Revista Electronică MateInfo.ro

IULIE 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre (dobre.andrei@yahoo.com)

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

Revista MateInfo.ro din luna iulie 2012 îi este dedicată marelui matematician

Traian Lalescu

Traian Lalescu s-a născut la data de 12 iulie 1882.

Luna acesta se implinesc 130 de ani de la nasterea marelui academician, matematician roman şi profesor universitar Traian Lalescu.

Pe tot parcursul studiilor sale, Traian Lalescu a fost premiantul I al clasei şi preminantul de onoare al şcolii, devenind încă din clasa a VI-a corespondent al Gazetei Matematice. După terminarea liceului, în toamna anului 1900, Traian Lalescu a dat examen de admitere la Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti, reuşind primul, dar după trei ani se retrage şi se înscrie la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti, secţia de Matematici. Printre profesorii săi se numărau Gheorghe Ţiţeica, Anton Davidoglu, Spiru Haret, Nicolae Coculescu si Ermil Pangrati. Obţine titlul de licenţiat în matematică în 1905 după care pleacă la Paris. La 28 februarie 1908 şi-a susţinut, la Sorbona , teza de doctorat cu titlul *Sur l'equation de Volterra* care va fi considerată prima contribuţie de seamă în domeniul ecuaţiilor integrale şi prin aceasta unul dintre fondatorii teoriei ecuaţiilor integrale. Ilustrul matematician Volterra a fost atât de impresionat de lucrarea lui Traian Lalescu, încât a introdus rezultatele acesteia în propria sa lucrare intitulată "Lecţii asupra ecuaţiilor integrale şi integro-diferenţiale". Reîntors în ţară, funcţionează în învăţământul mediu la Giurgiu şi Bucureşti la Seminarul Central şi la Gimnaziul „ Gheorghe Şincai".A publicat în 1911 cel dintâi tratat din lume asupra ecuaţiilor integrale, intitulat *Introducere la teoria ecuaţiunilor integrale*, Editura Hermann Fils-Paris. În 1921 a editat la Timişoara "Revista Matematică".

Între 1920 si 1927 a scris „ Tratat de geometrie analitică", în patru volume. Traian Lalescu este autorul unei monografii intitulată „Geometria triunghiului" şi al unor studii originale privind funcţiile spline . A elaborat studii în domeniile ecuaţiilor funcţionale, seriilor trigonometrice, fizicii matematice, geometriei, algebrei, istoriei matematicii.

Sursa: http://ro.wikipedia.org/

TRIUNGHIURI DE ARIE ŞI PERIMETRU DATE.APLICAŢII.

NECULAI STANCIU, Buzău şi TITU ZVONARU, Comăneşti

Abstract. Success in problem solving requires effort. These are not routine exercises. They are problems whose solutions depend of trying something new(like following: Given a right-angled triangle with area A and perimeter P, what conditions on A and P guarantee that the triangle actually exists?).

Keywords: Heronian triangle, primitive triangle, right-angled triangles, area, perimeter.

MSC:51M16, 51M71.

Articolul este o continuare a lucrărilor [16,17] şi are ca scop prezentarea unui set de probleme reprezentative care au în ipoteză aria unui triunghi (A) şi perimetrul acestuia (P).

Mai mulţi autori au propus probleme care aveau ca date iniţiale A şi P, fără a se examina dacă triunghiul respectiv există în realitate (vezi $[12]$).

Se ştie că pentru un triunghi oarecare avem:

$$P^2 \geq 12\sqrt{3}\cdot A \Leftrightarrow A \leq \frac{P^2\sqrt{3}}{36} \qquad (1)$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Vom demonstra relaţia (1) folosind inegalitatea izoperimetrică.

Din inegalitatea izoperimetrică pentru poligoane rezultă că dintre toate poligoanele de perimetru dat şi acelaşi număr de laturi poligonul regulat are aria maximă, şi dual, dintre toate poligoanele de arie dată şi acelaşi număr de laturi poligonul regulat are perimetrul minim.Aşadar pentru triunghiuri avem:

$$\left.\begin{array}{l} A \leq A_3 = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{4}{l^2\sqrt{3}} \\ P \geq P_3 = 3l \Leftrightarrow P^2 \geq 9l^2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{P^2}{A} \geq 12\sqrt{3} \approx 20{,}785$$

O condiţie asemănătoare pentru existenţa triunghiurile dreptunghice am stabilit în [16], pornind de la următorul:

Exemplu. Calculaţi lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu $A = 8$ şi $P = 13$.

Soluţie. Este uşor de verificat că pentru $A = 8$, $P = 13$, relaţia (1) este adevărată. Prima idee ar fi să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} ab = 2A \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = P \end{cases}$$, unde a, b sunt catetele triunghiului.

Există însă şi o cale mai "frumoasă" (vezi $[13]$). Dacă c este ipotenuză, avem:

$$P - c = a + b \Leftrightarrow P^2 - 2Pc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{a^2+b^2=c^2}{\underset{ab=2A}{=}} c^2 + 4A \Leftrightarrow P^2 - 4A = 2Pc$$, adică

$$c = \frac{P^2 - 4A}{2P}.$$

În cazul nostru avem $c = \frac{137}{26}$; să calculăm totuşi şi lungimile catetelor din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} ab = 16 \\ a + b = \frac{201}{26} \end{cases}$$

Obţinem ecuaţia:

$$26x^2 - 201x + 416 = 0$$ cu soluţiile $x_{1,2} = \frac{201 \pm i\sqrt{2863}}{52}$,

aşadar triunghiul considerat nu există!

În cazul unui triunghi dreptunghic condiţia de existenţă este:

$$P \geq 2(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{A} \Leftrightarrow P^2 \geq 4(3 + 2\sqrt{2}) \cdot A \Leftrightarrow A \leq \frac{P^2(3 - 2\sqrt{2})}{4} \qquad (*)$$

Deci:

$$\frac{P^2}{A} \geq 4(3 + 2\sqrt{2}) \approx 23{,}314.$$

Întradevăr:

$$P - c = a + b \Leftrightarrow P^2 - 2Pc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{a^2+b^2=c^2}{\underset{ab=2A}{=}} c^2 + 4A \Leftrightarrow P^2 - 4A = 2Pc.$$

Rezultă:

$$c = \frac{P^2 - 4A}{2P}.$$

Din

$$a+b=P-c=P-\frac{P^2-4A}{2P}=\frac{P^2+4A}{2P}\Rightarrow b=\frac{P^2+4A}{2P}-a\,.$$

Apoi din

$$ab=2A\Rightarrow a(\frac{P^2+4A}{2P}-a)=2A\Rightarrow \frac{Pa^2}{2}-(\frac{P^2}{4}+A)a+AP=0\,.$$

Dar, ultima ecuaţie are soluţii reale dacă:

$$\Delta_a\geq 0\Leftrightarrow (\frac{P^2}{4}+A)^2-4\cdot\frac{P}{2}\cdot A\cdot P\geq 0\Leftrightarrow \left(\frac{P^2}{4A}\right)^2-6\left(\frac{P^2}{4A}\right)+1\geq 0\,.$$

Rezolvând ultima inecuaţie obţinem:

$$P^2\geq 4A(3+2\sqrt{2}) \text{ sau } P^2\leq 4A(3-2\sqrt{2})\,,$$

echivalente cu

$$P\geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{A} \text{ sau } P\leq 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{A}\,.$$

Aceste ultime condiţii trebuiesc corelate şi cu condiţia $P>2\sqrt{A}$, de existenţă a ipotenuzei.Obţinem că triunghiul dreptunghic de arie A şi perimetru P există dacă şi numai dacă avem:

$$P\geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{A}\Leftrightarrow A\leq\frac{P^2(3-2\sqrt{2})}{4}\Leftrightarrow\frac{A}{P^2}\leq\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\frac{P^2}{A}\geq 4(3+2\sqrt{2})$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este dreptunghic isoscel.

În continuare, vom prezenta un set de aplicaţii cu A şi P - pe care le considerăm utile (unde nu vom mai pune problema existenţei triunghiurilor aceasta fiind de cele mai multe ori evidentă).

Aplicaţia 1. (vezi $[3]$**)**

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice de arie A şi perimetru P cu lungimile laturilor a,b,c numere naturale şi cel mai mare divizor comun al lor $(a,b,c)=1$ astfel încât $\frac{P^2}{A}\in N$.

*Soluţia1.*Fie $\frac{P^2}{A}=k\in N$.

Se ştie că

$$a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2, m>n, (m,n)=1, \text{ de paritate diferită.}$$

$$k = \frac{P^2}{A} = \frac{4m(m+n)}{n(m-n)} = \frac{4x(x+1)}{x-1}, \text{ unde } x = \frac{m}{n} \in Q_+^*.$$

$$k = \frac{4x(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - (k-4)x + k = 0.$$

Din

$$x = \frac{k-4 \pm \sqrt{(k-4)^2 - 16k}}{8} \in Q_+^*, \text{ rezultă că :}$$

$$\Delta = (k-4)^2 - 16k = (k-12)^2 - 128 = \text{pătrat perfect.}$$

Deci

$$(k-12)^2 - 128 = d^2, \text{ unde } d \in N.$$

Se obţine :

$$(k-12-d)(k-12+d) = 128 = 2^7 \Rightarrow \begin{cases} k-12-d = 2^t \\ k-12+d = 2^{7-7} \end{cases}, \text{ unde } t \in \{1,2,3\}.$$

Avem

$$x = \frac{k-4 \pm d}{8}.$$

Deci

$$x = \frac{k-4+d}{8} = 2^{7-t} + 1, \text{ sau }, \ x = \frac{k-4-d}{8} = \frac{2^t + 8}{8}.$$

Din faptul că $(m,n) = 1$, de paritate diferită rezultă $x = \dfrac{2^t + 8}{8}$.

