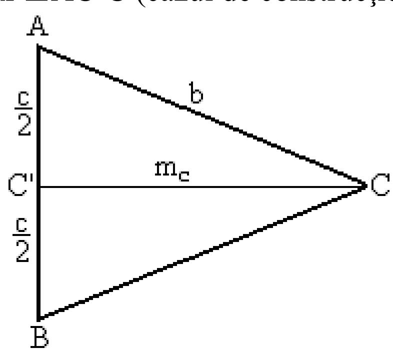
Presupunem problema rezolvată, figura construită:





Notând cu C’ mijlocul laturii [AB], în ΔAC’C avem AC’=$\frac{c}{2}$, AC=b, C’C= m_c.

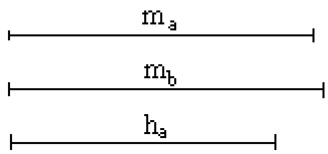
Problema revine la a construi ΔAC’C (cazul de construcţie L.L.L.).

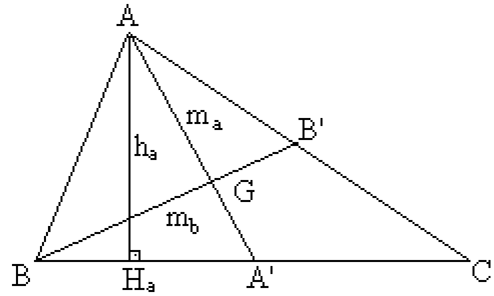


Construim punctul B –simetricul punctului A faţă de punctul C’. Aşadar, AB=c, AC=b, CC’= m_c, unde C’ mijlocul laturii [AB]. ■

40)Să se construiască un triunghi dacă se cunosc două mediane şi o înălţime.

i)Înălţimea pleacă din acelaşi vârf cu una din mediane (m_a, m_b, h_a). Presupunem problema rezolvată, figura construită:

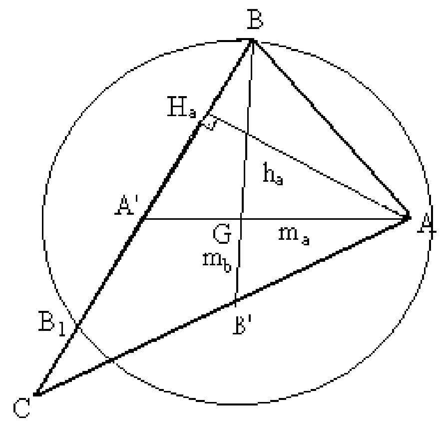




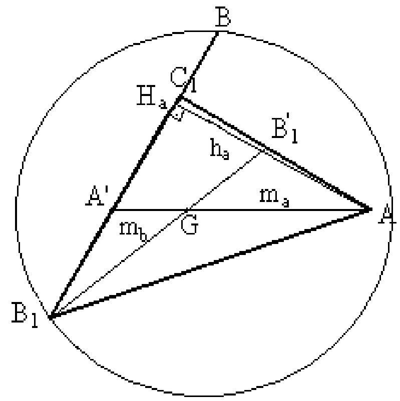
Notăm $AA'=m_a$, $BB'=m_b$, $AH_a=h_a$. $\Delta H_aAA'$ este dreptunghic, $m(\sphericalangle H_a)=90^\circ$, $AA'=m_a$, $AH_a=h_a$, deci pentru a construi ΔABC, construim mai întâi $\Delta H_aAA'$. Deoarece $m_a \cap m_b=\{G\}$, $AG=\frac{2m_a}{3}$ şi $BG=\frac{2m_b}{3}$, construim cercul $\mathcal{C}(G, \frac{2m_b}{3})$. $\mathcal{C}(G, \frac{2m_b}{3}) \cap H_aA'=\{B, B_1\}$ şi obţinem două soluţii:

i_1)Construim punctul $C \in H_aA'$, astfel încât $A'B=A'C$.

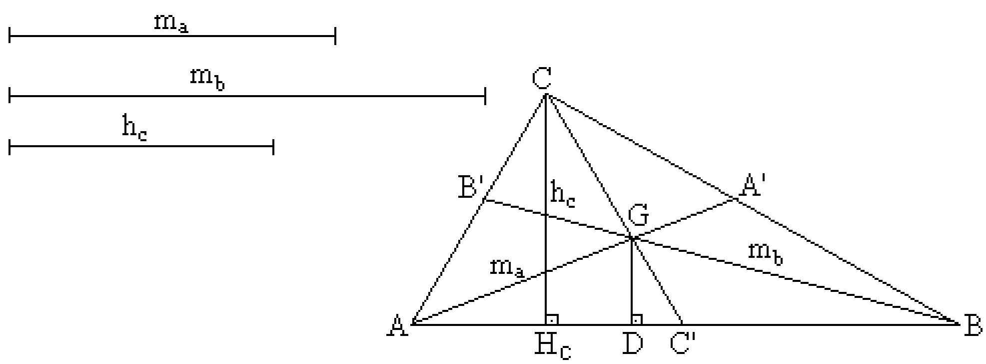
Fie $BG \cap AC=\{B'\}$. Cum $G \in AA'$, $AG=\frac{2m_a}{3}$, $\Rightarrow$G este centrul de greutate al ΔABC şi $BB'=m_b$.



i_2)Construim punctul $C_1 \in H_aA'$, astfel încât $A'B_1=A'C_1$. Fie $B_1G \cap AC=\{B_1'\}$. Cum $G \in AA'$, $AG=\frac{2m_a}{3}$ $\Rightarrow$G este centrul de greutate al ΔAB_1C_1 şi $B_1B_1'=m_b$.