1) Pentru $t = 1$, avem:
$x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow m = 5, n = 4 \Rightarrow a = 9, b = 40, c = 41 \Rightarrow A = 180, P = 90 \Rightarrow k = 45$;

2) Pentru $t = 2$, avem:
$x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m = 3, n = 2 \Rightarrow a = 15, b = 12, c = 13 \Rightarrow A = 30, P = 30 \Rightarrow k = 30$;

3) Pentru $t = 1$, avem:
$x = \dfrac{2}{1} \Rightarrow m = 2, n = 1 \Rightarrow a = 3, b = 4, c = 5 \Rightarrow A = 6, P = 12 \Rightarrow k = 24$

*Soluţia 2.*Fie $\frac{P^2}{A} = k \in N$.

Se ştie că $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2, m > n, (m,n) = 1$, de paritate diferită.

$$k = \frac{P^2}{A} = \frac{4m(m+n)}{n(m-n)} = 4 + \frac{4(m^2+n^2)}{n(m-n)}.$$

Deoarece $(m,n) = 1$, n nu poate fi divizor al expresiei $m^2 + n^2$, decât dacă avem posibilităţile:

1) $n = 1 \Rightarrow k = 4 + \frac{4m^2 - 4 + 8}{m-1} = 4m + 8 + \frac{8}{m-1}$ şi cum m este par deducem $m = 2$, adică $a = 3, b = 4, c = 5, A = 6, P = 12, k = 24$.

2) $n = 2 \quad \Rightarrow k = 4 + \frac{2m^2 - 8 + 16}{m-2} = 2m + 8 + \frac{16}{m-2}$ şi cum m este impar deducem $m = 3$, adică $a = 5, b = 12, c = 13, A = 30, P = 30, k = 30$.

3) $n = 4 \quad \Rightarrow k = 4 + \frac{m^2 - 16 + 32}{m-4} = m + 8 + \frac{32}{m-4}$ şi cum m este impar deducem $m = 5$, adică $a = 9, b = 40, c = 41, A = 180, P = 90, k = 45$.

Rezultate deosebite, în ceea ce priveşte triunghiurile *Heron* a stabilit matematicianul indian *K.R.S. Sastry* în [7], [8], [9], [10], şi [11].

Aplicaţia 2.

Determinaţi triunghiul cu dimensiunile maxime, numere naturale, a căror sumă este număr par pentru care aria este tot număr natural şi este egală cu perimetrul acestuia.

*Soluţie.*Notăm cu a,b,c dimensiunile laturilor, cu A aria , cu P perimetrul, şi cu s semiperimetrul triunghiului.

Din ipoteză avem

$s = \frac{a+b+c}{2} \in N^*$.Cum $s > a, s > b, s > c$ fără a pierde din generalitate presupunem că $\exists m \geq 1, m \in N$ a.î. $s = c + m$.

Din

$$\frac{a+b+c}{2} = c + m \Rightarrow c = a + b - 2m \tag{1}$$

Apoi din $P=2(a+b-m)$, $s=a+b-m$ şi formula lui *Heron* avem:

$$A^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(a+b-m)(b-m)(a-m)m \qquad (2)$$

Din ipoteza $A=P$ şi relaţia (2) rezultă :

$$A^2=P^2 \Leftrightarrow (a+b-m)(b-m)(a-m)m=4(a+b-m)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=m+\frac{4m}{am-m^2-4}.$$

Deci dimensiunile sunt maxime pentru $am-m^2-4=1 \Leftrightarrow m(a-m)=5$.

Avem două cazuri:

1) $\begin{cases} m=5 \\ a-m=1 \end{cases} \Rightarrow a=6, b=29, c=25;$

2) $\begin{cases} m=1 \\ a-m=5 \end{cases} \Rightarrow a=6, b=25, c=29.$

Rezultă că triunghiul căutat are dimensiunile (6,25,29) iar $A=P=60$.

Aplicaţia 3.

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care au:

a) aria egală cu 84 unităţi de arie;

b) perimetrul egal cu 24 unităţi de lungime.

*Soluţie.*Considerăm lungimile laturilor a,b şi c.

Avem

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (*)\begin{cases} a=x^2+y^2 \\ c=x^2-y^2 \\ b=2xy \\ x>y \end{cases};(x,y)\in N\times N.$$

a) $A=\dfrac{bc}{2}=xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)>y\cdot y\cdot y\cdot 1\Rightarrow y^3<A$

(1) $84 = xy(x+y)(x-y) \Rightarrow y < 5$ .Singura soluţie în mulţimea numerelor naturale a ecuaţiei (1) este $x = 4; y = 3 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 25; b = 7; c = 24.$

b) $P = a + b + c = 2x(x + y)$

(2) $x(x + y) = 12$. Singura soluţie în mulţimea numerelor naturale a ecuaţiei (1) este:

$x = 3; y = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 10; b = 6; c = 8.$

Aplicaţia 4.

Determinaţi toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale, care au aria egală cu semiperimetrul.

Soluţie. Fără să pierdem generalitatea presupunem $a \le b \le c$.

Avem $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, iar din $A = p$, rezultă:

(1) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4(a+b+c)$.

Notăm :

$$x = b + c - a ,\ y = c + a - b ,\ z = a + b - c ,$$

Atunci:

$$a = \frac{y+z}{2},\ b = \frac{z+x}{2},\ c = \frac{x+y}{2}.$$

Ecuaţia (1) devine:

(2) $xyz = 4(x + y + z)$.

Din cele de mai sus rezultă că x, y şi z sunt numere naturale pare cu $z \le y \le x$.

Atunci:

$$xyz = 4(x+y+z) \le 12x \Rightarrow yz \le 12 \Rightarrow z = 2.$$

Acum ecuaţia (2) devine

$x = 2 + \dfrac{16}{2y-4}$, care implică $y = 4, x = 6$.

Aceasta implică $a = 3, b = 4, c = 5$.

Observaţie. Singurul triunghi care are lungimile laturilor numere naturale şi aria egală cu semiperimetrul este triunghiul dreptunghic cu lungimile laturilor:3, 4 şi 5.

Aplicaţia 5.(vezi [15])

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care au aria egală cu perimetrul.

*Soluţie.*Considerăm lungimile laturilor a,b şi c.

Avem

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (*)\begin{cases} a=x^2+y^2 \\ c=x^2-y^2 \\ b=2xy \\ x>y \end{cases};(x,y)\in N\times N.$$

$$A=\frac{bc}{2}=xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)$$

$$P=a+b+c=2x(x+y)$$

$$A=P \Leftrightarrow 2x(x+y)=xy(x^2-y^2) \Leftrightarrow y(x-y)=2 \Rightarrow x=3; y=1 \text{ sau } x=3, y=2.$$

Există deci două triunghiuri pentru care $A=P$ şi anume:

triunghiul $a=10; b=6; c=8$, respectiv, triunghiul $a=13; b=12; c=5$.

Aplicaţia 6.

Arătaţi că nu există triunghiuri *Heron* cu lungimile laturilor numere prime.

*Soluţie.*Din formula lui Heron avem că aria unui triunghi verifică: $A^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$, unde $s=\frac{a+b+c}{2}$, iar a,b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului.

Dacă $p=a+b+c$, atuci formula lui *Heron* se rescrie astfel:

$$16A^2=p(p-2a)(p-2b)(p-2c).$$

Deoarece membrul stâng este par, p trebuie să fie număr par.Există două posibilităţi:

Cazul I. Toate numerele a,b,c sunt pare.

Pentru că toate numerele a,b,c sunt pare şi prime, rezultă $a=b=c=2$.

Deci triunghiul este echilateral cu aria $A=\sqrt{3}$.

Cazul II. Unul dintre numerele a,b,c este par iar celelalte două sunt impare.

Fără să pierdem din generalitate, presupunem că $a=2$ iar b şi c sunt impare.

Dacă $b \neq c$, putem lua $b<c$.

Atunci $c-b \geq 2 \Leftrightarrow c \geq b+2=b+a$, ceea ce reprezintă o contradicţie cu inegalitatea triunghiului.

Deci, $b=c$ .Acum $p=2+2b$, şi avem:

$$16A^2 = p(p-4)(p-2b)^2 = (2b+2)(2b-2)\cdot 4 \Leftrightarrow b^2 - A^2 = 1 \Leftrightarrow (b+A)(b-A)=1.$$

Dar deoarece $b+A \geq 2$, ultima relaţie nu poate avea loc.

În concluzie, nu există triunghiuri *Heron* cu lungimile laturilor numere prime.

Aplicaţia 7.

Considerăm un triunghi dreptunghic cu perimetrul P şi aria A numere naturale.

Arătaţi că: ipotenuza este număr natural dacă şi numai dacă P este număr natural par şi $\frac{P}{2}$ divide pe A $\Leftrightarrow P|2A$.

*Soluţie.*Din $c=\frac{P^2-4A}{2P} \in N \Rightarrow 2P|P^2-4A$.

Din $2P = par \Rightarrow P^2-4A = par \Rightarrow P = par$.

Dacă $P=2k$ din (1)obţinem

$$c=\frac{k^2-A}{k}=k-\frac{A}{k} \qquad (2)$$

Din $P=2k$ şi $P=par \Rightarrow k \in N$.

Din relaţia (2) rezultă că $c \in N \Leftrightarrow k|A \Leftrightarrow \frac{P}{2}|A$, echivalent cu $P|2A$.

Aplicaţia 8.

Determinaţi toate triunghiurile care au lungimile laturilor numere prime şi pătratul ariei număr natural.

*Soluţie.*Conform soluţiei aplicaţiei 6, triunghiul echilateral de latură 2 are pătratul ariei egal cu 3.

Observaţie. Soluţia de mai sus arată că - nu există triunghiuri cu lungimile laturilor numere prime şi aria număr natural.

Aplicaţia 9.