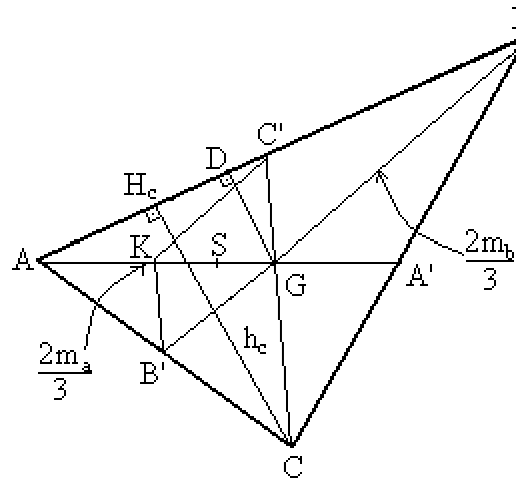


ii)Înălţimea şi cele două mediane pleacă din vârfuri diferite (m_a, m_b, h_c). Presupunem problema rezolvată, figura construită:



Notăm AA'=m_a, BB'=m_b, CH_c=h_c, $m_a \cap m_b$={G}; AG=$\frac{2m_a}{3}$ şi BG=$\frac{2m_b}{3}$. Fie CG $\cap$AB={C'} şi GD//CH_c. În $\Delta H_cCC'$, GD//CH_c $\Rightarrow \frac{C'G}{C'C} = \frac{GD}{CH_c} \Rightarrow \frac{GD}{h_c} = \frac{1}{3} \Rightarrow GD = \frac{h_c}{3}$;aşadar, ΔDAG şi ΔDBG sunt dreptunghice, m(∢GDA)=90º, m(∢GDB)=90º, A–D–B, GD=$\frac{h_c}{3}$, AG=$\frac{2m_a}{3}$ şi BG=$\frac{2m_b}{3}$.

Pentru a obţine ΔABC, construim mai întâi ΔDAG şi ΔDBG, îndeplinind condiţiile de mai sus.



Construim $A' \in AG$, $A–G–A'$, $A'G=\frac{m_a}{3}$ *şi* $B' \in BG$, $B–G–B'$, $B'G=\frac{m_b}{3}$. *Fie* $BA' \cap AB'=\{C\}$; ΔABC *este triunghiul căutat:*

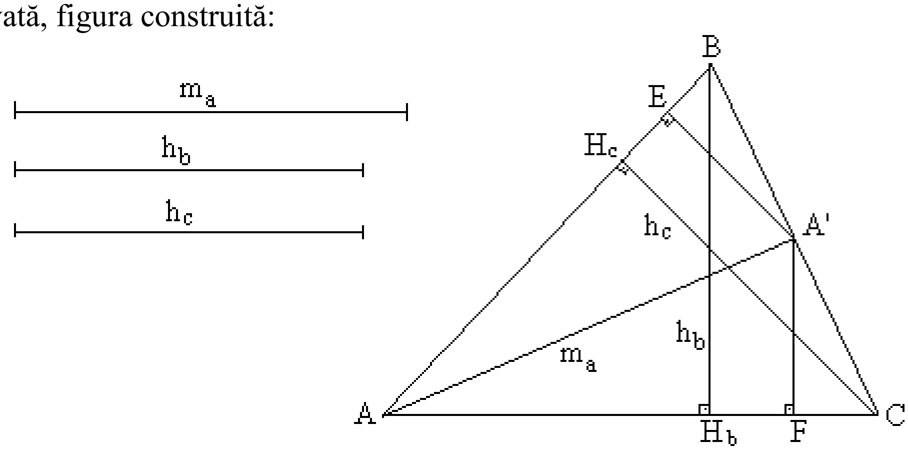
fie C' *–mijlocul laturii* $[AB]$ *şi* K *–mijlocul segmentului* $[AG]$ $\Rightarrow C'K//BG$ *şi* $C'K=\frac{BG}{2}$ $\Rightarrow C'K=\frac{m_b}{3}$. *Aşadar,* $C'K//BG$ *şi* $B'G=C'K$ $\Rightarrow C'KB'G$ *–este paralelogram* $\Rightarrow$*diagonalele* $C'B'$ *şi* GK *se înjumătăţesc* $\Rightarrow KS=SG$, *unde* $C'B' \cap GK=\{S\}$ $\Rightarrow AS=SA'$; $AC'=C'B$ *şi prin urmare,* $C'S//BA'$ $\Rightarrow C'B'//BC$, *dar cum* C' *este mijlocul laturii* $[AB]$, *va rezulta că* B' *este mijlocul laturii* $[AC]$.

Analog se demonstrează că A' *este mijlocul laturii* $[BC]$.

Pe de altă parte, dacă $CH_c \perp AB$, *cum* $DG \perp AB$ $\Rightarrow DG//CH_C$ $\Rightarrow \frac{DG}{CH_C}=\frac{C'G}{C'C}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow CH_c=h_c$. ■

41)Să se construiască un triunghi dacă se cunosc două înălţimi şi o mediană.

i)Mediana şi cele două înălţimi pleacă din vârfuri diferite (m_a, h_b, h_c). Presupunem problema rezolvată, figura construită:

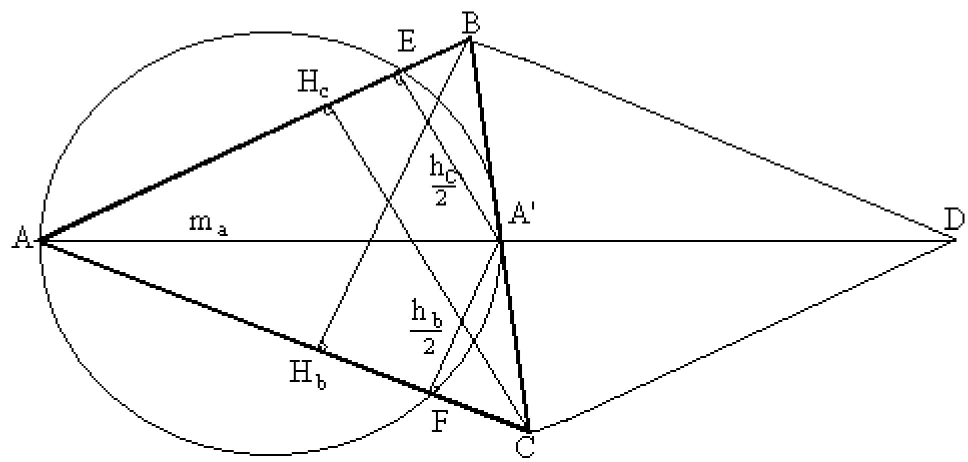


Notăm $AA'=m_a$, $BH_b=h_b$, $CH_c=h_c$. *Fie* $A'F//BH_b$, $F \in AC$ *şi* $A'E//CH_c$, $E \in AB$.

În ΔCBH_b, *A'F//BH*$_b \Rightarrow \frac{A'F}{BH_b} = \frac{CA'}{CB} \Rightarrow A'F = \frac{h_b}{2}$.

În ΔBCH_c, *A'E//CH*$_c \Rightarrow \frac{A'E}{CH_c} = \frac{BA'}{BC} \Rightarrow A'E = \frac{h_c}{2}$.

Pentru a obţine ΔABC*, construim mai întâi* $\Delta AEA'$ *şi* $\Delta AFA'$*,dreptunghice, de ipotenuză comună AA'şi catetele A'E=*$\frac{h_c}{2}$*, A'F=*$\frac{h_b}{2}$*, E şi F de o parte şi de alta a dreptei AA'.*



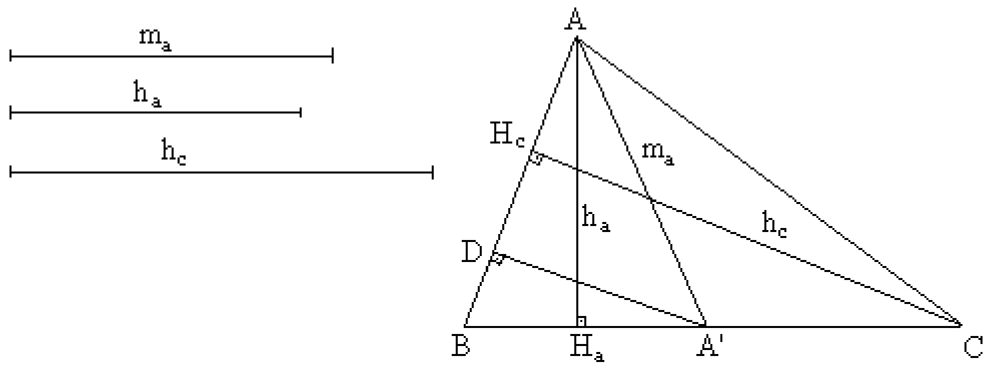
Construim punctul D –simetricul punctului A faţă de punctul A', apoi paralela prin D la dreapta AE, care intersectează AF în punctual C. Punctul B (al treilea vârf al triunghiului) îl obţinem construind simetricul punctului C faţă de punctul A': ΔABC *este triunghiul căutat*

Din AA'=A'D şi CA'=A'B ⇒ADCB este paralelogram ⇒DC//AB; dar DC//AE şi va rezulta că punctele A, E, B sunt coliniare.

Fie $BH_b \perp AC$*; cum* $A'F \perp AC$ ⇒BH_b*//A'F* ⇒ $\frac{A'F}{BH_b} = \frac{CA'}{CB}$ ⇒$BH_b = h_b$

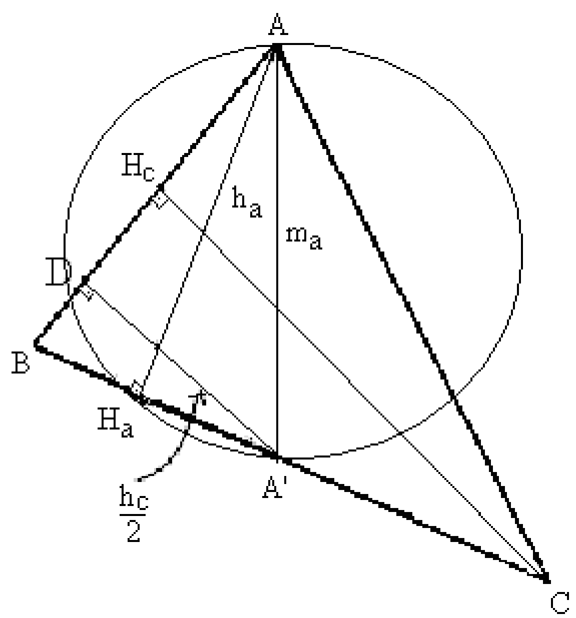
$CH_c \perp AB$*; cum* $A'E \perp AB$ ⇒CH_c*//A'E* ⇒ $\frac{A'E}{CH_c} = \frac{CA'}{CB}$ ⇒$CH_c = h_c$.

ii) Mediana pleacă din acelaşi vârf cu una din înălţimi(m_a*,* h_a*,* h_c*). Presupunem problema rezolvată, figura construită:*



Notăm $AA'=m_a$, $AH_a=h_a$, $CH_c=h_c$. Fie $A'D\perp AB$, $D\in AB$; cum $CH_c\perp AB \Rightarrow A'D//CH_c$ $\Rightarrow \frac{A'D}{CH_c}=\frac{BA'}{BC} \Rightarrow A'D=\frac{h_c}{2}$.

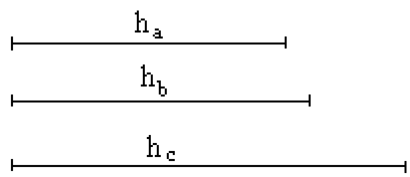
Pentru a obţine ΔABC, construim mai întâi $\Delta AA'H_a$ şi $\Delta AA'D$, dreptunghice, de ipotenuză comună $AA'=m_a$ şi catetele $AH_a=h_a$. $A'D=\frac{h_c}{2}$, cu punctele D şi H_a de aceeaşi parte a dreptei AA'.

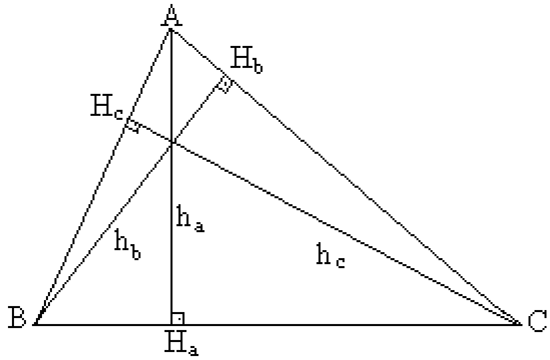


Notăm $AD\cap A'H_a=\{B\}$ şi construim punctul C, ca fiind simetricul punctului B faţă de A'. ΔABC este triunghiul căutat:

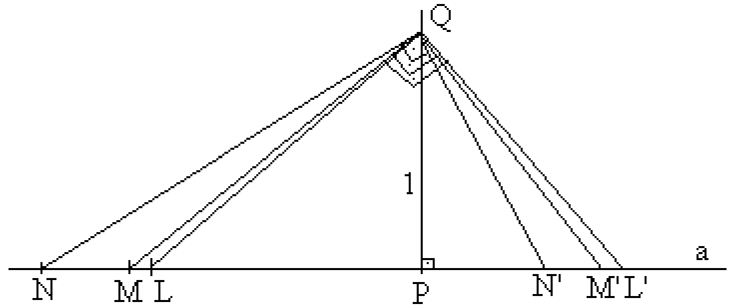
Fie $CH_c\perp AB$; cum $A'D\perp AB$ $\Rightarrow A'D//CH_c\Rightarrow \frac{A'D}{CH_c}=\frac{BA'}{BC}$ $\Rightarrow CH_c=h_c$ şi ΔABC satisface condiţiile din enunţ. ■