Determinaţi toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale(dintre care cel puţin unul este prim), semiperimetrul număr natural şi aria egală numeric cu perimetrul acestuia.

*Soluţie.*Notăm cu a,b,c lungimile laturilor, cu A aria, cu P perimetrul şi cu s semiperimetrul triunghiului.Presupunem că a este număr prim.Cum $s > c$, notăm cu $m \in N, m \geq 1$ astfel încât $s = c + m$ .Din $\frac{a+b+c}{2} = c + m$ rezultă $c = a + b - 2m$, iar din $P = 2(a+b-m), s = a+b-m$

şi formula lui Heron avem:

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = (a+b-m)(b-m)(a-m)m$$

şi apoi

$$A^2 = P^2 \Leftrightarrow (a+b-m)(b-m)(a-m)m = 4(a+b-m)^2 \Leftrightarrow b = m + \frac{4a}{am - m^2 - 4}.$$

Cum a este prim, avem posibilităţile:

1) $am - m^2 - 4 = 1 \Rightarrow m(a-m) = 5 \Rightarrow (m=1, a=6), (m=5, a=6)$;

2) $am - m^2 - 4 = 2 \Rightarrow m(a-m) = 6 \Rightarrow (m=6, a=7, b=20, c=15)$,

$(m=3, a=5, b=13, c=12), (m=2, a=5, b=12, c=13), (m=1, a=7, b=15, c=20)$;

3) $am - m^2 - 4 = 4 \Rightarrow m(a-m) = 8 \Rightarrow (m=8, a=9)$,

$(m=4, a=6), (m=2, a=6), (m=1, a=9)$;

4) $am - m^2 - 4 = a \Rightarrow a = \frac{m^2+4}{m-1} = m + 1 + \frac{5}{m-1} \Rightarrow (m=2, a=8), (m=6, a=8)$;

5) $am - m^2 - 4 = 2a \Rightarrow a = \frac{m^2+4}{m-2} = m + 2 + \frac{8}{m-2} \Rightarrow (m=3, a=13, b=5, c=12)$,

$(m=4, a=10), (m=6, a=10), (m=10, a=13, b=12, c=5)$;

6) $am - m^2 - 4 = 4a \Rightarrow a = \dfrac{m^2+4}{m-4} = m + 4 + \dfrac{20}{m-4} \Rightarrow (m=5, a=29, b=6, c=25)$,

$(m=6, a=20), (m=8, a=17, b=9, c=10), (m=9, a=17, b=10, c=9), (m=14, a=20)$,

$(m=24, a=29, b=25, c=6)$.

În concluzie, triunghiurile cerute au laturile $\{7,15,20\}, \{5,12,13\}, \{6,25,29\}, \{9,10,17\}$.

Aplicaţia 10.

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale ştiind că o latură are lungimea 2011.

Soluţie. Se ştie că lungimile laturilor, numere naturale, ale unui triunghi dreptunghic sunt date de:

$(x^2 - y^2)k$, $(2xy)k$ şi $(x^2 + y^2)k$, unde x, y şi k sunt numere naturale nenule cu $x > y$.

Cum latura de lungime $(2xy)k$ este număr par, vom considera doar cazurile în care $(x^2 - y^2)k$ =2011 şi $(x^2 + y^2)k$ =2011.

Cazul 1. $(x^2 - y^2)k$ =2011.Cum 2011 este număr prim rezultă $k = 1$ sau $k = 2011$.

Dacă $k = 2011$, atunci $x^2 - y^2 = 1$, aşa că $(x-y)(x+y) = 1$, de unde $y = 0$, contradicţie!(deoarece $y > 0$).

Dacă $k = 1$, atunci $x^2 - y^2 = 2011 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 2011 \Rightarrow x - y = 1$ şi $x + y = 2011$, de unde $x = 1006$ şi $y = 1005$.

Rezultă triunghiul dreptunghic cu lungimile laturilor $(2011, 2022060, 2022061)$.

Cazul 2. $(x^2 + y^2)k$ =2011.Ca şi la cazul 1, avem $k = 1$ ($k = 2011$, nu este posibil deoarece $x = 0$ sau $y = 0$).

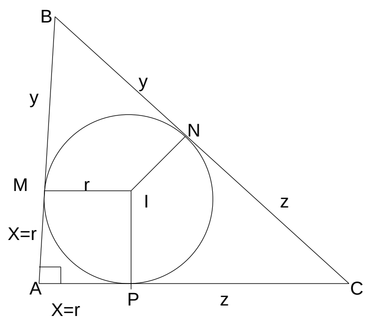
Aşadar, $x^2 + y^2 = 2011$.Deoarece orice pătrat perfect este congruent cu 0 sau 1 modulo 4, iar $2011 \equiv 3 (\bmod 4)$ rezultă că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2011$, nu are soluţii numere naturale.

Deci, în acest caz nu exită niciun triunghi dreptunghic.

Prin urmare există un singur triunghi ale cărui laturi au lungimile: $(2011, 2022060, 2022061)$.

Aplicaţia 11.(vezi [14]).

a) Calculaţi lungimea razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic cu semiperimetrul p şi lungimea ipotenuzei i, unde $p > i$;
b) Arătaţi că în cazul în care triunghiul este pitagoreic(cu lungimile laturilor numere naturale) lungimea razei cercului înscris este număr natural.



Soluţie.

a) (1) $p = r + y + z$.Dar, (2) $i = y + z$.Din (1) şi (2) rezultă imediat că:

$$r = p - i.$$

b)Este suficient să considerăm triunghiul dreptunghic primitiv.În acest caz ipotenuza este număr impar, o catetă este număr par , iar cealaltă catetă este numă impar.Dacă notăm cu P perimetrul triunghiului avem că P este număr par.

De la punctul a) avem că :

$$(3)\ r = \frac{P}{2} - i$$

Din faptul că $P = par \Rightarrow (4)\frac{P}{2} \in N$.

Din ipoteză $(5)\, i \in N$.

Din (4) şi (5) rezultă $r \in N$.

Aplicaţia 12.

Determinaţi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic pentru care $r = 2013$ (r este raza cercului înscris) ştiind că acestea sunt numere naturale, prime între ele două câte două .

Soluţie. Din figura de la aplicaţia 11, avem:

$$\begin{cases} y+z=a \\ z+r=b \\ y+r=c \end{cases} \Rightarrow 2a+2r=a+b+c \Rightarrow (1) r=\frac{b+c-a}{2},$$

unde b,c sunt lungimile catetelor iar a este lungimea ipotenuzei.

Se ştie că (2) $b=2mn, c=m^2-n^2, a=m^2+n^2$, unde $(m,n)=1$. Din (1) şi (2) avem:

(3) $r=n(m-n)$. Dar $r=2013=3\cdot 11\cdot 61$. Deci $n(m-n)=3\cdot 11\cdot 61$.

Rezultă că avem triunghiuri care verifică ipoteza:

1) $n=1, m=2014, b=4028, c=4056195, a=4055197$;

2) $n=3, m=674, b=4044, c=454267, a=454285$

3) $n=11, m=194, b=4268, c=37515, a=37757$

4) $n=33, m=94, b=6204, c=7747, a=9925$

5) $n=61, m=94, b=11468, c=5115, a=12557$

6) $n=183, m=194, b=71004, c=4147, a=71125$

7) $n=671, m=674, b=904508, c=4035, a=904517$

8) $n=2013, m=2014, b=8108364, c=4027, a=8108365$.

Aplicaţia 13.

Arătaţi că pentru orice număr natural $n>12$ există un triunghi pitagoreic a cărui arie se află în intervalul $[n,2n]$(Analogie la *Postulatul lui Bertrand* care, afirmă că pentru $n>1$, în intervalul $(n,2n)$ există cel puţin un număr prim).

Soluţie. Dacă un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor $3k$ şi $4k$ atunci aria este $A=6k^2$.

Deoarece ,

$$\frac{6(k+1)^2}{6k^2}<2 \Rightarrow k>2,$$

avem că:

$$\forall\ n\in\left[6k^2, 6(k+1)^2-1\right] \text{ numărul } 6(k+1)^2 \in [n,2n].$$

Aşadar:

- Dacă $n \in [54,95] \Rightarrow 96 \in [n,2n]$;
- Dacă $n \in [96,149] \Rightarrow 150 \in [n,2n]$;
- Dacă $n \in [150,215] \Rightarrow 216 \in [n,2n]$;

şi aşa mai departe.

Pentru a completa demonstraţia observăm că:

- Dacă $n \in [13,23] \Rightarrow 24 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (6,8,10);
- Dacă $n \in [24,29] \Rightarrow 30 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (5,12,13);
- Dacă $n \in [30,53] \Rightarrow 54 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (9,12,15).

Aplicaţia 14.

Numim triunghi “*Super – Heron*” , un triunghi care are lungimile laturilor numere naturale consecutive şi aria tot număr natural.

Recent[1](2007) s-a demonstrat existenţa unui număr infinit de astfel de triunghiuri.

Confirmaţi sau infirmaţi existenţă patrulaterelor inscriptibele “*Super – Heron*” .

(*Indicaţie.* Folosiţi formula ariei patruterului inscriptibil dată de matematicianul indian *Brahamgupta* în sec.VII - D.H: $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, unde a,b,c,d sunt lungimile laturilor patrulaterului, iar s este semiperimetrul acestuia)

*Soluţie.*Deoarece a,b,c,d sunt numere naturale consecutive luăm:

$a = b-1, b = c, c = b+1$ şi $d = b+2$.

Din formula lui *Brahamgupta* avem: $A = \sqrt{(b+2)(b+1)(b)(b-1)}$.

$A \in N^* \Leftrightarrow (b+2)(b+1)b(b-1) = (b^2+b-1)^2 - 1$=pătrat perfect.

Imposibil deoarece nu există pătrate perfecte a căror diferenţă să fie egală cu 1.