42)Să se construiască un triunghi cunoscându-i înălţimile (h_a, h_b, h_c).
Presupunem problema rezolvată, figura construită:



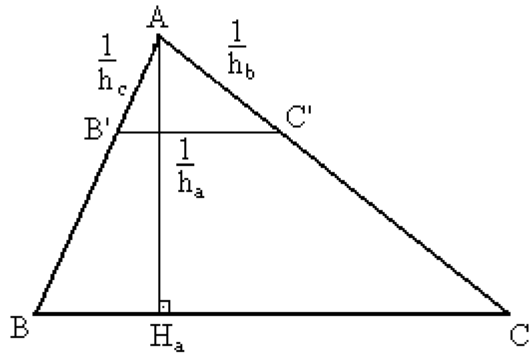


Notăm $AH_a=h_a$, $BH_b=h_b$, $CH_c=h_c$. $\Delta ACH_a \sim \Delta BCH_b$ $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AH_a}{BH_b} \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{h_a}{h_b} \Rightarrow bh_b=ah_a$. *Analog,* $ah_a=ch_c$. *Din* $ah_a=bh_b=ch_c$ $\Rightarrow \dfrac{a}{\frac{1}{h_a}}=\dfrac{b}{\frac{1}{h_b}}=\dfrac{c}{\frac{1}{h_c}} \Rightarrow \Delta ABC$ *este asemenea cu triunghiul de laturi* $\dfrac{1}{h_a},\dfrac{1}{h_b},\dfrac{1}{h_c}$. *Aşadar, fiind date* h_a, h_b, h_c, *construim mai întâi segmentele* $\dfrac{1}{h_a},\dfrac{1}{h_b},\dfrac{1}{h_c}$.



Pe o dreaptă a, considerăm un punct P şi construim segmentele $PL=h_a$, $PM=h_b$, $PN=h_c$, *astfel încât L, M, N se află de aceeaşi parte a punctului P. Construim* $QP\perp a$, $QP=1$ *şi L', M', N' astfel încât* $QL\perp QL'$, $QM\perp QM'$, $QN\perp QN'$.

În $\Delta QLL'$, $m(\sphericalangle LQL')=90^o$, $QP\perp LL'$ $\Rightarrow QP^2=LP\cdot L'P$ $\Rightarrow L'P=\dfrac{1}{h_a}$. *Analog,* $M'P=\dfrac{1}{h_b}$ *şi* $N'P=\dfrac{1}{h_c}$. *Cu lungimile* $\dfrac{1}{h_a},\dfrac{1}{h_b},\dfrac{1}{h_c}$ *construim* $\Delta AB'C'$.



Construim $AH_a \perp B'C'$, $AH_a=h_a$, apoi construim dreapta $b // B'C'$, astfel încât $H_a \in b$. Fie $b \cap AC' = \{C\}$ şi $b \cap AB' = \{B\}$.

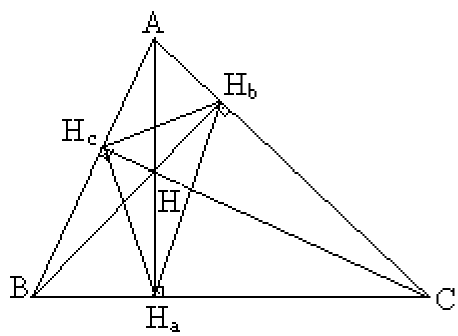
Din $B'C'//BC \Rightarrow \Delta AB'C' \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{1}{h_c}}{c} = \frac{\frac{1}{h_b}}{b} = \frac{\frac{1}{h_a}}{a} \Rightarrow ah_a = bh_b = ch_c.$$

Dacă AH_a, BH_b, CH_c sunt înălţimile ΔABC, atunci $AH_a=h_a$, $BH_b=h_b$, $CH_c=h_c$. ■

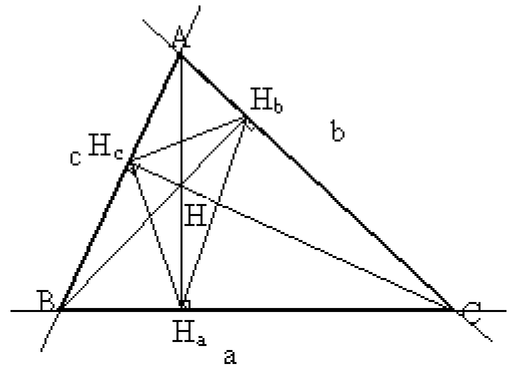
43)Să se construiască un triunghi cunoscându-i picioarele înălţimilor (H_a, H_b, H_c).

Presupunem problema rezolvată, figura construită:



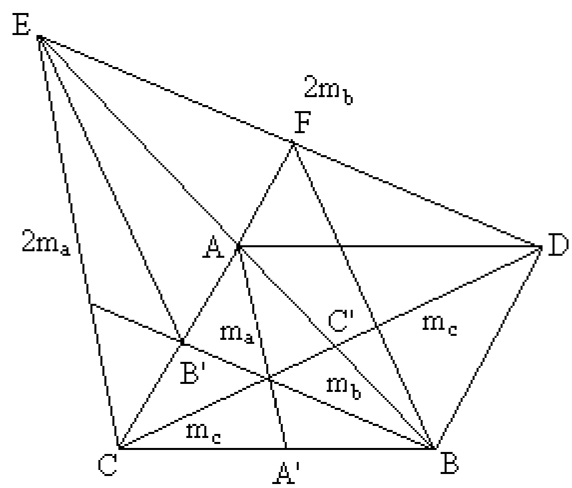
Notând cu H punctul de intersecţie al înălţimilor, patrulaterele AH_cHH_b şi CH_bHH_a sunt inscriptibile $\Rightarrow \sphericalangle H_cH_bH \equiv \sphericalangle H_cAH$ şi $\sphericalangle H_aH_bH \equiv \sphericalangle H_aCH$; dar $\sphericalangle H_cAH \equiv \sphericalangle H_aCH$. Aşadar, va rezulta că $\sphericalangle H_cH_bH \equiv \sphericalangle H_aH_bH$; analog, $\sphericalangle H_bH_cH \equiv \sphericalangle H_aH_cH$ şi $\sphericalangle H_cH_aH \equiv \sphericalangle H_bH_aH$ şi înălţimile ΔABC sunt bisectoarele triunghiului ortic $H_aH_bH_c$.

Pentru a obţine ΔABC, construim bisectoarele $\Delta H_aH_bH_c$ (h_a, h_b, h_c), apoi construim $a \perp h_a$, $H_a \in a$, $b \perp h_b$, $H_b \in b$, $c \perp h_c$, $H_c \in c$ şi notăm $a \cap b = \{C\}$, $b \cap c = \{A\}$, $a \cap c = \{B\}$.



ΔABC îndeplineşte condiţiile din enunţ. ■

44)Să se construiască un triunghi cunoscându-i lungimile medianelor (m_a, m_b, m_c).
Presupunem problema rezolvată, figura construită:



Notăm $AA'=m_a$, $BB'=m_b$, $CC'=m_c$. Construim punctul D ca fiind simetricul punctului C faţă de C' $\Rightarrow CD=2m_c$. Fie $CE//AA'$, $E\in AB$ $\Rightarrow \frac{AA'}{CE}=\frac{CA'}{CB}$ $\Rightarrow CE=2m_a$.

Notăm $CA\cap DE=\{F\}$. În $\Delta ACC'$, $CA\cap DE=\{F\}$, $CC'\cap DE=\{D\}$, $AC'\cap DE=\{E\}$ $\Rightarrow \frac{FA}{CF}\cdot\frac{CD}{C'D}\cdot\frac{C'E}{EA}=1$ (teorema lui Menelaus) $\Rightarrow FA=\frac{CF}{3}$ $\Rightarrow AC=\frac{2CF}{3}$; cum B' este mijlocul laturii AC, va rezulta că $AB'=\frac{CF}{3}$ şi deci $AB'=FA$.

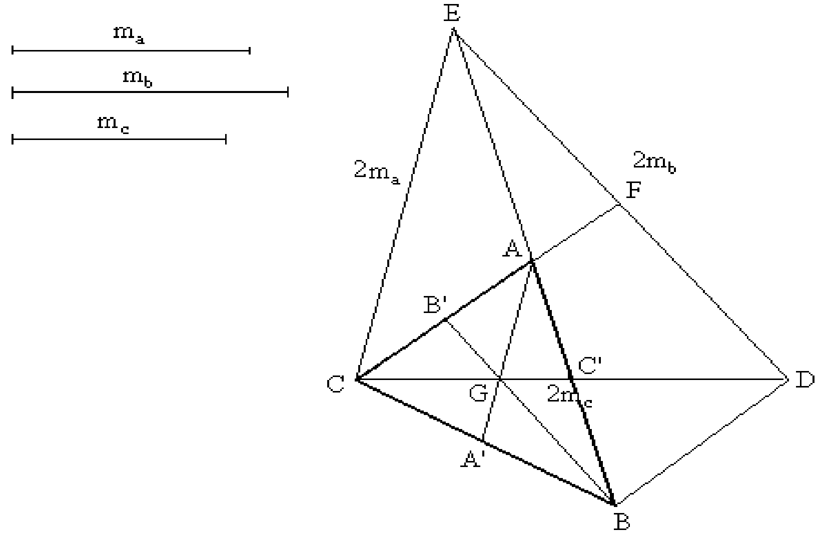
Din $AB'=FA$ şi $BA=AE$ $\Rightarrow BB'EF$ este paralelogram $\Rightarrow EF=BB'=m_b$.

Pe de altă parte, din ACBD paralelogram $\Rightarrow BD//AC$, deci $BD//B'F$ şi cum $BB'//FD$ $\Rightarrow BB'FD$ este paralelogram $\Rightarrow FD=m_b$. Aşadar, $DE=2m_b$.

Problema revine la a construi ΔCED, $CE=2m_a$, $DE=2m_b$, $CD=2m_c$. Problema are soluţie numai dacă m_a, m_b, m_c satisfac relaţiile dintre laturile unui triunghi.

Construim $\triangle CED$, apoi C' –mijlocul laturii [CD] şi F –mijlocul laturii [DE]. Notând EC'∩CF={A}, rezultă că punctul A este centrul de greutate al $\triangle CED$. Construim DB//CF, B∈C'E.

$\triangle ABC$ este triunghiul căutat:



$\triangle ACC' \equiv \triangle BDC'$ (U.L.U.) ⇒AC'=BC' ⇒CC' este mediană în $\triangle ABC$ ⇒ CC'=m_c.

Fie A' –mijlocul segmentului [BC] $\Rightarrow \frac{BA'}{BC}=\frac{1}{2}$. Pe de altă parte, din faptul că punctul A este centrul de greutate al $\triangle CED$, avem că C'A=$\frac{AE}{2}$; dar AC'=BC' şi prin urmare, AB=AE, deci $\frac{AB}{BE}=\frac{1}{2}$.

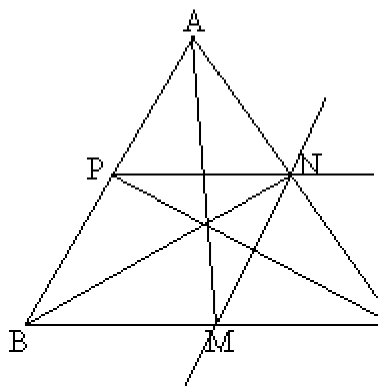
Din $\frac{BA'}{BC}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{AB}{BE}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{AA'}{EC}=\frac{1}{2}$ ⇒AA' =m_a.

Notăm AA'∩CC'={G}, BG∩AC={B'}. Cum AA' şi CC' sunt mediane în $\triangle ABC$ ⇒BB' este mediană. Dovedim că BB'=m_b:

AC=AB'+B'C=AB'+AF=B'F, deci AC=B'F; cum AC=BD, va rezulta ca BD=B'F.