În concluzie nu există patrulatere inscriptibile “*Super – Heron*”!

Remarca 1. În 1904, *Whitworth* şi *Biddle* au arătat că există numai cinci triunghiuri Heron cu proprietatea $A = P$, şi anume triunghiurile Heron cu laturile $(6,8,10),(5,12,13),(6,25,29),(7,15,20)$ şi $(9,10,17)$ -vezi $[1]$.

[1] http://www.math.twsu.edu/~richardson/heronian/heronian.html

Remarca 2. Deşi, în [2], *Goehl*, prezintă un algoritm general pentru determinarea tuturor triunghiurilor dreptunghice, de tip *Heron* cu proprietatea $A = mP$ ($m \in N$), problema se rezolvă în cazul general(pentru triunghiurile Heron, oarecare) abia peste mai mult de 20 de ani de către *Lubomir Markov*([4]), care, după puţin timp vine chiar cu o metodă nouă([5]).O metodă diferită pentru rezolvarea problemei $A = mP$, pentru triunghiurile *Heron* oarecare este prezentată de către *Jizhou Li* în [6].

BIBLIOGRAFIE:

[1] **L. Dickson**, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II, Chelsea Publish-ing Co, NY, 1992(reprint from 1923 edition).

[2] **J. Goehl**, *Area=k(perimeter)*, Math. Teach. 79(1985), pp.330-332.

[3].**John F. Goehl, Jr**., *Pythagorean Triangles with Square of Perimeter Equal to an Integer Multiple of Area*, Forum Geometricorum, Vol. 9 (2009), pp. 281-282.

[4] **L.Markov,** Pythagorean triples and the problem $A = mP$ for triangles, Math. Mag. 79 (2006), pp.114-121.

[5] **L.Markov**, Heronian Triangles Whose Areas are Integer Multiple of their Perimeters, Forum Geometricorum, (2007), pp.129-135.

[6]http://www.mathlab.mtu.edu/~jizhoul/Site/Home_Page_files/Goehl's%20Problem.pdf

[7] **K.R.S. Sastry**, *Heron Problems*, Math. And Comput. Ed., 29(1995), pp.192-202

[8] **K.R.S. Sastry**, *Heron Triangles: A New Perspective*, Aust. Math. Soc. Gazette, 26 (1999), pp. 160-168.

[9] **K.R.S. Sastry**, *Heron Triangles*, Math. And Comput. Ed., 35 (2001), pp.51-60

[10] **K.R.S. Sastry**, *A Heron Difference*, Crux mathematicorum with Mathematical Mayhem, 27 (2001), pp.22-26.

[11] **K.R.S. Sastry**, *If* (a,b,c) *is Heron, can* $(s-a,s-b,s-c)$ *also be Heron*?, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 28 (2002), pp.23-27.

[12] Problema E:14152, Gazeta Matematică – seria B, nr. 3/2011, p. 154.

[13] Problema VIII.293, Revista de Matematică din Timişoara, nr. 4/2010, p. 17.

[14] Problema S:E11.170, Gazeta Matematică-Supliment cu exerciții, Gazeta Matematică – seria B, nr. 5/2011, p. 7.

[15] Problema S:E11.163, Gazeta Matematică-Supliment cu exerciții, Gazeta Matematică – seria B, nr. 5/2011, p. 7.

[16] **Neculai Stanciu, Titu Zvonaru**, *O condiţie de existenţă a triunghiurilor dreptunghice de arie şi perimetru date*, Recreaţii Matematice, nr. 1/2012, pp.16-19.

[17] **Titu Zvonaru**, *Triunghiuri de arie şi perimetru date*, Articole şi note matematice, Vol. IV, Societatea de Ştiinţe Matematice din România – Filiala Râmnicu Sărat, Editura Rafet, 2011, pp.120-129.

TRIUNGHIURI DE ARIE ŞI PERIMETRU DATE.APLICAŢII.

NECULAI STANCIU, Buzău şi TITU ZVONARU, Comăneşti

Abstract. Success in problem solving requires effort. These are not routine exercises. They are problems whose solutions depend of trying something new(like following: Given a right-angled triangle with area A and perimeter P, what conditions on A and P guarantee that the triangle actually exists?).

Keywords: Heronian triangle, primitive triangle, right-angled triangles, area, perimeter.

MSC:51M16, 51M71.

Articolul este o continuare a lucrărilor [16,17] şi are ca scop prezentarea unui set de probleme reprezentative care au în ipoteză aria unui triunghi (A) şi perimetrul acestuia (P).

Mai mulţi autori au propus probleme care aveau ca date iniţiale A şi P, fără a se examina dacă triunghiul respectiv există în realitate (vezi $[12]$).

Se ştie că pentru un triunghi oarecare avem:

$$P^2 \geq 12\sqrt{3}\cdot A \Leftrightarrow A \leq \frac{P^2\sqrt{3}}{36} \qquad (1)$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Vom demonstra relaţia (1) folosind inegalitatea izoperimetrică.

Din inegalitatea izoperimetrică pentru poligoane rezultă că dintre toate poligoanele de perimetru dat şi acelaşi număr de laturi poligonul regulat are aria maximă, şi dual, dintre toate poligoanele de arie dată şi acelaşi număr de laturi poligonul regulat are perimetrul minim.Aşadar pentru triunghiuri avem:

$$\left.\begin{array}{l} A \leq A_3 = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{4}{l^2\sqrt{3}} \\ P \geq P_3 = 3l \Leftrightarrow P^2 \geq 9l^2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{P^2}{A} \geq 12\sqrt{3} \approx 20{,}785$$

O condiţie asemănătoare pentru existenţa triunghiurile dreptunghice am stabilit în [16], pornind de la următorul:

Exemplu. Calculaţi lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu $A = 8$ şi $P = 13$.

*Soluţie.*Este uşor de verificat că pentru $A = 8$, $P = 13$, relaţia (1) este adevărată. Prima idee ar fi să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} ab = 2A \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = P \end{cases}, \text{ unde } a, b \text{ sunt catetele triunghiului.}$$

Există însă şi o cale mai "frumoasă" (vezi [13]). Dacă c este ipotenuză, avem:

$$P-c=a+b \Leftrightarrow P^2-2Pc+c^2=a^2+2ab+b^2 \underset{ab=2A}{\overset{a^2+b^2=c^2}{=}} c^2+4A \Leftrightarrow P^2-4A=2Pc$$, adică

$$c=\frac{P^2-4A}{2P}.$$

În cazul nostru avem $c=\frac{137}{26}$; să calculăm totuşi şi lungimile catetelor din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} ab=16 \\ a+b=\frac{201}{26} \end{cases}$$

Obţinem ecuaţia:

$$26x^2-201x+416=0$$ cu soluţiile $x_{1,2}=\frac{201\pm i\sqrt{2863}}{52}$,

aşadar triunghiul considerat nu există!

În cazul unui triunghi dreptunghic condiţia de existenţă este:

$$P\geq 2(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{A} \Leftrightarrow P^2\geq 4(3+2\sqrt{2})\cdot A \Leftrightarrow A\leq \frac{P^2(3-2\sqrt{2})}{4} \qquad (*)$$

Deci:

$$\frac{P^2}{A}\geq 4(3+2\sqrt{2})\approx 23{,}314.$$

Întradevăr:

$$P-c=a+b \Leftrightarrow P^2-2Pc+c^2=a^2+2ab+b^2 \underset{ab=2A}{\overset{a^2+b^2=c^2}{=}} c^2+4A \Leftrightarrow P^2-4A=2Pc.$$

Rezultă:

$$c=\frac{P^2-4A}{2P}.$$

Din

$$a+b=P-c=P-\frac{P^2-4A}{2P}=\frac{P^2+4A}{2P} \Rightarrow b=\frac{P^2+4A}{2P}-a.$$

Apoi din

$$ab = 2A \Rightarrow a(\frac{P^2 + 4A}{2P} - a) = 2A \Rightarrow \frac{Pa^2}{2} - (\frac{P^2}{4} + A)a + AP = 0.$$

Dar, ultima ecuaţie are soluţii reale dacă:

$$\Delta_a \geq 0 \Leftrightarrow (\frac{P^2}{4} + A)^2 - 4 \cdot \frac{P}{2} \cdot A \cdot P \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{P^2}{4A}\right)^2 - 6\left(\frac{P^2}{4A}\right) + 1 \geq 0.$$

Rezolvând ultima inecuaţie obţinem:

$$P^2 \geq 4A(3 + 2\sqrt{2}) \text{ sau } P^2 \leq 4A(3 - 2\sqrt{2}),$$

echivalente cu

$$P \geq 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A} \text{ sau } P \leq 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{A}.$$

Aceste ultime condiţii trebuiesc corelate şi cu condiţia $P > 2\sqrt{A}$, de existenţă a ipotenuzei.Obţinem că triunghiul dreptunghic de arie A şi perimetru P există dacă şi numai dacă avem:

$$P \geq 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A} \Leftrightarrow A \leq \frac{P^2(3 - 2\sqrt{2})}{4} \Leftrightarrow \frac{A}{P^2} \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{P^2}{A} \geq 4(3 + 2\sqrt{2})$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este dreptunghic isoscel.

În continuare, vom prezenta un set de aplicaţii cu A şi P - pe care le considerăm utile (unde nu vom mai pune problema existenţei triunghiurilor aceasta fiind de cele mai multe ori evidentă).

Aplicaţia 1. (vezi $[3]$**)**

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice de arie A şi perimetru P cu lungimile laturilor a, b, c numere naturale şi cel mai mare divizor comun al lor $(a, b, c) = 1$ astfel încât $\frac{P^2}{A} \in N$.

*Soluţia1.*Fie $\frac{P^2}{A} = k \in N$.

Se ştie că

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2, m > n, (m, n) = 1, \text{ de paritate diferită.}$$

$$k = \frac{P^2}{A} = \frac{4m(m+n)}{n(m-n)} = \frac{4x(x+1)}{x-1}, \text{ unde } x = \frac{m}{n} \in Q_+^*.$$

$$k = \frac{4x(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - (k-4)x + k = 0.$$

Din

$$x = \frac{k-4 \pm \sqrt{(k-4)^2 - 16k}}{8} \in Q_+^*$$, rezultă că :

$\Delta = (k-4)^2 - 16k = (k-12)^2 - 128 =$ pătrat perfect.

Deci

$(k-12)^2 - 128 = d^2$, unde $d \in N$.

Se obţine :

$$(k-12-d)(k-12+d) = 128 = 2^7 \Rightarrow \begin{cases} k-12-d = 2^t \\ k-12+d = 2^{7-7} \end{cases}$$, unde $t \in \{1,2,3\}$.

Avem

$$x = \frac{k-4 \pm d}{8}.$$

Deci

$x = \frac{k-4+d}{8} = 2^{7-t} + 1$, sau , $x = \frac{k-4-d}{8} = \frac{2^t + 8}{8}$.

Din faptul că $(m,n) = 1$, de paritate diferită rezultă $x = \frac{2^t + 8}{8}$.

4) Pentru $t = 1$, avem:
$x = \frac{5}{4} \Rightarrow m = 5, n = 4 \Rightarrow a = 9, b = 40, c = 41 \Rightarrow A = 180, P = 90 \Rightarrow k = 45$;

5) Pentru $t = 2$, avem:
$x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 3, n = 2 \Rightarrow a = 15, b = 12, c = 13 \Rightarrow A = 30, P = 30 \Rightarrow k = 30$;

6) Pentru $t = 1$, avem:
$x = \frac{2}{1} \Rightarrow m = 2, n = 1 \Rightarrow a = 3, b = 4, c = 5 \Rightarrow A = 6, P = 12 \Rightarrow k = 24$

*Soluţia 2.*Fie $\frac{P^2}{A} = k \in N$.

Se ştie că $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2, m > n, (m,n) = 1$, de paritate diferită.

$$k = \frac{P^2}{A} = \frac{4m(m+n)}{n(m-n)} = 4 + \frac{4(m^2+n^2)}{n(m-n)}.$$

Deoarece $(m,n)=1$, n nu poate fi divizor al expresiei m^2+n^2, decât dacă avem posibilităţile:

1) $n = 1 \Rightarrow k = 4 + \frac{4m^2 - 4 + 8}{m-1} = 4m + 8 + \frac{8}{m-1}$ şi cum m este par deducem $m = 2$, adică $a = 3, b = 4, c = 5, A = 6, P = 12, k = 24$.

2) $n = 2 \Rightarrow k = 4 + \frac{2m^2 - 8 + 16}{m-2} = 2m + 8 + \frac{16}{m-2}$ şi cum m este impar deducem $m = 3$, adică $a = 5, b = 12, c = 13, A = 30, P = 30, k = 30$.

3) $n = 4 \Rightarrow k = 4 + \frac{m^2 - 16 + 32}{m-4} = m + 8 + \frac{32}{m-4}$ şi cum m este impar deducem $m = 5$, adică $a = 9, b = 40, c = 41, A = 180, P = 90, k = 45$.

Rezultate deosebite, în ceea ce priveşte triunghiurile *Heron* a stabilit matematicianul indian *K.R.S. Sastry* în [7], [8], [9], [10], şi [11].

Aplicaţia 2.

Determinaţi triunghiul cu dimensiunile maxime, numere naturale, a căror sumă este număr par pentru care aria este tot număr natural şi este egală cu perimetrul acestuia.

Soluţie. Notăm cu a,b,c dimensiunile laturilor, cu A aria , cu P perimetrul, şi cu s semiperimetrul triunghiului.

Din ipoteză avem

$s = \frac{a+b+c}{2} \in N^*$. Cum $s > a, s > b, s > c$ fără a pierde din generalitate presupunem că $\exists m \geq 1, m \in N$ a.î. $s = c + m$.

Din

$$\frac{a+b+c}{2} = c + m \Rightarrow c = a + b - 2m \qquad (1)$$

Apoi din $P = 2(a+b-m)$, $s = a+b-m$ şi formula lui *Heron* avem:

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = (a+b-m)(b-m)(a-m)m \qquad (2)$$

Din ipoteza $A = P$ şi relaţia (2) rezultă :

$$A^2 = P^2 \Leftrightarrow (a+b-m)(b-m)(a-m)m = 4(a+b-m)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = m + \frac{4m}{am - m^2 - 4}.$$

Deci dimensiunile sunt maxime pentru $am - m^2 - 4 = 1 \Leftrightarrow m(a-m) = 5$.

Avem două cazuri:

1) $\begin{cases} m = 5 \\ a - m = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 29, c = 25$;

2) $\begin{cases} m = 1 \\ a - m = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 25, c = 29$.

Rezultă că triunghiul căutat are dimensiunile (6,25,29) iar $A = P = 60$.

Aplicaţia 3.

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care au:

a) aria egală cu 84 unităţi de arie;

b) perimetrul egal cu 24 unităţi de lungime.

*Soluţie.*Considerăm lungimile laturilor a, b şi c.

Avem

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (*) \begin{cases} a = x^2 + y^2 \\ c = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \\ x > y \end{cases} ; (x, y) \in N \times N.$$

a) $A = \dfrac{bc}{2} = xy(x^2 - y^2) = xy(x+y)(x-y) > y \cdot y \cdot y \cdot 1 \Rightarrow y^3 < A$

(1) $84 = xy(x+y)(x-y) \Rightarrow y < 5$.Singura soluţie în mulţimea numerelor naturale a ecuaţiei (1) este $x = 4; y = 3 \overset{(*)}{\Rightarrow} a = 25; b = 7; c = 24.$

b) $P = a + b + c = 2x(x+y)$

(2) $x(x+y)=12$. Singura soluţie în mulţimea numerelor naturale a ecuaţiei (1) este:

$x=3; y=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} a=10; b=6; c=8.$

Aplicaţia 4.

Determinaţi toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale, care au aria egală cu semiperimetrul.

Soluţie. Fără să pierdem generalitatea presupunem $a \le b \le c$.

Avem $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, iar din $A=p$, rezultă:

$$(1)\ (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a+b+c).$$

Notăm :

$$x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c,$$

Atunci:

$$a=\frac{y+z}{2},\ b=\frac{z+x}{2},\ c=\frac{x+y}{2}.$$

Ecuaţia (1) devine:

$$(2)\ xyz=4(x+y+z).$$

Din cele de mai sus rezultă că x, y şi z sunt numere naturale pare cu $z \le y \le x$.

Atunci:

$$xyz=4(x+y+z) \le 12x \Rightarrow yz \le 12 \Rightarrow z=2.$$

Acum ecuaţia (2) devine

$$x=2+\frac{16}{2y-4},$$ care implică $y=4, x=6$.

Aceasta implică $a=3, b=4, c=5$.

Observaţie. Singurul triunghi care are lungimile laturilor numere naturale şi aria egală cu semiperimetrul este triunghiul dreptunghic cu lungimile laturilor: 3, 4 şi 5.

Aplicaţia 5. (vezi $[15]$)

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care au aria egală cu perimetrul.

*Soluţie.*Considerăm lungimile laturilor a,b şi c.

Avem

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (*)\begin{cases} a = x^2 + y^2 \\ c = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \\ x > y \end{cases};(x,y) \in N \times N .$$

$$A = \frac{bc}{2} = xy(x^2 - y^2) = xy(x+y)(x-y)$$

$$P = a + b + c = 2x(x+y)$$

$$A = P \Leftrightarrow 2x(x+y) = xy(x^2 - y^2) \Leftrightarrow y(x-y) = 2 \Rightarrow x = 3; y = 1 \text{ sau } x = 3, y = 2 .$$

Există deci două triunghiuri pentru care $A = P$ şi anume:

triunghiul $a = 10; b = 6; c = 8$, respectiv, triunghiul $a = 13; b = 12; c = 5$.

Aplicaţia 6.

Arătaţi că nu există triunghiuri *Heron* cu lungimile laturilor numere prime.

*Soluţie.*Din formula lui Heron avem că aria unui triunghi verifică: $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, unde $s = \frac{a+b+c}{2}$, iar a,b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului.

Dacă $p = a + b + c$, atuci formula lui *Heron* se rescrie astfel:

$16A^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$.

Deoarece membrul stâng este par, p trebuie să fie număr par.Există două posibilităţi:

Cazul I. Toate numerele a,b,c sunt pare.

Pentru că toate numerele a,b,c sunt pare şi prime, rezultă $a = b = c = 2$.

Deci triunghiul este echilateral cu aria $A = \sqrt{3}$.

Cazul II. Unul dintre numerele a, b, c este par iar celelalte două sunt impare.

Fără să pierdem din generalitate, presupunem că $a = 2$ iar b şi c sunt impare.

Dacă $b \neq c$, putem lua $b < c$.

Atunci $c - b \geq 2 \Leftrightarrow c \geq b + 2 = b + a$, ceea ce reprezintă o contradicţie cu inegalitatea triunghiului.

Deci, $b = c$ .Acum $p = 2 + 2b$, şi avem:

$$16A^2 = p(p-4)(p-2b)^2 = (2b+2)(2b-2)\cdot 4 \Leftrightarrow b^2 - A^2 = 1 \Leftrightarrow (b+A)(b-A) = 1.$$

Dar deoarece $b + A \geq 2$, ultima relaţie nu poate avea loc.

În concluzie, nu există triunghiuri *Heron* cu lungimile laturilor numere prime.

Aplicaţia 7.

Considerăm un triunghi dreptunghic cu perimetrul P şi aria A numere naturale.