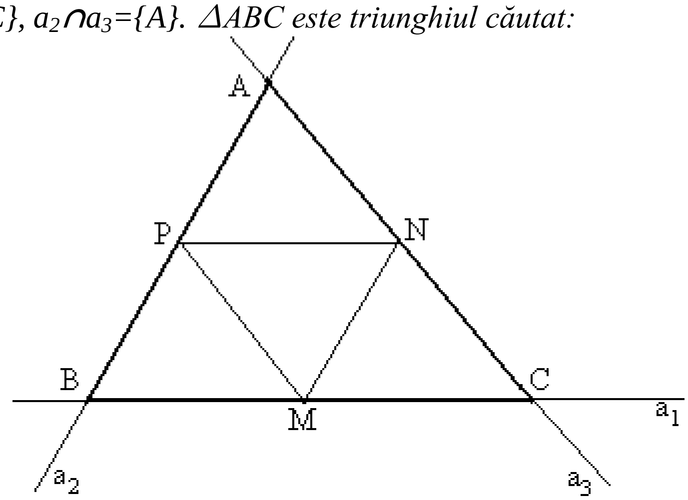
Din BD =B'F şi BD//B'F ⇒BDFB' este paralelogram ⇒BB'=FD ⇒BB'=m_b. ■

45)Să se construiască un triunghi cunoscându-i mijloacele laturilor.
Presupunem problema rezolvată, figura construită:



Fie P, M, respectiv N mijloacele laturilor [AB], [BC], respectiv [CA]. Din AP=PB şi AN=AC ⇒PN//BC; din AN=NC şi BM=MB ⇒MN//BA; aşadar, punctul B se găseşte la intersecţia dreptelor paralele cu PN, respectiv MN, duse prin punctul M, respectiv P.

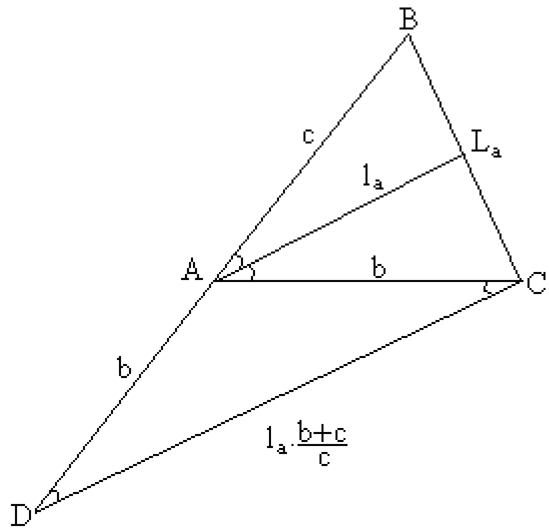
Construim ΔPMN*, apoi* $a_1//PN$*,* $M\in a_1$*,* $a_2//MN$*,* $P\in a_2$*,* $a_3//PM$*,* $N\in a_3$ *şi notăm* $a_1\cap a_2=\{B\}$*,* $a_1\cap a_3=\{C\}$*,* $a_2\cap a_3=\{A\}$*.* ΔABC *este triunghiul căutat:*



Din BMNP şi PMNA paralelograme ⇒MN=BP şi MN=PA ⇒BP=PA; analog, BM=MC, CN=NA şi ΔABC *îndeplineşte condiţiile din enunţ.* ■

46)Să se construiască un triunghi în care se cunosc două laturi şi bisectoarea unghiului format de cele două laturi (b, c, l_a).

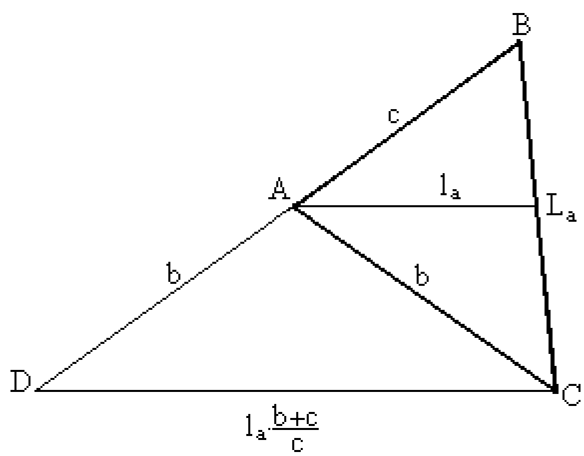
Presupunem problema rezolvată, figura construită:



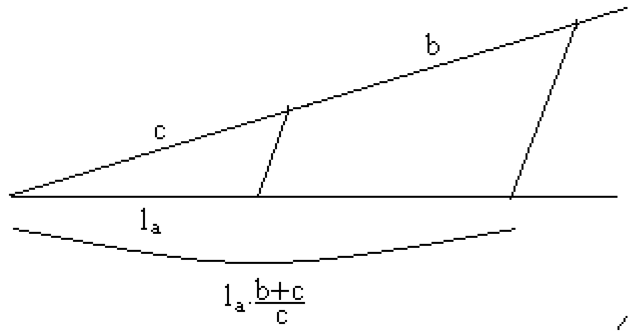
Fie AC=b, AB=c, $AL_a=l_a$.

Construim $CD//AL_a$, $D\in AB$. *Din* $\angle L_aAC\equiv\angle ACD$ *(alterne interne) şi* $\angle L_aAC\equiv\angle ADC$ *(corespondente)* $\Rightarrow\angle ACD\equiv\angle ADC$ $\Rightarrow AC=AD=b$. *În* ΔBDC, $AL_a//CD$ $\Rightarrow \frac{BA}{BD}=\frac{AL_a}{DC}$ $\Rightarrow DC=l_a\cdot\frac{b+c}{c}$.

Pentru a obţine ΔABC, *construim mai întâi* ΔDAC*–isoscel, cu* $AD=AC=b$ *şi* $DC=l_a\cdot\frac{b+c}{c}$;



Construcţia segmentului DC:



Construim $B \in DA$, $D.\text{-}A\text{–}B$, $AB=c$ *şi* $AL_a // CD$ $\Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{AL_a}{DC} \Rightarrow \frac{c}{c+b} = \frac{AL_a}{l_a \cdot \frac{b+c}{c}}$

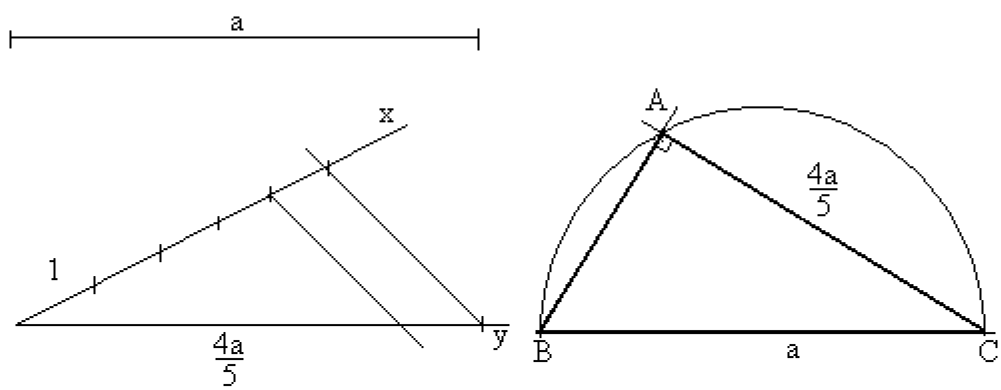
$\Rightarrow AL_a = l_a$ *şi* ΔABC *îndeplineşte condiţiile din enunţ.* ■

47)Să se construiască un triunghi dreptunghic în care se cunoaşte ipotenuza şi o catetă este media aritmetică a celorlalte două laturi.

Fie a–lungimea ipotenuzei, x, z –lungimile catetelor. Din condiţia ca triunghiul să fie dreptunghic $\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ ①; *din condiţia a doua din enunţ* $\Rightarrow x = \frac{a+y}{2}$ ② *(sau* $y = \frac{a+x}{2}$*).*

Din ① *şi* ② $\Rightarrow x = \frac{4a}{5}$ *şi* $y = \frac{3a}{5}$.

Construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză a şi o catetă $\frac{4a}{5}$.

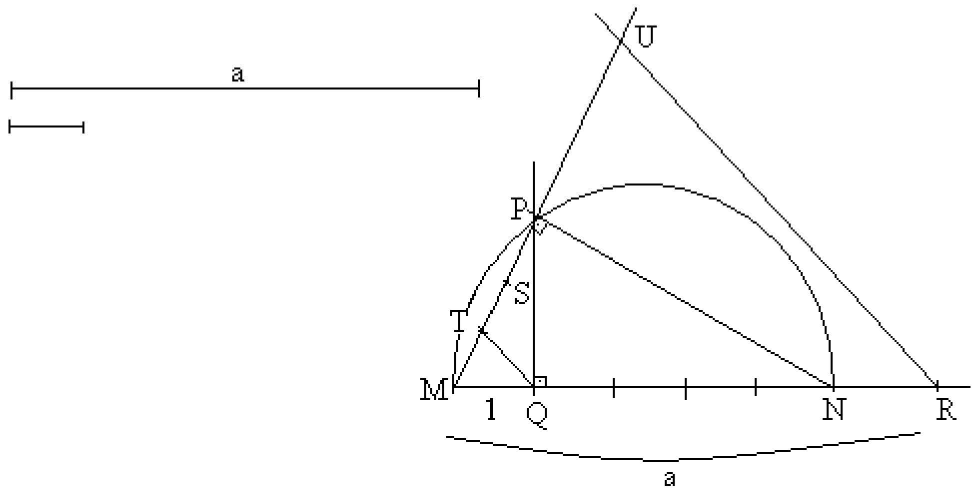


În ΔABC, $m(\sphericalangle A) = 90^o \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB = \frac{3a}{5}$.■

48)Să se construiască un triunghi dreptunghic în care se cunoaşte ipotenuza şi o catetă este media geometrică a celorlalte două laturi.

Fie a –lungimea ipotenuzei, x, z –lungimile catetelor. Din condiţia ca triunghiul să fie dreptunghic $\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ ①; *din condiţia a doua din enunţ* $\Rightarrow x = \sqrt{ay}$ *(sau* $y = \sqrt{ax}$*)* $\Rightarrow x^2 = ay$②. *Din* ① *şi* ② $\Rightarrow x = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ *şi* $y = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

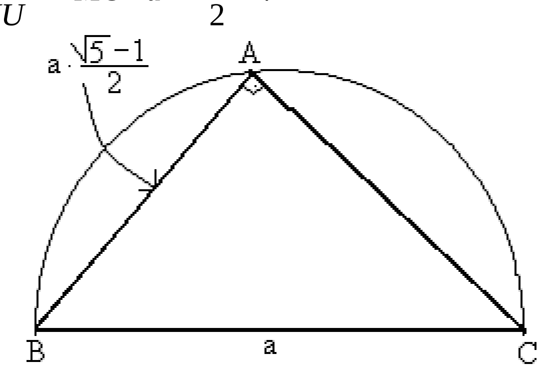
Construim triunghiul dreptunghic de ipotenuză a şi o catetă $a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *(construim mai întâi* $a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$*):*



Fie M, Q, N∈a, M–Q–N, MQ=1, MN=5. Perpendiculara în Q pe MN, intersectează cercul de diametru MN în punctul P.

În ΔPMN, m(∢P)=90° $\Rightarrow MP^2=MQ\cdot MN \Rightarrow MP=\sqrt{5}$*. Construim S ∈PM, P–S–M, PS=1; atunci, MS =* $\sqrt{5}$*-1. Construim T –mijlocul segmentului [MS]; atunci, MT=*$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$*.*

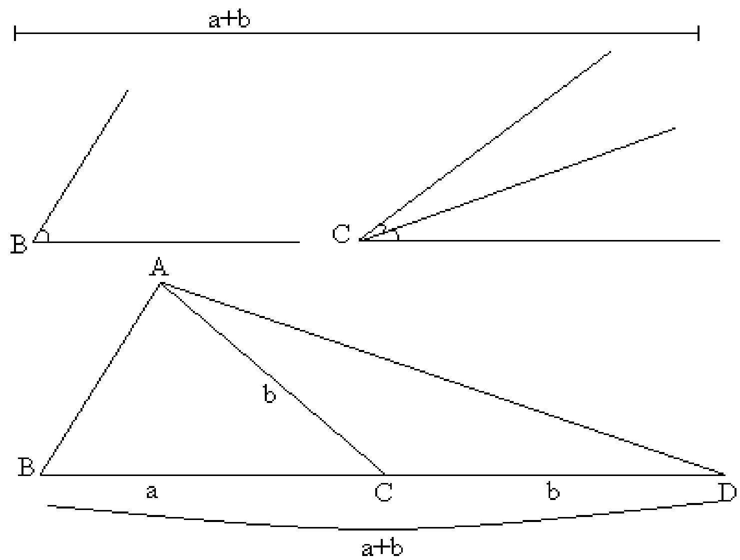
Construim R ∈MN, MR =a, astfel încât punctele R şi N se află de aceeaşi parte a lui M, apoi RU//TQ, U∈MP $\Rightarrow \frac{MQ}{MR}=\frac{MT}{MU} \Rightarrow MU=a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