Arătaţi că: ipotenuza este număr natural dacă şi numai dacă P este număr natural par şi $\frac{P}{2}$ divide pe A $\Leftrightarrow P \mid 2A$.

*Soluţie.*Din $c = \frac{P^2 - 4A}{2P} \in N \Rightarrow 2P \mid P^2 - 4A$.

Din $2P = par \Rightarrow P^2 - 4A = par \Rightarrow P = par$.

Dacă $P = 2k$ din (1)obţinem

$$c = \frac{k^2 - A}{k} = k - \frac{A}{k} \qquad (2)$$

Din $P = 2k$ şi $P = par \Rightarrow k \in N$.

Din relaţia (2) rezultă că $c \in N \Leftrightarrow k \mid A \Leftrightarrow \frac{P}{2} \mid A$, echivalent cu $P \mid 2A$.

Aplicaţia 8.

Determinaţi toate triunghiurile care au lungimile laturilor numere prime şi pătratul ariei număr natural.

*Soluţie.*Conform soluţiei aplicaţiei 6, triunghiul echilateral de latură 2 are pătratul ariei egal cu 3.

Observaţie. Soluţia de mai sus arată că - nu există triunghiuri cu lungimile laturilor numere prime şi aria număr natural.

Aplicaţia 9.

Determinaţi toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale(dintre care cel puţin unul este prim), semiperimetrul număr natural şi aria egală numeric cu perimetrul acestuia.

Soluţie. Notăm cu a,b,c lungimile laturilor, cu A aria, cu P perimetrul şi cu s semiperimetrul triunghiului. Presupunem că a este număr prim. Cum $s > c$, notăm cu $m \in N, m \geq 1$ astfel încât $s = c + m$. Din $\frac{a+b+c}{2} = c + m$ rezultă $c = a + b - 2m$, iar din $P = 2(a+b-m), s = a+b-m$

şi formula lui Heron avem:

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = (a+b-m)(b-m)(a-m)m$$

şi apoi

$$A^2 = P^2 \Leftrightarrow (a+b-m)(b-m)(a-m)m = 4(a+b-m)^2 \Leftrightarrow b = m + \frac{4a}{am - m^2 - 4}.$$

Cum a este prim, avem posibilităţile:

1) $am - m^2 - 4 = 1 \Rightarrow m(a-m) = 5 \Rightarrow (m=1, a=6), (m=5, a=6)$;

2) $am - m^2 - 4 = 2 \Rightarrow m(a-m) = 6 \Rightarrow (m=6, a=7, b=20, c=15)$,

$(m=3, a=5, b=13, c=12), (m=2, a=5, b=12, c=13), (m=1, a=7, b=15, c=20)$;

3) $am - m^2 - 4 = 4 \Rightarrow m(a-m) = 8 \Rightarrow (m=8, a=9)$,

$(m=4, a=6), (m=2, a=6), (m=1, a=9)$;

4) $am - m^2 - 4 = a \Rightarrow a = \frac{m^2+4}{m-1} = m + 1 + \frac{5}{m-1} \Rightarrow (m=2, a=8), (m=6, a=8)$;

5) $am - m^2 - 4 = 2a \Rightarrow a = \frac{m^2+4}{m-2} = m + 2 + \frac{8}{m-2} \Rightarrow (m=3, a=13, b=5, c=12)$,

$(m=4, a=10), (m=6, a=10), (m=10, a=13, b=12, c=5)$;

6) $am - m^2 - 4 = 4a \Rightarrow a = \frac{m^2+4}{m-4} = m + 4 + \frac{20}{m-4} \Rightarrow (m=5, a=29, b=6, c=25)$,

$(m=6, a=20), (m=8, a=17, b=9, c=10), (m=9, a=17, b=10, c=9), (m=14, a=20),$

$(m=24, a=29, b=25, c=6)$.

În concluzie, triunghiurile cerute au laturile $\{7,15,20\}, \{5,12,13\}, \{6,25,29\}, \{9,10,17\}$.

Aplicaţia 10.

Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale ştiind că o latură are lungimea 2011.

Soluţie. Se ştie că lungimile laturilor, numere naturale, ale unui triunghi dreptunghic sunt date de:

$(x^2-y^2)k$, $(2xy)k$ şi $(x^2+y^2)k$, unde x, y şi k sunt numere naturale nenule cu $x > y$.

Cum latura de lungime $(2xy)k$ este număr par, vom considera doar cazurile în care $(x^2-y^2)k$ =2011 şi $(x^2+y^2)k$ =2011.

Cazul 1. $(x^2-y^2)k$ =2011. Cum 2011 este număr prim rezultă $k=1$ sau $k=2011$.

Dacă $k=2011$, atunci $x^2-y^2=1$, aşa că $(x-y)(x+y)=1$, de unde $y=0$, contradicţie!(deoarece $y>0)$.

Dacă $k=1$, atunci $x^2-y^2=2011 \Rightarrow (x-y)(x+y)=2011 \Rightarrow x-y=1$ şi $x+y=2011$, de unde $x=1006$ şi $y=1005$.

Rezultă triunghiul dreptunghic cu lungimile laturilor $(2011, 2022060, 2022061)$.

Cazul 2. $(x^2+y^2)k$ =2011. Ca şi la cazul 1, avem $k=1$ ($k=2011$, nu este posibil deoarece $x=0$ sau $y=0$).

Aşadar, $x^2+y^2=2011$. Deoarece orice pătrat perfect este congruent cu 0 sau 1 modulo 4, iar $2011 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ rezultă că ecuaţia $x^2+y^2=2011$, nu are soluţii numere naturale.

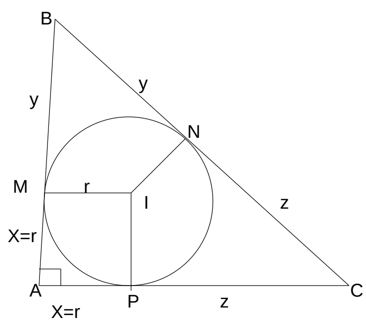
Deci, în acest caz nu exită niciun triunghi dreptunghic.

Prin urmare există un singur triunghi ale cărui laturi au lungimile: $(2011, 2022060, 2022061)$.

Aplicaţia 11. (vezi $[14]$).

c) Calculaţi lungimea razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic cu semiperimetrul p şi lungimea ipotenuzei i, unde $p > i$;

d) Arătaţi că în cazul în care triunghiul este pitagoreic(cu lungimile laturilor numere naturale) lungimea razei cercului înscris este număr natural.



Soluţie.

a) (1) $p = r + y + z$.Dar, (2) $i = y + z$.Din (1) şi (2) rezultă imediat că:

$$r = p - i.$$

b)Este suficient să considerăm triunghiul dreptunghic primitiv.În acest caz ipotenuza este număr impar, o catetă este număr par , iar cealaltă catetă este numă impar.Dacă notăm cu P perimetrul triunghiului avem că P este număr par.

De la punctul a) avem că :

$$(3)\ r = \frac{P}{2} - i$$

Din faptul că $P = par \Rightarrow (4)\frac{P}{2} \in N$.

Din ipoteză $(5)\, i \in N$.

Din (4) şi (5) rezultă $r \in N$.

Aplicaţia 12.

Determinaţi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic pentru care $r = 2013$ (r este raza cercului înscris) ştiind că acestea sunt numere naturale, prime între ele două câte două .

*Soluţie.*Din figura de la aplicaţia 11, avem:

$$\begin{cases} y+z=a \\ z+r=b \\ y+r=c \end{cases} \Rightarrow 2a+2r=a+b+c \Rightarrow (1) r=\frac{b+c-a}{2},$$

unde b, c sunt lungimile catetelor iar a este lungimea ipotenuzei.

Se ştie că (2) $b=2mn, c=m^2-n^2, a=m^2+n^2$, unde $(m,n)=1$. Din (1) şi (2) avem:

$$(3) \quad r=n(m-n). \text{Dar } r=2013=3\cdot 11\cdot 61. \text{Deci } n(m-n)=3\cdot 11\cdot 61.$$

Rezultă că avem triunghiuri care verifică ipoteza:

1) $n=1, m=2014, b=4028, c=4056195, a=4055197$;

2) $n=3, m=674, b=4044, c=454267, a=454285$

3) $n=11, m=194, b=4268, c=37515, a=37757$

4) $n=33, m=94, b=6204, c=7747, a=9925$

5) $n=61, m=94, b=11468, c=5115, a=12557$

6) $n=183, m=194, b=71004, c=4147, a=71125$

7) $n=671, m=674, b=904508, c=4035, a=904517$

8) $n=2013, m=2014, b=8108364, c=4027, a=8108365$.

Aplicaţia 13.

Arătaţi că pentru orice număr natural $n>12$ există un triunghi pitagoreic a cărui arie se află în intervalul $[n,2n]$(Analogie la *Postulatul lui Bertrand* care, afirmă că pentru $n>1$, în intervalul $(n,2n)$ există cel puţin un număr prim).

Soluţie. Dacă un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor $3k$ şi $4k$ atunci aria este $A=6k^2$.

Deoarece ,

$$\frac{6(k+1)^2}{6k^2}<2 \Rightarrow k>2,$$

avem că:

$$\forall\ n\in\left[6k^2, 6(k+1)^2-1\right] \text{ numărul } 6(k+1)^2 \in [n,2n].$$

Aşadar:

- Dacă $n \in [54,95] \Rightarrow 96 \in [n,2n]$;
- Dacă $n \in [96,149] \Rightarrow 150 \in [n,2n]$;
- Dacă $n \in [150,215] \Rightarrow 216 \in [n,2n]$;

şi aşa mai departe.

Pentru a completa demonstraţia observăm că:

- Dacă $n \in [13,23] \Rightarrow 24 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (6,8,10);
- Dacă $n \in [24,29] \Rightarrow 30 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (5,12,13);
- Dacă $n \in [30,53] \Rightarrow 54 \in [n,2n]$, ex.triunghiul cu laturile (9,12,15).