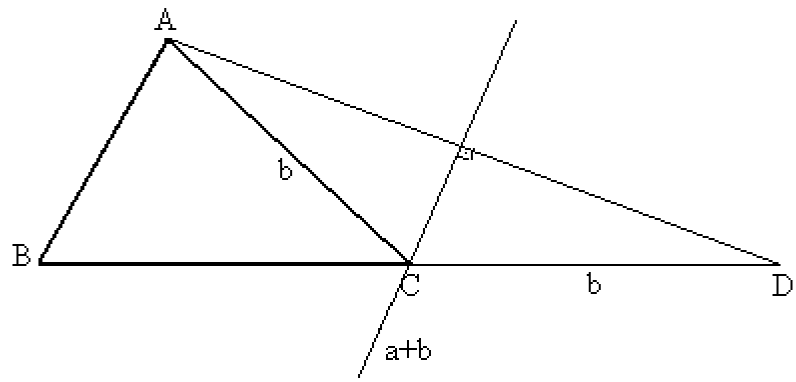
În ΔABC, m(∢A)=90° $\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow AC=a\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ *şi deci ΔABC îndeplineşte condiţiile din enunţ.*■

49)Să se construiască ΔABC, cunoscând unghiurile şi suma a+b, unde a=BC şi b=AC.

Presupunem problema rezolvată, figura construită:

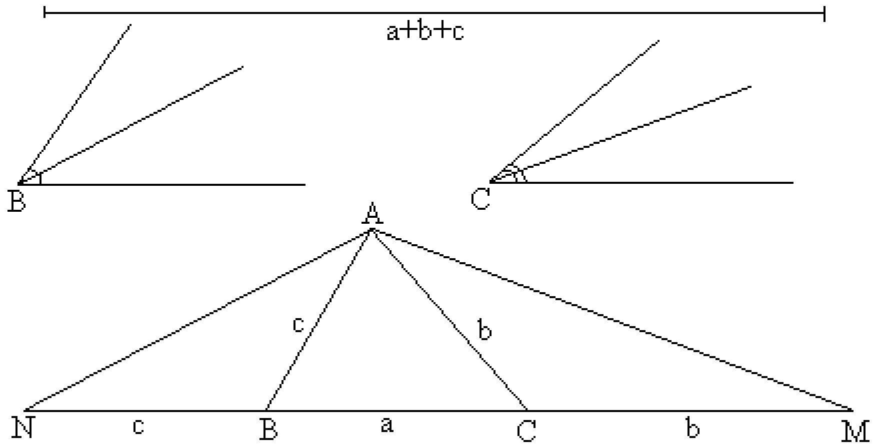


Fie $D\in BC$, B–C–D, astfel încât $CD=b$ $\Rightarrow BD=a+b$. În ΔADC, $AC=DC$ $\Rightarrow m(\sphericalangle CAD)=m(\sphericalangle CDA)=\dfrac{m(\prec ACB)}{2}$. Pentru a obţine ΔABC, construim mai întâi ΔABD, cu $BD=a+b$, $m(\sphericalangle B)$ dată şi $m(\sphericalangle D)=\dfrac{m(\prec C)}{2}$.



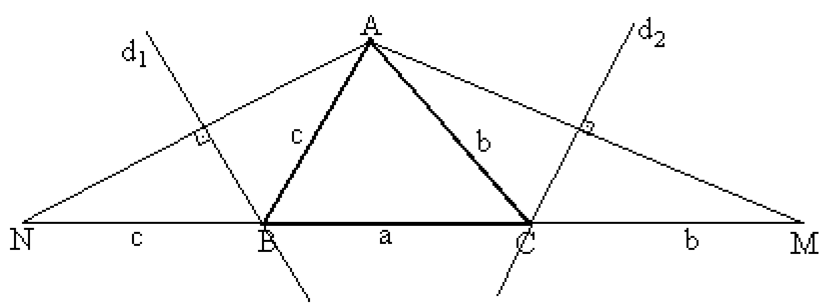
Construim d –mediatoarea segmentului $[AD]$; $d\cap BD=\{C\}$ $\Rightarrow AC=DC$ $\Rightarrow BC+CA=a+b$, iar $m(\sphericalangle CAD)=m(\sphericalangle CDA)=\dfrac{m(\prec ACB)}{2}$ şi ΔABC îndeplineşte condiţiile din enunţ. ■

50)Să se construiască ΔABC, cunoscând unghiurile şi perimetrul.
Presupunem problema rezolvată, figura construită:



Fie $M,N\in BC$, N-B-C–M, astfel încât $NB=BA$ şi $MC=CA$ $\Rightarrow NM=a+b+c$. În ΔABN, $AB=NB$ $\Rightarrow m(\sphericalangle ANB)=m(\sphericalangle NAB)=\dfrac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$; în ΔACM, $AC=CM$ $\Rightarrow m(\sphericalangle AMC)=m(\sphericalangle MAC)=\dfrac{m(\sphericalangle ACB)}{2}$.

Pentru a obţine ΔABC, construim mai întâi ΔANM, cu $NM=a+b+c$, $m(\sphericalangle N)=\dfrac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$ şi $m(\sphericalangle M)=\dfrac{m(\sphericalangle ACB)}{2}$.



Construim d_1 –mediatoarea segmentului $[AN]$, $d_1\cap NM=\{B\}$; construim d_2 – mediatoarea segmentului $[AM]$, $d_2\cap N=\{C\}$. P_{ABC} *$=AB+BC+CA=NB+BC+CM=c+b+a$ şi ΔABC îndeplineşte condiţiile din enunţ.*■

BIBLIOGRAFIE

1. ANDONIE, G., Varia mathematica, Ed. Tineretului, 1969.
2. BUICLIU, GH., Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
3. CÂMPAN, F., Probleme celebre, Ed. Tineretului, 1967.
4. DĂNCILĂ, I., Construcţii cu rigla şi compasul, Ed. Sigma, 2003.
5. PĂUN, GH., Din spectacolul matematicii, Ed. Albatros, 1983.
6. *VÂRTOPEANU, I., VÂRTOPEANU, O., Geometrie plană pentru gimnaziu şi liceu –tipuri de probleme, metode şi tehnici de rezolvare, Ed. Sibila, Craiova, 1994.*