Aplicaţia 14.

Numim triunghi "*Super – Heron*" , un triunghi care are lungimile laturilor numere naturale consecutive şi aria tot număr natural.

Recent[2](2007) s-a demonstrat existenţa unui număr infinit de astfel de triunghiuri.

Confirmaţi sau infirmaţi existenţă patrulaterelor inscriptibele "*Super – Heron*" .

(*Indicaţie.* Folosiţi formula ariei patruterului inscriptibil dată de matematicianul indian *Brahamgupta* în sec.VII - D.H: $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, unde a, b, c, d sunt lungimile laturilor patrulaterului, iar s este semiperimetrul acestuia)

Soluţie. Deoarece a, b, c, d sunt numere naturale consecutive luăm:

$a = b-1, b = c, c = b+1$ şi $d = b+2$.

Din formula lui *Brahamgupta* avem: $A = \sqrt{(b+2)(b+1)(b)(b-1)}$.

$A \in N^* \Leftrightarrow (b+2)(b+1)b(b-1) = (b^2+b-1)^2 - 1$ =pătrat perfect.

Imposibil deoarece nu există pătrate perfecte a căror diferenţă să fie egală cu 1.

În concluzie nu există patrulatere inscriptibile "*Super – Heron*"!

Remarca 1. În 1904, *Whitworth* şi *Biddle* au arătat că există numai cinci triunghiuri Heron cu proprietatea $A = P$, şi anume triunghiurile Heron cu laturile $(6,8,10), (5,12,13), (6,25,29), (7,15,20)$ şi $(9,10,17)$ -vezi [1].

[2] http://www.math.twsu.edu/~richardson/heronian/heronian.html

Remarca 2. Deşi, în [2], *Goehl*, prezintă un algoritm general pentru determinarea tuturor triunghiurilor dreptunghice, de tip *Heron* cu proprietatea $A = mP$ ($m \in N$), problema se rezolvă în cazul general(pentru triunghiurile Heron, oarecare) abia peste mai mult de 20 de ani de către *Lubomir Markov*([4]), care, după puţin timp vine chiar cu o metodă nouă([5]).O metodă diferită pentru rezolvarea problemei $A = mP$, pentru triunghiurile *Heron* oarecare este prezentată de către *Jizhou Li* în [6].

BIBLIOGRAFIE:

[1] **L. Dickson**, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II, Chelsea Publish-ing Co, NY, 1992(reprint from 1923 edition).

[2] **J. Goehl**, *Area=k(perimeter)*, Math. Teach. 79(1985), pp.330-332.

[3].**John F. Goehl, Jr**., *Pythagorean Triangles with Square of Perimeter Equal to an Integer Multiple of Area*, Forum Geometricorum, Vol. 9 (2009), pp. 281-282.

[4] **L.Markov,** Pythagorean triples and the problem $A = mP$ for triangles, Math. Mag. 79 (2006), pp.114-121.

[5] **L.Markov**, Heronian Triangles Whose Areas are Integer Multiple of their Perimeters, Forum Geometricorum, (2007), pp.129-135.

[6]http://www.mathlab.mtu.edu/~jizhoul/Site/Home_Page_files/Goehl's%20Problem.pdf

[7] **K.R.S. Sastry**, *Heron Problems*, Math. And Comput. Ed., 29(1995), pp.192-202

[8] **K.R.S. Sastry**, *Heron Triangles: A New Perspective*, Aust. Math. Soc. Gazette, 26 (1999), pp. 160-168.

[9] **K.R.S. Sastry**, *Heron Triangles*, Math. And Comput. Ed., 35 (2001), pp.51-60

[10] **K.R.S. Sastry**, *A Heron Difference*, Crux mathematicorum with Mathematical Mayhem, 27 (2001), pp.22-26.

[11] **K.R.S. Sastry**, *If* (a,b,c) *is Heron, can* $(s-a, s-b, s-c)$ *also be Heron*?, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 28 (2002), pp.23-27.

[12] Problema E:14152, Gazeta Matematică – seria B, nr. 3/2011, p. 154.

[13] Problema VIII.293, Revista de Matematică din Timişoara, nr. 4/2010, p. 17.

[14] Problema S:E11.170, Gazeta Matematică-Supliment cu exerciții, Gazeta Matematică – seria B, nr. 5/2011, p. 7.

[15] Problema S:E11.163, Gazeta Matematică-Supliment cu exerciții, Gazeta Matematică – seria B, nr. 5/2011, p. 7.

[16] **Neculai Stanciu, Titu Zvonaru**, *O condiţie de existenţă a triunghiurilor dreptunghice de arie şi perimetru date*, Recreaţii Matematice, nr. 1/2012, pp.16-19.

[17] **Titu Zvonaru**, *Triunghiuri de arie şi perimetru date*, Articole şi note matematice, Vol. IV, Societatea de Ştiinţe Matematice din România – Filiala Râmnicu Sărat, Editura Rafet, 2011, pp.120-129.

TEOREMA LUI SIMSON

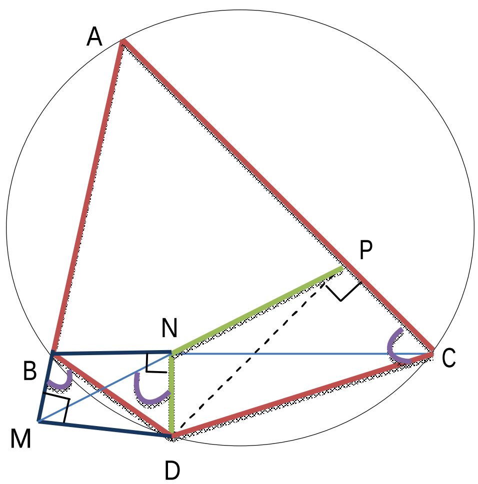
Profesor :ANGELICA UNGUREANU

Școala:GRUP ȘCOLAR "ALEXANDRU CEL BUN"-BOTOȘANI

TEOREMA LUI SIMSON :Proiecțiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile acestuia sunt coliniare.

Dreapta ce conține aceste puncte se numește *dreapta lui Simson.*Voi prezenta câteva metode de demonstrație a acestei teoreme, utilizând diferite metode de a arăta coliniaritatea a trei puncte in plan.

<u>METODA 1</u> (arătca$\sphericalangle(MND)si\ \sphericalangle(DNP)$ sunt suplementare)



Fie ΔABC ,D un punctpearcul BC.

Notez:$M = pr_{AB}D$,$N = pr_{BC}D$,$P = pr_{AC}D$.

Înpatrulaterulinscriptibil ABDC: $m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle ABD) = 180^0$.

Dar $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle MBD) = 180^0$, de unde $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle MBD)(1)$.

Înpatrulaterul BMDN: $m(\sphericalangle BMD) + m(\sphericalangle BND) = 180^0$, deci BMDN este inscriptibil.

Atunci: $m(\sphericalangle MBD) = m(\sphericalangle MND)$. (2)

ÎnpatrulaterulDNPC :$m(\sphericalangle DNC) = m(\sphericalangle DPC) = 90^0$ de unde DNPC este inscriptibil.

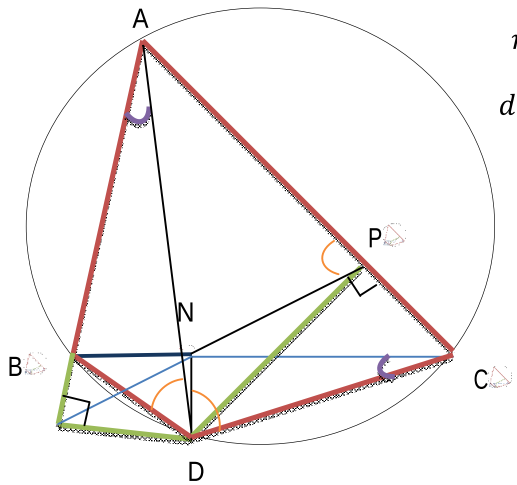
Atunci: $m(\sphericalangle PCD) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0$

Și cum P∈AC rezultă:$m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0$ (3)

Din relațiile (1), (2) si (3) rezultă : $m(\sphericalangle MND) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0$

Ceeacearatăcăpunctele M,Nși P suntcoliniare.

<u>METODA a 2-a</u> (aratca$\sphericalangle(APN)si\ \sphericalangle(APM)$ sunt egale)



În patrulaterul AMDP:

$m(\sphericalangle AMD) + m(\sphericalangle DPA) = 180^0*$

de unde AMDP este inscriptibil.

Atunci $m(\sphericalangle ADM) = m(\sphericalangle APM)$ (1)

În patrulaterul CDNP :

$m(\sphericalangle CPD) + m(\sphericalangle CND) = 180^0$

De unde CDNP esteinscriptibil.

Atunci:$m(\sphericalangle CDN) + m(\sphericalangle CPN) = 180^0$

și cum $m(\sphericalangle CPN) + m(\sphericalangle APN) = 180^0$

se obține: $m(\sphericalangle CDN) = m(\sphericalangle APN)$ (2)

În ΔAMD (dreptunghic in M) : $m(\sphericalangle ADM) + m(\sphericalangle DAM) = 90^0$.

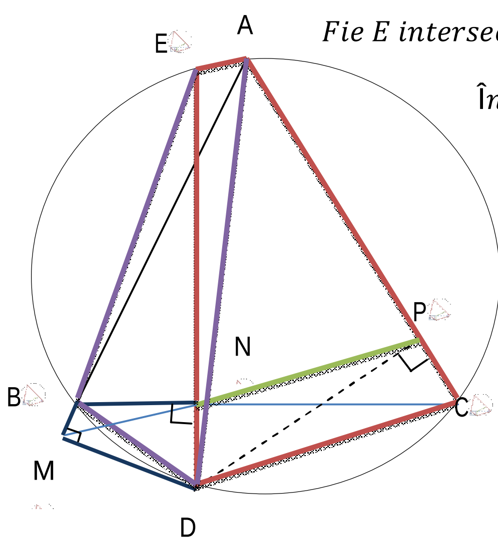
În ΔDNC (dreptunghic in N) : $m(\sphericalangle CDN) + m(\sphericalangle DCN) = 90^0$.

Dar : $m(\sphericalangle DCN) = m(\sphericalangle DAM)$ (în patrulaterulinscriptibil ABDC)

De unde se obține

: $m(\sphericalangle CDN) = m(\sphericalangle ADM) \overset{(2)}{\Rightarrow} m(\sphericalangle ADM) = m(\sphericalangle APN) \overset{(1)}{\Rightarrow} m(\sphericalangle APN) = m(\sphericalangle APM)$, ceea ce arată căpunctele M , N si P suntcoliniare.

<u>METODA a 3-a</u> (folosescaxiomalui Euclid)



Fie E intersecția dintre cerc si dreapta DN.

În patrulaterul inscriptibil BMDN:

$m(\sphericalangle BMN) = m(\sphericalangle BDN)$

și cum A, B, M coliniare:

$m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle BDN)$ (1)

În patrulaterul inscriptibil AEBD:

$m(\sphericalangle BDE) = m(\sphericalangle BAE)$

și cum D, N, E coliniare

$m(\sphericalangle BDN) = m(\sphericalangle MAE)$ (2)

$\xRightarrow{(1),(2)} m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle MAE) \Longrightarrow MN \parallel AE$ (3)

Înpatrulaterulinscriptibil ACDE: $m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle DEA) = 180^0$.

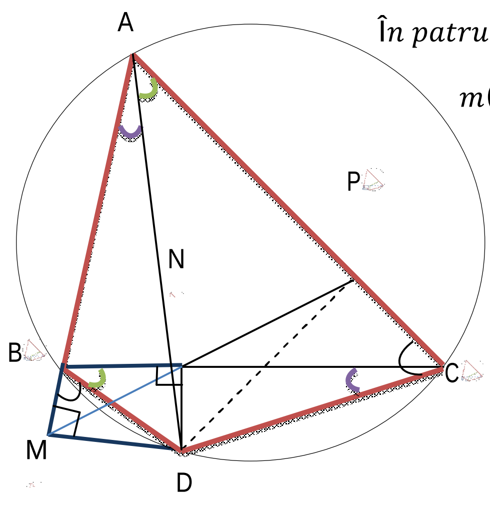
Dar $m(\sphericalangle PCD) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0$ (in patrulaterul inscriptibil PCDN)

Și cum $m(\sphericalangle DNP) + m(\sphericalangle PNE) = 180^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle PNE)$

Se obține : $m(\sphericalangle PNE) + m(\sphericalangle NEA) = 180^0$ de unde NP ∥ AE (4)

$\xRightarrow{(3),(4)}$punctele N , M si P suntcoliniare (conform algoritmuluilui Euclid)

METODA a 4-a (folosesc reciproca teoremei lui Menelaus)



În patrulaterul inscriptibil ABDC:

$m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta MAD \sim \Delta NCD\ (UU) \Rightarrow \frac{MA}{NC} = \frac{AD}{CD} = \frac{MD}{ND}$ (1)

În patrulaterul inscriptibil ABDC:

$m(\sphericalangle DBC) = m(\sphericalangle DAP) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DBN \sim \Delta DAP\ (UU) \Rightarrow$

$\frac{NB}{PA} = \frac{BD}{AD} = \frac{ND}{AD}$(2)

Înpatrulaterulinscriptibil ABDC: $m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle ABD) = 180^0$

Dar :$m(\sphericalangle DBM) + m(\sphericalangle ABD) = 180^0$

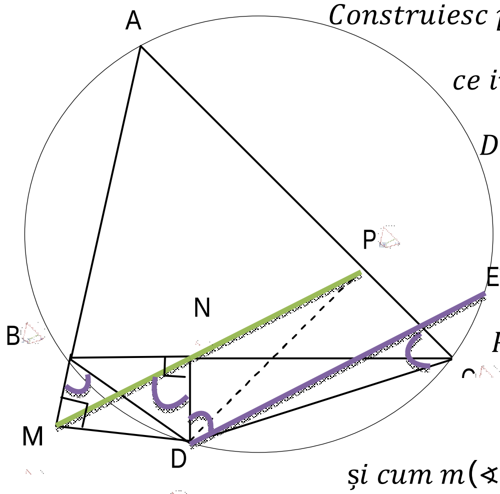
Atunci :$m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle DBM) \Rightarrow$ ΔPCD~ΔMBD⇒

$\Rightarrow \frac{PC}{MB} = \frac{CD}{BD} = \frac{DP}{DM}$(3)

$$\xRightarrow{(1),(2),(3)} \frac{MA}{NC} \cdot \frac{NB}{PA} \cdot \frac{PC}{MB} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{BD}{AD} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$$

⇒punctele M , N si P sunt coliniare (conform reciproceiteoremeilui Menelaus)

METODA a 5-a(folosesc axioma lui Euclid)



$Construiesc\ prin\ punctul\ D\ o\ paralelă\ la\ MN$

$ce\ intersectează\ cercul\ in\ punctul\ E$

$DE\ \parallel MN \Rightarrow\ m(\sphericalangle NDE) = m(\sphericalangle MND)$

$Patrulaterul\ MBND\ este\ inscriptibil\ \Rightarrow$

$m(\sphericalangle MND) = m(\sphericalangle MBD)$

$Patrulaterul\ ABDC\ este\ inscriptibil\ \Rightarrow$

$m(\sphericalangle DBA) + m(\sphericalangle DCA) = 180^0$

$și\ cum\ m(\sphericalangle MBD) + m(\sphericalangle DBA) = 180^0$

$Se\ obtine: m(\sphericalangle MBD) = m(\sphericalangle DCA)$

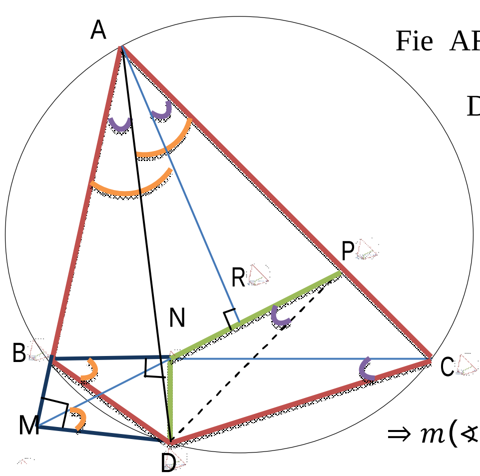
$\Rightarrow m(\sphericalangle NDE) = m(\sphericalangle DCA)$

ÎnpatrulaterulinscriptibilNDCP :$m(\sphericalangle DCP) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle NDE) + m(\sphericalangle DNP) = 180^0 \Rightarrow DE \parallel NP$

și cum DE ∥ MN rezultă căpuncteleM , N si P suntcoliniare (din axiomalui Euclid)

METODA a 6-a   (Folosescunicitateaperpendiculareidintr-un punctpe o dreapta.)



Fie AR ⊥ NP   . Arat ca AR ⊥ MN

DeoareceAR ⊥ NP   si DP ⊥AC⇒

$\Rightarrow m(\sphericalangle PAR) = m(\sphericalangle DPN)$

Patrulaterul DCPN esteinscriptibil⇒

$\Rightarrow m(\sphericalangle DPN) = m(\sphericalangle DCN)$

Patrulaterul ABDC esteinscriptibil ⇒

$\Rightarrow m(\sphericalangle DCN) = m(\sphericalangle DAM)$

De unde se obține: $m(\sphericalangle PAR) = m(\sphericalangle DAM) \Rightarrow m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle MAR)$

Patrulaterul ABDC inscriptibil⇒ $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CBD)$

Patrulaterul BMDN inscriptibil⇒ $m(\sphericalangle CBD) = m(\sphericalangle DMN)$

Deoarece DM ⊥ AB $\Rightarrow m(\sphericalangle DMN) + m(\sphericalangle NMB) = 90^0 \Rightarrow AR \perp MN$

Dar AR ⊥ NP şi cum perpendiculara din punctul N pe AR esteunică se obţinecăpunctele M , N şi P suntcoliniare.

Problema lunii iunie 2012

Autor: Prof. Gheorghe ROTARIU, Grupul Şcolar „Al. Vlahuţă" Şendriceni, judeţul Botoşani

Fie:

$$p_1 = \sin 6^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 78^\circ \cdot \sin 222^\circ \cdot \sin 246^\circ;$$
$$p_2 = \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 78^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot \cos 222^\circ.$$

1. Calculaţi:

$$\int_1^3 \frac{\ln(32 p_1 \cdot x + 2)}{x^2 + \frac{64\sqrt{3}}{3} p_2 \cdot x + 15} dx$$

2. Arătaţi că:

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} \cos^6 \theta_k \cdot \sin^8 \theta_k}{\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{\cos^8 \theta_k} + \frac{1}{\sin^8 \theta_k} \right)} \le \frac{6^3}{7^7}.$$

unde $\theta_k \in \{ 6^\circ, 30^\circ, 66^\circ, 78^\circ, 210^\circ, 222^\circ, 246^\circ \}$, $k = \overline{1,7}$, $\theta_i \ne \theta_j$, $\forall i \ne j$, $i, j = \overline{1,7}$

(θ_k ia pe rând una din cele şapte valori).

Va ramâne de rezolvat şi pentru luna iulie 2012, fiindcă deocamdata nu am primit nicio soluţie completă. Dacă reuşiti să o rezolvaţi scrieţi pe concurs@mateinfo.ro